Ann. Inst. Henri Poincaré,

Vol. 16, n° 5, 1999, p. 563-591 *Analyse non linéaire*

Minoration du temps d'existence pour l'équation de Klein-Gordon non-linéaire en dimension 1 d'espace

par

J.-M. DELORT

Laboratoire Analyse Géométrie et Applications, UMR CNRS 7539,
Institut Galilée, Université Paris-Nord, avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

RÉSUMÉ. – Soit u la solution de l'équation de Klein-Gordon semi-linéaire en dimension 1 d'espace

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + u = F(u, \partial_t u, \partial_x u)$$

avec une nonlinéarité F quadratique et des données de Cauchy petites, C^∞ à support compact, $u|_{t=0} = \epsilon u_0$, $\partial_t u|_{t=0} = \epsilon u_1$. Moriyama, Tonegawa et Tsutsumi ont montré que le temps d'existence T_ϵ de la solution vérifie alors $\liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log T_\epsilon > 0$. Le but de cet article est de montrer que $\liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log T_\epsilon \geq A$, où A est une constante explicite s'exprimant en fonction de u_0, u_1 et de la nonlinéarité.

ABSTRACT. – Let u be a solution to the semilinear Klein-Gordon equation in one space dimension

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + u = F(u, \partial_t u, \partial_x u),$$

where F is a quadratic nonlinearity and the Cauchy data $u|_{t=0} = \epsilon u_0$, $\partial_t u|_{t=0} = \epsilon u_1$ are small in C_0^∞. Moriyama, Tonegawa and Tsutsumi have shown that the time of existence of the solution satisfies $\liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log T_\epsilon > 0$. The aim of this paper is to prove that $\liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log T_\epsilon \geq A$ for a constant A which can be explicitly computed from the Cauchy data and the nonlinearity.

© 1999 L'Association Publications de l'Institut Henri Poincaré. Published by Elsevier B.V. All rights reserved

© 1999 L'Association Publications de l'Institut Henri Poincaré. Published by Elsevier B.V. All rights reserved

0. INTRODUCTION

Soient f et g deux fonctions C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}^d$. Si pour u fonction C^∞ sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, muni des coordonnées (t, x), on note u' (resp. u'') les dérivées d'ordre 1 (resp. 2) de u par rapport à toutes les variables, et si $F(u, u', u'')$ désigne une fonction C^∞ de ses arguments, linéaire en u'', considérons la solution u de l'équation de Klein-Gordon nonlinéaire :

$$(0.0.1) \qquad \Box u + u = F(u, u', u''), \quad u|_{t=0} = \epsilon f, \quad \partial_t u|_{t=0} = \epsilon g$$

où ϵ désigne un petit paramètre. Si l'on suppose F nulle à l'ordre 2 en 0, Klainerman [16] et Shatah [20] ont indépendamment prouvé que, en dimension $d \geq 3$, la solution de (0.0.1) existe globalement en temps pour $\epsilon > 0$ assez petit. Ce résultat a été étendu à la dimension 2 par Simon et Taflin [21] et par Ozawa, Tsutaya et Tsutsumi [19]. Enfin, en dimension 1, Moriyama, Tonegawa et Tsutsumi [18] ont prouvé que l'intervalle maximal d'existence de la solution $[0, T_\epsilon[$ vérifie $T_\epsilon \geq Ce^{c/\epsilon^2}$ pour une constante $c > 0$, résolvant ainsi une conjecture d'Hörmander. D'après Yordanov [23], un tel ordre de grandeur du temps d'existence est optimal. Le but de cet article est de donner une minoration explicite de la constante c à partir de quantités reliées aux données de Cauchy et à la nonlinéarité.

En effet, lorsqu'on considère le problème analogue pour l'équation des ondes, $\Box u = F(u', u'')$, on sait d'après John-Klainerman [12] et Klainerman [13], [14] qu'il y a existence globale en dimension $d \geq 4$ et que le temps d'existence est minoré par c/ϵ^2 (resp. $Ce^{c/\epsilon}$) en dimension $d = 2$ (resp. $d = 3$). Hömander [9], [10] a donné une minoration explicite de c en utilisant une solution approchée de l'équation. Le fait que cette borne inférieure soit en fait égale au temps où se produit l'explosion n'a été connu pendant longtemps que dans des cas particuliers, d'après les travaux de John [11]. Récemment, Alinhac, en conclusion d'une suite de travaux consacrés à ces questions, et pour la bibliographie exhaustive desquels nous renvoyons à sa monographie [1], et à ses articles les plus récents [2], [3], [4], a prouvé que, en dimension 2, pour une équation d'onde quasilinéaire générale, et des données initiales génériques, la minoration établie par Hörmander donne bien le temps d'explosion de la solution. Il a en outre obtenu un développement asymptotique complet du temps d'existence en fonction de ϵ, et une description de la solution au voisinage du point d'explosion.

Notre but ici est plus modeste : nous nous contentons d'obtenir, pour l'équation de Klein-Gordon en dimension 1, une minoration de $\liminf_{\epsilon\to 0}\epsilon^2\log T_\epsilon$, qui est l'analogue de celle due à Hörmander pour l'équation des ondes, et que nous prouvons par une méthode similaire de construction d'une solution asymptotique. Le minorant de $\liminf_{\epsilon\to 0}\epsilon^2\log T_\epsilon$ obtenu est égal à $+\infty$ lorsque la nonlinéarité vérifie une propriété que nous appelons « condition nulle » par référence aux conditions introduites par Christodoulou [5] et Klainerman [15] pour l'équation des ondes en dimension 3. Contrairement à ces auteurs, nous ne savons pas prouver que cette condition nulle entraîne l'existence globale pour (0.0.1). Ce résultat est toutefois connu dans un certain nombre de cas particuliers d'après les travaux de Moriyama [17], ce dont nous discutons au paragraphe 1.2.

L'essentiel du travail consiste en la construction d'une solution approchée, décrite dans la section 2. La section 3 donne la preuve du théorème, en appliquant la méthode de Moriyama, Tsutaya et Tsutsumi à la différence entre la solution approchée et la solution exacte cherchée. Il s'agit en fait de combiner la réduction à une forme normale de Shatah [20] à l'utilisation des champs de Klainerman [16]. Nous reprenons à cette occasion nombre de résultats de [18] afin de les mettre dans un cadre qui facilite l'écriture de la preuve du théorème.

1. MINORATION DU TEMPS D'EXISTENCE ET CONDITION NULLE

1.1. Énoncé du théorème

Désignons par $(t,x) = (x_0,x_1)$ les coordonnées sur $\mathbb{R}^2$, et notons $\partial_0 = \partial_t, \partial_1 = \partial_x, D_t = D_0 = \frac{1}{i}\partial_t, D_x = D_1 = \frac{1}{i}\partial_x, \Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ l'opérateur de d'Alembert en dimension 1. Nous nous proposons d'étudier le temps d'existence des solutions de l'équation de Klein-Gordon quasi-linéaire

$$\begin{aligned} \Box u + u &= F(u,\partial_t u,\partial_x u,\partial_t\partial_x u,\partial_x^2 u) \\ u|_{t=0} &= \epsilon f \\ \partial_t u|_{t=0} &= \epsilon g \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

où $f,g\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ sont données à valeurs réelles, lorsque le petit paramètre ϵ tend vers 0. La nonlinéarité F sera supposée polynômiale, à coefficients réels, nulle à l'ordre 2 à l'origine, au plus de degré 1 en les dérivées secondes. On sait grâce aux travaux de Georgiev [7] et Moriyama, Tonegawa et Tsutsumi [18] que si F est indépendante des dérivées secondes, ou bien est nulle à l'ordre 3 en 0, l'équation (1.1.1) admet une unique solution maximale définie sur $[0, T_\epsilon[$ avec $T_\epsilon \geq Ce^{c/\epsilon^2}$ pour une certaine constante $c > 0$. Une telle minoration est optimale en général, d'après Yordanov [23]. Nous nous proposons ici de minorer c i.e. d'étudier $\liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log T_\epsilon$. Comme les nonlinéarités nulles à l'ordre 4 à l'origine donnent lieu à des solutions définies globalement en temps, nous nous limiterons au cas où F s'écrit

$$F = Q + P \tag{1.1.2}$$

avec Q (resp. P) polynôme homogène de degré 2 (resp. 3). Nous décomposerons

$$\begin{aligned} Q(u, \partial_t u, \partial_x u, \partial_t\partial_x u, \partial_x^2 u) &= \sum_{k=0}^{2} i^k Q_k(u, D_t D_x u, D_x^2 u; D_t u, D_x u) \\ P(u, \partial_t u, \partial_x u, \partial_t\partial_x u, \partial_x^2 u) &= \sum_{k=0}^{3} i^k P_k(u, D_t D_x u, D_x^2 u; D_t u, D_x u) \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

où $Q_k(T_1, T_2, T_3; Z_1, Z_2)$ (resp. $P_k(T_1, T_2, T_3; Z_1, Z_2)$) est un polynôme réel homogène de degré k en $Z = (Z_1, Z_2)$ et $2 - k$ (resp. $3 - k$) en $T = (T_1, T_2, T_3)$, le degré en (T_2, T_3) étant en outre inférieur ou égal à 1. On écrit de plus

$$\begin{aligned} Q_0(T_1, T_2, T_3) &= Q_0'(T_1) + Q_0''(T_1, T_2, T_3) \\ Q_1(T; Z) &= Q_1'(T_1; Z_1, Z_2) + Q_1''(T_2, T_3; Z_1, Z_2) \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

où Q_0' est quadratique, Q_0'' est linéaire en T_1 et en (T_2, T_3), Q_1' et Q_1'' sont linéaires en T et linéaires en Z. Si $(\omega_0, \omega_1) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$\begin{aligned} q_k(\omega_0, \omega_1) &= Q_k(1, \omega_0\omega_1, \omega_1^2; \omega_0, \omega_1) \quad 0 \leq k \leq 2 \\ p_k(\omega_0, \omega_1) &= P_k(1, \omega_0\omega_1, \omega_1^2; \omega_0, \omega_1) \quad 0 \leq k \leq 3 \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

et pour $k = 0, 1$ on décompose q_k en $q_k' + q_k''$ d'après (1.1.4). Si $y \in]-1, 1[$ et

$$\omega_0(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \ \omega_1(y) = \frac{-y}{\sqrt{1 - y^2}} \tag{1.1.6}$$

nous définirons

$$\begin{aligned} \Phi(y) = {} & p_1(\omega_0(y), \omega_1(y)) + 3p_3(\omega_0(y), \omega_1(y)) \\ & + q_1'(q_0' + q_2)(\omega_0(y), \omega_1(y)) - q_1''(q_0'' + 2q_2)(\omega_0(y), \omega_1(y)). \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Associons d'autre part aux données de Cauchy f, g la quantité suivante

$$\Gamma(y) = \frac{1}{8\pi}(1 - y^2)^{-1}(|\hat{f}(\omega_1(y))|^2 + (1 - y^2)|\hat{g}(\omega_1(y))|^2) \tag{1.1.8}$$

et définissons $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par la relation

$$\frac{1}{A} = \sup_{y \in]-1,1[} (\Gamma(y)\Phi(y)). \tag{1.1.9}$$

On remarquera que $A > 0$ puisque, Γ étant nul à l'ordre infini sur $|y| = 1$, $\Gamma(y)\Phi(y)$ tend vers 0 si $y \to \pm 1$. Le théorème que nous nous proposons de prouver est le suivant :

THÉORÈME 1.1.1. – *Supposons, soit que F est indépendante de $\partial_t \partial_x u$ et $\partial_x^2 u$, soit que $Q \equiv 0$. L'unique solution de (1.1.1) est définie sur un intervalle maximal d'existence $[0, T_\epsilon[$ vérifiant*

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log T_\epsilon \geq A.$$

Remarque. – Le théorème précédent est également valable si on remplace l'hypothèse $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ par $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nous nous limitons au cas de données à support compact dans un souci de simplification technique de certaines preuves. Le cas plus général de données à décroissance rapide se traiterait en remplaçant dans les sections 3.1 et 3.2 les normes L^2 ou L^∞ utilisées par des normes à poids, comme dans l'article de Moriyama, Tonegawa et Tsutsumi [18].

