Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 1, n° 1, 1984, p. 19-78. *Analyse non linéaire.*

Une théorie de Morse pour les systèmes hamiltoniens convexes

par

Ivar EKELAND
Ceremade, Université Paris-Dauphine, 75775 Paris Cedex 16, France

RÉSUMÉ. — On s'intéresse à des systèmes hamiltoniens convexes. On démontre que, sur une surface d'énergie donnée, ou bien les trajectoires fermées sont en nombre infini, ou bien elles vérifient une relation de résonance. On en déduit que génériquement, les trajectoires fermées sont en nombre infini. La démonstration repose sur une forme duale du principe de moindre action, sur la théorie de Morse, sur une formule d'itération pour l'index, et sur le théorème de transversalité de Thom.

ABSTRACT. — This paper deals with convex Hamiltonian systems. It is shown that, on any prescribed energy level, either the closed trajectories are infinitely many, or they fulfil a resonance condition. It follows that, generically, there are infinitely many closed trajectories on a prescribed energy level. A dual form of the least action principle, Morse theory, an iteration formula for the index, and Thom's transversality theorem, are used to obtain these results.

AMS (MOS) Subject classification: 34 C 15, 34 D 05, 49 A 10, 49 F 15, 58 E 05.

Keywords: Hamiltonian systems, convexity, Morse index, closed trajectories, periodic solutions, transversality theory.

TABLE DES MATIÈRES

0. INTRODUCTION

Dans cet article, on s'intéresse aux équations de Hamilton :

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}(p, q) \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_i}(p, q) \end{aligned} \right. \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

où $\mathrm{H} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, tendant vers $+\infty$ quand $\| p \| + \| q \| \to \infty$. Plus précisément, on s'intéresse aux trajectoires du système (1) qui restent sur un niveau d'énergie donné, 1 par exemple :

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{H}(p(t), q(t)) = 1 \qquad \forall t$$

On désire savoir combien le problème (1) (2) possède de trajectoires fermées distinctes. En d'autres termes, combien le système (1) (2) a-t-il de solutions périodiques qui ne se ramènent pas l'une à l'autre par changement de phase ? Le meilleur résultat en ce sens est dû à Lasry et l'auteur, qui montrent que, moyennant une condition métrique sur l'hypersurface d'équation $\mathrm{H}(p, q) = 1$ dans $\mathbb{R}^{2n}$, le problème (1) (2) a au moins n trajectoires fermées.

Dans cet article, on démontre deux théorèmes :

THÉORÈME A. — Si $n \geqslant 3$, si le problème (1) (2) n'a qu'un nombre fini de trajectoires fermées, il existe entre elles une relation de résonance. ■

THÉORÈME B. — Si $n \geqslant 3$, pour presque tous les hamiltoniens convexes H, le problème (1) (2) a une infinité de trajectoires fermées. ■

Des énoncés précis sont donnés dans le courant de l'article : il s'agit des théorèmes 5.3 et 6.2.

L'auteur ne connaît pas d'analogue du théorème A dans la littérature. Certes, la notion de trajectoire résonante est tout à fait classique : elle apparaît lorsqu'on cherche à réduire un système hamiltonien, au voisinage d'un point fixe ou d'une orbite périodique, à une « forme normale ».

Nous renvoyons pour cela aux beaux livres d'Arnold ([*4*], appendice 7 et [*3*], chapitre 5), et aux références qu'ils contiennent aux travaux originaux de Poincaré [*26*] et de Birkhoff [*7*]. La notion de tore résonant est plus tardive, et est centrale pour le fameux théorème de Kolmogorov, Arnold et Moser (voir [*20*] pour des présentations approfondies).

Mais tous ces résultats classiques concernent des systèmes dépendant d'un petit paramètre ε, le système obtenu pour $\varepsilon = 0$ étant complètement intégrable. Il n'en est pas de même ici, où nous étudions un système non linéaire tout à fait général, qui peut être fort éloigné d'un système complètement intégrable.

Par ailleurs, la notion de « famille résonante » de trajectoires périodiques semble nouvelle. Si la famille se réduit à une seule trajectoire, elle se réduit bien sûr à la notion classique, c'est-à-dire que certains des exposants caractéristiques de la trajectoire considérée doivent être imaginaires purs, donc de la forme $\pm i\alpha_k$, $1 \leqslant k \leqslant p$, et satisfaire de manière non triviale une relation à coefficients entiers :

$$n_1\alpha_1 + \ldots + n_p\alpha_p = n_0, \qquad \text{où} \quad n_k \in \mathbb{Z}\,.$$

Dans le cas où la famille comprend plusieurs trajectoires, il faudra pondérer les exposants caractéristiques de chacune par un coefficient approprié (définition V.2). La condition de non-résonance sera alors une généralisation de la précédente aux exposants normalisés (définition V.3). Elle implique en particulier que chaque trajectoire de la famille est non-résonante au sens précédent.

Dans les systèmes linéaires à coefficients constants, obtenus à partir d'un hamiltonien quadratique défini positif, toute famille de n trajectoires fermées de même énergie est résonante. Ceci explique que certains de ces systèmes, de la forme

$$\mathrm{H}(p, q) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{2}\,(p_i^2 + q_i^2)$$

les ω_i étant linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, n'ont pas plus de n solutions périodiques sur chaque niveau d'énergie.

A. Weinstein m'a communiqué une interprétation géométrique du théorème A, dans le cas où le système serait complètement intégrable. Les trajectoires fermées apparaissent alors comme des tores invariants dégénérés. Si elles sont en nombre fini, aucun des autres tores ne peut être résonant. Ceci implique que les fréquences fondamentales sur chacun d'eux sont de la forme $\alpha\Omega$, où $\Omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur constant et $\alpha \in \mathbb{R}$ un facteur scalaire dépendant du tore. Le vecteur Ω transporte en quelque sorte les exposants caractéristiques d'une solution périodique sur l'autre.

Le théorème B se rapproche de résultats connus. Pugh et Robinson [*27*] ont démontré que, pour presque tout Hamiltonien H (convexe ou non) les trajectoires périodiques remplissent une partie dense de l'espace. Toutefois, le mot « presque tout » n'a pas le même sens dans ces deux résultats. Il est dans les deux cas à prendre au sens de Baire (vrai sur G_δ dense), mais pour Pugh et Robinson il s'agit exclusivement de la topologie C^2, tandis que pour le théorème B il s'agit de n'importe quelle topologie C^k, $3 \leqslant k \leqslant \infty$. Passer de la topologie C^2 à une topologie plus fine dans le théorème de Pugh et Robinson relève du « closing lemma », qui est une des difficultés majeures de la théorie des systèmes dynamiques.

Par ailleurs, le théorème de Birkhoff-Lewis (démonstration par Moser dans [*21*]) affirme en substance que si une orbite périodique est elliptique, c'est-à-dire si elle admet au moins un exposant caractéristique imaginaire pur et non nul, non résonante, et si elle satisfait une condition de non-dégénérescence portant sur les termes d'ordre supérieur, alors il existe une suite infinie de trajectoires fermées, de période de plus en plus grande, tendant vers la trajectoire considérée.

Pour démontrer l'existence d'une infinité d'orbites périodiques, il suffirait donc de démontrer l'existence d'une seule, pourvu qu'elle soit elliptique et non dégénérée au sens de Birkhoff-Lewis. Malheureusement, nous ne savons pas si le problème (1), (2) possède nécessairement une solution périodique elliptique, et le présent travail n'apporte pas de réponse à cette question.

Si on est dans la situation du théorème de Kolmogorov, Arnold et Moser, c'est-à-dire si le système (1) est proche d'un système complètement intégrable, on sait bien que les orbites elliptiques et hyperboliques coexistent, les unes n'apparaissant pas sans les autres. Plus généralement, on peut espérer étendre le récent travail de Ballmann, Thobergsson et Ziller [*5*] sur les géodésiques fermées au cas qui nous occupe, et démontrer l'existence d'une solution périodique elliptique moyennant des restrictions sur H''. Mais cela ne résoudrait pas la question de savoir s'il existe des systèmes hamiltoniens convexes sans orbites elliptiques.

Nous ne savons pas si l'hypothèse $n \geqslant 3$ est essentielle aux théorèmes A et B. Elle apparaît tardivement, dans la démonstration du théorème 5.3, pour éviter qu'une orbite hyperbolique ne puisse voir l'index de ses itérés croître de deux en deux, et garnir ainsi à elle seule les cases prévues par la théorie de Morse (théorème III.8). Bien entendu le cas $n = 1$ est trivial, ce qui ne laisse ouvert que le cas $n = 2$.

Le § I montre que le problème (1), (2) est de nature géométrique plutôt qu'analytique, puisqu'il ne dépend du Hamiltonien H que par l'intermédiaire de la surface de niveau $H(p, q) = 1$ dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Au § II, on se ramène à un Hamiltonien homogène. Cette réduction tout à fait classique, mais popularisée par Rabinowitz, est essentielle pour la suite des opérations. Elle permet de déplacer le problème, en imposant la période des trajectoires fermées plutôt que leur énergie. On peut alors limiter le cadre fonctionnel aux fonctions T-périodiques. Les itérés d'une même orbite T-périodique, c'est-à-dire les solutions kT-périodiques obtenues en la parcourant k fois, ne sont plus gênantes, mais sont remplacées par leurs homothétiques T-périodiques sur des niveaux d'énergie inférieurs.

Le § III est consacré à la théorie de Morse. Nous définissons l'index et la nullité d'une solution périodique du problème (1) (2), et nous montrons qu'il doit y avoir au moins une solution périodique pour chaque index pair.

Bott le premier [*9*], suivi par Duistermaat [*15*], a défini l'index d'une solution d'un système hamiltonien. Leur définition n'est pas la nôtre, et surtout, il ne semble pas qu'il s'agisse là d'un index de Morse, c'est-à-dire permettant d'aboutir à des résultats d'existence de solutions périodiques par le biais de relations de Morse. De tels résultats d'existence sont en tout cas absents de leurs articles.

Il n'en est pas de même des articles plus récents d'Amann et Zehnder [*2*], ou de Conley et Zehnder [*13*], qui utilisent l'un et l'autre l'index de Conley, qui est une extension de la théorie de Morse aux systèmes dynamiques. Ils obtiennent des résultats de multiplicité, le premier pour des systèmes asymptotiquement linéaires, le second pour des systèmes hamiltoniens non autonomes. Là encore, leur index n'est pas le nôtre : c'est que ces auteurs travaillent sur la fonctionnelle associée au principe de moindre action, alors que nous travaillons sur une fonctionnelle duale, introduite par [*11*] et [*12*].

Les avantages de cette approche sont multiples : la fonctionnelle duale est bornée inférieurement et vérifie la condition (C) de Palais-Smale, ce qui évite les réductions en dimension finie à la Liapounov-Schmidt. Malheureusement les insuffisances actuelles de la théorie de Morse en dimension infinie (que Struwe [*28*] a surmontées autrement) ont amené l'auteur à construire un modèle en dimension finie, dans la ligne de [*10*]. On remarquera la simplicité des relations de Morse obtenues à la fin du § III. Cette simplicité est due au cadre linéaire dans lequel on se place (la fonction étudiée est définie sur un espace vectoriel et tend vers $+\infty$ à l'infini), cadre qui fait défaut à l'étude des géodésiques fermées sur une variété riemannienne.

Au § IV, on compare l'index d'une trajectoire fermée à celui de ses itérées. Une étude de ce genre est évidemment centrale au problème des géodésiques fermées, et nous lui avons pris l'idée de départ, un lemme de décomposition dû à Bott (lemme IV.2). Là encore, les résultats obtenus sont difficilement comparables.

Au § V, nous définissons la résonance, et nous démontrons le théorème A. Cette démonstration sépare les orbites hyperboliques (pour lesquelles elle est simple) des orbites elliptiques (pour lesquelles elle est compliquée). On pourrait envisager une démonstration courte, basée sur l'alternative :

. ou bien toutes les trajectoires fermées sont hyperboliques, auquel cas elles sont automatiquement non résonantes, et on conclut aisément qu'il y en a une infinité,

. ou bien il y a au moins une trajectoire fermée elliptique non résonante, auquel cas on tenterait d'appliquer Birkhoff-Lewis pour conclure à l'existence d'une infinité de trajectoires fermées dans son voisinage.

Malheureusement, pour appliquer le théorème de Birkhoff-Lewis, la non-résonance ne suffit pas ; une condition de non-dégénérescence portant sur les termes d'ordre supérieur, doit être satisfaite. Peut-être découle-t-elle de la convexité du Hamiltonien H ? L'auteur en doute, et en tout cas a été incapable de le démontrer.

Le § VI démontre le théorème B : c'est une simple application du théorème de transversalité de Thom. Enfin, le § VII donne une application à l'étude de la stabilité, propose une conjecture.

L'auteur remercie A. Weinstein, G. Thorbergsson et un rapporteur anonyme pour leur intérêt et leurs critiques.

I. FORMULATION GÉOMÉTRIQUE

Considérons l'espace $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Il est muni de la structure euclidienne standard ; le produit intérieur de deux vecteurs ξ et ζ sera noté (ξ, ζ).

On le munit également de la structure symplectique standard. Il s'agit d'une 2-forme non dégénérée σ, définie par :

$$\sigma(\xi, \zeta) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i \zeta_{n+i} - \xi_{n+i} \zeta_i) \tag{1}$$

Introduisons la matrice $2n \times 2n$:

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

La structure symplectique est donnée par :

$$\sigma(\xi, \zeta) = (\xi, \mathrm{J}\zeta) \tag{3}$$

Considérons dans $\mathbb{R}^{2n}$ une hypersurface S, c'est-à-dire une sous-variété de dimension $(2n - 1)$ et de classe C^k, $k \geqslant 3$. Soit σ_S la 2-forme induite par σ sur S :

$$\sigma_S(x)(\xi, \zeta) = \sigma(\xi, \zeta) \qquad \forall x \in S, \qquad \xi, \zeta \in T_x S \tag{4}$$

Comme S est de dimension impaire, toutes les 2-formes sur S dégénèrent. Ceci signifie que le noyau Ker $\sigma_S(x)$, défini par :

$$\text{Ker } \sigma_S(x) = \{ \xi \in T_xS \mid \sigma_S(x)(\xi, \zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in T_xS \} . \tag{5}$$

est non-trivial quel que soit x dans S.

En fait, ce noyau est partout de dimension un. On voit immédiatement qu'il s'écrit :

$$\text{Ker } \sigma_S(x) = J(N_xS) \qquad \forall x \in S \tag{6}$$

où N_xS est l'espace normal à S en x :

$$N_xS = (T_xS)^{\perp} \tag{7}$$

On a bien $J(N_xS) \subset T_xS$, et on obtient ainsi un feuilletage de S. Les courbes intégrales sont appelées caractéristiques de σ sur S.

DÉFINITION 1. — Une courbe $x : \mathbb{R} \to S$, de classe C^1, est une *caractéristique* de σ sur S si elle vérifie :

$$\dot{x}(t) \in \text{Ker } \sigma_S(x(t)) \qquad \forall t \tag{8}$$

Dans toute la suite, S sera compacte, et nous nous intéresserons aux caractéristiques *fermées* sur S. Le mot « fermé » peut vouloir dire, soit que la trajectoire $\{ x(t) \mid t \in \mathbb{R} \}$ est topologiquement fermée dans S, soit que l'application $x : \mathbb{R} \to S$ est périodique. Comme S est compacte, ces deux interprétations sont équivalentes (voir [*25*]).

II. FORMULATION COMME ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

On suppose dorénavant que S est le bord d'un convexe compact C de $\mathbb{R}^{2n}$, d'intérieur non vide. En outre, S sera de classe C^k, avec $k \geqslant 3$, et de courbure gaussienne strictement positive.

Par translation, ce qui n'affecte pas les caractéristiques, on peut toujours se ramener au cas où :

$$0 \in \text{Int } (C) \tag{1}$$

Soit $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ une fonction qui soit C^k au voisinage de S et qui vérifie :

$$S = \{ x \mid H(x) = 1 \} \tag{2}$$

$$\forall x \in S, \qquad H'(x) \neq 0 \tag{3}$$

Trouver les caractéristiques fermées sur S revient à trouver les solutions périodiques du système hamiltonien $\dot{x} = JH'(x)$ sur le niveau $H = 1$.

Le problème se formule donc ainsi :

$$(4)\quad \begin{cases} \dot{x} = \mathrm{JH}'(x) \\ x(0) = x(\mathrm{T}) \\ \mathrm{H}(x) = 1 \end{cases}$$

Ici T, comme x, est une inconnue.

Dans cette formulation, nous sommes libres de choisir la fonction H, pourvu qu'elle vérifie (2) et (3).

DÉFINITION 1. — Nous dirons que le hamiltonien H : $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ est *fidèle* à S si :

$$(5)\qquad \mathrm{H}(\lambda x) = \varphi(\lambda)\mathrm{H}(x) \qquad \forall \lambda \geqslant 0, \qquad \forall x \in \mathrm{S}$$

où $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

$$(6)\qquad \varphi(0) = 0, \qquad \varphi(1) = 1, \qquad \varphi(t) = t^{3/2} \quad \text{pour} \quad t \geqslant 1$$

(7) φ est de classe C^{∞}, convexe, strictement croissante.

$$(8)\qquad \varphi'(0) = 0, \qquad \varphi''(0) > 0$$

(9) $t \to t[\varphi(t)]^{-1/2}$ est strictement croissante.

LEMME 2. — Donnons-nous un nombre $a > 15/4$. Alors il existe un hamiltonien fidèle H tel que $\varphi''(0) = a$. La fonction H est alors convexe, et de classe C^k sur $\mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\}$.

Démonstration. — Définissons la fonction $\tilde{\varphi}$ comme suit :

$$(10)\qquad \tilde{\varphi}(t) = t^{3/2} \qquad \text{pour} \quad t \geqslant \varepsilon$$

$$(11)\qquad \tilde{\varphi}(t) = \frac{m}{12}t^4 + \frac{r}{6}t^3 + \frac{a}{2}t^2 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < \varepsilon$$

La valeur du paramètre a étant imposée, cherchons à déterminer m, r et ε de manière à ce que la fonction φ ainsi définie soit de classe C^2. Le raccord au point $t = \varepsilon$ impose que :

$$(12)\qquad \begin{aligned} &\frac{m}{12}\varepsilon^4 + \frac{r}{6}\varepsilon^3 + \frac{a}{2}\varepsilon^2 = \varepsilon\sqrt{\varepsilon} \\ &\frac{m}{3}\varepsilon^3 + \frac{r}{2}\varepsilon^2 + a\varepsilon = \frac{3}{2}\sqrt{\varepsilon} \\ &m\varepsilon^2 + r\varepsilon + a = \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \end{aligned}$$

On multiplie la première équation par $12\varepsilon^{-2}$, la deuxième par $-6\varepsilon^{-1}$, et on les ajoute à la troisième, ce qui donne :

$$(13)\qquad a = \frac{15}{4}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

En utilisant cette valeur, on trouve :

$$m = \frac{9}{2}\frac{1}{\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}}, \qquad r = -\frac{15}{2}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} \tag{14}$$

L'équation (13) détermine ε ; les équations (14) donnent alors les valeurs de m et de r.

Si $\varepsilon \leqslant 1$, c'est-à-dire si $a \geqslant \frac{15}{4}$, il est clair que la fonction $\tilde{\varphi}$ est de classe C^2 et vérifie les conditions (6) et (8), avec $\varphi''(0) = a$.

Par ailleurs, on vérifie que :

$$\min \{ \tilde{\varphi}''(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon \} = \tilde{\varphi}''\left(\frac{5\varepsilon}{6}\right) = \frac{45}{72}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{15}$$

Ceci prouve que $\tilde{\varphi}''$ est strictement positive partout, et donc que $\tilde{\varphi}$ est convexe et strictement croissante.

Reste la condition (9). Elle est vérifiée sur l'intervalle $[\varepsilon, +\infty)$, où $\tilde{\varphi}(t) = t^{3/2}$. Calculons la dérivée de la fonction $t[\tilde{\varphi}(t)]^{-1/2}$ sur l'intervalle $[0, \varepsilon]$; elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
[t\tilde{\varphi}^{-1/2}]' &= \frac{1}{2\tilde{\varphi}^{3/2}}(2\tilde{\varphi} - t\tilde{\varphi}') \\
&= \frac{1}{2\tilde{\varphi}^{3/2}}\left(-\frac{m}{6}t - \frac{r}{6}\right)t^3 \\
&= \frac{1}{8\tilde{\varphi}^{3/2}}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\left(5 - 3\frac{t}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

$$> 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon \tag{16}$$

La fonction $t\tilde{\varphi}(t)^{-1/2}$ est bien strictement croissante. Les conditions (6) à (9) sont donc satisfaites, à l'exception de celle qui porte sur la régularité de la fonction $\tilde{\varphi}$: celle-ci est seulement C^2 au point $t = \varepsilon$.

On prend alors une suite φ_n de fonctions C^∞ telles que :

$$\| \varphi_n - \tilde{\varphi} \|_{C^2} \leqslant \frac{1}{n} \tag{17}$$

$$\varphi_n(t) = \tilde{\varphi}(t) \qquad \text{pour} \quad t \leqslant \varepsilon - \frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad t \geqslant \varepsilon + \frac{1}{n} \tag{18}$$

Comme $\tilde{\varphi}'' > 0$, $\tilde{\varphi}' > 0$ et $[t\tilde{\varphi}^{-1/2}]' > 0$, on aura, pour n assez grand :

$$\tilde{\varphi}_n''(t) > 0, \qquad \tilde{\varphi}_n'(t) > 0, \qquad [t\tilde{\varphi}_n(t)^{-1/2}] > 0 \tag{19}$$

La fonction $\varphi = \varphi_n$ vérifiera donc toutes les conditions (6) à (9).

