

## Classification générique de synthèses temps minimales avec cible de codimension un et applications

par

**B. BONNARD**

Université de Bourgogne, Laboratoire de Topologie, BP 138, 21004 Dijon Cedex, France:

**G. LAUNAY**

INRIA Rocquencourt, BP 105, 78153 Le Chesnay Cedex, France:

et

**M. PELLETIER**

Université de Bourgogne, Laboratoire de Topologie, BP 138, 21004 Dijon Cedex, France.

---

RÉSUMÉ. – Soit un système de la forme

$$\dot{v}(t) = X(v(t)) + u(t)Y(v(t)), \quad v \in \mathbb{R}^n$$

où  $X, Y$  sont des champs de vecteurs analytiques,  $u$  une application mesurable bornée à valeurs dans  $[-1, +1]$  et soit  $N$  une sous-variété analytique de  $\mathbb{R}^n$ , de codimension 1. Dans cet article, on étudie le problème suivant : construire la loi optimale  $u^*$  pour le problème de contrôle en temps minimal où la variété terminale est  $N$ , ceci au voisinage de  $N$ . On se restreint à étudier toutes les situations génériques lorsque  $v \in \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ . Cette étude est motivée par un problème de contrôle de systèmes chimiques et sera appliquée au cas  $A \mapsto B \mapsto C$ .

*Mots clés* : temps minimal, synthèse optimale, systèmes chimiques.

---

AMS classification numbers 49K15, 93C95, 49N60.

*Annales de l'Institut Henri Poincaré* - Analyse non linéaire - 0294-1449  
Vol. 14/97/01/S 7.00/

ABSTRACT. – In this article we consider the problem of constructing the optimal closed loop control in the time minimal control problem, with terminal constraints belonging to a manifold of codimension one, for systems of the form  $\dot{v} = X + uY$ ,  $v \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ,  $|u| \leq 1$  under generic assumptions. The analysis is localized near the terminal manifold and is motivated by the problem of controlling a class of chemical systems.

*Key words:* time minimal control, optimal synthesis, chemical systems.

## 0. INTRODUCTION

Considérons un système de la forme

$$\frac{dv(t)}{dt} = X(v(t)) + u(t)Y(v(t)), \quad (1)$$

que l'on écrit aussi  $(X, Y)$ , où  $X, Y$  sont deux champs de vecteurs  $C^\omega$  (i.e. analytiques) sur une variété analytique  $M$  et l'ensemble des contrôles admissibles  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des applications mesurables définies sur un intervalle  $[0, T_u]$  de  $\mathbb{R}^+$  et à valeurs dans le domaine  $[-1, +1]$ . Une solution de (1) est un couple  $(v, u)$  défini sur un sous-intervalle de  $[0, T_u]$ , où  $u \in \mathcal{U}$  et  $t \mapsto v(t)$  est une application absolument continue vérifiant (1). On dit que  $v$  est la *réponse* associée à  $u$ .

L'objectif de cet article est le suivant. Soit  $N$  une sous-variété  $C^\omega$  régulière de  $M$ , de *codimension un* et soit  $v_0 \in N$ . On veut calculer la trajectoire optimale  $(v^*, u^*)$ , dans un voisinage  $U$  de  $v_0$  dans  $M$ , assez petit, pour le problème de *contrôle en temps minimal*, où la cible est  $N$  et où le système (1) est restreint à  $U$ . C'est donc un *problème local*. Pour être applicable, le contrôle optimal est calculé en boucle fermée (*feedback*), c'est-à-dire comme une application  $u^* : v \in U \rightarrow [-1, +1]$ .