La preuve du théorème va consister en l'obtention d'une solution approchée à (1.1.1), suivie de l'utilisation de la méthode de Moriyama-Tonegawa-Tsutsumi [18]. Les restrictions imposées à F dans l'énoncé du théorème proviennent du fait que cette méthode ne s'applique que sous de telles conditions.

Lorsque $\Phi(y) \equiv 0$, le théorème affirme que $\liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log T_\epsilon = +\infty$, et il est naturel d'introduire la définition suivante :

DÉFINITION 1.1.2. – *On dit que la nonlinéarité F vérifie la condition nulle si et seulement si $\Phi(y) \equiv 0$.*

Remarquons que l'expression de $\Phi(0)$ a été obtenue par Hörmander [10] section 7.5, dans le cas de la dimension 0 d'espace, par l'intermédiaire de considérations d'énergie. Nous ne savons pas si la condition nulle entraîne l'existence globale pour $\epsilon > 0$ assez petit. Toutefois, dans le cas de nonlinéarités cubiques, un certain nombre de résultats sont connus. Nous nous proposons d'en discuter dans le paragraphe suivant.

1.2. Condition nulle pour des nonlinéarités cubiques

Nous supposons dans ce paragraphe $Q \equiv 0$. La fonction $\Phi(y)$ est alors donnée par

$$\Phi(y) = p_1(\omega_0(y), \omega_1(y)) + 3p_3(\omega_0(y), \omega_1(y)). \tag{1.2.1}$$

Introduisons également

$$\Psi(y) = -3p_0(\omega_0(y), \omega_1(y)) - p_2(\omega_0(y), \omega_1(y)). \tag{1.2.2}$$

DÉFINITION 1.2.1. – *On dira que P vérifie la condition nulle (resp. la condition nulle avec comportement asymptotique libre) si et seulement si $\Phi(y) \equiv 0$ (resp. $\Phi(y) \equiv 0$ et $\Psi(y) \equiv 0$).*

La terminologie précédente sera justifiée au paragraphe 2, lorsque nous verrons que la solution approchée que nous construirons aura, lorsque $\Phi(y) \equiv 0$, un comportement asymptotique de solution libre de l'équation de Klein-Gordon, si et seulement si on a de plus $\Psi(y) \equiv 0$.

Les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 étant au plus d'ordre 1 en T_2, T_3, ils peuvent se décomposer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} P_0 &= aT_1^3 + T_1^2 L(T_2, T_3) \\ P_1 &= T_1^2 L^1(Z_1, Z_2) + T_1 T_2 L^2(Z_1, Z_2) + T_1 T_3 L^3(Z_1, Z_2) \\ P_2 &= T_1 Q^1(Z_1, Z_2) + T_2 Q^2(Z_1, Z_2) + T_3 Q^3(Z_1, Z_2) \\ P_3 &= P_3(Z_1, Z_2) \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

où $a \in \mathbb{R}$, L, L^1, L^2, L^3 sont des formes linéaires à coefficients réels, Q^1, Q^2, Q^3 des formes quadratiques réelles. Remarquons que $p_k(\omega_0, \omega_1)$ n'est autre que $P_k(T^2, XY, Y^2; X, Y)$ restreint à $T = 1, X = \omega_0, Y = \omega_1$. Comme lorsque y décrit $]-1, 1[$, $(\omega_0(y), \omega_1(y))$ décrit une branche de l'hyperbole

$$1 = \omega_0^2 - \omega_1^2 \tag{1.2.4}$$

la condition $\Phi(y) \equiv 0$ s'écrit encore

$$P_1(T^2, XY, Y^2; X, Y) + 3P_3(T^2, XY, Y^2; X, Y)T^2 = 0 \tag{1.2.5}$$

sur l'hyperbole $X^2 = Y^2 + T^2$, et la condition $\Psi(y) \equiv 0$ s'écrit

$$3P_0(T^2, XY, Y^2; X, Y) + P_2(T^2, XY, Y^2; X, Y)T^2 = 0 \tag{1.2.6}$$

sur l'hyperbole $X^2 = Y^2 + T^2$. (Il est immédiat que les conditions (1.2.5), (1.2.6) sont satisfaites sur toute l'hyperbole dès qu'elles le sont sur une de ses composantes.)

Définissons

(1.2.7)
$$\mathcal{P}_0 = \{(P_0, P_1, P_2, P_3), \text{polynômes de la forme (1.2.3) vérifiant (1.2.5)}\}$$
$$\mathcal{P}_1 = \{(P_0, P_1, P_2, P_3), \text{polynômes de } \mathcal{P}_0 \text{ vérifiant (1.2.6)}\}$$

espace des nonlinéarités vérifiant respectivement la condition nulle et la condition nulle avec comportement asymptotique libre.

PROPOSITION 1.2.2. – *L'espace vectoriel $\mathcal{P}_0$ est de dimension 18 et le sous-espace $\mathcal{P}_1$ de dimension 13.*

Démonstration. – Notons E' (resp. E'') l'espace des couples (P_1, P_3) (resp. (P_0, P_2)) de la forme (1.2.3), E'_0 (resp. E''_0) le sous-espace de E' (resp. E'') donné par (1.2.5) (resp. (1.2.6)). On a donc $\mathcal{P}_0 = E'_0 \times E''$, $\mathcal{P}_1 = E'_0 \times E''_0$ et E'' est de dimension 12. Pour que (P_1, P_3) appartienne à E'_0, il faut et il suffit que

$$T^2 L^1(X,Y) + XYL^2(X,Y) + Y^2 L^3(X,Y) + 3P_3(X,Y)$$

soit divisible par $X^2 - Y^2 - T^2$ soit encore, de manière équivalente, que

$$(X^2 - Y^2)L^1(X,Y) + XYL^2(X,Y) + Y^2 L^3(X,Y) + 3P_3(X,Y) \equiv 0.$$

Donc P_3 est déterminé par (L^1, L^2, L^3) i.e. E'_0 est de dimension 6.

Pour que (P_0, P_2) appartienne à E''_0, il faut et il suffit que

$$3(aT^4 + T^2 L(XY, Y^2)) + T^2 Q^1(X,Y) + XYQ^2(X,Y) + Y^2 Q_3(X,Y)$$

soit divisible par $X^2 - Y^2 - T^2$ soit encore

$$\begin{aligned}(1.2.8)\quad 3a(X^2 - Y^2)^2 + (X^2 - Y^2)[3YL(X,Y) + Q^1(X,Y)]\\ + XYQ^2(X,Y) + Y^2 Q_3(X,Y) \equiv 0.\end{aligned}$$

Alors, nécessairement

$$XYQ^2(X,Y) + Y^2 Q_3(X,Y) = (X^2 - Y^2)YH(X,Y)$$

pour une forme linéaire H. On en déduit qu'il existe une deuxième forme linéaire M telle que

$$Q^2 = XH - YM, \; Q^3 = -YH + XM.$$

Reportant dans (1.2.8), on obtient $Q^1 = -3a(X^2 - Y^2) - 3YL(X,Y) - YH(X,Y)$ i.e. E_0'' est paramétré par a, L, H, M : il est donc de dimension 7. $\square$

Il est tentant de conjecturer que le problème (1.1.1) admet une solution globale lorsque $\epsilon > 0$ est assez petit pour toute nonlinéarité de $\mathcal{P}_0$, et que cette solution a un comportement de solution libre à l'infini pour toute nonlinéarité de $\mathcal{P}_1$. Moriyama [17] (cf. également Yagi [22]) a prouvé qu'il y a existence globale avec comportement libre à l'infini pour 7 nonlinéarités linéairement indépendantes, dont on vérifie aisément qu'elles appartiennent à $\mathcal{P}_1$. Comme $\mathcal{P}_1$ est de dimension 13, ces nonlinéarités n'épuisent pas tous les cas où on peut espérer un tel résultat.

Le seul cas, à notre connaissance, où l'existence globale soit connue sans que la condition $\Psi(y) \equiv 0$ soit également satisfaite, est celui où la nonlinéarité ne dépend que de u et pas des dérivées. L'existence globale découle alors de considérations d'énergie et, pour $F(u) = u^3$, on a $\Phi(y) \equiv 0, \Psi(y) \equiv -3$. Dans ce cas, Georgiev et Yordanov [8] ont prouvé que la solution ne peut avoir à l'infini un comportement de solution libre.

2. SOLUTION APPROCHÉE

Nous nous proposons de construire une solution approchée à (1.1.1). Nous considérons une nonlinéarité de la forme $Q + P$ donnée par (1.1.2). Nous ne supposons pas nécessairement dans cette section que les hypothèses du théorème 1.1.1 sont satisfaites i.e. nous autorisons des nonlinéarités quasilinéaires quadratiques. En effet, les restrictions imposées dans l'énoncé du théorème 1.1.1 ne sont utiles que pour la preuve de l'existençe d'une solution exacte à (1.1.1).

2.1. Solution asymptotique

Commençons par rappeler le développement asymptotique de la solution du problème linéaire. Nous noterons $\mathcal{V}$ l'algèbre de Lie engendrée par les champs ∂_t, ∂_x, $t\partial_x + x\partial_t$ et pour $k \in \mathbb{N}$ et u distribution sur $\mathbb{R}^2$, nous noterons $\mathcal{V}^k u$ la famille de distributions obtenue en faisant agir de manière itérée sur u au plus k champs de $\mathcal{V}$. Nous poserons pour $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ avec $|x| \leq |t|$

$$\varphi(t,x) = \sqrt{t^2 - x^2} \tag{2.1.1}$$

et nous fixons $\chi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \chi_2 \equiv 1$ au voisinage de 0 et $\chi_1 = 1 - \chi_2$.