Le hamiltonien H est alors défini par :

$$H(x) = \varphi \circ j(x) \tag{20}$$

$$j(x) = \inf \{ \lambda \mid x \in \lambda C \} \tag{21}$$

La fonction j (jauge du convexe C) est convexe sur $\mathbb{R}^{2n}$, et de classe C^k sur $\mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\}$. Comme φ est convexe croissante, et de classe C^∞, la fonction $H = \varphi \circ j$ sera convexe et C^k, sauf à l'origine. ■

Dans toute la suite, on prendra pour H un hamiltonien fidèle. Il ne sera pas C^2 à l'origine, à moins que S ne soit un ellipsoïde de centre 0. On peut toutefois préciser l'allure de H au voisinage de l'origine :

LEMME 3. — Soient r, R et γ trois nombres positifs tels que, pour tout $x \in S$:

$$r \leqslant \| x \| \leqslant R \tag{22}$$

$$\gamma \| y \|^2 \leqslant (j''(x)y, y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{2n} \tag{23}$$

où j est la jauge du convexe C. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \neq 0$ tel que $\| x \| \leqslant \varepsilon$, on ait :

$$\frac{a}{2R^2} \| x \|^2 \leqslant H(x) \leqslant \frac{a}{2r^2} \| x \|^2 \tag{24}$$

$$\frac{a}{2} \gamma \| y \|^2 \leqslant (H''(x)y, y) \tag{25}$$

Démonstration. — En confrontant les formules (21) et (22), on obtient :

$$\| x \| R^{-1} \leqslant j(x) \leqslant \| x \| r^{-1} \qquad \forall x \neq 0 \tag{26}$$

Comme $H = \varphi \circ j$, avec $\varphi''(0) = a$ et $\varphi'(0) = 0$, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{H(x)}{j(x)^2} = \frac{a}{2} \tag{27}$$

D'où l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\| x \| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \frac{a}{2R^2} \| x \|^2 \leqslant H(x) \leqslant \frac{a}{2r^2} \| x \|^2 \tag{28}$$

Par ailleurs, d'après la condition (9), la fonction $t \to t\varphi^{-1/2}$ est strictement croissante. L'expression $jH^{-1/2}$ doit donc croître avec j, de même que j^2/H, et le quotient H/j^2 doit décroître. D'où :

$$\frac{H(x)}{j(x)^2} \leqslant \lim_{j(x) \to 0} \frac{H(x)}{j(x)^2} \leqslant \frac{a}{2} \tag{29}$$

Pour l'inégalité (25), on procède de la même manière, en remarquant que $H''(\lambda x) = \varphi(\lambda)\lambda^{-2}H''(x)$ pour tout $x \in S$ et tout $\lambda > 0$. Tous les hamiltoniens fidèles ont même $H''(x)$ en chaque point $x \in S$. Cette matrice dépend uniquement de la courbure de S au point x, et est non dégénérée si la courbure totale est non nulle. On peut appeler $\gamma(x)$ sa plus petite valeur propre, et prendre pour γ la valeur minimum de $\gamma(x)$ pour $x \in S$. ∎

La définition d'un hamiltonien fidèle, et plus particulièrement la relation (5), assure que toutes les surfaces de niveau $H(x) = h$ sont homothétiques de S. Les caractéristiques sur différents niveaux se correspondent par homothétie.

LEMME 4. — La courbe $x(t)$ est une solution du problème :

$$\dot{x} = JH'(x), \qquad x(0) = x(T), \qquad H(x) = 1 \tag{30}$$

si et seulement si la courbe

$$x_h(t) = \varphi^{-1}(h)x\left(t\frac{h}{\varphi^{-1}(h)^2}\right) \tag{31}$$

est une solution du problème :

$$\dot{x}_h = JH'(x_h), \qquad x_h(0) = x_h(T_h), \qquad H(x_h) = h \tag{32}$$

où :

$$T_h = T\,\frac{\varphi^{-1}(h)^2}{h} \tag{33}$$

En outre, les solutions x et x_h ont les mêmes multiplicateurs caractéristiques.

Démonstration. — Il suffit de poser $y(t) = \lambda x(\mu t)$ et de déterminer λ et μ par les conditions $H(y) = h$ et $\dot{y} = JH'(y)$. La première donne :

$$h = H(\lambda x(\mu t)) = \varphi(\lambda) \tag{34}$$

D'où $\lambda = \varphi^{-1}(h)$. Pour la seconde, il faut commencer par prendre le gradient des deux membres de l'équation (5), ce qui donne :

$$H'(\lambda x) = \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda}\,H'(x) \qquad \forall x \in S \tag{35}$$

En reportant dans l'équation $\dot{y} = JH'(y)$, on tire $\mu = \varphi(\lambda)/\lambda^2$, d'où les formules (31) et (33).

En ce qui concerne les multiplicateurs caractéristiques de x et x_h, rappelons que ce sont les valeurs propres de $R(T)$ et $R_h(T_h)$ où R et R_h sont les résolvantes des équations linéarisées autour de x et x_h.

L'équation linéarisée autour de x s'écrit :

$$\dot{y} = JH''(x(t))y, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{36}$$

L'équation linéarisée autour de x_h s'écrit :

$$\dot{z} = JH''(x_h(t))z, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T_h \tag{37}$$

On vérifie comme ci-dessus que $H''(\lambda x) = \varphi(\lambda)\lambda^{-2}H(x)$. L'équation précédente devient :

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \frac{h}{\varphi^{-1}(h)^2}\,\mathrm{JH}''\left(x\left(t\frac{h}{\varphi^{-1}(h)^2}\right)\right)z(t) \\
&= \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_h}\,\mathrm{JH}''\left(x\left(t\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}_h}\right)\right)z(t)
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Le changement de variable $s = t\mathrm{T}\mathrm{T}_h^{-1}$ ramène l'équation (38) à l'équation (36); si $y(t)$ est solution de (36) sur $[0, \mathrm{T}]$, alors $z(t) = y(t\mathrm{T}\mathrm{T}_h^{-1})$ est solution de (38) sur $[0, \mathrm{T}_h]$, et réciproquement. Les applications :

$$
\mathrm{R}(\mathrm{T}) : y(0) \to y(\mathrm{T}) \tag{39}
$$

$$
\mathrm{R}_h(\mathrm{T}_h) : z(0) \to z(\mathrm{T}_h) \tag{40}
$$

coïncident donc, et leurs valeurs propres sont les mêmes. ■

On remarquera que, grâce à l'hypothèse (9), la fonction $\varphi^{-1}(h)h^{-1/2}$ est strictement croissante. Donc T_h croît strictement d'une limite T_0 à $+\infty$ quand h croît de 0 à l'infini.

Cette limite T_0 se calcule aisément :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_0 &= \lim_{h\to 0} \mathrm{T}\,\frac{\varphi^{-1}(h)^2}{h} \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \mathrm{T}\,\frac{h^2}{\varphi(h)} = \mathrm{T}\,\frac{2}{a}
\end{aligned}
$$

On est donc conduit au diagramme suivant :

$$
\begin{array}{c|ccccc}
h & 0 & \nearrow & 1 & \nearrow & +\infty \\
\hline
\mathrm{T}_h & \dfrac{2\mathrm{T}}{a} & \nearrow & \mathrm{T} & \nearrow & +\infty
\end{array}
\tag{42}
$$

On peut déduire de cette analyse que le système $\dot{x} = \mathrm{JH}'(x)$ n'a pas de solution de période arbitrairement petite. Plus précisément :

PROPOSITION 5. — Soit H un hamiltonien fidèle, avec $a = \varphi''(0)$ et r défini par (22). Si

$$
\mathrm{T} < \frac{2\pi}{a}r^2 \tag{43}
$$

le problème :

$$
\dot{x} = \mathrm{JH}'(x), \qquad x(0) = x(\mathrm{T}) \tag{44}
$$

n'a que la solution $x = 0$.

Démonstration. — Ceci découle de l'estimation (24) et d'un théorème de Croke-Weinstein ([*14*]; voir une démonstration simple dans [*6*]).

On en déduit une relation entre l'énergie h et la période T :

COROLLAIRE 6. — Posons $h = \mathrm{H}(x(t))$, où x vérifie (44). Alors :

$$h \leqslant \operatorname{Max}\left(1, \frac{\mathrm{T}}{\pi r^2}\right)^3 \tag{45}$$

Démonstration. — Si $h > 1$, la solution T-périodique sur le niveau h correspond à une solution $\mathrm{T}h^{-1/3}$-périodique sur le niveau 1 et à une solution de période voisine de $2\mathrm{T}h^{-1/3}a^{-1}$ sur des niveaux voisins de 0. La condition $2\mathrm{T}h^{-1/3}a^{-1} \geqslant 2\pi r^2 a^{-1}$ donne le résultat.

III. FORMULATION VARIATIONNELLE

Dans toute la suite, H sera un hamiltonien fidèle à S. On se donne un nombre $\mathrm{T} > 0$ et on recherche les solutions T-périodiques de l'équation $\dot{x} = \mathrm{JH}'(x)$. Ce problème s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathrm{JH}'(x) \\ x(0) = x(\mathrm{T}) \end{cases} \tag{1}$$

On introduit la fonction convexe conjuguée G de H, définie par :

$$\mathrm{G}(y) = \operatorname{Sup}\{(x, y) - \mathrm{H}(x) \mid x \in \mathbb{R}^{2n}\} = \{(x, y) - \mathrm{H}(x) \mid y = \mathrm{H}'(x)\} \tag{2}$$

Des hypothèses faites sur H (définition II.1 et lemme II.3) découlent certaines propriétés de G :

LEMME 1. — La fonction $\mathrm{G} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ est convexe, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{2n}$ et C^{k-1} sur $\mathbb{R}^{2n}\setminus\{0\}$. On a :

$$\mathrm{G}'(y) = x \Leftrightarrow y = \mathrm{H}'(x) \Rightarrow \mathrm{H}''(x)\mathrm{G}''(y) = \mathrm{I} \tag{3}$$

$$\mathrm{G}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{G}'(0) = 0 \tag{4}$$

$$\mathrm{G}(y) \geqslant \frac{r^2}{2a}\|y\|^2 \quad \forall y \tag{5}$$

$$\exists \eta > 0 : \quad \|y\| \leqslant \eta \Rightarrow \mathrm{G}(y) \leqslant \frac{\mathrm{R}^2}{2a}\|y\|^2 \tag{6}$$

$$\mathrm{G}(\lambda y) = \lambda^3 \mathrm{G}(y) \quad \forall \lambda \geqslant 1 \quad \forall y \in \mathrm{H}'(\mathrm{S}) \tag{7}$$

$$\mathrm{G}'(\lambda y) = \lambda^2 \mathrm{G}'(y) \quad \forall \lambda \geqslant 1 \quad \forall y \in \mathrm{H}'(\mathrm{S}) \tag{8}$$

$$\mathrm{G}''(\lambda y) = \lambda \mathrm{G}''(y) \quad \forall \lambda \geqslant 1 \quad \forall y \in \mathrm{H}'(\mathrm{S}) \tag{9}$$

$$\exists \eta > 0, \quad 0 < \|y\| < \eta \Rightarrow (\mathrm{G}''(y)z, z) \leqslant \frac{1}{2a\gamma}\|z\|^2 \tag{10}$$

Démonstration. — Ce sont, soit des propriétés classiques de la conjugaison (la formule (3) par exemple), soit des exercices sur la définition (2). On renvoie à [*18*] pour les détails. A titre d'exemple, démontrons la formule (7) ; les formules (8) et (9) en découlent par dérivation en y.

Soit $y \in H'(S)$. Il existe $x \in S$ tel que $y = H'(x)$, et l'on a $H(\lambda x) = \lambda^{3/2}H(x)$ pour tout $\lambda \geqslant 1$. On en tire $\lambda y = H'(\lambda^2 x)$, et donc :

$$
\begin{aligned}
G(\lambda y) &= \{ (\lambda y, z) - H(z) \mid H'(z) = y \} \\
&= (\lambda y, \lambda^2 x) - H(\lambda^2 x) \\
&= \lambda^3((y, x) - H(x)) \\
&= \lambda^3 G(y) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

■

On introduit alors l'espace de Sobolev :

$$
E = \{ y \in W^{1,3}([0, T]; \mathbb{R}^{2n}) \mid y(0) = y(T) \} \qquad (12)
$$

et la fonctionnelle $\phi : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$
\phi(y) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}(J\dot{y}, y) + G(-J\dot{y}) \right] dt \qquad (13)
$$

La fonctionnelle ϕ, duale du principe de moindre action, a été introduite dans l'article [*12*] (voir aussi [*11*]). On y démontre entre autres la :

PROPOSITION 2. — La fonction ϕ est de classe C^1 sur E. Si x est solution du problème (1), alors $\phi'(x) = 0$. Réciproquement, si $\phi'(y) = 0$ il existe un vecteur $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ et un seul tel que $x(t) = y(t) + \xi$ soit solution du problème (1).

Démonstration. — La fonction ϕ sur E est la somme d'une forme quadratique continue, donc C^∞, et de la fonctionnelle :

$$
\dot{y} \to \int_0^T G(-J\dot{y})dt \qquad (14)
$$

qui est C^1 puisque la fonction G est C^1 et satisfait les estimations (7) et (8) (voir [*18*], § X.4.3).

L'équation $\phi'(y) = 0$ se ramène aux équations d'Euler-Lagrange :

$$
\frac{d}{dt} JG'(-J\dot{y}) = J\dot{y} \qquad (15)
$$

D'où l'existence d'un $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que :

$$
G'(-J\dot{y}) = y + \xi \qquad (16)
$$

En utilisant la formule de réciprocité (3), ceci donne :

$$
-J\dot{y} = H'(y + \xi) \qquad (17)
$$

qui est l'équation désirée, avec $x = y + \xi$. Comme y est T-périodique, il en est de même pour x.

S'il y avait deux vecteurs ξ_1 et ξ_2 associés à un même y, et donnant naissance à deux solutions $x_1 = y + \xi_1$ et $x_2 = y + \xi_2$, on obtiendrait par soustraction :

$$0 = JH'(y + \xi_1) - JH'(y + \xi_2) \tag{18}$$

et donc, faisant le produit scalaire par $J(\xi_1 - \xi_2)$:

$$\begin{aligned} 0 &= (H'(y + \xi_1) - H'(y + \xi_2), \xi_1 - \xi_2) \\ &= (H''(y + t\xi_1 + (1 - t)\xi_2)(\xi_1 - \xi_2), (\xi_1 - \xi_2) \end{aligned} \tag{19}$$

pour un certain t entre 0 et 1. Puisque H″ est partout défini-positif, $\xi_1 = \xi_2$. ■

Les groupes $\mathbb{R}^{2n}$ et S^1 agissent sur E suivant les formules :

$$(\tau_\xi y)(t) = y(t) + \xi \quad , \qquad \xi \in \mathbb{R}^{2n} \tag{20}$$

$$(\sigma_\theta y)(t) = y(t + \theta T), \qquad \theta \in S^1 \tag{21}$$

La fonction ϕ est invariante par ces deux actions, et si y est un point critique de ϕ il en sera de même de $\tau_\xi y$ et $\sigma_\theta y$.

Il est commode de passer au quotient par l'action de $\mathbb{R}^{2n}$. Cela revient à prendre $\dot{y}$ comme unique variable, en oubliant y, qui n'est défini qu'à une translation τ_ξ près.

Considérons donc l'espace :

$$L_0^3(0, T; \mathbb{R}^{2n}) = \left\{ u \in L^3 \,\middle|\, \int_0^T u(t)dt = 0 \right\} \tag{22}$$

et la fonction $\psi : L_0^3(0, T) \to \mathbb{R}^{2n}$ définie par :

$$\psi(u) = \int_0^T \left[\frac{1}{2}(Ju, Mu) + G(-Ju) \right] dt \tag{23}$$

Ici Mu est l'unique primitive de u dont la moyenne s'annule :

$$\frac{d}{dt} Mu = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_0^T Mu(t)dt = 0 \tag{24}$$

PROPOSITION 3. — La fonction ψ est de classe C^1 sur $L_0^3(0, T)$. Si x est solution du problème (1), alors $u = \dot{x}$ est un point critique de ψ. Réciproquement, si u est un point critique de ψ, il existe une primitive x de u et une seule qui soit solution de (1).

Ceci n'est que la traduction de la proposition 2.

PROPOSITION 4. — La fonction ψ satisfait la condition (C) de Palais-Smale sur $L_0^3(0, T)$.

Démonstration. — Considérons une suite $u_n \in L_0^3(0, T)$ telle que :

$$\psi'(u_n) \to 0 \qquad \text{dans} \qquad (L_0^3)^* \tag{25}$$

$$|\psi(_n)| \leqslant C \tag{26}$$

Il s'agit d'extraire de u_n une sous-suite qui converge dans $L_0^3(0, T)$ vers un point critique de ψ.

Pour cela, il nous faut remarquer que, grâce à la condition (7), on a :

$$G(y) \geqslant m \| y \|^3 - r \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{2n} \tag{27}$$

où $m = \min \{ G(y) \mid y \in H'(S) \}$ et r est une certaine constante. En reportant cette inégalité dans l'expression (23) de ψ, on obtient :

$$\begin{aligned} \psi(u) &\geqslant \int_0^T \left[\frac{1}{2}(Ju, Mu) + m \| u \|^3 - r \right] dt \\ &\geqslant \int_0^T \frac{1}{2}(Ju, Mu)dt + m \| u \|_3^3 - rT \end{aligned} \tag{28}$$

Le premier terme est quadratique et continu. Il existe donc une autre constante b telle que :

$$\psi(u) \geqslant m \| u \|_3^3 - b \| u \|_3^2 - rT \tag{29}$$

L'hypothèse (26) nous permet alors d'affirmer que la suite u_n est bornée dans $L_0^3(0, T)$. Nous pouvons donc extraire une sous-suite v_n convergeant faiblement vers un certain v :

$$v_n \to v \quad \text{faiblement dans} \quad L_0^3(0, T) \tag{30}$$

On en déduit que Mv_n converge vers Mv, uniformément sur $[0, T]$.

Utilisons maintenant l'hypothèse (25). Elle s'écrit, pour la sous-suite v_n :

$$- JMv_n + JG'(- Jv_n) = \varepsilon_n + \xi_n \tag{31}$$

avec $\xi_n \in \mathbb{R}^{2n}$ et $\varepsilon_n \to 0$ dans $L^{3/2}$.

La condition (8) nous permet d'affirmer que :

$$| G'(y) | \leqslant m' \| y \|^2 + r', \qquad \forall y \in \mathbb{R}^{2n} \tag{32}$$

où $m' = \max \{ \| G'(y) \| \mid y \in H'(S) \}$ et r' est une certaine constante. La suite v_n étant bornée dans $L^3(0, T)$, on en déduit que la suite $G'(- Jv_n)$ est bornée dans $L^{3/2}(0, T)$.

Le premier membre de l'équation (31) est donc borné dans $L^{3/2}(0, T)$. On en déduit que la suite ξ_n doit être bornée dans $\mathbb{R}^{2n}$, et on peut donc, par extraction de sous-suite, se ramener au cas où elle converge :

$$\xi_n \to \xi \qquad \text{dans} \qquad \mathbb{R}^{2n} \tag{33}$$

L'équation (31) s'écrit encore, grâce à la formule de réciprocité (3) :

$$- Jv_n = H'(Mv_n - J\varepsilon_n - J\xi_n) . \tag{34}$$

Grâce à l'estimation (II.35), l'application non linéaire $x \to H' \circ x$ envoie $L^{3/2}(0, T)$ dans $L^3(0, T)$. D'après un théorème de Krasnoselski [*22*]; voir aussi [*18*], proposition IV.1.1), cela suffit pour qu'elle soit continue.

La parenthèse, dans l'équation (34), converge vers $Mv - J\xi$ dans $L^{3/2}(0, T)$. Le second membre converge donc vers $H'(Mv - J\xi)$ dans $L^3(0, T)$. Il doit en être de même du premier :

$$(35) \qquad -Jv_n \to H'(Mv - J\xi) \quad \text{dans} \quad L^3(0, T)$$

Or on savait déjà que v_n convergeait faiblement vers v. D'où, par unicité de la limite :

$$(36) \qquad -Jv = H'(Mv - J\xi)$$

Finalement $v_n \to v$ dans $L^3(0, T)$ et v, qui vérifie l'équation (36), doit être un point critique de ψ. ■

Soit u un point critique non trivial de ψ :

$$(37) \qquad \psi'(u) = 0 \quad \text{et} \quad u \neq 0$$

Il est facile de voir que u est de classe C^{k-1}, et que $u(t) \neq 0$ pour tout t. Comme la fonction G est C^2 sur $\mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$, et grâce à l'estimation (9), on peut montrer que l'application $v \to G' \circ v$ de $L^3(0, T)$ dans $L^{3/2}(0, T)$ est Gâteaux-différentiable au point u :

$$(38) \quad \lim_{s \to 0} s^{-1} \| G' \circ (u + sw) - G' \circ u - s(G'' \circ u)w \|_{3/2}$$
$$= \lim_{s \to 0} \left\{ \int_0^T \left| \frac{G'(u(t) + sw(t)) - G'(u(t))}{s} - G''(u(t))w(t) \right|^{3/2} dt \right\}^{2/3}$$
$$= \lim_{s \to 0} \left\{ \int_0^T | G''(u(t) + \theta(t)sw(t))w(t) - G''(u(t))w(t) |^{3/2} dt \right\}^{2/3}$$
$$\leqslant \lim_{s \to 0} \| G'' \circ (u + \theta sw) - G'' \circ u \|_3 \; \| w \|_3$$

avec $0 \leqslant \theta(t) \leqslant 1$, et en utilisant l'inégalité de Hölder. D'après le théorème de Krasnoselskii déjà cité, $G'' \circ (u + \theta sw) \to G'' \circ u$ dans $L^3(0, T)$ quand $s \to 0$, et les deux membres de l'expression tendent donc vers zéro.

Il faut remarquer que l'application $v \to G' \circ v$ ne saurait être C^1, car tout voisinage de u dans $L^3(0, T)$ contient une fonction qui s'annule sur un intervalle de longueur positive et G'' n'est pas défini en 0. Donc la fonction ϕ est deux fois Gâteaux-différentiable en u, mais non C^2.