Comme le problème est local on peut supposer que  $M = \mathbb{R}^n$  et que  $X$  et  $Y$  sont des applications définies sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Le point  $v_0$  est identifié à 0 et  $N$  est représentée localement comme l'image d'un voisinage de 0 par une immersion analytique  $F : \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}^n$  telle que  $F(0) = 0$ . On note  $\mathcal{S}$  l'ensemble des triplets  $(X, Y, F)$  et l'on munit cet ensemble de la topologie  $C^\infty$  de Whitney. Sur cet ensemble agit le pseudo-groupe engendré par les difféomorphismes locaux de  $M$ , les reparamétrisations locales de  $N$  et les *feedbacks*  $u \rightarrow -u$ . L'objectif de cet article est de classifier (essentiellement) toutes les synthèses optimales

apparaissant génériquement lorsque  $n = 2$  ou  $3$ . De plus on étudie aussi les cas génériques en dimension 2 et 3, sous l'hypothèse que  $Y$  est tangent partout à  $N$ . Cette situation s'appelle le *cas plat* et son étude est motivée par le problème de contrôle en temps minimal des *réacteurs chimiques*.

Le calcul du feedback optimal revient à évaluer deux objets géométriques. Le premier est le lieu  $W$  des *points de commutation* sur les trajectoires optimales (le contrôle optimal  $u^*(t)$  y est discontinu). Ce calcul est rendu possible par le *principe du maximum de Pontriaguine* [20], [17] qui permet de représenter les trajectoires optimales comme des projections d'un système hamiltonien. Cet objet est dans notre cas un ensemble *sous-analytique* et le principe du maximum est un outil de *stratification* naturel de  $W$ . Le second objet géométrique est le *cut locus*  $C$ , en fait l'adhérence du lieu des points où le feedback optimal n'est pas unique. L'ensemble  $W \cup C$  est un ensemble sous-analytique et la difficulté de notre étude est de l'évaluer. Ce calcul est facilité par l'utilisation de formes *normales* pour  $(X, Y, F)$ . Cela revient en fait à approximer  $W \cup C$  par des ensembles *semi-algébriques*. Cela pose le problème de *complexité* suivant : quel doit être le jet en 0 de  $(X, Y, F)$  pour obtenir les strates de  $W \cup C$  à une précision donnée ? Les réponses apportées à cette question sont plus complètes en dimension 2 qu'en dimension 3 où notre étude est essentiellement topologique. Ce travail est par ailleurs une première étape vers une *théorie des singularités* de la fonction *temps minimale*  $v \mapsto T^*(v)$ .

Cette étude est similaire à un programme de recherche, entrepris par Sussmann dans les années 80 et poursuivi par Schättler, de classification locale des synthèses optimales, pour le problème de temps minimal point-point, c'est-à-dire lorsque la cible est réduite à un point, ceci en fonction de la structure de l'algèbre de Lie engendrée par  $X$  et  $Y$ , voir par exemple les références [21], [22], [23]. Ce travail est aussi directement lié au problème de classier les solutions des équations du principe du maximum, voir [7], [12], [15].

Notre étude a été initialement motivée par le problème pratique d'optimiser la production des réacteurs chimiques fonctionnant en batch [8]. Le système est modélisé par les équations de la cinétique chimique [10] et le contrôle est la puissance de chauffe. L'objectif de ces procédés est de fabriquer un et un seul des produits obtenus par le schéma réactif, ce produit étant le produit désiré et les autres produits étant considérés comme des déchets. Ce problème se ramène mathématiquement à un problème de temps minimal avec variété terminale de codimension un.

L'organisation de l'article est la suivante. Dans le paragraphe 1, on présente le problème de contrôle des réacteurs chimiques. Dans le

paragraphe 2, on rappelle le principe du maximum et on présente des résultats fondamentaux concernant la classification de ses solutions et le problème de synthèse optimale, ceci pour faciliter la lecture de notre étude. Dans le paragraphe 3, on donne la classification générique dans le cas plan et dans le paragraphe 4 on étudie le cas plat en dimension 2. Dans le paragraphe 5 on étudie essentiellement les situations génériques dans le cas de  $\mathbb{R}^3$ . Enfin dans le paragraphe 6 on étudie le cas plat en dimension 3 et cette étude est appliquée au cas non trivial de maximiser la production de  $B$  pour un réseau  $A \mapsto B \mapsto C$ .