PROPOSITION 2.1.1. – *Soient $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, à support dans un intervalle $]-m, m[$, à valeurs réelles. La solution u^0 du problème linéaire $\square u^0 + u^0 = 0$, $u^0|_{t=0} = \epsilon f$, $\partial_t u^0|_{t=0} = \epsilon g$ s'écrit pour $t > 0$ sous la forme $u^0(t,x) = \chi_1(t)U_1^0(t,x) + \chi_1(t)U_{-1}^0(t,x) + r(t,x)$ où*

$$U_1^0(t,x) = \epsilon t^{-1/2} e^{i\varphi(t,x)} a_1^0(x/t) \tag{2.1.2}$$

avec

(2.1.3)

$$a_1^0(y) = \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi}}(1-y^2)^{-3/4}[\hat{f}(\omega_1(y)) - i\sqrt{1-y^2}\,\hat{g}((\omega_1(y))] \text{ si } |y| < 1,$$
$$a_1^0(y) = 0 \text{ si } |y| \geq 1$$

et où $U_{-1}^0 = \bar{U}_1^0$ et r est une fonction C^∞ à valeurs réelles, supportée dans $|x| \leq m + t$, vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$||\mathcal{V}^k r(t,.)||_{L^\infty} \leq C_k \epsilon (1+t)^{-3/2}. \tag{2.1.4}$$

Démonstration. – On a $\hat{u}(t,\xi) = \epsilon e^{it\sqrt{1+\xi^2}}\hat{h}_+(\xi) + \epsilon e^{-it\sqrt{1+\xi^2}}\hat{h}_-(\xi)$ avec

$$\hat{h}_\pm(\xi) = \frac{1}{2}\left[\hat{f}(\xi) \mp i\frac{\hat{g}(\xi)}{\sqrt{1+\xi^2}}\right].$$

D'après [10] théorème 7.2.5, la solution de l'équation $D_t v = \sqrt{1+D_x^2}v, v|_{t=0} = h$, s'écrit

$$v(t,x) = e^{i\varphi(t,x)}\frac{t^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\chi_1(t)e^{i\pi/4}\left(1 - \frac{x^2}{t^2}\right)^{-3/4}\hat{h}\left(\frac{-x}{\sqrt{t^2-x^2}}\right)$$
$$+ s(t,x)e^{i\varphi(t,x)} + s'$$

où s est un symbole en (t,x) d'ordre $-3/2$, supporté dans $|x| \leq |t|$, et $s' \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. La proposition résulte de cette expression et de la vitesse finie de propagation.

Soient $a_j(s,y), 0 \leq j \leq 3$, des fonctions C^∞ sur $[0, A[\times\mathbb{R}$, supportées dans $|y| \leq 1$, a_0 étant à valeurs réelles, et a_j à valeurs complexes pour $j \geq 1$. Si (t,x) vérifie $t > 0, \epsilon^2 \log t < A$ et $|x| < t$, nous poserons

$$\begin{aligned}
U_1(t,x) &= \frac{\epsilon}{\sqrt{t}}e^{i\varphi(t,x)}a_1\left(\epsilon^2\log t, \frac{x}{t}\right)\\
U_0(t,x) &= \frac{\epsilon^2}{t}a_0\left(\epsilon^2\log t, \frac{x}{t}\right)\\
U_2(t,x) &= \frac{\epsilon^2}{t}e^{2i\varphi(t,x)}a_2\left(\epsilon^2\log t, \frac{x}{t}\right)\\
U_3(t,x) &= \frac{\epsilon^3}{t^{3/2}}e^{3i\varphi(t,x)}a_3\left(\epsilon^2\log t, \frac{x}{t}\right)\\
U_{-j}(t,x) &= \overline{U_j(t,x)} \quad j = 1,2,3.
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Ces fonctions sont prolongées par 0 pour $|x| \geq t$.

THÉORÈME 2.1.2. – *Soit A la constante définie par (1.1.9). Il existe des fonctions*

$$(s, y) \to a_j(s, y), \quad 0 \leq j \leq 3,$$

vérifiant les conditions précédentes, avec de plus $a_1(0, y) = a_1^0(y)$, telles que si l'on définit, avec les notations (2.1.5),

$$U(t,x) = \sum_{j=-3}^{j=3} U_j(t,x), \tag{2.1.6}$$

la fonction

$$S(t,x) = \Box U + U - F(U, \partial_t U, \partial_x U, \partial_t \partial_x U, \partial_x^2 U) \tag{2.1.7}$$

vérifie
$\forall A' < A, \forall k \in \mathbb{N}, \exists C > 0$ *et* $\forall \epsilon \in]0,1[, \forall t \in [1, e^{A'/\epsilon^2}]$

$$||\mathcal{V}^k S(t,.)||_{L^\infty} \leq C(\epsilon^2 t^{-2} + \epsilon t^{-5/2}). \tag{2.1.8}$$

Nous désignerons désormais par $R_{\alpha,\beta}(t,x)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+)$ toute fonction C^∞ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, à support dans $|x| \leq t$, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ avec

$$||\mathcal{V}^k R_{\alpha,\beta}(t,.)||_{L^\infty} \leq C \frac{\epsilon^\alpha}{t^\beta} \quad \forall t \geq 1. \tag{2.1.9}$$

Nous utiliserons les expressions suivantes (où $\omega_0 = \omega_0(x/t), \omega_1 = \omega_1(x/t)$)

(2.1.10)

$$\begin{aligned}
D_t U_1 &= \omega_0 U_1 + i \frac{\epsilon}{t^{3/2}} e^{i\varphi} \left[\frac{1}{2} a_1 - \epsilon^2 \partial_s a_1 + y \partial_y a_1 \right] \Big(\epsilon^2 \log t, \frac{x}{t} \Big) \\
D_x U_1 &= \omega_1 U_1 - i \frac{\epsilon}{t^{3/2}} e^{i\varphi} \partial_y a_1 \Big(\epsilon^2 \log t, \frac{x}{t} \Big) \\
D_t^2 U_1 &= \omega_0^2 U_1 + i \frac{\epsilon}{t^{3/2}} e^{i\varphi} \\
&\qquad \times \left[\omega_0^3 a_1 - 2\epsilon^2 \omega_0 \partial_s a_1 + 2\omega_0 y \partial_y a_1 \right] \Big(\epsilon^2 \log t, \frac{x}{t} \Big) + R_{1,5/2} \\
D_x^2 U_1 &= \omega_1^2 U_1 + i \frac{\epsilon}{t^{3/2}} e^{i\varphi} \left[\omega_0^3 a_1 - 2\omega_1 \partial_y a_1 \right] \Big(\epsilon^2 \log t, \frac{x}{t} \Big) + R_{1,5/2}
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\Box U_1 + U_1 = 2i \frac{\epsilon^3}{t^{3/2}} e^{i\varphi} \omega_0 \partial_s a_1 \Big(\epsilon^2 \log t, \frac{x}{t} \Big) + R_{1,5/2}. \tag{2.1.11}$$

D'autre part, si α, β vaut 0 ou 1, on peut écrire :

(2.1.12)

$$
\begin{aligned}
&D_\alpha U_0 = R_{2,2}, \qquad D_\alpha U_2 = 2\omega_\alpha U_2 + R_{2,2}, \qquad D_\alpha U_3 = 3\omega_\alpha U_3 + R_{3,5/2}\\
&D_\alpha D_\beta U_1 = \omega_\alpha \omega_\beta U_1 + R_{1,3/2}\\
&D_\alpha D_\beta U_0 = R_{2,2}, \qquad D_\alpha D_\beta U_2 = 4\omega_\alpha \omega_\beta U_2 + R_{2,2}\\
&D_\alpha D_\beta U_3 = 9\omega_\alpha \omega_\beta U_3 + R_{3,5/2}.
\end{aligned}
$$

LEMME 2.1.3. – *La quantité* $\square U + U$ *s'écrit*

$$
\begin{aligned}
(2.1.13)\qquad & 2i\frac{\epsilon^3}{t^{3/2}}\omega_0 \partial_s a_1 e^{i\varphi} - 2i\frac{\epsilon^3}{t^{3/2}}\omega_0 \partial_s \bar{a}_1 e^{-i\varphi}\\
&+ \frac{\epsilon^2}{t} a_0 - 3\frac{\epsilon^2}{t}\left[a_2 e^{2i\varphi} + \bar{a}_2 e^{-2i\varphi}\right]\\
&- 8\frac{\epsilon^3}{t^{3/2}}\left[a_3 e^{3i\varphi} + \bar{a}_3 e^{-3i\varphi}\right] + R_{1,5/2} + R_{2,2}.
\end{aligned}
$$

Le lemme résulte immédiatement des expressions (2.1.11), (2.1.12). Pour démontrer le théorème, il nous reste à comparer (2.1.13) à $F(U, \partial_t U, \partial_x U, \partial_t \partial_x U, \partial_x^2 U)$.

LEMME 2.1.4 . – *On a l'expression suivante :*

$$
\begin{aligned}
(2.1.14)\qquad & Q(U, \partial_t U, \partial_x U, \partial_t \partial_x U, \partial_x^2 U)\\
&= \frac{\epsilon^3}{t^{3/2}} e^{3i\varphi}[2q_0' + 5q_0'' - 4q_2 + 3i(q_1' + 2q_1'')]a_1 a_2\\
&+ \frac{\epsilon^2}{t} e^{2i\varphi}[q_0' + q_0'' - q_2 + i(q_1' + q_1'')]a_1^2\\
&+ \frac{\epsilon^3}{t^{3/2}} e^{i\varphi}[(2q_0' + 5q_0'' + 4q_2 + i(q_1' - 2q_1''))a_2\bar{a}_1\\
&\qquad + (2q_0' + q_0'' + iq_1')a_0 a_1]\\
&+ \frac{\epsilon^2}{t} 2(q_0' + q_0'' + q_2)|a_1|^2\\
&+ \textit{termes conjugués des trois premiers} + R_{2,2}.
\end{aligned}
$$

Démonstration. – D'après (2.1.12),

$$
D_\alpha U = \omega_\alpha \sum_{|j|\le 2} jU_j + R_{1,3/2}, \quad D_\alpha D_\beta U = \omega_\alpha \omega_\beta \sum_{|j|\le 2} j^2 U_j + R_{1,3/2}.
$$

On aura donc, avec les notations (1.1.3)

$$\begin{aligned}(2.1.15)\quad & Q_k(U, D_tD_xU, D_x^2U; D_tU, D_xU)\\ &= Q_k\Big(\sum_{|j|\le 2} U_j, \omega_0\omega_1 \sum_{|j|\le 2} j^2U_j, \omega_1^2 \sum_{|j|\le 2} j^2 U_j;\\ &\qquad \omega_0 \sum_{|j|\le 2} jU_j, \omega_1 \sum_{|j|\le 2} jU_j\Big) + R_{2,2}\\ &= \Big(\sum_{|j|\le 2} jU_j\Big)^k Q_k\Big(\sum_{|j|\le 2} U_j, \omega_0\omega_1 \sum_{|j|\le 2} j^2 U_j,\\ &\qquad \omega_1^2 \sum_{|j|\le 2} j^2U_j; \omega_0, \omega_1\Big) + R_{2,2}.\end{aligned}$$

On obtient donc, pour $k = 2$, l'expression

$$(2.1.16)\qquad \Big(\sum_{|j|\le 2} jU_j\Big)^2 q_2(\omega_0, \omega_1) + R_{2,2}.$$