On peut toutefois définir le *hessien* de ψ au point u. C'est la forme quadratique sur $L_0^3(0, T)$ donnée par :

$$(39) \qquad \frac{1}{2}(\psi''(u)w, w) = \int_0^T \frac{1}{2} [(Jw, Mw) - (JG''(-Ju)Jw, w)] dt$$

L'*index* de u est la dimension maximale d'un sous-espace sur lequel le hessien est défini négatif. La *nullité* de u est la dimension du noyau de $\psi''(u)$.

PROPOSITION 5. — L'index et la nullité d'un point critique $u \neq 0$ sont toujours finis. Ce sont respectivement l'index et la nullité de la forme quadratique $Q(u)$ sur $L_0^2(0, T)$ donnée par :

$$(40) \qquad Q(u)(w) = \int_0^T \frac{1}{2} [(Jw, Mw) - (JG''(-Ju)Jw, w)]dt$$

Démonstration. — On commence par se ramener de $L_0^3(0, T)$ à l'espace $L_0^2(0, T)$ défini par :

$$(41) \qquad u \in L_0^2(0, T) \Leftrightarrow u \in L^2(0, T) \quad \text{et} \quad \int_0^T u dt = 0$$

Il est clair que $L_0^3(0, T)$ est contenu dans $L_0^2(0, T)$, et donc que l'index de u est au plus égal à l'index de $Q(u)$.

Réciproquement, si l'index de $Q(u)$ est $\geqslant i$, il existera un sous-espace $F \subset L_0^2(0, T)$, de dimension i, tel que la restriction de $Q(u)$ à F soit définie négative. Il est alors facile d'approcher les fonctions de F par des fonctions C^∞, et d'obtenir un sous-espace $F' \subset L_0^3(0, T)$, de dimension i, sur lequel le hessien (39) sera défini négatif. Donc l'index de u sera aussi $\geqslant i$.

Quant à la nullité, il suffit de remarquer que le noyau des formes quadratiques (39) et (40) est constitué des fonctions v qui vérifient les équations :

$$(42) \qquad \int_0^T v(t)dt = 0$$

$$(43) \qquad JMv + JG''(-Ju)Jv = \xi \in \mathbb{R}^{2n}$$

Comme u est de classe C^k, avec $u(t) \neq 0$ pour tout t, la fonction $t \to G''(-Ju(t))$ est continue, et v est donc continue. Ainsi le noyau est constitué de fonctions continues, et est contenu dans $L_0^3(0, T)$ comme dans $L_0^2(0, T)$.

Reste à montrer que l'index est fini.

Écrivons $Q(u)$ sous la forme :

$$(44) \qquad Q(u)(v) = \frac{1}{2}(Kv, v) + \frac{1}{2}(Av, v),$$

où les opérateurs K et A de $L^2(0, T)$ dans lui-même sont donnés par :

$$(45) \qquad Kv = JMv$$

$$(46) \qquad Av(t) = -JG''(u(t))Jv(t) - \frac{1}{T}\int_0^T JG''(u)Jvdt$$

Il est clair que K et A sont autoadjoints, que K est compact, et que A est défini positif et inversible. L'équation :

$$(47) \qquad B^2 = A$$

définit donc un nouvel opérateur autoadjoint B, défini positif et inversible.

L'opérateur $B^{-1}KB^{-1}$, étant compact et autoadjoint, possède une base orthonormée de vecteurs propres e_i. Soient λ_i les valeurs propres correspondantes ; elles sont réelles et tendent vers zéro.

Posons $f_i = B^{-1}e_i$. Les f_i constituent une base de $L_0^2(0, T)$, et l'on a, en posant $v = \Sigma v^i f_i$:

$$\begin{aligned} Q(u)(v) &= \frac{1}{2}(Kv + Av, v) \\ &= \frac{1}{2}((B^{-1}KB^{-1} + I)Bv, Bv) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} v^i v^j ((B^{-1}KB^{-1} + I)e_i, e_j) \\ &= \frac{1}{2}\sum_i (v^i)^2(1 + \lambda_i) \end{aligned} \tag{48}$$

Comme $\lambda_i \to 0$, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de carrés négatifs : c'est l'index de $Q(u)$. ■

Nous avons omis de démontrer que la nullité était finie. Cela découlera du résultat suivant, beaucoup plus précis :

PROPOSITION 6. — Soit $u \neq 0$ un point critique de ψ sur $L_0^3(0, T)$ et x l'unique solution de $\dot{x} = JH'(x)$ telle que $\dot{x} = u$. La nullité de u est le nombre de solutions linéairement indépendantes du problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = JH''(x(t))y \\ y(0) = y(T) \end{array} \right. \tag{49}$$

Démonstration. — Reprenons les équations (42) et (43), caractérisant le noyau des formes quadratiques (39) et (40). On sait que u et x sont liés par la relation $G'(-Ju) = x$. La formule de réciprocité (3) permet alors de transformer l'équation (43) comme suit :

$$-Jv = H''(x)(Mv + J\xi) \tag{50}$$

Ceci signifie que $y = Mv + J\xi$ est une solution du problème (49). On vérifie aisément que le vecteur $M\xi$ est déterminé de manière unique, et donc que la relation $\dot{y} = v$ met en correspondance biunivoque les éléments du noyau avec les solutions de (49).

COROLLAIRE 7. — La nullité de u est au plus égale à $2n$ et au moins égale à 1.

Démonstration. — Les solutions du problème (49) forment un sous-espace de l'espace de toutes les solutions de l'équation différentielle linéaire $\dot{y} = JH''(x(t))y$, qui est de dimension $2n$.

Par ailleurs, le problème (49) a toujours la solution $y = \dot{x}$, puisque x est T-périodique. ■

Le fait que la nullité soit toujours $\geqslant 1$ n'est pas surprenant : il traduit l'invariance de la fonction ψ par l'action de S^1 :

$$\psi(\sigma_\theta u) = \psi(u) \qquad \forall \theta \in S^1 \tag{51}$$

Si $u \neq 0$ est un point critique de ψ, son orbite $\Sigma(u)$ sous l'action de S^1 est entièrement constituée de points critiques :

$$\Sigma(u) = \{ \sigma_\theta u \mid \theta \in S^1 \} \tag{52}$$

Comme u est de classe C^k, il en est de même de l'application $\theta \to \sigma_\theta u$, dont la dérivée n'est autre que $\sigma_\theta \dot{u} \neq 0$. Par ailleurs, on ne saurait avoir $\sigma_{\theta_1} u = \sigma_{\theta_2} u$ que si $(\theta_2 - \theta_1)T$ est une période de u. Soit T/p la période minimale de u. L'orbite $\Sigma(u)$ est l'image du cercle S^1/p dans $L_0^3(0, T)$ par une immersion de classe C^k. Ce sera donc une sous-variété de dimension *un*.

On appellera $\Sigma(u)$ une *orbite critique*. On dira qu'elle est *non dégénérée* si la nullité de chacun de ses points est égale à un.

L'origine, $u = 0$, est un point critique de nature différente. Il est invariant par l'action de S^1, et ne fait donc pas partie d'une orbite critique. La fonction ψ n'a pas de dérivée seconde en ce point. Donnons une condition suffisante pour que l'origine soit un point critique isolé.

LEMME 7. — Soit $\bar{T} > T$; on lui associe la fonctionnelle $\bar{\psi}$ sur $L_0^3(0, \bar{T})$ définie par

$$\bar{\psi}(u) = \int_0^{\bar{T}} \left[\frac{1}{2}(Ju, Mu) + G(-Ju) \right] dt \tag{53}$$

Si les orbites critiques de $\bar{\psi}$ sont toutes non dégénérées, l'origine sera un point critique isolé de ψ.

Démonstration. — Supposons que l'origine n'est pas un point critique isolé de ψ. Il existe alors une suite $u_n \to 0$ dans $L_0^3(0, T)$ de points critiques de ψ, à laquelle correspond par $\dot{x}_n = u_n$ une suite $x_n \to 0$ de solutions T-périodiques de $\dot{x} = JH'(x)$.

D'après le paragraphe II, particulièrement le tableau (42), les x_n sont homothétiques de solutions $Ta/2$-périodiques dont le niveau tend vers 1. Une seconde homothétie pour ramener la période à $\bar{T}$, et on trouve que les x_n sont homothétiques de solutions y_n, de période $\bar{T}$ et de niveau :

$$H(y_n) \to h, \qquad \text{où} \qquad \frac{\varphi^{-1}(h)^2}{h} = \frac{\bar{T}}{T}\frac{2}{a} > \frac{2}{a} \tag{54}$$

Donc $h > 0$. Les y_n sont deux à deux distinctes puisque les x_n le sont. Par compacité, on voit facilement que y_n converge uniformément vers un certain y, qui vérifie :

$$\dot{y} = JH'(x), \qquad y(0) = y(\bar{T}), \qquad H(y) = h. \tag{55}$$

Donc $\dot{y} = v \neq 0$ est un point critique de $\overline{\psi}$, ainsi que les $v_n = \dot{y}_n$. Comme les v_n convergent vers v, ce dernier n'est pas un point critique isolé, et doit donc être dégénéré. ■

Nous arrivons maintenant au résultat principal.

THÉORÈME 8. — Supposons que les orbites critiques de ψ soient toutes non dégénérées, et que l'origine soit un point critique isolé. Alors ψ a au moins une orbite critique de chaque index pair plus petit que

$$2n\mathrm{E}\left(a \frac{\mathrm{T}}{2\pi} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{\mathrm{R}^2}, \gamma \right) \right).$$

Ici $\mathrm{E}(\alpha)$ désigne la partie entière du réel α.

La démonstration comporte deux étapes : une réduction à la dimension finie, puis une utilisation de la théorie de Morse en dimension finie. Des difficultés techniques, en particulier le fait que la fonction ψ n'est nulle part C^2, empêchent de travailler directement en dimension infinie.

LEMME 9. — Associons à $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ et $\varepsilon > 0$ le problème

$$(\mathscr{P}_{\varepsilon,\xi}) \quad \begin{cases} \operatorname{Min} \displaystyle\int_0^\varepsilon \left[\frac{1}{2}(\mathrm{J}u, \mathrm{M}_\varepsilon u) + \mathrm{G}(-\,\mathrm{J}u) \right] dt \\ u \in \mathrm{L}^2(0, \varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \displaystyle\int_0^\varepsilon u(t)dt = \xi \end{cases}$$

où

$$\mathrm{M}_\varepsilon u(t) = \int_0^t u(s)ds\,.$$

Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ le problème $(\mathscr{P}_{\varepsilon,\xi})$ ait une solution unique $u(\varepsilon, \xi)$, de classe C^{k-1} en t. On a $u(\varepsilon, 0) = 0$ pour tout ε, et si $\xi \neq 0$ on a $u(\varepsilon, \xi)(t) \neq 0$ pour tout t.

Démonstration. — Il ressort du lemme 1 que l'on peut trouver une constante $c > 0$ telle que :

$$(56) \qquad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{2n}, \qquad (\mathrm{G}'(y_1) - \mathrm{G}'(y_2), \quad y_1 - y_2) \geqslant c \,\|\, y_1 - y_2 \,\|^2$$

Notons $\psi_\varepsilon(u)$ l'intégrale à minimiser dans $(\mathscr{P}_{\varepsilon,\xi})$. Quels que soient u_1 et u_2, on a :

$$(57) \quad (\psi'_\varepsilon(u_1) - \psi'_\varepsilon(u_2), u_1 - u_2)_2 = (\mathrm{M}_\varepsilon u_1 - \mathrm{M}_\varepsilon u_2, \mathrm{J}u_1 - \mathrm{J}u_2)_2 + \\ + \int_0^\varepsilon (\mathrm{G}'(-\mathrm{J}u_1) + \mathrm{G}'(-\mathrm{J}u_2), \; -\mathrm{J}u_1 + \mathrm{J}u_2)dt$$

On a $\| M_\varepsilon u \|_2 \leqslant \varepsilon \| u \|_2/\sqrt{2}$ d'après Cauchy-Schwartz. On en tire :

$$(\psi'_\varepsilon(u_1) - \psi'_\varepsilon(u_2), u_1 - u_2)_2 \geqslant \left(c - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right) \| u_1 - u_2 \|_2^2 \tag{58}$$

Donc ψ_ε est strictement convexe dès que $\varepsilon < c\sqrt{2}$.

Il est facile de voir que ψ_ε est continue, C^1 même, et que $\psi_\varepsilon(u) \to +\infty$ quand $\| u \| \to \infty$.

Appelons F le sous-espace affine de $L^2(0, \varepsilon)$ défini par l'équation $\int_0^\varepsilon u = \xi$. Il est de codimension finie, donc fermé. La fonction ψ_ε doit atteindre son minimum sur F en un point unique $u(\varepsilon, \xi)$, et la restriction de ψ_ε à F ne saurait avoir d'autre point critique.

Au point $u(\varepsilon, \xi)$, ψ_ε doit posséder un sous-gradient orthogonal à F_ξ. Il faut noter que l'opérateur JM_ε n'est pas autoadjoint, et que le sous-différentiel de ψ_ε est donné par la formule :

$$\partial\psi_\varepsilon(u) = - JM_\varepsilon u + \frac{1}{2} J \int_0^T u dt + J\partial G(- Ju) \tag{59}$$

L'espace normal à F dans L^2 est l'espace des fonctions constantes. Ainsi, $u(\varepsilon, \xi)$ doit vérifier l'équation :

$$- JM_\varepsilon u + \frac{1}{2} J\zeta + G'(- Ju) = \zeta \tag{60}$$

pour une certaine constante $\zeta \in \mathbb{R}^{2n}$. On a donc $u(\varepsilon, \xi) = \dot{x}$, où x est une solution de $\dot{x} = JH'(x)$. D'où le résultat ■

Soit N un entier tel que $TN^{-1} < \varepsilon_0$. Posons $\varepsilon = TN^{-1}$.

Soit $(\mathbb{R}^{2n})_0^N = \left\{ (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in (\mathbb{R}^{2n})^N \,\middle|\, \sum_{i=1}^N \xi_i = 0 \right\}$.

Soit $\Omega = \{ (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in (\mathbb{R}^{2n})_0^N \mid \xi_i \neq 0, \forall i \}$.

Soit $p_N : L_0^3(0, T) \to (\mathbb{R}^{2n})_0^N$ l'application définie par :

$$p_N u = \left(\int_0^\varepsilon u dt, \int_\varepsilon^{2\varepsilon} u dt, \ldots, \int_{(N-1)\varepsilon}^T u dt \right). \tag{61}$$

Soit $r_N : (\mathbb{R}^{2n})_0^N \to L_0^3(0, T)$ l'application définie par :

$$\begin{cases} r_N(\xi_1, \ldots, \xi_N)(t) = u(\varepsilon, \xi_k)(t + (k-1)\varepsilon) \\ \text{sur l'intervalle } (k-1)\varepsilon \leqslant t \leqslant k\varepsilon \end{cases} \tag{62}$$

La fonction $r_N(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ sera C^{k-1} sur chaque intervalle $[k\varepsilon, (k+1)\varepsilon]$, et en général discontinue aux points k_ε.

LEMME 10. — La fonction $\psi \circ r_N$ est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}^{2n})_0^N$ et C^3 sur Ω.

Si $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \neq 0$ est un point critique de $\psi \circ r_N$, alors $r_N(\xi_1, \ldots, \xi_N) \neq 0$ est un point critique de ψ sur $L_0^3(0, T)$. Réciproquement, si $u \neq 0$ est un point critique de ψ, alors $p_N u$ appartient à Ω et est un point critique de $\psi \circ r_N$.

Démonstration. — Par abus de notation, nous désignerons par r_N l'application de $(\mathbb{R}^{2n})^N$ dans $L^3(0, T)$ définie par les formules (62). Nous cherchons une expression explicite de $\psi \circ r_N$.

Soit $u = r_N(\xi_1, \ldots, \xi_N)$. Notons $M_T u = \int_0^t u(s)ds$. Remplacer Mu par $M_T u$ dans l'expression (23) pour $\psi(u)$ ne change pas sa valeur. On a :

$$(64) \quad \int_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} \left[\frac{1}{2}(Ju, M_T u) + G(-Ju)\right]dt = \\ = \int_0^{\varepsilon} \left[\frac{1}{2}(Ju_k, M_\varepsilon u_k) + G(-Ju_k)\right]dt + \frac{1}{2}(J\xi_k, \delta_k)$$

avec :

$$(65) \qquad u_k(t) = u(t + (k-1)\varepsilon)$$

$$(65\ bis) \qquad \xi_k = \int_0^{\varepsilon} u_k dt = \int_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} u dt$$

$$(65\ ter) \qquad \delta_k = M_T u - M_\varepsilon u_k = \xi_1 + \ldots + \xi_{k-1}$$

L'intégrale qui figure dans le membre de droite de l'expression (64) est le minimum réalisé dans le problème $(\mathscr{P}_{\varepsilon,\xi})$: notons le $V(\xi)$. Cette fonction est bien connue en analyse convexe (fonction de performance). On sait qu'elle est convexe, continue sur $\mathbb{R}^{2n}$, et que son sous-différentiel $\partial V(\xi)$ n'est autre que l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange associés à la contrainte $\int u = \xi$ dans le problème $(\mathscr{P}_{\varepsilon,\xi})$. Dans le cas présent, le multiplicateur de Lagrange est le vecteur $\zeta \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que :

$$(66) \qquad -JM_\varepsilon u + \frac{1}{2}J\xi + JG'(-Ju) = \zeta \qquad \text{sur} \qquad [0, \varepsilon]$$

On vérifie qu'il est unique. La fonction V est donc C^1 sur $\mathbb{R}^{2n}$, avec $V'(\xi) = \zeta$. On obtient ainsi l'expression cherchée pour $\psi \circ r_N$:

$$(67) \qquad \psi \circ r_N(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \sum_{k=1}^{N} \left(V(\xi_k) + \frac{1}{2}(J\xi_k, \xi_1 + \ldots + \xi_{k-1}\right)$$

Supposons maintenant que $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ soit un point critique de la restriction de $\psi \circ r_N$ au sous-espace $(\mathbb{R}^{2n})_0^N$ défini par $\Sigma \xi_i = 0$. Ceci signifie que :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \psi \circ r_N(\xi_1, \ldots, \xi_N) = \ldots = \frac{\partial}{\partial \xi_N} \psi \circ r_N(\xi_1, \ldots, \xi_N) \tag{68}$$

Notons $\omega \in \mathbb{R}^{2n}$ cette commune valeur, et dérivons l'expression (67) par rapport à ξ_k. On doit donc avoir, pour chaque k :

$$- \mathrm{JM}_\varepsilon u_k + \frac{1}{2} \mathrm{J}\xi_k + \mathrm{JG}'(- \mathrm{J}u_k) = \zeta_k \qquad \text{sur} \qquad [0, \varepsilon] \tag{69}$$

$$\zeta_k - \frac{1}{2} \mathrm{J}(\xi_1 + \ldots + \xi_{k-1} - \xi_{k+1} - \ldots - \xi_N) = \omega \tag{70}$$

Posons $\bar{\xi}_k = (\xi_1 + \ldots + \xi_{k-1} - \xi_k - \ldots - \xi_N)$. On obtient

$$\left(\mathrm{M}_\varepsilon u_k + \frac{1}{2} \bar{\xi}_k\right) - \mathrm{G}'(- \mathrm{J}u_k) = \mathrm{J}\omega \qquad \text{sur} \qquad [0, \varepsilon] \tag{71}$$

On vérifie alors que la fonction y définie par :

$$y(t) = (\mathrm{M}_\varepsilon u_k)(t) + \frac{1}{2} \bar{\xi}_k \qquad \text{sur} \qquad [(k-1)\varepsilon, k\varepsilon] \tag{72}$$

est une primitive de u sur $[0, \mathrm{T}]$ tout entier. On a donc $y = \mathrm{M}u + \omega'$, avec $\omega' \in \mathbb{R}^{2n}$, et les équations (69) se ramènent à :

$$\mathrm{M}u - \mathrm{G}'(- \mathrm{J}u) = \mathrm{J}\omega - \omega' \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{73}$$

ce qui signifie que u est un point critique de ψ sur $\mathrm{L}_0^3(0, \mathrm{T})$.

Si maintenant u est un point critique de ψ, il doit vérifier l'équation (73) sur $[0, \mathrm{T}]$, donc u_k doit vérifier l'équation (71) pour des valeurs appropriées des constantes. Cela signifie que u_k est la solution du problème $(\mathscr{P}_{\varepsilon,\xi})$ pour $\xi = \int u_k$. En d'autres termes, $r_N p_N u = u$. On en déduit que $p_N u \neq 0$ si $u \neq 0$, et que $p_N u$ est un point critique de $\psi \circ r_N$.

Reste à démontrer que $\psi \circ r$ est C^3 sur Ω. L'application qui à ξ associe l'unique solution $u(\varepsilon, \xi)$ du problème $(\mathscr{P}_{\varepsilon,\xi})$ est visiblement continue de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathrm{L}_0^2(0, \mathrm{T})$. Mais $u(\varepsilon, \xi) = \dot{x}(\varepsilon, \xi)$, où $x(\varepsilon, \xi)$ est une solution de l'équation $\dot{x} = \mathrm{JH}'(x)$, ne s'annulant pas si $\xi \neq 0$. Comme H est C^k sur $\mathbb{R}^{2n} - \{0\}$, on conclut par un argument de bootstrap que $\psi \circ r_N$ est C^k.

LEMME 11. — Soit $u \neq 0$ un point critique de ψ sur $\mathrm{L}_0^3(0, \mathrm{T})$, et $p_N u = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ le point critique correspondant de $\psi \circ r_N$. Alors u et $p_N u$ ont même index et même nullité.