## 1. CONTRÔLE DES RÉACTEURS CHIMIQUES DE TYPE BATCH

Un réacteur chimique est constitué de deux parties : un récipient dans lequel on met les réactifs et un échangeur de chaleur qui permet de contrôler la température  $T$  des réactions.

Le fonctionnement en batch ou discontinu signifie que tous les réactifs sont placés dans le récipient au début du procédé. L'échange de chaleur est par exemple réalisé en faisant circuler un fluide dans l'enveloppe extérieure dont on contrôle la température d'entrée. On supposera que l'on peut contrôler directement la puissance de chauffe  $\frac{dT}{dt}$  ce qui revient à négliger la dynamique de l'échangeur. Le problème est alors directement modélisé par les lois de la cinétique chimique.

Considérons un système de  $p$  réactions  $\mathcal{R}$ , supposées toutes simples. Notons  $X_k$  l'ensemble de toutes les espèces,  $k = 1, \dots, n$ . Chaque réaction s'écrit sous la forme  $y_i \mapsto y_j$ , où  $y_i$  et  $y_j$  sont des combinaisons entières des  $X_k$  et sont identifiés à des points de  $\mathbb{R}^n$ . Le réseau de réactions est identifié à un *graphe orienté* dont les sommets sont les points  $y_i$ . Par ailleurs, puisque les réactions sont simples, à chaque arête  $y_i \mapsto y_j$  on peut associer la quantité

$$\mathcal{K}_{i \rightarrow j} = k(T) \prod c_k^{\delta_k}$$

si  $y_i$  s'écrit  $\sum_{k=1}^{\ell} \delta_k c_k$  et les concentrations des  $X_k$  vérifient l'équation

$$\dot{c} = \sum_{\mathcal{R}} \mathcal{K}_{i \rightarrow j} (y_j - y_i) \quad (2)$$

où  $c = {}^t(c_1, \dots, c_n)$  et  $\dot{c} = \frac{dc}{dt}$ .

Les travaux remarquables de Feinberg [8] montrent les liens entre la topologie du graphe et le nombre de positions d'équilibre ou l'existence de trajectoires périodiques pour l'équation (2).

Écrivons à titre d'exemple le système associé à un réseau de deux réactions simples consécutives  $X_1 \xrightarrow{k_1} X_2 \xrightarrow{k_2} X_3$ . Les concentrations respectives sont notées  $c_1, c_2$  et  $c_3$  et l'on a :

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= -vc_1 \\ \dot{c}_2 &= vc_1 - \beta v^\alpha c_2 \\ \dot{v} &= h(v)u \end{aligned} \quad (3)$$

où  $v = k_1$ ,  $E_i, A_i$  sont des paramètres déterminés expérimentalement,  $R$  est la constante des gaz parfaits,  $k_i = A_i e^{-E_i/RT}$ ,  $\alpha = E_2/E_1$ ,  $\beta = A_2/A_1^\alpha$ ,  $u = \dot{T}$  et  $h(v) = (Rv/E_1) \ln^2(v/A_1)$ .

Le problème de contrôle optimal se formule ainsi : l'objet du procédé est de fabriquer un des produits  $X_i$  (dans l'exemple précédent c'est  $X_2$ ) et le problème optimal est de maximiser sa production sur une année. Cela se reformule ainsi dans le cadre du problème du temps minimal : *obtenir en temps minimal une quantité donnée de  $X_i$  étant entendu qu'à la fin du batch on réitère le processus.*

Le contrôle choisi étant la puissance de chauffe, on a donc  $u = \dot{T}$  et le système est de la forme (1). L'état est  $x = {}^t(c_1, \dots, c_{n-1}, v)$ ,  $Y$  est colinéaire à  $\frac{\partial}{\partial v}$  et la variété terminale s'écrit  $f(\tilde{c}) = d$ , où  $\tilde{c} = {}^t(c_1, \dots, c_{n-1})$ ,  $f : \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \mathbb{R}$  et  $d$  est une constante donnée. La variété terminale ne dépend pas de la température  $T$ , c'est-à-dire de  $v$  et le problème est donc plat.