Pour $k = 1$, on décompose Q_1 en $Q_1' + Q_1''$ et on obtient l'expression

$$\begin{aligned}(2.1.17)\quad & \Big(\sum_{|j|\le 2} jU_j\Big)\Big(\sum_{|j|\le 2} U_j\Big) q_1'(\omega_0, \omega_1)\\ &+ \Big(\sum_{|j|\le 2} jU_j\Big)\Big(\sum_{|j|\le 2} j^2U_j\Big) q_1''(\omega_0, \omega_1) + R_{2,2}.\end{aligned}$$

Pour $k = 0$, on décompose Q_0 en $Q_0' + Q_0''$ et on obtient

$$(2.1.18)\quad \Big(\sum_{|j|\le 2} U_j\Big)^2 q_0' + \Big(\sum_{|j|\le 2} U_j\Big)\Big(\sum_{|j|\le 2} j^2U_j\Big) q_0''(\omega_0, \omega_1) + R_{2,2}.$$

Or, on constate immédiatement que

$$\left(\sum_{|j|\le 2} U_j\right)^2 = 2U_1U_2 + U_1^2 + 2(U_2U_{-1} + U_1U_0) + 2U_1U_{-1}$$
$$+ 2(U_1U_{-2} + U_0U_{-1}) + U_{-1}^2 + 2U_{-1}U_{-2} + R_{2,2}$$
$$\left(\sum_{|j|\le 2} U_j\right)\left(\sum_{|j|\le 2} jU_j\right) = 3U_1U_2 + U_1^2 + (U_2U_{-1} + U_1U_0)$$
$$- (U_1U_{-2} + U_0U_{-1})$$
$$- U_{-1}^2 - 3U_{-1}U_{-2} + R_{2,2}$$
$$\left(\sum_{|j|\le 2} jU_j\right)^2 = 4U_1U_2 + U_1^2 - 4U_2U_{-1} - 2U_1U_{-1} - 4U_1U_{-2}$$
$$+ U_{-1}^2 + 4U_{-1}U_{-2} + R_{2,2}$$
$$\left(\sum_{|j|\le 2} U_j\right)\left(\sum_{|j|\le 2} j^2U_j\right) = 5U_1U_2 + U_1^2 + (5U_2U_{-1} + U_1U_0) + 2U_1U_{-1}$$
$$+ (5U_1U_{-2} + U_0U_{-1}) + U_{-1}^2 + 5U_{-1}U_{-2} + R_{2,2}$$
$$\left(\sum_{|j|\le 2} jU_j\right)\left(\sum_{|j|\le 2} j^2U_j\right) = 6U_1U_2 + U_1^2 - 2U_2U_{-1} + 2U_1U_{-2}$$
$$- U_{-1}^2 - 6U_{-1}U_{-2} + R_{2,2}.$$

Reportant ces expressions dans (2.1.16), (2.1.17), (2.1.18), on obtient (2.1.14). □

LEMME 2.1.5. – *On a l'expression*

$$\begin{aligned}(2.1.19)\qquad & P(U, \partial_t U, \partial_x U; \partial_t\partial_x U, \partial_x^2 U)\\ &= \frac{\epsilon^3}{t^{3/2}} e^{3i\varphi}[p_0 - p_2 + i(p_1 - p_3)]a_1^3\\ &+ \frac{\epsilon^3}{t^{3/2}} e^{i\varphi}[3p_0 + p_2 + i(p_1 + 3p_3)]a_1^2\bar{a}_1\\ &+ \textit{ termes conjugués} + R_{2,2}.\end{aligned}$$

Démonstration. – On peut écrire

$$D_\alpha U = \omega_\alpha(U_1 - U_{-1}) + R_{2,1} + R_{1,3/2}$$

et

$$D_\alpha D_\beta U = \omega_\alpha \omega_\beta (U_1 + U_{-1}) + R_{2,1} + R_{1,3/2}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&P_k(U, D_t D_x U, D_x^2 U; D_t U, D_x U)\\
&= P_k(U_1 + U_{-1}, \omega_0\omega_1(U_1 + U_{-1}), \omega_1^2(U_1 + U_{-1});\\
&\quad \omega_0(U_1 - U_{-1}), \omega_1(U_1 - U_{-1})) + R_{4,2} + R_{3,5/2}\\
&= (U_1 + U_{-1})^{3-k}(U_1 - U_{-1})^k p_k + R_{2,2}.
\end{aligned}$$

Le lemme résulte du développement de ces expressions.

Démonstration du théorème. – D'après les lemmes 2.1.3, 2.1.4, 2.1.5, pour que S donné par (2.1.7) s'écrive $R_{2,2} + R_{1,5/2}$, il faut et il suffit que soient satisfaites les conditions

$$\begin{aligned}
(2.1.20)\qquad -8a_3 &= (2q_0' + 5q_0'' - 4q_2 + 3i(q_1' + 2q_1''))a_1a_2\\
&\quad + (p_0 - p_2 + i(p_1 - p_3))a_1^3\\
(2.1.21)\qquad -3a_2 &= (q_0' + q_0'' - q_2 + i(q_1' + q_1''))a_1^2\\
(2.1.22)\qquad 2i\omega_0\partial_s a_1 &= (2q_0' + 5q_0'' + 4q_2 + i(q_1' - 2q_1''))a_2\bar{a}_1\\
&\quad + (2q_0' + q_0'' + iq_1')a_1a_0\\
&\quad + (3p_0 + p_2 + i(p_1 + 3p_3))a_1^2\bar{a}_1\\
(2.1.23)\qquad a_0 &= 2(q_0' + q_0'' + q_2)|a_1|^2.
\end{aligned}$$

Reportant (2.1.21), (2.1.23) dans (2.1.22), on obtient

$$(2.1.24)\qquad \omega_0\partial_s a_1 = \frac{1}{2}a_1|a_1|^2[\Phi(y) + i\Psi(y)]$$

où $\Phi(y)$ est donnée par (1.1.17) et

$$\begin{aligned}
(2.1.25)\qquad \Psi(y) &= \frac{1}{3}(2q_0' + 5q_0'' + 4q_2)(q_0' + q_0'' - q_2)\\
&\quad - \frac{1}{3}(q_1' - 2q_1'')(q_1' + q_1'')\\
&\quad - 2(2q_0' + q_0'')(q_0' + q_0'' + q_2) - (3p_0 + p_2)
\end{aligned}$$

qui coïncide bien avec la notation déjà introduite en (1.2.2) dans le cas de nonlinéarités cubiques.

On déduit de (2.1.24)

$$(2.1.26)\qquad \partial_s|a_1|^2 = |a_1|^4\Phi(y)\sqrt{1 - y^2}$$

et puisqu'on impose $a_1|_{s=0} = a_1^0$, on obtient

$$|a_1(s,y)|^2 = \frac{|a_1^0(y)|^2}{1 - |a_1^0(y)|^2\Phi(y)\sqrt{1-y^2}s}$$

qui est défini pour $s \in [0, A[$. On obtient alors a_1 comme l'unique solution sur $[0, A[$ de l'équation différentielle linéaire

$$\begin{aligned} \partial_s a_1 &= a_1 \frac{\Phi(y) + i\Psi(y)}{2\omega_0(y)} \frac{|a_1^0(y)|^2}{1 - |a_1^0(y)|^2\Phi(y)\sqrt{1-y^2}s} \\ \partial_s a_1|_{s=0} &= a_1^0, \end{aligned} \tag{2.1.27}$$

et on constate que a_1 vérifie les conditions de l'énoncé. Les équations (2.1.20), (2.1.21), (2.1.23) déterminent alors a_0, a_2, a_3. Le théorème est démontré. □

Remarque. – Si la condition nulle $\Phi(y) \equiv 0$ est satisfaite, on a $A = +\infty$ et a_1 est donné par

$$a_1(s,y) = a_1^0(y) \exp\left[\frac{i}{2}\sqrt{1-y^2}|a_1^0(y)|^2\Psi(y)s\right]. \tag{2.1.28}$$

Par conséquent, la phase de la contribution principale $U_1 + U_{-1}$ à U est la phase libre $\pm\varphi$ modulée par la phase de (2.1.28) (ou son opposée). On voit donc que la condition $\Psi(y) \equiv 0$ introduite dans la définition 1.2.1 (pour des nonlinéarités cubiques) signifie que la solution asymptotique a même comportement à l'infini qu'une solution libre.

2.2. Construction de la solution approchée

Nous allons construire une solution approchée U_a de l'équation (1.1.1) par recollement de la solution asymptotique U précédente et de la solution libre u^0.

PROPOSITION 2.2.1. – *Soient* $\chi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \chi_2 \equiv 1$ *au voisinage de* $[-1, 1]$, Supp $\chi_2 \subset]-2, 2[$, *et* $\chi_1 = 1 - \chi_2$. *On pose*

$$U_a(t,x) = \chi_1(\epsilon^{2/3}t)U(t,x) + \chi_2(\epsilon^{2/3}t)u^0(t,x). \tag{2.2.1}$$

Alors U_a *vérifie sur* $[0, e^{A/\epsilon^2}[\times\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Box U_a + U_a &= F(U_a, \partial_t U_a, \partial_x U_a, \partial_t\partial_x U_a, \partial_x^2 U_a) + S_a \\ U_a|_{t=0} &= \epsilon f \\ \partial_t U_a|_{t=0} &= \epsilon g \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

et pour tout $A' \in]0, A[$, *tout* $k \in \mathbb{N}$, *il existe* $C > 0$ *tel que l'on ait pour tout* $t \in [0, e^{A'/\epsilon^2}[$

$$(2.2.3)\quad \|\mathcal{V}^k S_a(t,.)\|_{L^\infty} \le C\left[\frac{\epsilon^2}{1+t}\mathbf{1}_{\{\epsilon^{2/3}t<2\}} + \left(\frac{\epsilon^2}{t^2} + \frac{\epsilon}{t^{5/2}}\right)\mathbf{1}_{\{\epsilon^{2/3}t>1\}}\right]$$

$$(2.2.4)\quad \|\mathcal{V}^k S_a(t,.)\|_{L^2} \le C\left[\frac{\epsilon^2}{(1+t)^{1/2}}\mathbf{1}_{\{\epsilon^{2/3}t<2\}} + \left(\frac{\epsilon^2}{t^{3/2}} + \frac{\epsilon}{t^2}\right)\mathbf{1}_{\{\epsilon^{2/3}t>1\}}\right].$$

Démonstration. – On a pour $t \in [0, e^{A'/\epsilon^2}[$

$$(2.2.5)\quad \begin{aligned} S_a = {} & \chi_1(\epsilon^{2/3}t)((\square+1)U - F(U, \partial_t U, \partial_x U, \partial_t\partial_x U, \partial_x^2 U)) \\ & + 2\epsilon^{2/3}\chi_1'(\epsilon^{2/3}t)(\partial_t U - \partial_t u^0) + \epsilon^{4/3}\chi_1''(\epsilon^{2/3}t)(U - u^0) \\ & + \chi_1(\epsilon^{2/3}t)F(U, \partial_t U, \partial_x U, \partial_t\partial_x U, \partial_x^2 U) \\ & - F(U_a, \partial_t U_a, \partial_x U_a, \partial_t\partial_x U_a, \partial_x^2 U_a). \end{aligned}$$