Démonstration. — Comme $\psi'(u) = 0$, on a :

$$(\psi \circ r_N)''(p_N u) = r_N'(p_N u)^* \psi''(u) r_N'(p_N u) \tag{74}$$

Le calcul montre que $r'_N(p_N u)(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ est la fonction $v \in L^3(0, T)$ donnée par :

(75) $$v(t) = v_k(t - (k-1)\varepsilon) \qquad \text{pour} \qquad (k-1)\varepsilon \leqslant t \leqslant k\varepsilon$$

où $v_k \in L^3(0, \varepsilon)$ est la solution du problème « tangent » à $(\mathscr{P}_{\varepsilon,\xi})$:

(76) $$\begin{cases} \operatorname{Min} \displaystyle\int_0^\varepsilon \left[\frac{1}{2}(Jv, M_\varepsilon v) + (G''(-Ju)Jv, Jv) \right] dt \\ v \in L^2(0, \varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \displaystyle\int_0^\varepsilon v(t)dt = \xi_k \end{cases}$$

Soit $w_0 \neq 0$ un élément du noyau de $\psi''(u)$. On sait que w_0 vérifie l'équation :

(77) $$JMw_0 + JG''(-Ju)Jw_0 = \zeta \in \mathbb{R}^{2n}$$

qui est la condition d'optimalité dans le problème (76). Si donc on pose :

(78) $$\xi_k = \int_{(k-1)\varepsilon}^{k\varepsilon} w_0(t)dt$$

dans (76), la solution obtenue sera $v(t) = w_0(t + (k-1)\varepsilon)$ avec $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$. Ceci revient à dire que :

(79) $$r'_N(p_N u)p_N w_0 = w_0$$

Pour tout $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in (\mathbb{R}^{2n})_0^N$, on aura donc :

(80) $$((\psi \circ r_N)''(p_N u)(\xi_1, \ldots, \xi_N), p_N w_0) = (\psi''(u)r'_N(p_N u)(\xi_1, \ldots, \xi_N), w_0) = 0$$

Donc $p_N w_0$ est dans le noyau de $(\psi \circ r_N)''(p_N u)$. On vérifie aisément que la restriction de p_N au noyau de $\psi''(u)$ est injective. La nullité de $\psi''(u)$ est donc au plus égale à la nullité de $(\psi \circ r_N)''(p_N u)$.

Soit maintenant $w \in L^3(0, T)$ tel que $(\psi''(u)w, w) < 0$. En remplaçant $\psi''(u)$ par sa valeur, on obtient l'inégalité :

(81) $$\int_0^T \left[\frac{1}{2}(Jw, Mw) + (G''(-Ju)Jw, Jw) \right] dt < 0 .$$

Si l'on remplace w par $r'_N(p_N u)(p_N w)$, obtenue sur chaque intervalle $[(k-1)\varepsilon, k\varepsilon]$ en résolvant le problème (76) avec $\xi_k = \int_{(k-1)^d}^{k^d} w$, il est clair qu'on diminuera le premier membre de l'inégalité (81). On obtient finalement;

(82) $$((\psi \circ r_N)''(p_N u)(p_N w, p_N w) < 0 .$$

Soit $E \subset L_0^3(0, T)$ un sous-espace vectoriel maximal où $\psi''(u)$ est définie négative. La propriété (82) entraîne que p_N est injective sur E, et que $(\psi \circ r_N)''(p_N u)$ est définie négative sur $p_N(E)$. Réciproquement, si $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$

rend $(\psi \circ r_N)''(p_N u)$ négative, alors, d'après la formule (74), $r_N(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ rendra $\psi''(u)$ négative. On conclut que l'index de u pour ψ est égal à l'index de $p_N u$ pour $\psi \circ r_N$.

Enfin, prenons $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ quelconque dans le noyau de $(\psi \circ r_N)''(p_N u)$. Il doit vérifier :

$$((\psi \circ r_N)''(p_N u)(\xi_1, \ldots, \xi_N), (\xi_1, \ldots, \xi_N)) = 0 \tag{83}$$

$$((\psi \circ r_N)''(p_N u)(\xi_1, \ldots, \xi_N), p_N v) = 0 \tag{84}$$

pour tout $v \in E$. En utilisant de nouveau la formule (74), ces formules deviennent :

$$(\psi''(u) r'_N(p_N u)(\xi_1, \ldots, \xi_N), r'_N(p_N u)(\xi_1, \ldots, \xi_N)) = 0 \tag{85}$$

$$(\psi''(u) r'_N(p_N u)(\xi_1, \ldots, \xi_N), r'_N(p_N u) p_N v) = 0 \tag{86}$$

Il ressort de la définition de $r'_N(p_N u)$ par le problème (76) que

$$(\psi''(u) r'_N(p_N u) p_N v, r'_N(p_N u) p_N v) < 0 \tag{87}$$

Donc l'image de E dans $L_0^3(0, T)$ par l'application injective $r'_N(p_N u) p_N$ est un autre sous-espace maximal F sur lequel $\psi''(u)$ est définie négative. Les équations (85) et (86) montrent alors que $r'_N(p_N u)(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ est orthogonal à lui-même et à F. C'est donc un élément w_0 du noyau de $\psi''(u)$:

$$r'_N(p_N u)(\xi_1, \ldots, \xi_N) = w_0 \tag{88}$$

Compte tenu de la relation (79), ceci donne :

$$r'_N(p_N u)(\xi_1, \ldots, \xi_N) = r'_N(p_N u) p_N w_0 \tag{89}$$

Comme $r'_N(p_N u)$ est injectif, on en tire enfin :

$$(\xi_1, \ldots, \xi_N) = p_N w_0 . \tag{90}$$

Donc tous les éléments du noyau de $(\psi \circ r_N)''(p_N u)$ sont de la forme $p_N w_0$, avec w_0 dans le noyau de $\psi''(u)$, et on conclut que les nullités sont égales.

LEMME 12. — Si $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \Omega$ est un point critique de $\psi \circ r_N$, il existe une immersion $i : S^1 \to (\mathbb{R}^{2n})_0^N$ de classe C^3 telle que : $i(0) = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ et que tous les $i(\theta)$, $\theta \in S^1$, soient des points critiques de $\psi \circ r_N$.

Démonstration. — On sait que $r_N(\xi_1, \ldots, \xi_N) = u$ est de classe C^k. Il suffit de prendre :

$$i(\theta) = p_N(\sigma_\theta u) \tag{91}$$

■

On dira que $i(S^1)$ est un *cercle critique* de $\psi \circ r_N$. Il sera *non dégénéré* si la nullité de u, et donc de tous les autres points de $i(S^1)$ est égale à 1.

Ceci rend compte de tous les points critiques non nuls de $\psi \circ r_N$. Reste à étudier $\psi \circ r_N$ au voisinage de l'origine, qui est un point critique où $\psi \circ r_N$ n'est plus de classe C^2. On posera :

$$n_1 = 2n\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\frac{a}{r^2}\right) \tag{92}$$

$$n_2 = 2n\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\frac{a}{\mathrm{R}^2}\right) \tag{93}$$

$$n_3 = 2n\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}a\gamma\right) \tag{94}$$

et l'on supposera qu'aucun des trois membres dont on prend la partie entière n'est lui-même entier.

LEMME 13. — Pour tout N assez grand, il existe un voisinage $\mathscr{V}$ de l'origine et trois formes quadratiques non dégénérées Q_i sur $(\mathbb{R}^{2n})_0^N$, d'index respectifs n_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, telles que, pour tout $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathscr{V}$, on ait :

$$Q_1(\xi_1, \ldots, \xi_N) \leqslant \psi \circ r_N(\xi_1, \ldots, \xi_N) \leqslant Q_2(\xi_1, \ldots, \xi_N) \tag{95}$$

$$((\psi \circ r_N')''(\xi_1, \ldots, \xi_N)(\zeta_1, \ldots, \zeta_N), (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)) \leqslant Q_3(\zeta_1, \ldots, \zeta_N) \tag{96}$$

Démonstration. — On se sert bien entendu des estimations (5), (6) et (10). La seconde, par exemple, nous montre que si $\| u \|_\infty \leqslant \eta$, on a :

$$\psi(u) \leqslant \int_0^{\mathrm{T}} \left[\frac{1}{2}(\mathrm{J}u, \mathrm{M}u) + \frac{\mathrm{R}^2}{2a}\| u \|^2\right]dt \tag{97}$$

Nous avons au second membre une forme quadratique ψ_2 sur $L_0^2(0, \mathrm{T})$. Elle prend la forme diagonale sur la base des v_{ki}, $1 \leqslant i \leqslant 2n$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$:

$$v_{ki}(t) = \exp\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\mathrm{J}kt\right)\xi_i \tag{98}$$

où les ξ_i forment une base de $\mathbb{R}^{2n}$. On a :

$$2\psi_2(\Sigma\alpha^{ki}v_{ki}) = \sum\left(-\frac{\mathrm{T}}{2k\pi} + \frac{\mathrm{R}^2}{a}\right)(\alpha^{ki})^2 \tag{99}$$

L'index de ψ_2 est $2n\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\frac{a}{\mathrm{R}^2}\right)$, et sa nullité est 0 pourvu que $\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\frac{a}{\mathrm{R}^2}$ ne soit pas entier. Or les v_{ki} peuvent être approchés uniformément sur $[0, \mathrm{T}]$ par des fonctions de la forme $r_N(\xi_1, \ldots, \xi_N)$. On en conclut que, pour N assez grand, $\psi_2 \circ r_N$ sera non dégénérée et de même index que ψ_2. ■

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du théorème 8. Sous les hypothèses faites, les cercles critiques de $\psi \circ r_N$ seront non dégénérés, et l'origine sera un point critique, dégénéré mais isolé. On remarquera que $\psi \circ r_N(\xi_1, \ldots, \xi_N) \to +\infty$ quand l'un des $|\xi_i|$ tend vers l'infini.

On va remplacer $\psi \circ r_N$ par une fonction de classe C^3 qui a les mêmes cercles critiques. Pour cela, on approche G par une famille G_ε de fonctions de classe C^k sur $\mathbb{R}^{2n}$ telles que :

$$\text{(100)} \qquad G_\varepsilon(x) = G(x) \quad \text{si} \quad \|x\| \geqslant \varepsilon$$

$$\text{(101)} \quad \forall \bar{a} < a, \exists \eta > 0 : \|x\| < \eta \Rightarrow (G''_\varepsilon(x)y, y) \leqslant \frac{1}{2\bar{a}} \operatorname{Max}\left(R^2, \frac{1}{\gamma}\right) \|y\|^2$$

On peut par exemple considérer le produit de convolution $G * \varphi_k$, où $\varphi_k \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{2n})$ et $\varphi_k \to \delta_0$ (masse de Dirac à l'origine) dans $\mathscr{D}'$ quand $k \to \infty$. Soit alors $\varphi \in \mathscr{D}$ telle que $\varphi(x) = 1$ si $\|x\| \leqslant \varepsilon/2$ et $\varphi(x) = 0$ si $\|x\| \geqslant \varepsilon$. La fonction $G_k = \varphi(G * \varphi_k) + (1 - \varphi)G$ peut jouer le rôle de G_ε dès que k est assez grand.

On définit alors ψ_ε en remplaçant G par G_ε dans la formule (23). La fonction $\psi_\varepsilon \circ r_N$ est de classe C^k partout, et coïncide avec $\psi \circ r_N$ sauf au voisinage de $(\mathbb{R}^{2n})_0^N \backslash \Omega$.

Prenons pour H_ε la fonction convexe conjuguée de G_ε. Il existe un $\eta > 0$, tendant vers zéro avec ε, tel que $H_\varepsilon(x) = H(x)$ pour $\|x\| \geqslant \eta$. Les points critiques de $\psi_\varepsilon \circ r_N$ correspondent aux solutions T-périodiques de $\dot{x} = JH'_\varepsilon(x)$ de même que les points critiques de $\psi \circ r_N$ correspondent aux solutions T-périodiques de $\dot{x} = JH'(x)$.

L'équilibre $x = 0$ est une solution T-périodique isolée de l'équation $\dot{x} = JH'(x)$, puisque l'origine est un point critique isolé de ψ sur L_0^3. On peut donc choisir $\varepsilon > 0$ assez petit pour que toutes les solutions T-périodiques non triviales de $\dot{x} = JH'(x)$ soient solutions de $\dot{x} = JH'_\varepsilon(x)$. Cette dernière équation peut avoir d'autres solutions T-périodiques, mais elles seront toutes contenues dans la boule $\|x\| \leqslant \eta$ de $\mathbb{R}^{2n}$.

Ceci signifie que les cercles critiques de $\psi \circ r_N$ sur $(\mathbb{R}^{2n})_0^N$ seront des cercles critiques de $\psi_\varepsilon \circ r_N$. En outre, les cercles critiques de $\psi \circ r_N$ doivent être en nombre fini, puisqu'ils sont contenus dans un même borné de $(\mathbb{R}^{2n})_0^N$, obtenu par le corollaire II.6, qu'ils sont tous non dégénérés, donc isolés, et que l'origine est un point critique non dégénéré. Ainsi, quitte à diminuer ε si nécessaire, on peut supposer que $\psi_\varepsilon \circ r_N$ coïncide avec $\psi \circ r_N$ sur un voisinage des cercles critiques, et donc que ceux-ci ont même index pour les deux fonctions.

Enfin, $\psi_\varepsilon \circ r_N$ peut avoir d'autres points critiques, mais ceux-ci sont contenus dans un voisinage $\mathscr{V}_\varepsilon$ de l'origine, image de la boule $\|x\| \leqslant \eta$ de $\mathscr{C}([0, T]; \mathbb{R}^{2n})$ par l'application

$$\text{(102)} \qquad x \to p_N JH'_\varepsilon(x(t))$$

où p_N est donné par la formule (61). Comme $\eta \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, on peut rendre $\mathscr{V}_\varepsilon$ aussi petit que l'on veut. En particulier, d'après l'inégalité

(101), et les arguments déployés au lemme 13, on aura, pour $(\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathscr{V}_\varepsilon$:

(103) $((\psi_\varepsilon \circ r_N)''(\xi_1, \ldots, \xi_N)(\zeta_1, \ldots, \zeta_N), (\zeta_1, \ldots, \zeta_N)) \leqslant Q(\zeta_1, \ldots, \zeta_N)$

où Q est une forme quadratique d'index $n_0 = \operatorname{Min}(n_2, n_3)$.

Ainsi, pour tout voisinage $\mathscr{V}$ de l'origine dans $(\mathbb{R}^{2n})_0^N$, on peut choisir ε assez petit pour que $\psi_\varepsilon \circ r_N$ fasse éclater l'origine en points critiques d'index $\geqslant n_0$, tous contenus dans $\mathscr{V}$. Quitte à approcher $\psi_\varepsilon \circ r_N$ par une fonction de Morse sur $\mathscr{V}$ ce qui ne peut qu'augmenter les index, et donc préserver l'inégalité $i \geqslant n_0$, on peut supposer que tous ces points critiques sont non dégénérés, et donc en nombre fini.

Appliquons à la fonction $\psi_\varepsilon \circ r_N$ la théorie de Morse, telle qu'elle a été adaptée par Bott ([*8*]; voir aussi [*10*] et [*24*]). Les inégalités de Morse pour $M^c = \{ (\xi_1, \ldots, \xi_N) \mid \psi_\varepsilon \circ r_N \leqslant c \}$ s'écrivent :

$$\sum_{p=0}^{m} (-1)^{m-p} b_p(M^c) \leqslant \sum_{V} \sum_{p=0}^{m} (-1)^{m-p} b_{p-i_V}(V) \tag{104}$$

pour tout $m \geqslant 0$, où b_p désigne le $p^{\text{ème}}$ nombre de Betti, et où V représente un cercle critique, ou un point critique de $\psi \circ r_N$, d'index i_V.

Pour c suffisamment grand, M^c sera étoilé par rapport à l'origine, et donc homéomorphe à la boule-unité de $(\mathbb{R}^{2n})_0^N$. En effet, fixons $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ dans la sphère-unité S de $(\mathbb{R}^{2n})_0^N$, et considérons :

$$\varphi_\varepsilon(\lambda) = \psi_\varepsilon \circ r_N(\lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_N) \tag{105}$$

En adaptant la formule (67) on a, avec des notations évidentes :

$$\varphi_\varepsilon(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} V_\varepsilon(\lambda\xi_k) + \frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=1}^{N} (J\xi_k, \xi_1 + \ldots + \xi_{k-1}) \tag{106}$$

Donc :

$$\varphi_\varepsilon''(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} (V_\varepsilon''(\lambda\xi_k)\xi_k, \xi_k) + \sum_{k=1}^{N} (J\xi_k, \xi_1 + \ldots + \xi_{k-1}) \tag{107}$$

Or $V_\varepsilon''(\xi) \to +\infty$ quand $\| \xi \| \to \infty$. Pour voir cela, il faut reprendre le lemme 9 en remplaçant G par G_ε, et remarquer que la solution u du problème $(\mathscr{P}_{\varepsilon,\xi})$ s'écrit toujours $u = \dot{x}$, où x vérifie $\dot{x} = JH_\varepsilon'(w)$ et se situe sur un niveau d'énergie $H_\varepsilon(x) = h$ qui tend vers $+\infty$ avec $\| \xi \|$. Pour $\| \xi \|$ assez grand, la trajectoire $x(t)$ sera toute entière tracée dans la région où $H_\varepsilon(x) = H(x) = j(x)^{3/2}$, ce qui fait qu'on pourra remplacer G_ε par une fonction positivement homogène de degré 3. Dans ce cas le résultat annoncé s'obtient sans difficulté.

Plus précisément, on pourra trouver λ_0 assez grand pour que $\varphi_\varepsilon''(\lambda) > 0$ pour tout choix de $\lambda > \lambda_0$ et de $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ dans S. Ceci implique que, pour c suffisamment grand, M^c est étoilé par rapport à l'origine. Donc $b_p(M^c) = 1$ si $p = 0$ et 0 si $p \geqslant 1$.

Tant que, $i_V \leqslant n_0 - 1$, V sera un cercle critique, et donc $b_p(V) = 1$ si $p = 0$ ou 1 et 0 si $p \geqslant 2$. Désignons par N_p le nombre de cercles critiques d'index p. On a :

$$\begin{array}{ll} (m = 0) & 1 \leqslant N_0 \\ (m = 1) & -1 \leqslant N_1 \\ (m = 2) & 1 \leqslant N_2 \\ (m = n_0 - 1) & (-1)^{n_0 - 1} \leqslant (-1)^{n_0 - 1} N_{n_0 - 1} \end{array}$$

La fonction $\psi_\varepsilon \circ r_N$ admet donc au moins un cercle critique de chaque index pair $\leqslant n_0 - 1$. Ce sont également des cercles critiques de $\psi \circ r_N$, et leur image par r_N est une orbite critique de ψ dans $L_0^3(0, T)$. D'où le théorème 8.

IV. COMPORTEMENT DE L'INDEX PAR ITÉRATION

Au paragraphe précédent, nous avons défini l'index (resp. la nullité) d'une solution T-périodique de l'équation

$$\dot{x} = JH'(x) \tag{1}$$

comme l'index (resp. la nullité) de la forme quadratique Q sur $L_0^2(0, T; \mathbb{R}^{2n})$ donnée par :

$$Q(w) = \int_0^T \frac{1}{2} [Jw, Mw) - (JG''(-J\dot{x})Jw, w)]dt \tag{2}$$

Si x est une solution T-périodique de l'équation (1), il en est de même de $\sigma_\theta x$ pour tout $\theta \in S^1$, et $\frac{d}{dt} \sigma_\theta x = \sigma_\theta \dot{x}$ décrit l'orbite critique $\Sigma(\dot{x})$ de ψ sur $L_0^3(0, T)$. Celle-ci est non dégénérée si sa nullité est 1.

DÉFINITION 1. — On dira que la solution x de (1), de période T, est *non dégénérée*, si :

$$\dim \operatorname{Ker} (I - R(T)) = 1 \tag{3}$$

où $R(t)$ est la résolvante de l'équation linéarisée autour de la solution $x(t)$:

$$\frac{d}{dt} R(t) = JH''(x(t))R(t), \qquad R(0) = I \tag{4}$$ ■

D'après la proposition III.6, cela implique que l'orbite critique $\Sigma(\dot{x})$ est non dégénérée.

On remarquera que le multiplicateur caractéristique 1 est au moins double (une fois parce que l'équation (1) est autonome, et une autre fois parce qu'elle admet une intégrale première). La condition (3) n'en est pas moins générique. Si $n = 1$ par exemple, R(T) n'a que 1 comme valeur propre, et la dégénérescence signifierait que R(T) est diagonalisable, donc $R(T) = I$. Bien entendu, si $n = 1$ toutes les solutions sont périodiques ; la dégénérescence signifie aussi que la dérivée de la période par rapport à l'amplitude est nulle. Ainsi, la condition de non-dégénérescence doit être comprise comme une condition de non-linéarité.

Si x est une solution T-périodique de l'équation (1), elle est *a fortiori* kT-périodique pour tout entier $k \geqslant 1$. Il lui est donc associé un index i_k, et une nullité n_k, qui sont l'index et la nullité de la forme quadratique Q_k sur $L_0^2(0, kT\,; \mathbb{R}^{2n})$ donnée par :

$$Q_k(w) = \int_0^{kT} \frac{1}{2}\,[(Jw, Mw) - (JG''(-J\dot{x})Jw, w)]dt \tag{5}$$

Nous nous proposons de calculer i_k et n_k en fonction de i_1 et n_1. On remarquera que i_1 et n_1 sont l'index et la nullité « primitifs », définis à partir de la forme quadratique (2), i_k et n_k étant « itérés ».

La formule que nous cherchons nécessite une complexification du problème. La formule (5) définit une forme hermitienne sur $L^2(0, T\,; \mathbb{C}^{2n})$, qui sera également notée Q_k. Il sera commode de poser :

$$H_k^1 = H^1(\mathbb{R}/kT\mathbb{Z}\,; \mathbb{C}^{2n}) \tag{6}$$

et de définir une forme hermitienne P_k sur H_k^1 par la formule :

$$P_k(y) = \int_0^{kT} \frac{1}{2}\,[(J\dot{y}, y) + (G''(-J\dot{x})J\dot{y}, J\dot{y})]dt \tag{7}$$

On remarquera que $P_k(y + \xi) = P_k(y)$, pour tout vecteur constant $\xi \in \mathbb{C}^{2n}$. On en déduit :

$$P_k(x) = Q_k(\dot{x}) \tag{8}$$

$$\text{index } P_k = \text{index } Q_k = i_k \tag{9}$$

$$\text{nullité } P_k = 2n + \text{nullité } Q_k = n_k + 2n \tag{10}$$

La décomposition des fonctions de H_k^1 en série de Fourier nous donne le :

LEMME 2. — Pour $\omega \in \mathbb{C}$ et $|\omega| = 1$, posons :

$$H_\omega^1 = \{\, x \in H_k^1 \mid x(t + T) = \omega x(t) \,\} \tag{11}$$

Les H_ω^1, pour $\omega^k = 1$, sont des sous-espaces orthogonaux pour P_k et pour la structure euclidienne de H_k^1, et on a la décomposition en somme directe :

$$H_k^1 = \bigoplus_{\omega^k = 1} H_\omega^1 \tag{12}$$

Démonstration. — Tout $y \in H_k^1$ se met sous la forme :

$$y(t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \xi_p \exp\left(\frac{2\pi i}{kT} pt\right) \tag{13}$$

Notons C(q) l'ensemble des p qui sont congrus à q modulo k. On a :

$$y(t) = \sum_{q=1}^{k} y_q(t) \tag{14}$$

$$y_q(t) = \sum_{C(q)} \xi_p \exp\left(\frac{2\pi i}{kT} pt\right). \tag{15}$$

On vérifie alors que :

$$y_q(t+T) = \sum_{C(q)} \xi_p \exp\left(\frac{2\pi i}{kT} pt + 2\pi i \frac{p}{k}\right) = \exp\left(2\pi i \frac{q}{k}\right) y_q(t) \tag{16}$$

Donc $y_q \in H_\omega^1$ avec $\omega = \exp\left(2\pi i \dfrac{q}{k}\right)$.

Le reste du lemme est trivial. Vérifions simplement que les H_ω^1 sont orthogonaux pour p_k. Prenons $y \in H_\omega^1$ et $z \in H_\rho^1$ avec $|\omega| = 1 = |\rho|$ et $\omega \neq \rho$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{kt} \left[\frac{1}{2}(J\dot{y}, z) + (G''(-J\dot{x})J\dot{y}, J\dot{z})\right] dt &= \\ = \left(\sum_{m=1}^{k} \omega^m \bar{\rho}^m\right) \int_0^T \frac{1}{2}\,&[(J\dot{y}, z) + (G''(-J\dot{x})J\dot{y}, J\dot{z})]\,dt \end{aligned} \tag{17}$$

Ceci est nul puisque $\omega\bar{\rho}$ est une racine de l'unité différente de 1. ■

Notons $P_{k,\omega}$ la restriction de P_k à H_ω^1 et posons :

$$\text{index } P_{k,\omega} = j(\omega) \tag{18}$$

$$m(\omega) = \begin{cases} \text{nullité } P_{k,\omega} & \text{si } \omega \neq 1 \\ \text{nullité } P_1 - 2n & \text{si } \omega = 1 \end{cases} \tag{19}$$

Ainsi j et m sont des applications du cercle unité C dans $\mathbb{R}$, et le lemme 2 se traduit immédiatement par les formules :

$$i_k = \sum_{\omega^k = 1} j(\omega) \tag{20}$$

$$n_k = \sum_{\omega^k = 1} m(\omega) \tag{21}$$

Il ne reste plus qu'à expliciter les fonctions j et $m : \mathrm{C} \to \mathbb{R}$. Commençons par la nullité.

PROPOSITION 3. — Pour tout $\omega \in \mathrm{C}$, on a

$$m(\omega) = \dim \operatorname{Ker} (\omega \mathrm{I} - \mathrm{R}(\mathrm{T})) \tag{24}$$

En particulier, $m(\omega) \neq 0$ si et seulement si ω est un multiplicateur caractéristique de x.

Démonstration. — Si $\omega = 1$, on retombe sur la proposition III.6, avec $\psi = \mathrm{Q}$, en tenant compte de (10). Supposons donc $\omega \neq 1$. Par définition, $m(\omega)$ est la nullité de la restriction de P_k à H^1_ω. En d'autres termes, c'est le nombre de points critiques linéairement indépendants de la fonctionnelle quadratique :

$$\mathrm{P}_{k,\omega}(y) = \int_0^{k\mathrm{T}} \frac{1}{2} [(\mathrm{J}y, y) + (\mathrm{G}''(-\mathrm{J}\dot{x})\mathrm{J}\dot{y}, \mathrm{J}\dot{y})]dt \tag{25}$$

sur l'espace :

$$\mathrm{H}^1_\omega = \{ y \in \mathrm{H}^1_k \mid x(t + \mathrm{T}) = \omega y(t) \} . \tag{26}$$

Il est facile de voir que, si $y \in \mathrm{H}^1_\omega$:

$$\mathrm{P}_{k,\omega}(y) = k \int_0^{\mathrm{T}} \frac{1}{2} [(\mathrm{J}\dot{y}, y) + (\mathrm{G}''(-\mathrm{J}\dot{x})\mathrm{J}\dot{y}, \mathrm{J}\dot{y})]dt \tag{29}$$

Supposons que y soit un point critique de $\mathrm{P}_{k,\omega}$ sur H^1_ω. On aura, pour tout $z \in \mathrm{H}^1_\omega$:

$$0 = \int_0^{\mathrm{T}} \left[\frac{1}{2}(\mathrm{J}\dot{y}, z) + \frac{1}{2}(\mathrm{J}\dot{z}, y) + \operatorname{Re}(\mathrm{G}''(-\mathrm{J}\dot{x})\mathrm{J}\dot{y}, \mathrm{J}\dot{z}) \right] dt \tag{30}$$

Une intégration par parties donne :

$$0 = \frac{1}{2}(\omega\overline{\omega} - 1)(\mathrm{J}y(0), z(0)) - \int_0^{\mathrm{T}} \operatorname{Re}(\mathrm{J}y + \mathrm{J}\mathrm{G}''(-\mathrm{J}\dot{x})\mathrm{J}\dot{y}, \dot{z})dt \tag{31}$$

Le premier terme est nul puisque $|\omega| = 1$. On vérifie aisément que la condition $z(\mathrm{T}) = \omega z(0)$ n'impose aucune restriction à $\dot{z}$, qui peut être quelconque dans $\mathrm{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathbb{C}^{2n})$. Finalement, on obtient une condition nécessaire et suffisante pour que J soit un point critique de $\mathrm{P}_{k.\omega}$:

$$\mathrm{J}y + \mathrm{J}\mathrm{G}''(-\mathrm{J}\dot{x})\mathrm{J}\dot{y} = 0 \tag{32}$$

Que l'on transforme :

$$\mathrm{G}''(-\mathrm{J}\dot{x})^{-1}y = -\mathrm{J}\dot{y} \tag{33}$$

ou encore, grâce à la formule (III.3) :

$$\dot{y} = \mathrm{J}\mathrm{H}''(x)y . \tag{34}$$

avec $y \in \mathrm{H}^1_\omega$, donc $y(\mathrm{T}) = \omega y(0)$. D'où le résultat. ■

Nous passons maintenant à $j(\omega)$. Il ressort immédiatement des définitions que :

$$(35) \qquad j(1) = i_1$$

Pour $\omega \neq 1$, si $y \in H^1_\omega$, on peut exprimer $y(0)$ en fonction de $\dot{y}$:

$$(36) \qquad y(0) + \int_0^T \dot{y}dt = \omega y(0)$$

$$(37) \qquad y(0) = (\omega - 1)^{-1} \int_0^T \dot{y}dt$$

avec $\dot{y}$ quelconque dans $L^2(0, T\,; \mathbb{C}^{2n})$.

En faisant ce changement de variable dans l'expression (29), on trouve, pour $y \in H^1_\omega$:

$$(38) \quad \begin{aligned} P_{k,\omega}(y) &= k \int_0^T \frac{1}{2}\left[\left(J\dot{y}, \int_0^t \dot{y}ds + (\omega-1)^{-1}\int_0^T \dot{y}dt\right) + (G''(-J\dot{x})J\dot{y}, J\dot{y})\right]dt \\ &= k\int_0^T \frac{1}{2}\left[\left(J\dot{y}, \int_0^t \dot{y}ds\right) + (G''(-J\dot{x})J\dot{y}, J\dot{y})\right]dt + \\ &\quad + \frac{(\bar{\omega}-1)^{-1}}{2}k\left(J\int_0^T \dot{y}dt, \int_0^T \dot{y}dt\right) \end{aligned}$$

De cette discussion, résulte immédiatement le :

Lemme 4. — Pour $|\omega| = 1$ et $\omega \neq 1$, $j(\omega)$ et $m(\omega)$ sont respectivement l'index et la nullité de la forme quadratique Q_ω définie sur $L^2(0, T\,; \mathbb{C}^{2n})$ par :

$$(39) \quad \begin{aligned} Q_\omega(u) &= \int_0^T \frac{1}{2}\left[\left(Ju, \int_0^t uds\right) + (G''(-J\dot{x})Ju, Ju)\right]dt + \\ &\quad + \frac{(\bar{\omega}-1)^{-1}}{2}\left(J\int_0^T udt, \int_0^T udt\right) \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

On prendra garde que l'isomorphisme $y \to \dot{y}$ de H^1_ω sur $L^2(0, T\,; \mathbb{C}^{2n})$, dont l'inverse est donné par la formule (37), ne préserve pas les fonctions réelles. Par ailleurs, on notera que :

$$(40) \qquad (J\xi, \xi) = -(\xi, J\xi) = \overline{-(J\xi, \xi)} \qquad \forall \xi \in \mathbb{C}^{2n}$$

Ainsi $(J\xi, \xi)$ est imaginaire pur, nul si ξ est réel. En particulier, $\frac{1}{i}(J\xi, \xi)$ est une forme hermitienne non dégénérée sur $\mathbb{C}^{2n}$.

Lemme 5. — Si $\omega \in C$ est un point de discontinuité de j, alors ω est un multiplicateur caractéristique de $\dot{x}$.

Démonstration. — Supposons que ω ne soit pas un multiplicateur caractéristique de x. D'après le lemme 3, la nullité de Q_ω est 0, ce qui signifie que Q_ω est non dégénérée. En diagonalisant Q_ω comme à la proposition III.5 (formules (44) et (48)), on voit que l'on peut décomposer $L^2(0, T; \mathbb{C}^{2n})$ en somme directe orthogonale :

(41) $$L^2(0, T; \mathbb{C}^{2n}) = E_+ \oplus E_-, \qquad \dim E_- < \infty$$

(42) $$\forall u \in E_+, \qquad Q_\omega(u) \geqslant \alpha \| u \|^2$$

(43) $$\forall u \in E_-, \qquad Q_\omega(u) \leqslant -\beta \| u \|^2$$

où α et β sont des constantes positives non nulles. Si maintenant $\zeta \in C$ est voisin de ω, on aura $Q_\zeta(u) \geqslant \frac{\alpha}{2} \| u \|^2$ pour tout $u \in E_+$, et $Q_\zeta(u) \leqslant -\frac{\beta}{2} \| u \|^2$ pour tout $u \in E_-$. Donc $j(\omega) = j(\zeta)$. ∎

Pour caractériser complètement la fonction $j : C \to \mathbb{N}$, il suffit donc de déterminer ses sauts aux multiplicateurs caractéristiques, et sa valeur en un point.

C est le cercle-unité. Pour tout $\omega \in C$, nous posons avec $\varepsilon > 0$:

(44) $$\Delta j(\omega) = \lim_{\varepsilon \to 0} [j(\omega e^{i\varepsilon}) - j(\omega e^{-i\varepsilon})]$$

Rappelons quelques éléments de la théorie de Krein (voir [*23*], [*19*], et surtout [*29*], chapitre III). Soit $\omega \in C$, avec $\omega \neq 1$, un multiplicateur caractéristique d'ordre m, c'est-à-dire une valeur propre d'ordre m de R(T). Considérons le sous-espace V de $\mathbb{R}^{2n}$ défini par :

(45) $$V = \operatorname{Ker} (R(T) - I)^m$$

Il est de dimension m et la restriction à V de la forme hermitienne $-i(J\xi, \xi)$ est non dégénérée. Soit p le nombre de carrés positifs et q le nombre de carrés négatifs après diagonalisation : ainsi q est l'index de $-i(J\xi, \xi)$ sur V et $p + q = m$.

On dira que le multiplicateur ω est de type (p, q). Ainsi, si ω est un multiplicateur simple, il sera, de type $(1, 0)$ ou $(0, 1)$: dans le premier cas, il sera dit positif, dans le second négatif.

Si ω est de type (p, q), son conjugué $\overline{\omega}$ sera de type (q, p).

Proposition 6. — Soit $\omega \in C$, $\omega \neq 1$, un multiplicateur caractéristique de type (p, q). Alors :

(46) $$\Delta j(\omega) = q - p$$

Démonstration. — Supposons d'abord que ω est un multiplicateur simple, et posons $\omega = e^{i\theta}$.

Écrivons la somme directe orthogonale $L^2(0, T; \mathbb{C}^{2n}) = E_+ \oplus E_0 \oplus E_-$, avec $Q_\omega(v) \geqslant \alpha \| v \|^2$ pour $v \in E_+$, $Q_\omega(v) \leqslant -\beta \| v \|^2$ pour $v \in E_-$ et $Q_\omega = 0$

sur E_0 (voir lemme 5). D'après la proposition 3, tout $u \in E_0$ est de la forme $u = \dot{y}$, où y est solution du problème :

$$\dot{y} = JH''(x)y, \qquad y(T) = \omega y(0) \tag{47}$$

Ainsi, E_0 est de dimension un. On va étudier $\frac{d}{d\theta} Q_\omega(u)$, où u engendre E_0. Il est clair que l'on aura :

$$\Delta j(\omega) = - \text{ signe } \left(\frac{d}{d\theta} Q_\omega(u)\right) \tag{48}$$

pourvu que cette dérivée ne soit pas nulle. Calculons-la.

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} Q_\omega(u) &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{(\overline{\omega} - 1)^{-1}}{2}\right)\left(J \int_0^T udt, \int_0^T udt\right) \\ &= \frac{-i}{1 - \cos\theta}\left(J \int_0^T udt, \int_0^T udt\right) \\ &= \frac{-i}{1 - \cos\theta} \mid 1 - \omega \mid^2 (Jy(0), y(0)) \end{aligned} \tag{49}$$

grâce à la formule (37).

Comme $y(0)$ engendre $\operatorname{Ker}(R(T) - \omega I)$, et que la forme hermitienne $- i(J\xi, \xi)$ ne dégénère pas sur ce sous-espace, $- i(Jy(0)\ y(0))$ n'est pas nul, et :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} Q_\omega(u) &= - \text{ signe } (- i(Jy(0), y(0))) \\ &= - 1 \quad \text{si} \quad \omega \text{ est positive au sens de Krein} \\ &= + 1 \quad \text{si} \quad \omega \text{ est négative au sens de Krein}. \end{aligned} \tag{50}$$

Le résultat est donc établi quand ω est une valeur propre simple de $R(T)$. Si maintenant ω est multiple d'ordre m, il sera de type (p, q) avec $p+q=m$. Une petite perturbation, obtenue par exemple en remplaçant l'équation $\dot{y} = JH''(x)y$ par l'équation $\dot{y} = JH''(x)y + J\varepsilon y$, fera éclater ω en m valeurs propres simples ([*29*], III.4.3). Celles qui ne sont pas sur le cercle unité sont appariées, chaque paire étant de la forme $(\omega_\varepsilon, \overline{\omega}_\varepsilon^{-1})$, les vecteurs propres correspondant étant ξ_1 et ξ_2. Le sous-espace engendré par ξ_1 et ξ_2 est orthogonal au reste de l'espace pour $- i(J\xi, \xi)$ ([*29*], III.2.4), et ξ_1 et ξ_2 sont des vecteurs isotropes. Il en résulte que les valeurs propres qui quittent le cercle unité laissent inchangé le bilan $q - p$. Il reste donc sur le cercle unité r multiplicateurs positifs au sens de Krein, et $(r + q - p)$ multiplicateurs négatifs. En appliquant à chacun d'eux le résultat précédent, on obtient un saut total de $(q - p)$. Il ne reste plus qu'à faire tendre ε vers zéro.

PROPOSITION 7. — Supposons que x est une solution T-périodique du problème (1), et notons d la dimension de $\operatorname{Ker}(I - R(T))$. Alors :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} j(e^{i\varepsilon}) = i_1 + n + E\left(\frac{d}{2}\right) \tag{51}$$

Démonstration. — Comme $|\omega| = 1$, on peut écrire :

$$(\overline{\omega} - 1)^{-1} = -\frac{1}{2} - hi \tag{52}$$

Il revient alors au même de dire que $\omega \to 1$ dans C et $h \to \pm\infty$ dans $\mathbb{R}$. La formule (39) s'écrit alors :

$$Q_\omega(u) = Q_1(u) - \frac{1}{2} hi\left(J \int_0^T u dt, \int_0^T u dt \right) \tag{53}$$

$$Q_1(u) = \int_0^T \frac{1}{2}\left[\left(Ju, \int_0^t u ds\right) + (G''(-J\dot{x})Ju, Ju)\right] dt - \frac{1}{4}\left(J \int_0^T u dt, \int_0^T u dt\right) \tag{54}$$

Q_ω et Q_1 sont des formes hermitiennes sur $L^2(0, T\,; \mathbb{C}^{2n})$, et $-i(J\xi, \xi)$ une forme hermitienne sur $\mathbb{C}^{2n}$. Il sera commode de poser la somme directe orthogonale $L^2 = L_0^2 \oplus \mathbb{C}^{2n}$, et d'écrire $u = u_0 + \xi$ la décomposition correspondante. On écrira aussi :

$$Q_1(u) = \frac{1}{2}(Au, u) \qquad \text{avec} \qquad A \in \mathscr{L}(L^2) \tag{55}$$

$$Au = -\int_0^t J u ds + \frac{1}{2}\int_0^T J u dt - JG''(-J\dot{x})Ju \tag{56}$$

On va tâcher de décomposer Q_ω en carrés :

$$\begin{aligned} Q_\omega(u_0 + \xi) &= \frac{1}{2}(Au_0, u_0) + \mathrm{Re}\left(\int_0^T Au_0 dt, \xi \right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\int_0^T JG''(-J\dot{x})J\xi dt, \xi \right) - \frac{T^2}{2} h(iJ\xi, \xi) \\ &= \frac{1}{2}(Au_0, u_0) + \mathrm{Re}\left(\int_0^T Au_0 dt, \xi \right) + \frac{1}{2}(B_h\xi, \xi) \end{aligned} \tag{57}$$

où $B_h = -\int_0^T JG''(-J\dot{x})J dt - T^2 hiJ$ est un opérateur hermitien dans $\mathbb{C}^{2n}$, certainement inversible pour h assez grand. Continuons les calculs :

$$Q_\omega(u) = \frac{1}{2}(B_h\zeta, \zeta) - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_0^T Au_0 dt, B_h^{-1} \int_0^T Au_0 dt \right) + \frac{1}{2}(Au_0, u_0) \tag{58}$$

avec $\zeta = \xi + B_h^{-1} \int_0^T Au_0 dt \in \mathbb{C}^{2n}$. Il est clair que l'application qui à (u_0, ξ) associe (u_0, ζ) est un isomorphisme, et que (u_0, ζ) est donc un système de coordonnées linéaires dans L^2. La formule (57) montre que les sous-espaces $\zeta = 0$ et $u_0 = 0$ sont orthogonaux pour Q_ω. L'index de Q_ω est donc la somme des index de ses restrictions à ces deux sous-espaces.

En faisant $u_0 = 0$, on obtient la forme hermitienne $\frac{1}{2}(B_h\zeta, \zeta)$ sur $\mathbb{C}^{2n}$. Pour $|h|$ assez grand, elle se comportera comme $-i(J\zeta, \zeta)$ qui est non dégénérée et d'index n.

En faisant $\zeta = 0$ on obtient la forme hermitienne Q_ω^0 sur L_0^2 donnée par :

$$
\begin{aligned}
Q_\omega^0(u_0) &= \frac{1}{2}(Au_0, u_0) - \frac{1}{2}\left(\int_0^T Au_0 dt, B_h^{-1}\int_0^T Au_0 dt\right) \\
&= Q_1(u_0) - \frac{1}{2}\left(\int_0^T Au_0 dt, B_h^{-1}\int_0^T Au_0 dt\right)
\end{aligned}
\tag{59}
$$

Quand $|h| \to \infty$, $B_h^{-1} \to 0$. A la limite, la formule (59) se réduit à :

$$
Q_1(u_0) = \int_0^T \frac{1}{2}\left[(Ju_0, Mu_0) + (G''(-J\dot{x})Ju_0, Ju_0)\right]dt \tag{60}
$$

On reconnaît la forme quadratique Q de la formule (2). L'index de $Q_1(u_0)$ est donc précisément i_1, l'index primitif de x.