Comme U est à support dans $|x| \le t$, le théorème 2.1.2 entraîne que la contribution à S_a de la première ligne de (2.2.5) vérifie la majoration (2.2.3). Pour $1 < \epsilon^{2/3}t < 2$, on peut écrire d'après (2.1.6) et la proposition 2.1.1

$$(2.2.6)\quad \begin{aligned} U - u^0 = {} & \frac{\epsilon}{\sqrt{t}}e^{i\varphi}\Big[a_1\Big(\epsilon^2\log t, \frac{x}{t}\Big) - a_1^0\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big] \\ & + \frac{\epsilon}{\sqrt{t}}e^{-i\varphi}\Big[\bar{a}_1\Big(\epsilon^2\log t, \frac{x}{t}\Big) - \bar{a}_1^0\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big] + R_{1,3/2} + R_{2,1} \end{aligned}$$

et de même

$$(2.2.7)\quad \begin{aligned} \partial_t(U - u^0) = {} & i\omega_0\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}e^{i\varphi}\Big[a_1\Big(\epsilon^2\log t, \frac{x}{t}\Big) - a_1^0\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big] \\ & - i\omega_0\frac{\epsilon}{\sqrt{t}}e^{-i\varphi}\Big[\bar{a}_1\Big(\epsilon^2\log t, \frac{x}{t}\Big) - \bar{a}_1^0\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big] \\ & + R_{1,3/2} + R_{2,1}. \end{aligned}$$

Puisque $a_1|_{s=0} = a_1^0$ et que a_1 est C^∞ à support dans $|y| \le 1$, on a

$$\Big|a_1\Big(\epsilon^2\log t, \frac{x}{t}\Big) - a_1^0\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big|\Big(1 + \Big|\omega_0\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big|\Big) \le C\epsilon^2|\log\epsilon|$$

si $1 < \epsilon^{2/3}t < 2$. La norme L^∞ de la seconde ligne de (2.2.5) se majore donc par

$$C\left[\frac{\epsilon^3}{\sqrt{t}}|\log\epsilon| + \frac{\epsilon}{t^{3/2}} + \frac{\epsilon^2}{t}\right]\mathbf{1}_{\{1<\epsilon^{2/3}t<2\}}\epsilon^{2/3}$$

qui s'estime par le premier terme du membre de droite de (2.2.3). Il faut voir que l'on a la même estimation lorsqu'on fait agir k champs de $\mathcal{V}$. Or,

$$(t\partial_x + x\partial_t)(U - u^0) = \frac{\epsilon}{\sqrt{t}}e^{i\varphi}\Big[b_1\Big(\epsilon^2 \log t, \frac{x}{t}\Big) - b_1^0\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big]$$
$$+ \frac{\epsilon}{\sqrt{t}}e^{i\varphi}\Big[\bar{b}_1\Big(\epsilon^2 \log t, \frac{x}{t}\Big) - \bar{b}_1^0\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big] + R_{3,1/2} + R_{1,3/2} + R_{2,1}$$

avec $b_1(s,y) = (1-y^2)\partial_y a_1(s,y) - ya_1/2, b_1^0(y) = (1-y^2)\partial_y a_1^0(y) - ya_1^0/2$. On obtient des expressions du même type lorsqu'on fait agir sur $U - u^0$ ∂_t ou ∂_x. Il en résulte que la contribution à $\mathcal{V}^k S_a$ de la deuxième ligne de (2.2.5) se majore également par le premier terme du membre de droite de (2.2.3).

Enfin, les deux dernières lignes de (2.2.5) sont nulles si $\epsilon^{2/3}t > 2$. Comme d'autre part $\mathcal{V}^k U(t,.)$ et $\mathcal{V}^k U_a(t,.)$ se majorent dans L^∞ par $C\epsilon(1+t)^{-1/2}$, et que F est au moins quadratique, la contribution correspondante au membre de gauche de (2.2.3) s'estime par le premier terme du membre de droite.

L'inégalité (2.2.4) résulte de (2.2.3) et du fait que S_a est à support dans $|x| \le t + m$.

COROLLAIRE 2.2.2. – *Avec les notations de la proposition, pour tout $A' < A$, et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ tel que $\forall \epsilon \in]0,1[$,*

$$\int_0^{e^{A'/\epsilon^2}} \|\mathcal{V}^k S_a(t,.)\|_{L^2}\, dt \le C\epsilon^{5/3}. \tag{2.2.8}$$

Soit $(\phi_j)_{j\ge 0}$ une partition dyadique de l'unité sur $\mathbb{R}$. Il existe $C > 0$ telle que

$$\sum_{2^j < e^{A'/\epsilon^2}} \sup_{s>0}[\phi_j(s)(1+s)\|\mathcal{V}^k S_a(s,.)\|_{L^2}] \le C\epsilon^{5/3}. \tag{2.2.9}$$

3. PREUVE DU THÉORÈME D'EXISTENCE

3.1. Opérateurs bilinaires et estimations

La preuve du théorème d'existence, dans le cas de nonlinéarités quadratiques, consiste à combiner la méthode de Moriyama, Tonegawa et Tsutsumi [18] à l'utilisation de la solution approchée construite dans la section précédente. Nous adaptons dans ce paragraphe les résultats de ces auteurs que nous utiliserons.

DÉFINITION 3.1.1. – *Pour $m \in \mathbb{R}$, nous désignerons par $S^m(\mathbb{R}^2)$ l'espace des symboles d'ordre m sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous poserons d'autre part pour $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$*

$$(3.1.1) \qquad S^{\alpha,\beta} = \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}); \exists\, \tilde{a} \in S^0(\mathbb{R}^2), \exists\, P_\alpha, Q_\beta \in \mathbb{C}[X] \text{ de degrés respectifs inférieur ou égal à } \alpha,\ \beta \text{ tels que } a(\xi,\eta) = P_\alpha(\xi)Q_\beta(\eta)\tilde{a}(\xi,\eta)\}$$

si $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et

$$(3.1.2) \qquad S^{\alpha,\beta} = \{a \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}); \exists\, \tilde{a} \in S^\alpha(\mathbb{R}^2), \exists\, Q_\beta \in \mathbb{C}[X] \text{ de degré} \leq \beta \text{ tel que } a(\xi,\eta) = Q_\beta(\eta)\tilde{a}(\xi,\eta)\}$$

si $\alpha < 0$ et $\beta \geq 0$.

On définit symétriquement $S^{\alpha,\beta}$ pour $\alpha \geq 0, \beta < 0$. Si $a \in S^{\alpha,\beta}$ et $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on pose

$$(3.1.3) \qquad Op(a)(u,v) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{ix\cdot(\xi+\eta)} a(\xi,\eta)\hat{u}(\xi)\hat{v}(\eta)\, d\xi d\eta.$$

Nous noterons $||.||_{H^s}$ la norme dans l'espace de Sobolev H^s, $|.|$ la norme L^∞ et $||.||$ la norme L^2 par rapport aux variables d'espace.

PROPOSITION 3.1.2. – *Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et $a \in S^{\alpha,\beta}$. Il existe $C > 0$ et pour tous $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*

$$(3.1.4) \qquad ||Op(a)(u,v)|| \leq C||u||_{H^\alpha}\left(\sum_0^\beta |\partial_x^\ell v|\right).$$

Démonstration. – Si $\tilde{a} \in S^m$ avec $m \leq 0$, on a $||Op(\tilde{a})(u,v)|| \leq C||u||_{H^m}|v|$ d'après Coifman-Meyer [6], théorème 12. La proposition résulte immédiatement de la définition de $S^{\alpha,\beta}$. □

COROLLAIRE 3.1.3. – *Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ avec $\alpha \geq -1$ et $\beta \geq -1$. Soit $b \in S^{\alpha,\beta+1} \cap S^{\alpha+1,\beta}$. Il existe pour tout $T > 0$, $k \in \mathbb{N}$, une constante $C > 0$ telle que pour tous $u, v \in \mathcal{S}([0,T] \times \mathbb{R})$, tout $t \in [0,T]$*

$$(3.1.5) \qquad \begin{aligned} &||\mathcal{V}^k Op(b)(u,v)(t,.)|| \\ &\leq C(||\mathcal{V}^k u(t,.)||_{H^\alpha} |\mathcal{V}^{[k/2]+\beta+1} v(t,.)| \\ &\quad + |\mathcal{V}^{[k/2]+\alpha+1} u(t,.)| ||\mathcal{V}^k v(t,.)||_{H^\beta}). \end{aligned}$$

Si on suppose seulement que $b \in S^{\alpha,\beta+1}$, *on a l'inégalité*

$$(3.1.6) \qquad ||\mathcal{V}^k Op(b)(u,v)(t,.)|| \leq C||\mathcal{V}^k u(t,.)||_{H^\alpha} |\mathcal{V}^{k+\beta+1} v(t,.)|.$$

Démonstration. – On remarque que si $\partial = \partial_t$ ou ∂_x,

$$\partial Op(b)(u,v) = Op(b)(\partial u, v) + Op(b)(u, \partial v).$$

Si $X = t\partial_x + x\partial_t$,

$$\begin{aligned} XOp(b)(u,v) = Op(b)(Xu,v) + Op(b)(u,Xv) + iOp(\partial b/\partial\xi)(\partial_t u, v) \\ + iOp(\partial b/\partial\eta)(u, \partial_t v). \end{aligned}$$

Comme $\partial b/\partial\xi$ et $\partial b/\partial\eta$ sont dans $S^{\alpha,\beta+1} \cap S^{\alpha+1,\beta}$, on voit que si pour $\ell \in \mathbb{N}$, X^ℓ désigne l'itéré de ℓ champs choisis parmi $\partial_t, \partial_x, t\partial_x + x\partial_t$, $X^\ell Op(b)(u,v)$ est combinaison linéaire d'expressions de la forme $Op(\tilde{b})(X^p u, X^q v)$ avec $p + q = \ell$, $p \leq [\ell/2]$ ou $q \leq [\ell/2]$ et $\tilde{b} \in S^{\alpha,\beta+1} \cap S^{\alpha+1,\beta}$. On obtient (3.1.5) en appliquant (3.1.4), $\tilde{b}$ étant considérée soit comme un élément de $S^{\alpha,\beta+1}$ soit comme un élément de $S^{\alpha+1,\beta}$. L'inégalité (3.1.6) est immédiate. □

Pour appliquer la méthode de [18], introduisons les notations suivantes :

DÉFINITION 3.1.4. – *Pour* $\ell = 1, 2$, *on note* $\mathcal{E}_\ell$ *l'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *engendré par les opérateurs nonlinéaires de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $(u,v) \to M(u,v)$ *de la forme*

(3.1.7)
$$M(u,v) = Op(r)\big[G_1\big((\partial^\gamma u)_{|\gamma|\leq 1-\alpha, \gamma_0 \leq 1}\big), G_2\big((\partial^\sigma v)_{|\sigma| \leq 1-\beta, \sigma_0 \leq 1}\big)\big]$$

où :

- $r \in S^{\alpha,\beta+1} \cap S^{\alpha+1,\beta}$ *pour un couple* $(\alpha,\beta) \in \{-1,0,1\}^2$,
- G_1 et G_2 *sont deux monômes vérifiant* $\deg G_1 + \deg G_2 \geq \ell + 1$,
- *le degré de* G_j *par rapport aux dérivées secondes est inférieur ou égal à* 1 *pour* $j = 1, 2$.

On note $\mathcal{F}$ *l'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *engendré par les opérateurs de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *dans* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $(u,v) \to N(u,v)$ *de la forme*

$$(3.1.8) \qquad N(u,v) = Op(r)\big[\partial^\gamma u, G_2\big((\partial^\sigma v)_{|\sigma|\leq 1-\beta, \sigma_0 \leq 1}\big)\big]$$

où :

- $r \in S^{\alpha,\beta+1} \cap S^{\alpha+1,\beta}$ *avec* $(\alpha,\beta) \in \{-1,0,1\}^2$,
- $|\gamma| \leq 1 - \alpha, \gamma_0 \leq 1$,

• *G_2 est un monôme de degré supérieur ou égal à* 1.

Nous utiliserons les propriétés suivantes de ces opérateurs :

PROPOSITION 3.1.5. – *Soient $k \in \mathbb{N}, T > 0$. Il existe pour tout $M \in \mathcal{E}_\ell$ ($\ell = 1,2$) un polynôme H_ℓ à coefficients réels sur $\mathbb{R}^4$, de valuation supérieure ou égale à ℓ, tel que pour tous $u, v, u', v' \in \mathcal{S}([0,T] \times \mathbb{R})$ et tout $t \in [0,T]$ on ait*

$$\begin{aligned}(3.1.9)\quad & ||\mathcal{V}^k(M(w+v,w'+v') - M(w,w'))(t,.)|| \\ & \leq \left(||\mathcal{V}^k v(t,.)||_{H^1} + ||\mathcal{V}^k \partial_t v(t,.)|| + ||\mathcal{V}^k v'(t,.)||_{H^1} + ||\mathcal{V}^k \partial_t v'(t,.)||\right) \\ & \quad \times H_\ell\Big(|\mathcal{V}^{[k/2]+3} v(t,.)|, |\mathcal{V}^{[k/2]+3} v'(t,.)|, |\mathcal{V}^{k+3} w(t,.)|, |\mathcal{V}^{k+3} w'(t,.)|\Big).\end{aligned}$$

De même pour $N \in \mathcal{F}$, il existe un polynôme H_1 à coefficients réels sur $\mathbb{R}$, de valuation supérieure ou égale à 1, tel que pour tous $u, v \in \mathcal{S}([0,T] \times \mathbb{R})$, on ait

$$(3.1.10)\quad ||\mathcal{V}^k N(u,v)(t,.)|| \leq \left(||\mathcal{V}^k u(t,.)||_{H^1} + ||\mathcal{V}^k \partial_t u(t,.)||\right) H_1(|\mathcal{V}^{k+2} v(t,.)|).$$

Si $k \geq 5$, l'injection de Sobolev entraîne $|\mathcal{V}^{[k/2]+3} v(t,.)| \leq C||\mathcal{V}^k v(t,.)||_{H^1}$, donc la proposition entraîne en particulier que M se prolonge à l'espace

$$\begin{aligned}(3.1.11)\quad E_T^k = \{ & v \in C^0([0,T],H^1) \cap C^1([0,T],L^2) \\ & \text{tels que } \mathcal{V}^k v \in C^0([0,T],H^1) \cap C^1([0,T],L^2)\}.\end{aligned}$$

Nous utiliserons le lemme suivant ([18], Proposition 2.4) :

LEMME 3.1.6. – *Soit $\alpha \in \{-1,0,1\}$. Pour $v, w \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a l'inégalité*

$$(3.1.12)\qquad ||vw||_{H^\alpha} \leq C||v||_{H^\alpha}(|w| + |\partial_x w|).$$

Si $v, w \in \mathcal{S}([0,T] \times \mathbb{R})$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,T]$ les inégalités

$$\begin{aligned}(3.1.13)\quad & ||\mathcal{V}^k(vw)(t,.)||_{H^\alpha} \\ & \leq C\Big(||\mathcal{V}^k v(t,.)||_{H^\alpha} |\mathcal{V}^{[k/2]+1} w(t,.)| + |\mathcal{V}^{[k/2]+1} v(t,.)| ||\mathcal{V}^k w(t,.)||_{H^\alpha}\Big)\end{aligned}$$

$$(3.1.14)\qquad ||\mathcal{V}^k(vw)(t,.)||_{H^\alpha} \leq C||\mathcal{V}^k v(t,.)||_{H^\alpha} |\mathcal{V}^{k+1} w(t,.)|.$$

Démonstration de la proposition. – La différence $M(w+v,w'+v') - M(w,w')$ est combinaison linéaire d'expressions de la forme

$$(3.1.15)\qquad Op(r)\Big[G_1'(\partial^{\gamma'} v) G_1''(\partial^{\gamma''} w), G_2'(\partial^{\sigma'} v') G_2''(\partial^{\sigma''} w')\Big]$$

où r vérifie les conditions de la définition 3.1.4,

$$|\gamma'|, |\gamma''| \leq 1 - \alpha, \ \gamma'_0, \gamma''_0 \leq 1, \ |\sigma'|, |\sigma''| \leq 1 - \beta, \ \sigma'_0, \sigma''_0 \leq 1,$$

G'_j, G''_j étant des monômes dont la somme des degrés est supérieure ou égale à 3. De plus $\deg G'_1$ ou $\deg G'_2$ est non nul.

Supposons d'abord $\deg G'_1 \neq 0$ et $\deg G'_2 \neq 0$. D'après le corollaire 3.1.3, la contribution de (3.1.15) au membre de gauche de (3.1.9) se majore par

$$\begin{aligned} C\Big[&\Big\|\mathcal{V}^k\Big(G'_1(\partial^{\gamma'}v')G''_1(\partial^{\gamma''}w)\Big)(t,.)\Big\|_{H^\alpha} \\ &\times\Big|\mathcal{V}^{[k/2]+\beta+1}\Big(G'_2(\partial^{\sigma'}v')G''_2(\partial^{\sigma''}w')\Big)(t,.)\Big| \\ &\quad+\Big|\mathcal{V}^{[k/2]+\alpha+1}\Big(G'_1(\partial^{\gamma'}v)G''_1(\partial^{\gamma''}w')\Big)(t,.)\Big| \\ &\times\Big\|\mathcal{V}^k\Big(G'_2(\partial^{\sigma'}v')G''_2(\partial^{\sigma''}w')\Big)(t,.)\Big\|_{H^\beta}\Big] \end{aligned}$$

donc, d'après (3.1.14), par

$$\begin{aligned} C\Big[&||\mathcal{V}^k G'_1(\partial^{\gamma'}v)(t,.)||_{H^\alpha}|\mathcal{V}^{k+1}G''_1(\partial^{\gamma''}w)(t,.)| \\ &\times|\mathcal{V}^{[k/2]+\beta+1}G'_2(\partial^{\sigma'}v')(t,.)||\mathcal{V}^{[k/2]+\beta+1}G''_2(\partial^{\sigma''}w')(t,.)| \\ &\quad+|\mathcal{V}^{[k/2]+\alpha+1}G'_1(\partial^{\gamma'}v)(t,.)||\mathcal{V}^{[k/2]+\alpha+1}G''_1(\partial^{\gamma''}w)(t,.)| \\ &\times||\mathcal{V}^k G'_2(\partial^{\sigma'}v')(t,.)||_{H^\beta}|\mathcal{V}^{k+1}G''_2(\partial^{\sigma''}w')(t,.)|\Big]. \end{aligned}$$

Comme G'_1 et G'_2 ne sont pas constants, le lemme 3.1.6 permet de majorer cette dernière expression par le membre de droite de (3.1.9), en utilisant $|\gamma'| \leq 1 - \alpha, \gamma'_0 \leq 1, |\sigma'| \leq 1 - \beta, \sigma'_0 \leq 1$.

Si $\deg G'_2 = 0$, on majore (3.1.15) par

$$C\Big|\Big|\mathcal{V}^k\Big(G'_1(\partial^{\gamma'}v)G''_1(\partial^{\gamma''}w)\Big)(t,.)\Big|\Big|_{H^\alpha}|\mathcal{V}^{k+\beta+1}G''_2(\partial^{\sigma''}w')(t,.)|$$

à l'aide de (3.1.6) et on conclut comme précédemment. Pour estimer $N(u,v)$, on majore le membre de gauche de (3.1.10) à l'aide de (3.1.6) par

$$C||\mathcal{V}^k(\partial^\gamma u)(t,.)||_{H^\alpha}\left|\mathcal{V}^{k+\beta+1}(G_2(\partial^\sigma v))(t,.)\right|$$

d'où l'on déduit immédiatement (3.1.10). □

Si $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice dont les coefficients sont des symboles $b_{ij} \in S^{\alpha_i,\beta_j}$ vérifiant ${}^tB(\xi,\eta) = B(\eta,\xi)$, et si $\Theta_1, \Theta_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{R}^2)$, on posera

$$(3.1.16) \quad Op(B)(\Theta_1,\Theta_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int e^{ix(\xi+\eta)}\ {}^t\widehat{\Theta_1}(\xi)B(\xi,\eta)\widehat{\Theta_2}(\eta)\,d\xi d\eta.$$

Énonçons une version légèrement étendue du principal résultat de [18], dont nous allons donner une preuve pour la commodité du lecteur :

THÉORÈME 3.1.7 (Moriyama-Tonegawa-Tsutsumi [18]). – *Supposons que F est une nonlinéarité semi-linéaire de la forme (1.1.2), et soient $T > 0, k \in \mathbb{N}, k \geq 5$. Il existe une matrice de symboles $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ avec*

$$b_{ij} \in S^{3-i,1-j} \cap S^{2-i,2-j} \cap S^{1-i,3-j} \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

vérifiant ${}^tB(\xi,\eta) = B(\eta,\xi)$, un opérateur $M \in \mathcal{E}_2$, un opérateur $N \in \mathcal{F}$, un symbole $r \in S^{0,0}$, tels que pour tout $S \in \mathcal{S}([0,T] \times \mathbb{R})$, et tout $u \in E_T^k$ solution de l'équation

$$\Box u + u = F(u, \partial_t u, \partial_x u) + S, \tag{3.1.17}$$

la fonction u^1 définie par la formule

$$u^1 = u + Op(B)(\Theta_u, \Theta_u), \tag{3.1.18}$$

où $\Theta_u = {}^t[u, \partial_t u]$, vérifie

$$\Box u^1 + u^1 = M(u,u) + N(S,u) + Op(r)(S,S) + S. \tag{3.1.19}$$

LEMME 3.1.8. – *Soit B une matrice de symboles vérifiant les conditions de l'énoncé du théorème et $u \in E_T^k$. Soient $E(\eta)$ la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-\eta^2 & 0 \end{bmatrix}$ et*

$$\begin{aligned} C(\xi,\eta) = {}& {}^tE(\xi)^2 B(\xi,\eta) + 2{}^tE(\xi)B(\xi,\eta)E(\eta) \\ & + B(\xi,\eta)E(\eta)^2 + ((\xi+\eta)^2+1)B(\xi,\eta). \end{aligned} \tag{3.1.20}$$

Il existe M, N et r comme dans l'énoncé du théorème tels que

$$\begin{aligned} &(\Box + 1)Op(B)(\Theta_u, \Theta_u) \\ &\quad = Op(C)(\Theta_u,\Theta_u) + M(u,u) + N(S,u) + Op(r)(S,S). \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