Mais Q_1 a aussi une nullité. D'après la proposition 3, son noyau dans L_0^2 est constitué de tous les u_0 de la forme $u_0 = \dot{y}$, où y est solution du problème aux limites :

$$
\dot{y} = JH''(x)y, \qquad y(T) = y(0) \tag{61}
$$

Il faut calculer le signe du dernier terme de l'expression (59) pour les u_0 de cette forme. D'après la définition de B_h, on a :

$$
B_h = B - T^2hiJ = -T^2hiJ(I - h^{-1}T^{-2}iJB) \tag{62}
$$

où B est une matrice définie positive. Donc :

$$
\begin{aligned}
B_h^{-1} &= -h^{-1}T^{-2}iJ(I + h^{-1}T^{-2}iJB + 0(h^{-2})) \\
&= -h^{-1}T^{-2}iJ - h^{-2}T^{-4}B + 0(h^{-3})
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Par ailleurs, en reportant $u_0 = \dot{y}$ dans l'expression (56), et en tenant compte des relations (61) :

$$
\begin{aligned}
Au_0 &= -\int_0^t Ju_0 ds - JG''(-J\dot{x})Ju_0 \\
&= -J(y(t) - y(0)) - JH''(x)^{-1}J\dot{y} \\
&= -J(y(t) - y(0)) + Jy(t) \\
&= Jy(0)
\end{aligned}
\tag{64}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\left(\int_0^T Au_0 dt, B_h^{-1}\int_0^T Au_0 dt\right) &= \frac{1}{2}h^{-1}(iJy(0), y(0)) + \\
&+ \frac{1}{2}h^{-2}T^{-4}(By(0), y(0)) + 0(h^{-3})
\end{aligned}
\tag{65}
$$

Si $d = 1$, la solution x est non dégénérée, et le problème (61) a essentiellement une seule solution, à savoir $y = \lambda \dot{x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Ainsi, $\dot{x}(0)$ étant réel, $(iJy(0), y(0))$ doit être nul, et le terme du premier ordre dans (65) disparaît. Le terme d'ordre deux impose donc son signe quand $h \to \pm\infty$: il est positif dans les deux cas.

Si $d \geqslant 2$, la forme hermitienne $(iJ\xi, \xi)$ n'est plus identiquement nulle sur Ker $(I - R(T))$: son index est $E\left(\frac{d}{2}\right)$. Si d est pair, les termes du premier ordre sont prépondérants dans la formule (65), et le résultat s'en suit. Si d est impair, il reste un sous-espace isotrope de dimension un, engendré par un vecteur réel ξ_0, sur lequel il faut examiner le terme du deuxième ordre. Celui-ci, étant positif, ne contribue rien à l'index, et la formule (51) est établie.

L'index de Q_ω, pour h assez grand, sera donc n (pour l'index de $-i(J\zeta, \zeta)$), $+ i_1$ (pour l'index de Q_1), $+ 0$ (pour la nullité de Q_1).

Récapitulons nos résultats. Si x est une solution T-périodique non dégénérée , d'index et de nullité primitifs i_1 et n_1, l'index et la nullité de la même solution itérée k fois, i_k et n_k, sont donnés par les formules :

$$i_k = \sum_{\omega^k = 1} j(\omega) \tag{66}$$

$$n_k = \sum_{\omega^k = 1} m(\omega) \tag{67}$$

où j et m sont des applications du cercle-unité C dans $\mathbb{N}$. On a

$$m(\omega) = \dim \operatorname{Ker} (\omega I - R(T)) .$$

La fonction j est constante au voisinage de tout point ω n'appartenant pas au spectre de R(T). Si ω est un multiplicateur de type (p, q), on a $\Delta j(\omega) = q - p$. Enfin, $j(1) = i_1$ et $j(\omega)$ tend vers $i_1 + n$ quand ω tend vers 1 dans C.

Donnons quelques conséquences faciles.

COROLLAIRE 8. — On suppose que x est hyperbolique. Alors, pour tout entier k :

$$i_k = k(i_1 + n) - n \tag{68}$$

$$n_k = 1 . \tag{69}$$

Démonstration. — Dire que x est hyperbolique signifie que 1 est le seul multiplicateur caractéristique de module 1 et que $d = 1$.

Donc j est constante sur $C \backslash \{ 1 \}$, et égale à sa valeur donnée par la formule (51) avec $d = 1$.

COROLLAIRE 9. — Pour toute solution x, on a :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\, i_k = \frac{1}{2\pi}\int_C j(\omega)d\omega \tag{70}$$

Plus précisément, si l'on appelle V la quantité ci-dessus, il existe deux constantes c et c' telles que :

$$kV - c \leqslant i_k \leqslant kV + c' \qquad \forall k \in \mathbb{N} \tag{71}$$

Démonstration. — La formule est évidente si $j(\omega)$ est constante sur C (en particulier si x est hyperbolique) ou même si $j(\omega)$ est constante presque partout (c'est-à-dire si le saut $\Delta j(\omega)$ est nul aux multiplicateurs caractéristiques ; c'est toujours le cas en $\omega = -1$).

Supposons donc qu'il y ait des multiplicateurs caractéristiques différents de ± 1 sur le demi-cercle supérieur. Notons-les $\omega_p = e^{i\theta_p}$, $0 < \theta_p < \pi$, $1 \leqslant p \leqslant m$, et rajoutons $\theta_0 = 0$ et $\theta_{m+1} = \pi$. Le nombre $N_{k,p}$ de racines k^{eme} de l'unité strictement comprises entre ω_{p-1} et ω_p est :

$$N_{k,p} = \text{Card}\left\{ \frac{q}{k} \mid \theta_{p-1} < q\frac{2\pi}{k} < \theta_p \right\} \tag{72}$$

$$\frac{k}{2\pi}(\theta_p - \theta_{p-1}) - 1 < N_{k,p} < \frac{k}{2\pi}(\theta_p - \theta_{p-1}) + 1 \tag{73}$$

Occupons-nous de l'inégalité de gauche. Multiplions-la par j_p, valeur de $j(\omega)$ entre ω_{p-1} et ω_p, et sommons :

$$i_j + 2\sum_{p=1}^{m+1} j_p N_{k,p} > i_1 + \frac{k}{\pi}\sum_{p=1}^{m+1}(\theta_p - \theta_{p-1}) - 2\sum_{p=1}^{m+1} j_p \tag{74}$$

Le membre de gauche contient tous les termes de la formule (20), à l'exception de ceux d'entre eux qui tombent sur un multiplicateur caractéristique différent de 1. Il y en a au plus $(n-1)$. Il faut en outre tenir compte de la racine -1, présente si k est pair. Si par exemple il n'y a pas de multiplicateur caractéristique qui soit racine de l'unité, sauf 1 lui-même, le membre de gauche est i_k ou $i_k - j_{m+1}$ suivant que k est impair ou pair. Dans le cas général, la différence avec i_k sera majorée par une constante que le lecteur explicitera.

Le membre de droite, lui, est toujours $i_1 + kV - 2\Sigma j_p$. La formule (74) nous donne enfin :

$$i_k + c_1 \geqslant kV - c_2 \tag{75}$$

C'est la première partie de l'inégalité (71). L'autre s'obtient de même.

COROLLAIRE 10. — Soit x une solution quelconque, et d la dimension de Ker $(I - R(T))$. Alors :

$$(76) \qquad |\omega| = 1, \qquad \omega \neq 1 \Rightarrow j(\omega) \geqslant i_1 + d$$

Démonstration. — On a vu que $j(\omega)$ partait de $i_1 + n + E\left(\frac{d}{2}\right)$ au voisinage de 1, et que chaque multiplicateur caractéristique présent sur le demi-cercle supérieur contribuait au plus m à la variation de $j(\omega)$, où m est la multiplicité (proposition 6). Si d est pair, on pourra placer au plus $n - \frac{d}{2}$ multiplicateurs sur le demi-cercle supérieur, si d est impair, $n - \frac{d+1}{2}$. En supposant que chacun d'eux diminue la valeur de $j(\omega)$, on obtient la formule (76). ■

On peut désirer contrôler ce dernier résultat par une méthode indépendante. Vérifions par exemple que l'on a toujours $j(-1) \geqslant 1$.

Pour ce faire, posons $\omega = -1$, donc $h = 0$, dans la formule (57). On obtient :

$$(77) \qquad Q_{-1}(u_0 + \xi) = \frac{1}{2}(Au_0, u_0) + \operatorname{Re}\left(\int_0^T Au_0 dt, \xi\right) + \frac{1}{2}(B_0\xi, \xi)$$

où B_0 est défini positif.

Prenons $u_0 = \dot{x}$; on a alors $2Au_0 = J\dot{x}(0) + J\dot{x}(T)$ d'après (56), et :

$$(78) \quad 2Q_{-1}(u_0+\xi) = \left(J\frac{\dot{x}(0)+\dot{x}(T)}{2}, u_0\right) + \operatorname{Re}(TJ(\dot{x}(0)+\dot{x}(T)), \xi) + (B_0\xi, \xi)$$

Le premier terme de droite est nul puisque $\dot{x}$ est périodique. Choisissons alors ξ tel que $\operatorname{Re}(TJ(\dot{x}(0) + \dot{x}(T)), \xi) < 0$. On a :

$$(79) \qquad Q_{-1}(u_0 + t\xi) = t\operatorname{Re}\left(\frac{TJ(\dot{x}(0)+\dot{x}(T))}{2}, \xi\right) + \frac{t^2}{2}(B_0\xi, \xi)$$

Ceci est négatif pour $t > 0$ assez petit. Donc Q_{-1} ne saurait être semi-définie positive : son index $j(-1)$ est au moins 1.

V. RETOUR AU PROBLÈME INITIAL

Nous revenons maintenant au problème géométrique énoncé au paragraphe 1. On se donne une hypersurface S dans $\mathbb{R}^{2n}$, de classe C^k avec $k \geqslant 3$, de courbure strictement positive, et on cherche ses caractéristiques fermées.

Comme on l'a indiqué au § II, le problème peut être mis sous forme hamiltonienne (II.4) de plusieurs manières, et les multiplicateurs associés à une caractéristique donnée ne dépendent pas du hamiltonien particulier H choisi, pourvu qu'il vérifie (II.2) et (II.3). On les appellera donc les multiplicateurs de la caractéristique fermée considérée.

LEMME 1. — Soit H un hamiltonien fidèle à S et x une solution périodique de $\dot{x} = \mathrm{JH}'(x)$ tracée sur S. On note T sa période, $\mathrm{R}(t)$ la résolvante de l'équation linéarisée et $\mathrm{T}_0\mathrm{S}$ l'hyperplan tangent à S en $x(0)$. Alors $\mathrm{T}_0\mathrm{S}$ est un sous-espace propre de R(T), et on note $\mathrm{R}_0(\mathrm{T}) : \mathrm{T}_0\mathrm{S} \to \mathrm{T}_0\mathrm{S}$ la restriction de R(T). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) la solution x est non dégénérée
b) $\dim \mathrm{Ker}\,(\mathrm{I} - \mathrm{R}(\mathrm{T})) = 1$
c) $\dim \mathrm{Ker}\,(\mathrm{I} - \mathrm{R}_0(\mathrm{T})) = 1$.

Démonstration. — (*a*) $\Leftrightarrow$ (*b*) d'après la définition IV.1. Si (*b*) est satisfaite, le vecteur propre de R(T) associé à la valeur propre 1 est $\dot{x}(0)$, qui appartient à $\mathrm{T}_0\mathrm{S}$, d'où (*c*).

Supposons (*c*) satisfaite. On peut donc écrire $\mathrm{T}_0\mathrm{S} = \mathbb{R}\dot{x}(0) \oplus \mathrm{E}$, où E est un sous-espace propre de $\mathrm{R}_0(\mathrm{T})$. On sait que le vecteur $x(0)$ est transversal à $\mathrm{T}_0\mathrm{S}$ dans $\mathbb{R}^{2n}$, de telle sorte que :

$$\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}x(0) \oplus \mathbb{R}\dot{x}(0) \oplus \mathrm{E} \tag{1}$$

On sait que $\mathrm{R}(\mathrm{T})\dot{x}(0) = \dot{x}(0)$ et que $\mathrm{R}(\mathrm{T})\mathrm{E} = \mathrm{E}$. Pour trouver l'effet de R(T) sur $x(0)$; il suffit d'appliquer le lemme 2.4, et de dériver par rapport à h, en $h = 1$, l'identité $x_h(\mathrm{T}_h) = x_h(0)$. On obtient :

$$\dot{x}(\mathrm{T})\frac{d}{dh}\mathrm{T}_h + \frac{d}{dh}x_h(\mathrm{T}) = \frac{d}{dh}x_h(0) \tag{2}$$

Soit, en tenant compte des formules (II.31) et (II.33) avec $\varphi(1) = 1$ et $\varphi'(1) = 3/2$:

$$\dot{x}(0)\frac{\mathrm{T}}{3} + \mathrm{R}(\mathrm{T})\frac{d}{dh}x_h(0) = \frac{d}{dh}x_h(0)$$

ou enfin :

$$\mathrm{R}(\mathrm{T})x(0) = x(0) - \frac{\mathrm{T}}{2}\dot{x}(0)$$

La matrice de R(T) présente donc le bloc de Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{T}/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Ceci implique que $\dot{x}(0)$ est le seul vecteur propre de R(T) associé à la valeur propre 1. ■

Passons maintenant à la définition de la résonance. Les multiplicateurs d'une caractéristique fermée sont $\{ 1, 1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n} \}$. Convenons d'appeler multiplicateurs *non triviaux* les $(2n - 2)$ qui restent lorsqu'on a compté deux fois le multiplicateur 1. Ainsi, dire que 1 est un multiplicateur non trivial signifiera qu'il est d'ordre supérieur à 2, donc au moins 4. Dire que la caractéristique est hyperbolique signifie qu'il n'y a pas de multiplicateur non trivial de module 1.

Considérons une caractéristique fermée. Soit H un hamiltonien fidèle à S, et $x(t)$ une solution de $\dot{x} = \mathrm{J}\mathrm{H}'(x)$ dont la caractéristique considérée soit la trajectoire. On rappelle que, pour $|\omega| = 1$, on a défini $j(\omega)$ comme l'index de la forme hermitienne :

$$\int_0^{k\mathrm{T}} \frac{1}{2}\,[(\mathrm{J}\dot{y}, y) + (\mathrm{G}''(-\mathrm{J}\dot{x})\mathrm{J}\dot{y}, \mathrm{J}\dot{y})]dt \tag{5}$$

sur l'espace :

$$\mathrm{H}^1_\omega = \{\, y \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}/\mathrm{T}\mathbb{Z}) \mid y(\mathrm{T}) = \omega y(0) \,\} \tag{6}$$

On remarque que la fonction $j : \mathrm{C} \to \mathbb{N}$ ne dépend pas du hamiltonien fidèle choisi : ils conduisent tous à la même équation linéarisée, et donc à une même valeur de $\mathrm{G}''(-\mathrm{J}\dot{x})$.

Définition 2. — Considérons les multiplicateurs non triviaux de module 1, que nous mettons sous la forme :

$$\omega = e^{\pm 2i\pi\theta} \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2} \tag{7}$$

Soient $\theta_1, \ldots, \theta_m$ les nombres ainsi obtenus. On appelle *exposants normalisés* les $(m + 1)$ nombres :

$$\left\{ \alpha_{m+1} = \frac{\mathrm{V}^{-1}}{2},\ \alpha_1 = \theta_1 \mathrm{V}^{-1}, \ldots, \alpha_m = \theta_m \mathrm{V}^{-1} \right\}$$

où :

$$\mathrm{V} = \frac{1}{2\pi}\int_\mathrm{C} j(\omega)d\omega = 2\sum_{p=1}^{m+1} j_p(\theta_p - \theta_{p-1}) \tag{8}$$

■

Si la caractéristique considérée est hyperbolique (pas de multiplicateurs non triviaux sur le cercle unité), on a $m = 0$, et on lui associe un seul exposant normalisé, à savoir

$$\mathrm{V}^{-1} = \frac{1}{2(i_1 + n)} \in \mathbb{Q} \tag{9}$$

Considérons maintenant une famille finie x^q, $1 \leqslant q \leqslant \mathrm{N}$, de caractéristiques fermées. La caractéristique x^q a $2m^q$ multiplicateurs non triviaux sur le cercle unité, $0 \leqslant m^q \leqslant n - 1$, et $(1 + m^q)$ exposants normalisés α_p^q, $1 \leqslant p \leqslant 1 + m^q$. On considère la famille de réels :

$$\{1\}\ \{\alpha_p^q \mid 1 \leqslant q \leqslant \mathrm{N},\ 1 \leqslant p \leqslant 1 + m^q\} \tag{10}$$

On remarque qu'elle est de corang au moins N sur les rationnels. En effet, pour chaque q on a la relation à coefficients dans $\mathbb{Z}$:

$$1 = 2 \sum_{p=1}^{1+m^q} j_p^q(\alpha_p^q - \alpha_{p-1}^q) \tag{11}$$

et ces N relations sont indépendantes.

DÉFINITION 3. — On dit que la famille de caractéristiques x^q, $1 \leqslant q \leqslant \mathrm{N}$, est *non résonante* si la famille de réels (10) est exactement de corang N sur les rationnels. Elle est résonante dans le cas contraire. ■

Si $\mathrm{N} = 1$ on a affaire à une caractéristique seule. Dire qu'elle est non résonante, au sens de la définition 3, signifie qu'il n'existe pas d'entiers relatifs n_p non tous nuls tels que :

$$n_1\theta_1 + \ldots + n_m\theta_m = n_{m+1} \tag{12}$$

Il s'ensuit que les θ_p, $1 \leqslant p \leqslant m + 1$, sont linéairement indépendants sur les rationnels. Ils sont donc tous irrationnels, et en particulier aucun d'eux ne peut être nul. Ainsi, si une caractéristique est non résonante, ses multiplicateurs non triviaux sont différents de 1, et on est dans le cas (c) du lemme 1 : la solution périodique correspondante est non dégénérée.

Plus généralement, si une famille de caractéristiques x^q est non résonante, chacune des x^q est non résonante, et donc non dégénérée.

Une famille résonante contient une famille résonante minimale ; celle-ci ne contient aucune caractéristique hyperbolique.

Voici maintenant notre résultat principal :

THÉORÈME3. — Soit $n \geqslant 3$. S'il existe sur S une famille non résonante constituée de N caractéristiques fermées, il existera aussi une $(\mathrm{N} + 1)^{\text{eme}}$ caractéristique fermée n'appartenant pas à la famille.

Démonstration. — Soit donc $\mathscr{F}$ la famille en question. Supposons qu'il n'y ait pas d'autre caractéristique fermée.

Représentons donc S par un hamiltonien fidèle H. Les N caractéristiques fermées sur S sont représentées par N solutions périodiques de l'équation $\dot{x} = \mathrm{JH}'(x)$ sur le niveau $\mathrm{H} = 1$. Comme $\mathrm{H}(x) = j(x)^{3/2}$ pour tout $x \in \mathrm{S}$, l'équation est indépendante du choix de a, et il en est de même des périodes $\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_\mathrm{N}$ des solutions sur S. Nous nous réservons de faire tendre a vers $+\infty$.

Prenons $\mathrm{T} = \mathrm{Max}\{\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_\mathrm{N}\}$ et considérons le problème :

$$\left\{\begin{aligned} \dot{x} &= \mathrm{JH}'(x) \\ x(0) &= x(\mathrm{T}) \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Il a N solutions de période minimale T, soit $x^1, \ldots, x^\mathrm{N}$, sur les niveaux

$H = h_1, \ldots, h_N$. Il possède également d'autres solutions, mais ce ne peuvent être que des itérées des précédentes. La solution x^1 est accompagnée de solutions x_k^1, de période T/k, placées sur des niveaux décroissants, de $k = 2$ à $k = k_1$, où :

$$k_1 = E\left(\frac{a}{2}\varphi^{-1}(h_1)^2 h_1^{-1}\right) \tag{14}$$

d'après le tableau (II.4.2). De même pour $x^2, \ldots, x^N$.

Le problème (13) a donc en fait $k_1 + \ldots + k_N$ solutions. Les solutions primitives $x^1, \ldots, x^N$ sont par hypothèse non dégénérées. Elles sont également non résonantes, ce qui implique qu'aucun multiplicateur $\neq 1$ n'est racine de l'unité. Les résolvantes R^j de x^j et R_k^j de x_k^j sont liées par la relation $R_k^j = (R^j)^k$. En mettant R^j sous forme de Jordan, on en déduit que $\dim \operatorname{Ker}(I - R_k^j) = \dim \operatorname{Ker}(I - R^j) = 1$. Les solutions itérées x_k^j sont donc non dégénérées elles aussi.

Le lemme III.7 et la définition IV.1 nous montrent que la fonctionnelle ψ correspondante sur $L^3(0, T; \mathbb{R}^{2n})$ a l'origine comme point critique isolé; les autres orbites critiques étant non dégénérées. On peut donc appliquer le théorème III.8, suivant lequel ψ a au moins un point critique de chaque index pair plus petit que $2nE\left(a\dfrac{T}{2\pi}\operatorname{Min}\left(\dfrac{1}{R^2}, \gamma\right)\right)$.

Soit i_k^j l'index du k-ème itéré de x^j, donné par la formule (IV.66). En faisant tendre a vers l'infini, on voit que les i_k^j, $1 \leqslant j \leqslant N$, $1 \leqslant k < \infty$, doivent contenir tous les entiers pairs. Nous allons voir que ce n'est pas possible.

Commençons par séparer les solutions hyperboliques. Disons par exemple que ce sont les $(N - K)$ dernières x^j, $K+1 \leqslant j \leqslant N$, avec leurs itérées.

Pour ces solutions, l'index des itérées est donné par le corollaire IV.8. On a :

$$i_k^j = k(n + i_1^j) - n, \qquad K + 1 \leqslant j \leqslant N \tag{15}$$

Un entier pair $2p$ ne pourra être mis sous la forme (5) que si $(i_1^j + n)$ est un diviseur de $(2p + n)$. Si n est impair on peut choisir $(2p + n)$ premier, ce qui donne $i_1^j = 2p$. Si n est pair, on peut choisir $(2p + n)/2$ premier, ce qui donne $i_1^j = p - \left(\dfrac{n}{2}\right)$. Dans les deux cas, p peut prendre des valeurs arbitrairement grandes, alors que i_1^j ne peut prendre qu'une des valeurs $i_1^{K+1}, \ldots, i_1^N$. Il existe donc une infinité d'entiers pairs qui ne peuvent être mis sous la forme (15).