Démonstration. – Notons $\underline{F}(u)$ le vecteur ${}^t(0, F(u, \partial_t u, \partial_x u))$ et $\underline{S} = {}^t(0,S)$. Alors $\partial_t \Theta_u = \Theta_{\partial_t u} = E(D)\Theta_u + \underline{F}(u) + \underline{S}$ d'où

$$\partial_t Op(B)(\Theta_u,\Theta_u) = 2Op(B)(\underline{F}(u) + \underline{S}, \Theta_u) + Op(B_1)(\Theta_u,\Theta_u)$$

avec $B_1(\xi,\eta) = {}^tE(\xi)B(\xi,\eta) + B(\xi,\eta)E(\eta)$. De même, on obtient,

$$\partial_t^2 Op(B)(\Theta_u,\Theta_u) = Op(B_2)(\Theta_u,\Theta_u) + \Sigma(u) \tag{3.1.22}$$

où

$$(3.1.23)\quad \Sigma(u) = 2Op(B)(\partial_t \underline{F} + \partial_t \underline{S}, \Theta_u) + 2Op(B)(\underline{F} + \underline{S}, E(D)\Theta_u) + 2Op(B)(\underline{F} + \underline{S}, \underline{F} + \underline{S}) + 2Op(B_1)(\underline{F} + \underline{S}, \Theta_u)$$

avec $B_2(\xi,\eta) = {}^tE(\xi)B_1(\xi,\eta) + B_1(\xi,\eta)E(\eta)$. On en déduit

$$(\square + 1)Op(B)(\Theta_u, \Theta_u) = Op(C)(\Theta_u, \Theta_u) + \Sigma(u)$$

et il reste à voir que $\Sigma(u)$ s'écrit $M(u,u) + N(S,u) + Op(r)(S,S)$. Dans le premier terme de $\Sigma(u)$,

$$\partial_t F(u, \partial_t u, \partial_x u) = \partial_1 F.\partial_t u + \partial_2 F.(\partial_x^2 u - u) + \partial_2 F.F + \partial_3 F.\partial_t \partial_x u$$

donc s'écrit $G_1(\partial^\gamma u)_{|\gamma|\leq 2, \gamma_0 \leq 1}$, où G_1 est un polynôme nul à l'ordre 2 au moins en 0. Comme $b_{21} \in S^{-1,2} \cap S^{0,1}$ et $b_{22} \in S^{-1,1} \cap S^{0,0}$, on constate que $Op(B)(\partial_t \underline{F}, \Theta_u)$ est bien de la forme (3.1.7) (avec $\ell = 2$). De même, comme F s'écrit $G_1\big((\partial^\gamma u)_{|\gamma|\leq 1, \gamma_0 \leq 1}\big)$, et que l'on a aussi $b_{21} \in S^{0,1} \cap S^{1,0}$ et $b_{22} \in S^{0,0} \cap S^{1,-1}$, on constate que $Op(B)(\underline{F}, E(D)\Theta_u)$ et $Op(B)(\underline{F}, \underline{F})$ sont de la forme voulue. Enfin, remarquant que $B_1(\xi,\eta) = (b_{ij}^1)_{1\leq i,j\leq 2}$ avec $b_{ij}^1 \in S^{2-i,3-j} \cap S^{3-i,2-j}$, on constate que $Op(B_1)(\underline{F}, \Theta_u)$ est aussi de la forme (3.1.7). On vérifie de même que les contributions dépendant de S peuvent s'écrire $N(S,u) + Op(r)(S,S)$. $\square$

Démonstration du théorème. – On peut écrire la partie quadratique de la nonlinéarité

$$Q(u, \partial_t u, \partial_x u) = Op(K)(\Theta_u, \Theta_u)$$

où $K = (k_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$ est une matrice vérifiant ${}^tK(\xi,\eta) = K(\eta,\xi)$, et dont le coefficient $k_{ij}(\xi,\eta)$ est un polynôme de degré au plus $2-i$ en ξ et $2-j$ en η. D'après (3.1.18), (3.1.21) on a donc

$$(3.1.24)\quad \square u^1 + u^1 = Op(K)(\Theta_u, \Theta_u) + Op(C)(\Theta_u, \Theta_u) + M(u,u) + N(S,u) + Op(r)(S,S) + P(u, \partial_t u, \partial_x u) + S.$$

Il suffit donc de choisir B tel que $K + C \equiv 0$ i.e. (cf. [18]) :

$$b_{11} = \frac{-(2\xi\eta - 1)k_{11} + (1+\xi^2)(1+\eta^2)k_{22}}{p(\xi,\eta)}$$

$$b_{22} = \frac{2k_{11} - (2\xi\eta - 1)k_{22}}{p(\xi,\eta)}$$

$$b_{12} = -\frac{(2\xi\eta - 1)k_{12} + 2(1+\xi^2)k_{21}}{p(\xi,\eta)}$$

$$b_{21} = -\frac{2(1+\eta^2)k_{12} + (2\xi\eta - 1)k_{21}}{p(\xi,\eta)}$$

avec $p(\xi, \eta) = -(4\xi^2 + 4\eta^2 + 4\xi\eta + 3)$. On vérifie que les conditions sur B de l'énoncé du théorème sont satisfaites, et (3.1.24) donne (3.1.19) en incorporant P à $M(u, u)$. □

3.2. Preuve du théorème 1.1.1

Nous prouvons le théorème dans le cas d'une nonlinéarité *semi-linéaire quadratique*, en combinant la solution asymptotique du paragraphe 2.2 à la méthode de [18]. Fixons $A' < A$. D'après la proposition 2.2.1, il existe une solution approchée $U_a(t, x)$, C^∞ pour $t \in [0, e^{A'/\epsilon^2}]$, telle que l'erreur S_a vérifie sur cet intervalle les estimations uniformes (2.2.3), (2.2.4). Soit $T \in [0, e^{A'/\epsilon^2}]$ et u solution de (1.1.1) sur $[0, T[$. On posera avec les notations du théorème 3.1.7

$$\begin{aligned} u^1 &= u + Op(B)(\Theta_u, \Theta_u) \\ U_a^1 &= U_a + Op(B)(\Theta_{U_a}, \Theta_{U_a}) \\ v &= u - U_a, \quad v^1 = u^1 - U_a^1. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Puisque

$$\Box u + u = F(u, \partial_t u, \partial_x u), \ \Box U_a + U_a = F(U_a, \partial_t U_a, \partial_x U_a) + S_a,$$

il résulte de (3.1.19) que l'on a

$$\Box v^1 + v^1 = R(u, U_a, S_a) \tag{3.2.2}$$

où

$$\begin{aligned} R(u, U_a, S_a) = {} & M(u, u) - M(U_a, U_a) \\ & - N(S_a, U_a) - Op(r)(S_a, S_a) - S_a \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

avec $M \in \mathcal{E}_2, N \in \mathcal{F}, r \in S^{0,0}$. On notera désormais

$$\begin{aligned} M_k(t) &= \sup_{t' \in [0,t]} \left[||\mathcal{V}^k v(t', .)||_{H^1} + ||\mathcal{V}^k \partial_t v(t', .)|| \right] \\ N_\ell(t) &= \sup_{t' \in [0,t]} \left[(1 + t')^{1/2} |\mathcal{V}^\ell v(t', .)| \right] \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

et on fixera les entiers k, ℓ vérifiant les conditions suivantes

$$\ell \geq [k/2] + 3, \ell \geq 9, k \geq \ell + 3. \tag{3.2.5}$$

On supposera de plus que sur $[0, T]$ on a

$$N_\ell(t) \leq 1. \tag{3.2.6}$$

Remarquons que, d'après (3.1.10), et puisque $|\mathcal{V}^{k+2}U_a(t,.)|$ est uniformément borné,

$$\|\mathcal{V}^k N(S_a, U_a)(t,.)\| \leq C\|\mathcal{V}^{k+1}S_a(t,.)\|. \tag{3.2.7}$$

De même, la borne uniforme de $|\mathcal{V}^k S_a(t,.)|$, qui résulte de (2.2.3), et (3.1.6) entraînent que $\|\mathcal{V}^k Op(r)(S_a, S_a)\|$ se majore par le membre de droite de (3.2.7). Appliquant (3.1.9), on déduit donc de (3.2.3) qu'aussi longtemps que l'inégalité (3.2.6) est satisfaite, on a

$$\begin{aligned}\|\mathcal{V}^k R(u, U_a, S_a)(t,.)\| \leq C M_k(t) &\left(\frac{N^2_{[k/2]+3}(t) + \epsilon^2}{1+t}\right) \\ &+ C\|\mathcal{V}^{k+1}S_a(t,.)\|\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

où on a utilisé l'estimation $|\mathcal{V}^{k+3}U_a(t,.)| \leq C\epsilon(1+t)^{-1/2}$.

Proposition 3.2.1. – *Il existe $C > 0$, $\delta \in]0,1[$, $\epsilon_0 > 0$ tels que si $0 < \epsilon < \epsilon_0$ et si pour tout $t \in [0,T]$*

$$N_\ell(t) \leq \delta, \tag{3.2.9}$$

on a pour tout $t \in [0,T]$ l'inégalité

$$M_k(t) \leq C\epsilon^{5/3} + C\int_0^t M_k(s)\frac{N_\ell(s)^2 + \epsilon^2}{1+s}\,ds. \tag{3.2.10}$$

Démonstration. – L'inégalité d'énergie associée à l'équation (3.2.2), appliquée à $\mathcal{V}^k v^1$ donne :

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{V}^k v^1(t,.)\|_{H^1} + \|\mathcal{V}^k \partial_t v^1(t,.)\| \\ &\leq C\int_0^t \|\mathcal{V}^k R(u, U_a, S_a)(s,.)\|\,ds.\end{aligned} \tag{3.2.11}$$

D'après (3.2.8) et (2.2.8), (3.2.11) se majore par le membre de droite de (3.2.10) (puisque $\ell \geq [k/2]+3$). Comme

$$v = v^1 - (Op(B)(\Theta_u, \Theta_u) - Op(B)(\Theta_{U_a}, \Theta_{U_a})), \tag{3.2.12}$$

il reste à voir :

Lemme 3.2.2. – *Il existe $\delta \in]0,1[$ et $\epsilon_0 > 0, C > 0$ tels que si la condition (3.2.9) est satisfaite sur $[0,T]$, la somme, pour $|\alpha| \leq 1$, des quantités*

$$\|\mathcal{V}^k \partial^\alpha [Op(B)(\Theta_u, \Theta_u) - Op(B)(\Theta_{U_a}, \Theta_{U_a})](t,.)\| \tag{3.2.13}$$

se majore par

$$(3.2.14) \qquad (1+t)^{-1/2}\Big(\frac{1}{2}M_k(t) + C\epsilon^{5/3}\Big).$$

Démonstration. – La quantité

$$\partial^\alpha[Op(B)(\Theta_u, \Theta_u) - Op(B)(\Theta_{U_a}, \Theta_{U_a})]$$

est combinaison linéaire d'expressions de la forme

$$(3.2.15) \qquad Op(b_{ij})(\partial^\gamma u, \partial^\sigma u) - Op(b_{ij})(\partial^\gamma U_a, \partial^\sigma U_a)$$

avec $|\gamma| \leq i, |\sigma| \leq j-1$, (resp. $|\gamma| \leq i-1, |\sigma| \leq j$). Comme $b_{ij} \in S^{1-i,3-j} \cap S^{2-i,2-j}$ (resp. $S^{2-i,2-j} \cap S^{3-i,1-j}$), chacune de ces quantités s'écrit $M(u,u) - M(U_a, U_a)$ pour un opérateur $M \in \mathcal{E}_1$, à condition que $\gamma_0 \leq 1$ et $\sigma_0 \leq 1$.

Dans le cas contraire, on écrit

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u &= \partial_x^2 u - u + F(u, \partial_t u, \partial_x u)\\ \partial_t^2 U_a &= \partial_x^2 U_a - U_a + F(U_a, \partial_t U_a, \partial_x U_a) + S_a\end{aligned}$$

et on obtient, dans le cas $\gamma_0 = 2$ par exemple, que (3.2.15) s'écrit $M(u,u) - M(U_a, U_a) + N(S_a, U_a)$ avec $M \in \mathcal{E}_1, N \in \mathcal{F}$. Les inégalités (3.1.9), (3.1.10) permettent donc de majorer (3.2.13) par

$$CM_k(t)\Big[|\mathcal{V}^{[k/2]+3}v(t,.)| + |\mathcal{V}^{k+3}U_a(t,.)|\Big] + C\epsilon^{5/3}\frac{\epsilon}{(1+t)^{1/2}}$$

où on a utilisé que, d'après (2.2.4), $||\mathcal{V}^{k+1}S_a(t,.)|| \leq C\epsilon^{5/3}$ et que $|\mathcal{V}^{k+2}U_a(t,.)| \leq C\epsilon(1+t)^{-1/2}$. La majoration (3.2.14) en résulte si ϵ et δ sont assez petits.

Le facteur $(1+t)^{1/2}$ dans (3.2.14), inutile pour la preuve de la proposition 3.2.1, sera exploité dans l'obtention de la majoration L^∞.

LEMME 3.2.3. – *Supposons la condition (3.2.6) réalisée. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$*

$$(3.2.16) \qquad N_\ell(t) \leq CM_k(t)\big(\log(t+1)(N_\ell(t)^2 + \epsilon^2) + 1\big) + C\epsilon^{5/3}$$

Démonstration. – On utilise l'inégalité de Georgiev [7] (cf. également Moriyama, Tsutuya et Tsutsumi [18]) qui affirme que la solution v^1 de (3.2.2) vérifie :

$$\begin{aligned}(3.2.17) \qquad &(1+t)^{1/2}|\mathcal{V}^\ell v^1(t,.)|\\ &\leq C \sum_{2^j < 2(t+1)} \sup_{s>0} \big[\phi_j(s)||(1+s+|x|)\mathcal{V}^{\ell+3}R(u, U_a, S_a)(s,.)||\big]\end{aligned}$$

où ϕ_j est une partition dyadique de l'unité sur $\mathbb{R}$. D'après (3.2.8),

$$(3.2.18)\quad \begin{aligned} &||(1+s)\mathcal{V}^{\ell+3}R(u,U_a,S_a)(s,.)|| \\ &\leq CM_{\ell+3}(s)\Big(N^2_{[\frac{\ell+3}{2}]+3}(s)+\epsilon^2\Big)+C||\mathcal{V}^{\ell+4}S_a(s,.)||(1+s). \end{aligned}$$

Utilisant que, grâce à (3.2.5), $\ell+3\leq k$, $\left[\frac{\ell+3}{2}\right]+3\leq \ell$, que $M_k(.)$, $N_\ell(.)$ sont croissantes, et l'inégalité (2.2.9), on majore la contribution de (3.2.18) à (3.2.17) par le membre de droite de (3.2.16). Il reste à estimer

$$(3.2.19)\quad \begin{aligned} ||x\mathcal{V}^{\ell+3}R(u,U_a,S_a)(s,.)|| &\leq C||\mathcal{V}^{\ell+3}xR(u,U_a,S_a)(s,.)|| \\ &\quad + C||(1+s)\mathcal{V}^{\ell+3}R(u,U_a,S_a)(s,.)||. \end{aligned}$$

Il nous faut donc commuter x aux divers opérateurs du membre de droite de (3.2.3). Or, si M est un opérateur de $\mathcal{E}_2$ donné par (3.1.7), $xM(u,u)(s,.)$ est somme de $M'(u,u)(s,.)$ pour un autre opérateur M' de $\mathcal{E}_2$, et de $(1+s)M''(u,u)$, où $M''(u,u)$ est un opérateur de la forme

$$\begin{aligned} &M''(u,u)(s,.) \\ &= Op(r)\left[G_1\big((\partial^\gamma u)_{|\gamma|\leq 1-\alpha,\gamma_0\leq 1}\big), \frac{x}{1+s}G_2\big((\partial^\sigma u)_{|\sigma|\leq 1-\beta,\sigma_0\leq 1}\big)\right], \end{aligned}$$

les notations utilisées étant celles de la définition 3.1.4. Comme u est à support dans $|x|\leq C(1+s)$, la contribution à (3.2.19) de $(1+s)(M''(u,u)-M''(U_a,U_a))$ s'estime également par le membre de droite de (3.2.18). On traite de même les contributions des trois derniers termes de (3.2.3).

On a donc majoré $(1+t)^{1/2}|\mathcal{V}^\ell v^1(t,.)|$ par le membre de droite de (3.2.16). D'après (3.2.12), il nous suffit d'estimer

$$\begin{aligned} &(1+t)^{1/2}|\mathcal{V}^\ell[Op(B)(\Theta_u,\Theta_u)-Op(B)(\Theta_{U_a},\Theta_{U_a})](t,.)| \\ &\leq C(1+t)^{1/2}||\mathcal{V}^{\ell+1}[Op(B)(\Theta_u,\Theta_u)-Op(B)(\Theta_{U_a},\Theta_{U_a})](t,.)|| \\ &\leq C\Big(\frac{1}{2}M_{\ell+1}(t)+\epsilon^{5/2}\Big) \end{aligned}$$

d'après (3.2.14). L'inégalité (3.2.16) en résulte.

Fin de la démonstration du théorème. – D'après (3.2.10)

$$(3.2.20)\qquad M_k(t)\leq C\epsilon^{5/3}\exp[(N_\ell(t)^2+\epsilon^2)C\log(1+t)]$$

et d'après (3.2.16)

$$(3.2.21)\qquad N_\ell(t)\leq C\epsilon^{5/3}+CM_k(t)((N_\ell(t)^2+\epsilon^2)\log(1+t)+1)$$

sur tout intervalle $[0,T]$ de $[0, e^{A'/\epsilon^2}]$ sur lequel est réalisée la condition $N_\ell(t) < \delta$.

On choisit alors $\theta \in]1, 5/3[$ et il suffit de voir que si ϵ est assez petit, les conditions $N_\ell(t) \leq \epsilon$, $M_k(t) \leq \epsilon^\theta$ sur $[0,T]$, et les inégalités (3.2.20), (3.2.21), impliquent $N_\ell(t) \leq \epsilon/2, M_k(t) \leq \epsilon^\theta/2$ sur le même intervalle, ce qui est immédiat.

Le théorème est donc établi dans le cas de nonlinéarités semi-linéaires. Le cas des nonlinéarités cubiques quasilinéaires étant analogue mais plus simple, puisqu'il ne nécessite pas de réduction préalable, nous ne donnerons pas sa preuve.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ALINHAC, *Blow-up for nonlinear hyperbolic equations*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, Birkäuser, Boston, 1995.

[2] S. ALINHAC, *Explosion des solutions d'une équation d'onde quasi-linéaire en deux dimensions d'espace*, Comm. Partial Diff. Eq. 21 (5,6), (1996), 923–969.

[3] S. ALINHAC, *Blow-up of small data solutions for a class of quasilinear wave equations in two space dimensions I*, preprint, Université Paris-Sud, 1996.

[4] S. ALINHAC, *Blow-up of small data solutions for a class of quasilinear wave equations in two space dimensions II*, preprint, Université Paris-Sud, 1997.

[5] D. CHRISTODOULOU, *Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data*, Comm. Pure Appl. Math. 39, (1986), 267–282.

[6] R. COIFMAN et Y. MEYER, *Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque 57, 1978.

[7] V. GEORGIEV, *Decay estimates for the Klein-Gordon equations*, Comm. Partial Diff. Eq. 17, (1992), 1111–1139.

[8] V. GEORGIEV et B. YORDANOV, *Asymptotic behaviour of the one-dimensional Klein-Gordon equation with a cubic nonlinearity*, preprint, 1997.

[9] L. HÖRMANDER, *The lifespan of classical solutions of nonlinear hyperbolic equations*, Springer Lectures Notes in Math. 1256, (1987), 214–280.

[10] L. HÖRMANDER, *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Mathématiques et Applications 26, Springer, 1997.

[11] F. JOHN, *Blow-up of radial solutions of $u_{tt} = c^2(u_t)\Delta u$ in three space dimensions*, Mat. Appl. Comput. 4, (1985), 3–18.

[12] F. JOHN et S. KLAINERMAN : *Almost global existence to nonlinear wave equations in three space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. 37, (1984), 443–455.

[13] S. KLAINERMAN, *Global existence for nonlinear wave equations*, Comm. Pure Appl. Math. 33, (1980), 43–101.

[14] S. KLAINERMAN, *Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation*, Comm. Pure Appl. Math 38, (1985), 321–332.

[15] S. KLAINERMAN, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*, Lectures in Applied Mathematics 23, (1986), 293–326.

[16] S. KLAINERMAN, *Global existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein-Gordon equations in four space-time dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. 38, (1985) 631–641.

[17] K. MORIYAMA, *Normal forms and global existence of solutions to a class of cubic nonlinear Klein-Gordon equations in one-space dimension*, Diff. Int. Equations 10, n° 3, (1997), 499–520.

[18] K. MORIYAMA, S. TONEGAWA et Y. TSUTSUMI, *Almost Global Existence of Solutions for the Quadratic Semilinear Klein-Gordon Equation in One Space Dimension*, Funkcialaj Ekvacioj 40, n° 2, (1997) 313-333.

[19] T. OZAWA, K. TSUTAYA et Y. TSUTSUMI, *Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Klein-Gordon equations with quadratic nonlinearity in two space dimensions*, Math. Z, 222, (1996) 341–362.

[20] J. SHATAH, *Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations*, Comm. Pure Appl. Math. 38, (1985) 685–696.

[21] J. C. H. SIMON et E. TAFLIN, *The Cauchy problem for nonlinear Klein-Gordon equations*, Commun. Math. Phys. 152, (1993) 433–478.

[22] K. YAGI, *Normal forms and nonlinear Klein-Gordon equations in one space dimension*, Master thesis, Waseda University, 1994.

[23] B. YORDANOV, *Blow-up for the one-dimensional Klein-Gordon equation with a cubic nonlinearity*, preprint, 1996.

(Manuscrit reçu le 13 octobre 1997.)