Soit $2\bar{p}$ l'un d'entre eux, choisi plus grand que tous les i_1^j. Soit d le plus petit commun multiple des $(i_1^j + n)$ et de 2. Les nombres de la forme $2\bar{p} + qd$, $q \in \mathbb{N}$, sont des entiers pairs, non représentables par la formule (15).

Passons maintenant aux autres solutions $x^1, \ldots, x^K$. La solution x^q

possède m^q multiplicateurs sur le demi-cercle supérieur, $1 \leqslant m^q \leqslant n-1$. Notons-les

(16) $$\omega_p^q = e^{2i\pi\theta_p^q}, \quad \text{avec} \quad 0 < \theta_p^q < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 1 \leqslant p \leqslant m^j$$

Posons $\theta_{1+m}^p = \frac{1}{2}$ et $\theta_0^p = 0$. L'unité est un multiplicateur caractéristique d'ordre deux. L'hypothèse de non-résonance implique que -1 ne saurait être un multiplicateur caractéristique.

En faisant appel au corollaire IV.9, on peut écrire :

$$i_k^q = i_1^q + 2\sum_{p=1}^{mq} j_p^q[\mathrm{E}(k\theta_p^q) - \mathrm{E}(k\theta_{p-1}^q)] + j_{m+1}^q(k - 1 - 2\mathrm{E}(k\theta_m^q))$$

(17) $$= i_1^q + (k-1)j_{m+1}^q + 2\sum_{p=1}^{m}(j_p^q - j_{p+1}^q)\mathrm{E}(k\theta_p^q)$$

On rappelle que j_p^q est la valeur de $j^q(\omega)$ entre ω_{p-1}^q et ω_p^q, l'exposant q indiquant que l'on travaille sur la solution x^q. On a calculé $j_p^q - j_{p+1}^q = -\Delta j^q(\omega_p^q)$ grâce à la proposition IV.6, et on rappelle que $j_1^q = i_1^q + n$.

En posant $j_{m+1}^q = (j_{m+1}^q - j_m^q) + \ldots + (j_2^q - j_1^q) + j_1^q$, la formule (17) s'écrit :

(18) $$i_k^q = ki_1^q + (k-1)n + \sum_{p=1}^{m^q}[2\mathrm{E}(k\theta_p^q) - k + 1](j_p^q - j_{p+1}^q)$$

On en déduit que la suite i_k^q, $k \in \mathbb{N}$, est croissante pour chaque q fixé. En effet :

(19) $$i_{k+1}^q - i_k^q = i_1^q + n + \sum_{p=1}^{m^q}(j_p^q - j_{p+1}^q)\Delta_p^q$$

(20) $$\Delta_p^q = 2\mathrm{E}((k+1)\theta_p) - 2\mathrm{E}(k\theta)_p - 1$$

On a $-1 \leqslant \Delta_p^q \leqslant 1$. Par ailleurs, $|j_p^q - j_{p+1}^q|$ est inférieur ou égal à la multiplicité de ω_p^q, et la somme des multiplicités est un nombre $\overline{m}^q$, avec $m_q \leqslant \overline{m}_q \leqslant n - 1$. Finalement :

(21) $$i_1^q + n - \overline{m}^q \leqslant i_{k+1}^q - i_k^q \leqslant i_1^q + n + \overline{m}^q$$

Considérons le tore T^q, produit de $(m^q + 1)$ exemplaires du cercle $\mathrm{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Écrivons l'ensemble $\{1, \ldots, m^q\}$ comme réunion disjointe $\mathrm{A}^q \cup \mathrm{B}^q \cup \mathrm{C}^q$, avec :

(22) $$\mathrm{A}^q = \{ p \mid j_p^q - j_{p+1}^q > 0 \}$$

(23) $$\mathrm{B}^q = \{ p \mid j_p^q - j_{p+1}^q = 0 \}$$

(24) $$\mathrm{C}^q = \{ p \mid j_p^q - j_{p+1}^q < 0 \}$$

A chaque $p \in A^q \cup C^q$, on associe un intervalle ouvert $I_p^q =]a_p^q, b_p^q[$, avec :

$$\text{si } p \in A^q : \quad 1 - \theta_p^q < a_p^q < b_p^q < 1 \tag{25}$$

$$\text{si } p \in C^q : \quad 0 < a_p^q < b_p^q < 1 - \theta_p^q \tag{26}$$

Ainsi, si $s \in I_p$, on a $s + \theta_p^q > 1$ ou $s + \theta_p^q < 1$ suivant que $p \in A^q$ ou $p \in C^q$. Choisissons $\varepsilon^q \in]0, (b^q - a^q)/2[$ assez petit pour que $s \in I_p^q$ et $|s - s'| < \varepsilon^q$ implique que $0 < s' < 1$ et que $s' + \theta_p^q > 1$ ou $s' + \theta_p^q < 1$ suivant que $p \in A^q$ ou $p \in C^q$.

Enfin, dans le $(m^q + 1)^{\text{eme}}$ exemplaire de S^1, reportons l'intervalle $I_0^q =]0, \varepsilon^q[$. Ceci nous permet de définir dans T^q le pavé ouvert :

$$U^q = \prod_{p=0}^{m^q} I_p^q \tag{27}$$

Considérons maintenant le tore :

$$T = \prod_{q=1}^{K} T^q \tag{28}$$

qui contient le pavé :

$$U = \prod_{q=1}^{K} U^q \tag{29}$$

Construisons dans le tore T une suite $\sigma(t)$, indexée par $t \in \mathbb{N}$, et dépendant des paramètres réels positifs β^q, avec $1 \leqslant q \leqslant K$:

$$\sigma_p^q(t) = (\gamma^q t + \beta^q)\theta_p^q \quad \text{modulo } 1 \tag{30}$$

Dans ces formules, on a posé :

$$\theta_0^q = 1, \qquad 1 \leqslant q \leqslant K \tag{31}$$

$$\gamma^q = d/V^q \tag{32}$$

On rappelle que d est le PPCM de 2 et des $(i_1^j + n)$, pour $K+1 \leqslant j \leqslant N$, et que $V^q = \lim\limits_{k \to \infty} k^{-1} i_k^q$ est donné par :

$$V^q = \frac{1}{2\pi} \int_C j^q(\omega) d\omega$$

$$V^q = 2 \sum_{p=1}^{m+1} j_q^p(\theta_p^q - \theta_{p-1}^q) \tag{33}$$

$$= j_{m+1}^q + \sum_{p=1}^{m} 2(j_p^q - j_{p+1}^q)\theta_p^q$$

Les coefficients $\gamma^q\theta_p^q$ des équations (30) vérifient les relations :

$$(34) \qquad 2j_{m+1}^q\gamma^q\theta_{m+1}^q + \sum_{p=1}^{m} 2(j_p^q - j_{p+1}^q)\gamma^q\theta_p^q = d, \qquad 1 \leqslant q \leqslant \mathrm{K}$$

D'après l'hypothèse de non résonance, ils ne vérifient pas d'autre relation de ce type à coefficient dans $\mathbb{Z}$ (noter que $\gamma^q\theta_p^q = \alpha_p^q d$ pour $p \neq 0$).
La suite $\sigma(t)$ est donc dense dans l'ensemble $\mathrm{T}' \subset \mathrm{T}$ défini par les K équations :

$$(35) \qquad j_{m+1}^q(\sigma_0^q - \beta^q\theta_0^q) + \sum_{p=1}^{m} 2(j_q^p - j_{p+1}^q)(\sigma_p^q - \beta^q\theta_p^q) \in \mathbb{Z}g^q + d$$

où g^q est le plus grand commun diviseur des j_p^q pour $1 \leqslant p \leqslant m^q + 1$. Cet ensemble T' est une sous-variété compacte de codimension K dans T (en fait, une réunion finie de tores).
On peut toujours choisir les β^q de telle sorte que T' rencontre U. Il suffit pour cela que, pour $1 \leqslant q \leqslant \mathrm{K}$, l'on ait :

$$(36) \qquad \frac{1}{2} j_{m+1}^q\varepsilon^q + \sum_{p=1}^{m} (j_p^q - j_{p+1}^q)(b_p^q - a_p^q) \in \beta^q\mathrm{V}^q + \mathbb{Z}g^q + d$$

Moyennant ce choix des β^q, il existera une infinité de valeurs $t \in \mathbb{N}$ pour lesquelles $\sigma(t) \in \mathrm{U}$.
Donnons à t l'une de ces valeurs, et notons k la partie entière de $\sigma_0^q(t)$:

$$(37) \qquad k = \mathrm{E}(\gamma^q t + \beta^q)$$

On a $k \geqslant 1$ si t est choisi assez grand. Comme $\sigma^q(t) \in \mathrm{I}_0^q$, on a :

$$(38) \qquad 0 < \gamma^q t + \beta^q - k < \varepsilon^q$$

Donc, pour $1 \leqslant p \leqslant m^q$:

$$(39) \qquad k\theta_p^q < \sigma_p^q(t) = (\gamma^q t + \beta^q)\theta_p^q < k\theta_p^q + \varepsilon^q\theta_p^q$$

Par définition de I_p^q pour $p \neq 0$, on a :

$$(40) \qquad \mathrm{E}(k\theta_p^q) = \mathrm{E}(\sigma_p^q(t))$$

$$(41) \qquad a_p^q < \sigma_p^q - \mathrm{E}(\sigma_p^q(t)) < 1 \qquad \text{si} \quad p \in \mathrm{A}^q$$

$$(42) \qquad 0 < \sigma_p^q - \mathrm{E}(\sigma_p^q(t)) < b_p^q \qquad \text{si} \quad p \in \mathrm{C}^q$$

On aura donc, en tenant compte de (18) :

$$i_k^q = ki_1^q + (k-1)n + \sum_{p=1}^{m} [2\mathrm{E}(k\theta_p^q) - k + 1](j_p^q - j_{p+1}^q)$$

$$= ki_1^q + (k-1)n + \sum_{p=1}^{m} [2\mathrm{E}(\sigma_p^q(t)) - k + 1](j_p^q - j_{p+1}^q)$$

$$= ki_1^q + (k-1)n + \sum_{p=1}^{m} (2\sigma_p^q(t) - k)(j_p^q - j_{p+1}^q) +$$

$$+ \sum_{\mathrm{C}} (j_p^q - j_{p+1}^q) - \sum_{\mathrm{A}} (j_p^q - j_{p+1}^q) + r_k^q$$

$$= k\left[i_1^q + n + \sum_{p=1}^{m} (2\theta_p^q - 1)(j_p^q - j_{p+1}^q) \right] + s_k^q +$$

$$+ \sum_{\mathrm{C}} (j_p^q - j_{p+1}^q) - \sum_{\mathrm{A}} (j_p^q - j_{p+1}^q) - n + r_k^q$$

$$= k\mathrm{V}^q - \sum_{p=1}^{m} | j_p^q - j_{p+1}^q | - n + s_k^q + r_k^q \tag{43}$$

$$| r_k^q | \leqslant \sum_{p \in \mathrm{A}} (1 - a_p^q) | j_p^q - j_{p+1}^q | + \sum_{p \in \mathrm{C}} b_q^p | j_p^q - j_{p+1}^q | \tag{44}$$

$$| s_k^q | \leqslant \sum_{p=1}^{m} 2\varepsilon^q \theta_p^q | j_p^q - j_{p+1}^q | \leqslant \varepsilon^q \sum_{p=1}^{m} | j_p^q - j_{p+1}^q | \tag{45}$$

On n'apas utilisé encore toutes les propriétés de I_p. On sait que :

$$(k+1)\theta_p^q < \sigma_p^q(t) + \theta_p^q < (k+1)\theta_p^q + \varepsilon^q \theta_p^q \tag{46}$$

D'après les formules (25) et (26), on aura :

$$\mathrm{E}((k+1)\theta_p^q) = \mathrm{E}(k\theta_p^q) + 1 \qquad \text{si} \qquad p \in \mathrm{A}^q \tag{47}$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
i_{k+1}^{q} &= (k+1)i_{1}^{q} + kn + \sum_{p=1}^{m} [2\mathrm{E}((k+1)\theta_{p}^{q}) - k](j_{p}^{q} - j_{p+1}^{q}) \\
&= i_{k}^{q} + i_{1} + n + \sum_{p\in A} (j_{p}^{q} - j_{p+1}^{q}) - \sum_{p\in C} (j_{p}^{q} - j_{p+1}^{q}) \\
&= i_{k}^{q} + i_{1} + n + \sum_{p} | j_{p}^{q} - j_{p+1}^{q} | \\
&= k\mathrm{V}^{q} + i_{1} + s_{k}^{q} + r_{k}^{q}
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Le schéma de la démonstration est maintenant clair. On commence par choisir les a_{p}^{q}, les b_{p}^{q} et les ε^{q} de façon à ce que :

$$
| r_{k}^{q} | < 0{,}1 \tag{49}
$$

$$
| s_{k}^{q} | < 0{,}1 \tag{50}
$$

$$
\left| \frac{1}{2} j_{m+1}^{q} \varepsilon^{q} + \sum_{p=1}^{m} (j_{p}^{q} - j_{p+1}^{q})(b_{p}^{q} - a_{p}^{q}) \right| < 0{,}1 \tag{51}
$$

$$
| u_{k}^{q} | < 0{,}1, \qquad \text{avec} \qquad u_{k}^{q} = (\gamma^{q} t + \beta^{q} - k)\mathrm{V}^{q} \tag{52}
$$

On choisit ensuite les β^{q} de telle sorte que

$$
2\bar{p} - 1 + 0{,}1 \geqslant \beta^{q}\mathrm{V}^{q} - \sum_{p=1}^{m} | j_{p} - j_{p+1} | - n \geqslant 2\bar{p} - 1 - g^{q} - 0{,}1 \tag{53}
$$

La formule (36) nous offre cette possibilité. On rappelle que les index de la forme $2\bar{p} + d\mathbb{N}$ ne sont pas atteints par les solutions hyperboliques et que g^{q} est le PGCD des j_{p}^{q}.

On a alors, d'après les formules (43) et (32) :

$$
\begin{aligned}
i_{k}^{q} &= (\gamma^{q} t + \beta^{q})\mathrm{V}^{q} - n - \sum_{p=1}^{m} | j^{q} - j_{p+1}^{q} | + r_{k}^{q} + s_{k}^{q} - u_{k}^{q} \\
&= td + \left[\beta^{q}\mathrm{V}^{q} - n - \sum_{p=1}^{m} | j_{k}^{q} - j_{p+1}^{q} | \right] + r_{k}^{q} + s_{k}^{q} - u_{k}^{q}
\end{aligned}
\tag{54}
$$

Le premier membre de cette expression est entier. Au second membre, td est entier, et l'expression entre crochets est à une distance au plus 0,1 d'un entier de la forme $2\bar{p} - g_{0}^{q} - 1$ avec $0 \leqslant g_{0}^{q} \leqslant g^{q}$. Donc :

$$
i_{k}^{q} = td + 2\bar{p} - g_{0}^{q} - 1 \tag{55}
$$

D'après la formule (48) :

$$i_{k+1}^q = td + 2\overline{p} - g_0^q + i_1 + n + \sum_p | j_p^q - j_{p+1}^q | \tag{56}$$

Comme g^q divise les j_p^q, on a :

$$\sum_p | j_p^q - j_{p+1}^q | \geqslant g^q \geqslant g_0^q \tag{57}$$

Donc :

$$i_{k+1}^q \geqslant td + 2\overline{p} + n \tag{58}$$

Finalement, on a :

$$i_k^q < td + 2p < i_{k+1}^q \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant q \leqslant K. \tag{59}$$

Comme les suites i_k^q, $k \in \mathbb{N}$, sont croissantes quel que soit q, l'index pair $td + 2\overline{p}$ n'est réalisé ni par les solutions hyperboliques ni par les autres. D'où le résultat.

VI. UN RÉSULTAT GÉNÉRIQUE

Commençons par introduire une structure de variété sur l'ensemble $\mathcal{S}$ des hypersurfaces $S \subset \mathbb{R}^{2n}$, compactes, de classe C^k avec $k \geqslant 3$, et de courbure gaussienne strictement positive. Si $S \in \mathcal{S}$, elle borde un convexe C, et nous nous intéressons plus particulièrement à :

$$\mathcal{S}_0 = \{ S \in \mathcal{S} \mid 0 \in \operatorname{Int} C \} \tag{1}$$

Nous allons montrer que $\mathcal{S}_0$ est le domaine d'une carte locale, et par translation dans $\mathbb{R}^{2n}$, on obtiendra un atlas de $\mathcal{S}$ tout entier.

Tout $S \in \mathcal{S}_0$ est caractérisé par sa jauge

$$j_S(x) = \inf \{ \lambda > 0 \mid x \in \lambda C \} \tag{2}$$

C'est une fonction de classe C^k sur $\mathbb{R}^{2n} \backslash \{ 0 \}$, positivement homogène de degré 1. On a :

$$S = \{ x \mid j_S(x) = 1 \}. \tag{3}$$

Notons Σ la sphère-unité de $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\Sigma = \{ x \mid \| x \| = 1 \} \tag{4}$$

Toute fonction positivement homogène de degré 1 est caractérisée par sa restriction à Σ. Réciproquement, toute fonction sur Σ s'étend en une fonction positivement homogène de degré 1.

On note Ω l'ensemble des $f \in C^k(\mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\}, \mathbb{R})$, positivement homogènes de degré 3/2, telles que :

$$(5) \qquad \begin{cases} (a) \quad f(x) > 0 & \forall x \in \Sigma \\ (b) \quad f''(x) \text{ défini positif} & \forall x \neq 0 \end{cases}$$

Nous identifions Ω à un ouvert de $C^k(\Sigma, \mathbb{R})$ par l'application de restriction $f \to f|_\Sigma$. L'application $S \to j_S^{3/2}$ est alors une carte de $\mathscr{S}_0$ dans $C^k(\Sigma, \mathbb{R})$.

Notons :

$$(6) \qquad H_S(x) = j_S(x)^{3/2}$$

et associons à $S \in \mathscr{S}_0$ le système hamiltonien :

$$(7) \qquad \dot{x} = JH'_S(x)$$

Notons φ_S le flot associé à cette équation différentielle : $\varphi_S(t, \xi) = x(t)$, où x est la solution de l'équation (7) satisfaisant à la condition initiale $x(0) = \xi$.

Notons $R_S(t, \xi)$ la résolvante de l'équation linéarisée :

$$(8) \qquad \frac{d}{dt} R_S(t) = JH''(\varphi_S(t, \xi))R_S(t), \qquad R_S(0) = I$$

Nous allons considérer deux applications :

$$(9) \qquad \begin{cases} F_1 : \mathscr{S}_0 \times]0, \infty[\times (\mathbb{R}^{2n}\backslash\{0\}) \to \mathbb{R}^{2n} \\ F_1(S, T, x) = \varphi_S(T, x) - x \end{cases}$$

$$(10) \qquad \begin{cases} F_2 : \mathscr{S}_0 \times]0, \infty[\times \Sigma \to \mathbb{R}^{2n} \times Sp(2n) \\ F_2(S, T, x) = (\varphi_S(T, x) - x, R_S(T, x)) \end{cases}$$

Ici, on désigne par $Sp(2n)$ le groupe des matrices symplectiques $2n \times 2n$, c'est-à-dire des matrices M vérifiant $M^*JM = J$. On rappelle que l'algèbre de Lie associée est constituée des matrices M vérifiant $M^*J + JM = 0$, soit $M = JM^*J$. Notons-la $sp(2n)$.

LEMME 1. — F_1 et F_2 sont des submersions.

Démonstration. — Fixons (S, T, x). Il s'agit de montrer que les applications tangentes $TF_1(S, T, x)$ et $TF_2(S, T, x)$ sont surjectives.

Occupons-nous d'abord de la première :

$$(11) \qquad \begin{aligned} TF_1(S, T, x) &: C^k(\Sigma, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n} \\ (f, s, \xi) &\to \zeta(f) + JH'_S(\varphi_S(T, x))s + (R(T, x) - I)\xi \end{aligned}$$

où $\zeta(f)$ est la valeur à l'instant T de la solution du problème de Cauchy :

$$(12) \qquad \dot{\zeta} = JH''_S(\varphi_S(t, x))\zeta + Jf'(\varphi_S(t, x)), \qquad \zeta(0) = 0$$

On a étendu f en une fonction positivement homogène de degré 3/2 sur $\mathbb{R}^{2n}$ tout entier, c'est-à-dire que l'on a posé $f(x) = \| x \|^{3/2} f(x \| x \|^{-1})$.

En prenant f de la forme particulière

$$f(x) = (z, x) \,|\, (z, x) \,|^{1/2} \tag{13}$$

on met l'équation (12) sous la forme :

$$\dot{\zeta} - \mathrm{J}\mathrm{H}''_{\mathrm{S}}(\varphi_{\mathrm{S}}(t, x))\zeta = \mathrm{J}cz, \qquad \zeta(0) = 0 \tag{14}$$

$$c = \frac{3}{2} \int_0^{\mathrm{T}} |\, (z, \varphi_{\mathrm{S}}(t, x)) \,|^{1/2} dt > 0 \tag{15}$$

L'application $z \to \zeta(\mathrm{T})$ de $\mathbb{R}^{2n}$ dans lui-même est bijective, puisque l'équation homogène associée à (14) n'a que la solution triviale. L'application $f \to \zeta(f)$ est *a fortiori* surjective, ainsi que $\mathrm{TF}_1(\mathrm{S}, \mathrm{T}, x)$.

Passons à la seconde :

$$\mathrm{TF}_2(\mathrm{S}, \mathrm{T}, x) : \mathrm{C}^k(\Sigma, \mathbb{R}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n} \times sp(2n) \tag{16}$$

Notons pr_1 la projection de $\mathbb{R}^{2n} \times sp(2n)$ sur $\mathbb{R}^{2n}$, et pr_2 la projection sur $sp(2n)$. On a :

$$pr_1 \circ \mathrm{TF}_2(\mathrm{S}, \mathrm{T}, x) = \mathrm{TF}_1(\mathrm{S}, \mathrm{T}, x)\,. \tag{17}$$

Occupons-nous donc de $pr_2 \circ \mathrm{TF}_2(\mathrm{S}, \mathrm{T}, x)$, ou plutôt de sa première composante $r(f)$, obtenue en faisant $s = 0$ et $\xi = 0$. Elle est donnée par $r(f) = r(\mathrm{T})$, où la matrice $r(t)$ est solution du problème de Cauchy :

$$\dot{r} = \mathrm{J} f''(\varphi_{\mathrm{S}}(t, x))\mathrm{R}_{\mathrm{S}}(t) + \mathrm{J}(\mathrm{H}'''(\varphi_{\mathrm{S}}(t, x)), \zeta(t))\mathrm{R}_{\mathrm{S}}(t) + \\ + \mathrm{J}\mathrm{H}''(\varphi_{\mathrm{S}}(t, x))r, \qquad r(0) = 0 \tag{18}$$

Ici $\zeta(t)$ est la solution de l'équation (12).

On a de nouveau affaire à un problème linéaire non homogène.

Comme la trajectoire $\varphi_{\mathrm{S}}(t, x)$, $t \in \mathbb{R}$, reste sur un homothétique de S, sa projection radiale sur Σ n'a pas de point double, et on peut donc faire varier indépendamment f' et f'' le long de cette trajectoire. Plus précisément, quels que soient les applications continues $\eta : [0, \mathrm{T}] \to \mathbb{R}^{2n}$ et $\mathrm{A} : [0, \mathrm{T}] \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n})$ pourvu que $\mathrm{A}^*(t) = \mathrm{A}(t)$ quel que soit t, on pourra trouver f tel que :

$$f'(\varphi_{\mathrm{S}}(t, x)) = \eta(t) \tag{19}$$

$$f''(\varphi_{\mathrm{S}}(t, x)) = \mathrm{A}(t) \tag{20}$$

En gardant f' fixe et en faisant varier f'' dans l'équation (18), on gardera ζ fixe, et on fera décrire à $r(t)$ un sous-espace affine de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n})$. Si par exemple on pose $f''(\varphi_{\mathrm{S}}(t, x)) = \mathrm{A}$, où A est une matrice symétrique constante, on fera décrire à $r(\mathrm{T})$ un sous-espace de même dimension que le sous-espace des matrices symétriques, c'est-à-dire $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Mais c'est aussi la dimension de $sp(2n)$ (dire que $M \in Sp(2n)$ c'est dire que JM est symétrique). Donc $r(T)$ décrit tout l'espace tangent à $Sp(2n)$ en $R_S(T, x)$.

Finalement, quand f décrit $C^k(\Sigma, \mathbb{R})$, le couple $(\zeta(f), r(f))$ décrit $\mathbb{R}^{2n} \times sp(2n)$. Donc $TF_2(S, T, x)$ est bien une submersion. ■

THÉORÈME 2. — Munissons $\mathscr{S}$ de la topologie C^k, avec $3 \leqslant k \leqslant \infty$. Alors l'ensemble des $S \in \mathscr{S}$ dont les caractéristiques fermées constituent une famille infinie non résonante est un G_δ dense.

Démonstration. — C'est une application simple du théorème de transversalité de Thom, tel qu'il est exposé dans [*1*].

On dit qu'une famille infinie est non résonante si chaque sous-famille finie est non résonante.

Prenons d'abord k fini, et montrons qu'il existe un G_δ dense $G_0 \subset \mathscr{S}_0$ tel que si $S \in G_0$, toutes ses caractéristiques fermées sont non dégénérées.

Pour cela, on considère l'application F_1 et la sous-variété $\{0\}$ de $\mathbb{R}^{2n}$. Comme F_1 est une submersion, elle est transversale à $\{0\}$. D'après le théorème de transversalité de Thom, il existe dans $\mathscr{S}_0$ un G_δ dense G_0 tel que, si $S \in G_0$, l'application partielle :

$$(T, x) \to F_1(S, T, x) = \varphi_S(T, x) - x \tag{21}$$

est transversale à $\{0\}$. Cela signifie que si $\varphi_S(T, x) = x$, c'est-à-dire si $t \to \varphi_S(t, x)$ est une solution T-périodique, on doit avoir :

$$\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}JH_S'(x) + (R_S(T, x) - I)\mathbb{R}^{2n} \tag{22}$$

En particulier, le corang de $(R_S(T, x) - I)$ est un, donc la dimension du noyau est un, et la solution périodique trouvée est non dégénérée.

Montrons maintenant qu'il existe un G_δ dense $G_1 \subset \mathscr{S}_0$ tel que, si $S \in G_1$, chacune de ses caractéristiques fermées est non dégénérée et non résonante.

Fixons une relation de résonance, par exemple $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3\alpha_0$. Après multiplication par V, on obtient $\theta_1 + 3\theta_2 = 3$, où $e^{\pm 2i\pi\theta_1}$ et $e^{\pm 2i\pi\theta_2}$ sont des valeurs propres de $R(T)$. L'ensemble des matrices symplectiques qui vérifient cette relation est un ensemble stratifié M de codimension $\geqslant 1$ dans $Sp(2n)$.

Considérons l'application F_2 et l'ensemble stratifié $W = \{0\} \times M$ dans le produit $\mathbb{R}^{2n} \times Sp(2n)$. Comme F_2 est une submersion, elle est transversale à W. D'après le théorème de transversalité de Thom, il existe dans $\mathscr{S}_0$ un G_δ dense G tel que, si $S \in G$, l'application partielle

$$(T, x) \to F_2(S, T, x) \tag{23}$$

est transversale à W. Son image réciproque est donc, soit vide, soit une sous-variété fermée de même codimension que W, c'est-à-dire $(2n + 1)$. Mais l'espace de départ, $]0, \infty[\times \Sigma$, n'est que de dimension $1 + 2n - 1 = 2n$, et ne saurait contenir de sous-variété de codimension $2n+1$. Donc l'image de $]0, \infty[\times \Sigma$ par l'application (23) ne rencontre pas W.

On a donc trouvé un G_δ dense G tel que, si $S \in G$, la relation $\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3\alpha_0$ n'a pas lieu. On procède de même pour chaque relation de résonance possible; comme il n'y en a qu'une infinité dénombrable, l'intersection de tous les G_δ denses correspondant sera encore un G_δ dense (théorème de Baire). D'où le résultat.

Il ne reste plus qu'à éliminer les relations de résonance entre plusieurs trajectoires. Soit par exemple $\alpha_1 + 2\alpha'_2 = 3\alpha''_0$. Elle relie les exposants normalisés de trois trajectoires, c'est-à-dire qu'elle s'écrit aussi

$$\frac{\theta}{V} + 2\frac{\theta'}{V'} = 3\frac{1}{V''} \tag{24}$$

où $e^{2in\theta}$ et $e^{2in\theta'}$ sont des multiplicateurs caractéristiques de deux solutions périodiques distinctes, et où V est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{2\pi}\int_C j(\omega)d\omega = 2\sum_{p=1}^{m+1} j_p(\theta_p - \theta_{p-1}) \tag{25}$$

Si on connaît l'opérateur de monodromie R(T) associé à une trajectoire T-périodique, on connaît certainement les θ_p puisque les $e^{\pm i2\pi\theta_p}$ sont des valeurs propres de R(T), on connaît les sauts $(j_p - j_{p-1})$ par la proposition IV.6, mais on ne connaît pas j_1. On tourne cette difficulté en donnant à j_1 successivement toutes les valeurs entières $(n-1)$, n, $(n+1)$, ... On obtient ainsi pour V une infinité dénombrable de valeurs possibles $V_0, V_1, V_2, \ldots$, parmi lesquelles figure certainement la bonne.

Pour chaque choix de (j_1, j'_1, j''_1) la relation (24) se traduit par une relation entre les valeurs propres de R(T), R'(T'), R''(T''). Elle définit dans l'espace produit $Sp(2n)^3$ un ensemble stratifié M de codimension $\geqslant 1$.

On considère alors dans $(]0, \infty[\times \Sigma)^3$ l'ouvert $\mathscr{U}$ constitué par les couples (T, x), (T', x'), (T'', x'') qui sont deux à deux différents, et l'application :

$$F_3 : \mathscr{S}_0 \times \mathscr{U} \to [\mathbb{R}^{2n} \times Sp(2n)]^3$$

qui à $(S, T, x, T', x', T'', x'')$ associe :

$$(\varphi_S(T, x) - x,\ \varphi_S(T', x') - x',\ \varphi_S(T'', x'') - x'',\ R_S(T, x),\ R_S(T', x'),\ R_S(T'', x''))$$

On constate que F_3 est une submersion, et d'après le théorème de transversalité de Thom il existera dans $\mathscr{S}_0$ un G_δ dense G tel que l'application partielle obtenue en fixant S dans G soit transversale à $\{0\} \times M = W$. L'image réciproque de W est donc soit vide, soit une sous-variété fermée de même codimension, à savoir $6n+1$. L'espace de départ $\mathscr{U}$ n'étant que de dimension $6n$, c'est que l'image réciproque de W est vide pour tout S de G.

On prend l'intersection de tous les G_δ denses obtenus en faisant varier j_1, j'_1, j''_1, et on obtient encore un G_δ dense G'. Pour $S \in G'$, la relation $\alpha_1 + 2\alpha'_2 = 3\alpha''_2$ n'a pas lieu. Puis on prend l'intersection de tous les G_δ denses associés à toutes les relations de résonance possibles. On obtient un G_δ dense G_2.

Le G_δ dense $G_0 \cap G_1 \cap G_2 \subset \mathscr{S}_0$ répond à la question. ■

VII. COMPLÉMENTS

A. Stabilité.

Les résultats précédents permettent aussi d'obtenir des lumières sur la stabilité des solutions périodiques de l'équation

$$\dot{x} = JH'(x) \tag{1}$$

où H est un hamiltonien convexe, que l'on ne suppose plus positivement homogène.

Rappelons d'abord la notion de stabilité forte d'une matrice symplectique.

DÉFINITION 1. — On dit qu'une matrice M est *stable* si $\| M^n \|$ est uniformément borné quand $n \to \pm \infty$. On dit qu'une matrice symplectique est *fortement stable* si toutes les matrices symplectiques suffisamment voisines sont stables. ■

Il est clair qu'une matrice est stable si et seulement si elle est diagonalisable et a toutes ses valeurs propres sur le cercle-unité. La notion de stabilité forte n'a de sens que pour les matrices symplectiques : elle signifie alors que la matrice est stable, et qu'il n'y a pas de valeurs propres multiples de type (p, q) avec p et $q \neq 0$ (voir [*19*], [*23*] ou [*29*]; on a défini le type au § IV). En d'autres termes, les valeurs propres multiples sont de type $(p, 0)$ (positif) ou $(0, q)$ (négatif).

Soit maintenant une solution T-périodique non dégénérée x de l'équation (1). Soit $R(t)$ la résolvante de l'équation linéarisée

$$\dot{y} = JH''(x(t))y\,. \tag{2}$$

On sait que 1 est valeur propre double de R(T). On peut donc écrire :

$$\mathbb{R}^{2n} = \operatorname{Ker}(R(I) - I)^2 \oplus E \tag{3}$$

où E est de dimension $(2n - 2)$ et stable par R(T). L'opérateur $R(T)_E \in \mathscr{L}(E)$, obtenu en posant :

$$R(T)_E\xi = R(T)\xi \qquad \forall \xi \in E \tag{4}$$

préserve la structure symplectique J_E induite par J sur E :

$$(J_E\xi, \eta) = (J\xi, \eta) \qquad \forall(\xi, \eta) \in E \times E \tag{5}$$

Donc $R(T)_E$ sera représenté par une matrice symplectique $(2n-2) \times (2n-2)$ dans une base adéquate de E. Cette matrice aura les mêmes valeurs propres que R(T), à l'exception de 1, avec la même multiplicité et le même type.

DÉFINITION 2. — On dira que x est *orbitalement linéairement fortement stable* (OLFS) si $R(T)_E$ est fortement stable. ■

L'élimination de la première valeur propre 1 est naturelle dans tous les problèmes autonomes : une perturbation minime de la période se traduira toujours par de grands écarts sur la position $x(t)$ quand $t \to \pm\infty$. L'élimination de la seconde valeur propre 1 signifie qu'on fixe le niveau d'énergie $H(x)$ à une valeur h : les perturbations de $x(t)$ que l'on considère ont lieu sur l'hypersurface $H(x) = h$.

On peut alors énoncer :

PROPOSITION 3. — On suppose $n \geqslant 3$. Soit x une solution T-périodique non dégénérée. Notons $(i_+ - n)$ et i_- respectivement l'index des formes quadratiques Q_+ et Q_- données par :

$$\begin{cases} Q_+(y) = \displaystyle\int_0^T \left[\frac{1}{2}(J\dot{y}, y) + (G''(-J\dot{x})J\dot{y}, J\dot{y})\right] dt \\ y \in H_1^1 = \{ y \in H^1 \mid y(0) = y(T) \} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_-(y) = \displaystyle\int_0^T \left[\frac{1}{2}(J\dot{y}, y) + (G''(-J\dot{x})J\dot{y}, J\dot{y})\right] dt \\ y \in H_{-1}^1 = \{ y \in H^1 \mid y(0) = -y(T) \} \end{cases}$$

On a toujours $i_- \geqslant 1$ et $|i_+ - i_-| \leqslant n-1$. Si $|i_+ - i_-| = n-1$, la solution x est OLFS. Dans ce dernier cas, les multiplicateurs non triviaux appartenant au demi-cercle supérieur ont tous le même type, positif si $i_+ - i_1 = n-1$, négatif si $i_- - i_+ = n-1$.

Démonstration. — L'inégalité $i_- \geqslant 1$ avait déjà été remarquée à la fin du § IV (corollaire IV.10). D'après la proposition IV.6, $|i_+ - i_-|$ est au plus égal à la somme des multiplicités des valeurs propres de $R(T) - I$ présentes sur le demi-cercle supérieur, à l'exception de ± 1. Cette somme est inférieure à $(n-1)$, et ne peut lui être égale que si les $(2n-2)$ multiplicateurs non triviaux sont tous situés sur le cercle unité, différents de ± 1, et si les sauts $\Delta j(\omega)$ donnés par la proposition IV.6 ont tous lieu dans le même sens quand on passe de $\omega = +1$ à $\omega = -1$. D'où le résultat.

Un résultat analogue avait déjà été établi dans [*30*], avec une autre démonstration pour des systèmes hamiltoniens non autonomes.

B. Prolongements.

L'auteur conjecture que la fonction ψ du théorème III.8 a au moins une orbite critique de chaque index pair plus petit que $2\mathrm{E}n\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\frac{a}{\mathrm{R}^2}\right)$.

Pour le démontrer, il faudrait une étude plus précise de la fonction $\psi \circ r_{\mathrm{N}}$ à l'origine : la relation III (95), jointe au fait que l'expression

$$t^{-2}\psi \circ r_{\mathrm{N}}(t\xi_1, \dots, t\xi_{\mathrm{N}}), \qquad t > 0$$

a une limite finie quand $t \to 0$, quel que soit le choix de $(\xi_1, \dots, \xi_{\mathrm{N}})$, suffit peut-être à montrer que l'origine n'intervient pas dans les relations de Morse entre les points critiques d'index $\leqslant n_2$ ou $\geqslant n_1$.

L'avantage serait double :

a) En remplaçant $\mathrm{E}\left(a\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\mathrm{Min}\left(\frac{1}{\mathrm{R}^2}, \gamma\right)\right)$ par $\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\frac{a}{\mathrm{R}^2}\right)$ dans le théorème 8, on éliminerait la constante γ des énoncés ultérieurs, qui se trouveraient ainsi étendus au cas $\gamma = 0$. Les théorèmes A et B resteraient donc vrais sous la seule hypothèse que S soit le bord d'un convexe de classe C^3, sans qu'il soit besoin de supposer que sa courbure gaussienne soit strictement positive.

b) On retrouverait ainsi de manière simple le résultat de J. M. Lasry et l'auteur [9]. En effet, si ψ a au moins une orbite critique de chaque index pair plus petit que $2n\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\frac{a}{\mathrm{R}^2}\right)$, cela fait au moins $n\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\frac{a}{\mathrm{R}^2}\right)$ orbites critiques, donc autant de solutions du problème :

$$\dot{x} = \mathrm{JH}'(x), \qquad x(0) = x(\mathrm{T}) \tag{8}$$

On sait par ailleurs que les solutions de ce problème sont groupées par familles homothétiques, de périodes T, T/2, ..., T/k. D'après le théorème de Croke-Weinstein (proposition II.5) on doit avoir $\frac{\mathrm{T}}{k} \geqslant \frac{2r}{a} r^2$, ce qui donne:

$$k \leqslant \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\frac{a}{r^2}\right) \tag{9}$$

On trouve donc au moins $n\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\frac{a}{\mathrm{R}^2}\right)$ solutions périodiques, groupées en familles dont chacune a eu plus $\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\frac{a}{r^2}\right)$ membres. Cela fait au moins :

$$n\frac{\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\frac{a}{\mathrm{R}^2}\right)}{\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{T}}{2\pi}\frac{a}{r^2}\right)} \tag{10}$$

familles distinctes, chacune correspondant à une caractéristique fermée sur S.

En choisissant T dans la formule (10) de telle sorte que $E\left(\frac{T}{2\pi}\frac{a}{R^2}\right) = 1$, on obtient l'estimation :

$$N \geqslant \frac{n}{E\left(\frac{R^2}{r^2}\right)} \tag{11}$$

où N est le nombre de caractéristiques fermées distinctes tracées sur S, chacune étant supposée non dégénérée. Si par exemple $R < r\sqrt{2}$, on trouve $N \geqslant n$, conformément au théorème d'Ekeland-Lasry [*17*].

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] R. ABRAHAM et J. ROBBIN, *Transversal mappings and flows*. Benjamin.

[*2*] H. AMANN et E. ZEHNDER, Nontrivial solutions for a class of nonresonance problems and applications to nonlinear differential equations *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, t. **7**, 1980, p. 539-603.

[*3*] V. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*. Éditions Mir, 1980 (original russe, 1978).

[*4*] V. ARNOLD, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Éditions Mir, 1974 (original russe, 1972).

[*5*] W. BALLMANN, G. THORBERGSSON et W. ZILLER, Closed geodesics on positively curved manifolds. *Annals of Math.*, t. **116**, 1982, p. 213-247.

[*6*] H. BERESTYCKI, J. M. LASRY, G. MANCINI et B. RUF, *Existence of multiple periodic orbits on starshaped Hamiltonian surfaces*. Preprint, 1983.

[*7*] G. BIRKHOFF, *Dynamical systems*. AMS Colloquium Publications, 1927 (réédité, 1966).

[*8*] R. BOTT, Non-degenerate critical manifolds. *Ann. of Math.*, 1954, p. 248-261.

[*9*] R. BOTT, On the iteration of closed geodesics and Sturm intersection theory. *Comm. PAM*, t. **9**, 1956, p. 176-206.

[*10*] R. BOTT, Morse theory, old and new. *Bull. AMS (New Series)*, t. **7**, 1982, p. 331-358.

[*11*] F. CLARKE, Periodic solutions of Hamiltonian inclusions. *J. Diff. Eq.*, t. **40**, 1980, p. 1-6.

[*12*] F. CLARKE et I. EKELAND, Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period. *Comm. Pure App. Math.*, t. **33**, 1980, p. 103-116.

[*13*] C. CONLEY et E. ZEHNDER, Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations. *Comm. Pure App. Math.*, to appear.

[*14*] C. CROKE et A. WEINSTEIN, Closed curves on convex hypersurfaces and periods of nonlinear oscillations. *Inv. Math.*, t. **64**, 1981, p. 199-202.

[*15*] J. DUISTERMAAT, On the Morse index in variational calculus. *Advances in Math.*, t. **21**, 1976, p. 173-195.

[*16*] I. EKELAND, Periodic solutions of Hamilton's equations and a theorem of P. Rabinowitz. *J. Diff. Eq.* t. **34**, 1979, p. 523-534.

[*17*] I. EKELAND et J. M. LASRY, On the number of closed trajectories for a Hamiltonian flow on a convex energy surface. *Ann. Math.*, t. **112**, 1980, p. 283-319.

[*18*] I. EKELAND et R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod-Gauthier-Villars.

[*19*] I. Gelfand et V. Lidsky, On the structure of the regions of stability of linear canonical systems of differential equations with periodic coefficients. *Uspekhi Math. Naouk*, t. **10**, 1955, p. 3-40 (*AMS Translation*, t. **8**, 1958, p. 143-181).

[*20*] S. Jorna, ed., *Topics is nonlinear dynamics*. AIP Conference Proceedings, 1978.

[*21*] Klingenberg, *Lectures on closed geodesics*. Springer, 1981.

[*22*] M. Krasnosellskii, *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*. Pergamon Press.

[*23*] M. Krein, Generalisation of certain investigations of A.M. Liapounov on linear differential equations with periodic coefficients. *Doklady Akad. Naouk, USSR*, t. **73**, 1950, p. 445-448.

[*24*] W. Meyer, Kritische Mannigfaltigkeiten in Hilbertmannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, t. **170**, 1967, p. 45-66.

[*25*] V. Nemytskii et V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*. Princeton University Press, 1960.

[*26*] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gauthier-Villars, p. 1892-1899.

[*27*] R. Robinson, *The C^1 closing lemma*, preprint.

[*28*] M. Struwe, *On a critical point theory for minimal surfaces spanning a wire*. Bonn preprint SFB n° 569.

[*29*] V. Yakubovich et V. Starzhinskii, *Linear differential equations with periodic coefficients*. Halsted Press, John Wiley et Sons.

[*30*] I. Ekeland, Dualité et stabilité des systèmes hamiltoniens, *CRAS Paris*, t. **294**, 1982, p. 673-676.

[*31*] I. Ekeland, Une théorie de Morse pour les systèmes hamiltoniens, *CRAS Paris*, t. **296**, 1983, p. 117-120.

(Manuscrit reçu le 15 juin 1983)