## 2. PRÉLIMINAIRES. LE PRINCIPE DU MAXIMUM

L'objectif de ce paragraphe est de fixer la terminologie pour étudier notre problème et présenter le principe du maximum. Considérons un système de la forme (1):

$$\frac{dv(t)}{dt} = X(v(t)) + u(t)Y(v(t)),$$

où  $v$  est une application absolument continue, définie sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  (l'espace d'état), solution de (1) presque partout, où  $u \in \mathcal{U}$  ensemble des applications mesurables bornées définies sur  $[0, T]$  à valeurs dans  $[-1, +1]$  et enfin où  $X, Y$  sont deux champs de vecteurs analytiques. Fixons  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  et notons  $t \mapsto v(t, v_0, u)$  la réponse selon (1) à  $u \in \mathcal{U}$  dont le

point initial est  $v_0$  à l'instant  $t = 0$ . Alors  $A(v_0, T) = \{v(T, v_0, u) ; u \in \mathcal{U}\}$  désigne l'ensemble des *points accessibles* à  $v_0$  en un temps  $T \geq 0$  et  $A(v_0) = \bigcup_{T \geq 0} A(v_0, T)$  l'ensemble des *états accessibles*.

### 2.1. Le principe du maximum de Pontriaguine

Soit  $N$  une sous-variété régulière de  $\mathbb{R}^n$ . Le principe du maximum [20] nous dit que si  $(v^*, u^*)$  est une trajectoire *temps minimale* pour joindre  $v^*(0)$  à  $N$  alors il existe un *vecteur adjoint*  $p^*(t) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tel que les conditions suivantes soient satisfaites presque partout par  $(v^*, p^*, u^*)$ :

$$\dot{v}^* = \frac{\partial H}{\partial p}(v^*, p^*, u^*), \quad \dot{p}^* = -\frac{\partial H}{\partial v}(v^*, p^*, u^*) \quad (4)$$

$$H(v^*, p^*, u^*) = M(v^*, p^*) \quad (5)$$

où  $H(v, p, u) = \langle p, X + uY \rangle$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  étant le produit scalaire usuel et  $M(v, p) = \max_{|u| \leq 1} H(v, p, u)$ .

De plus on a la condition suivante :

$$t \rightarrow M(v^*(t), p^*(t)) \text{ est une constante positive ou nulle} \quad (6)$$

Et à l'instant terminal  $t^*$  sont vérifiées les *conditions de transversalité* :

$$v^*(t^*) \in N, p^*(t^*) \text{ est orthogonal à } T_{v^*(t^*)}N \quad (7)$$

### 2.2. Définitions

Un triplet  $(v, p, u)$  solution des relations (4), (5), (6) est appelé un *relèvement extrémal*,  $(v, u)$  une *extrémale*,  $(v, p)$  une *bitrajectoire extrémale* et  $v$  une *trajectoire extrémale*. S'ils satisfont les *conditions de transversalité* on les qualifie respectivement de *BC-relèvement extrémal*, *BC-extrémale*, *BC-bitrajectoire extrémale* et *BC-trajectoire extrémale*. Introduisons

$$\hat{N} = \{(v, p) ; v \in N \text{ et } p \perp T_v N\}.$$

Les conditions de transversalité s'écrivent :

$$(v^*(t^*), p^*(t^*)) \in \hat{N}.$$

Soit  $(v, u)$  une extrémale définie sur  $[0, T]$ . On dit que  $s \in [0, T]$  est un *temps de commutation* si  $s$  appartient à la fermeture de l'ensemble des  $t$  où  $v$  n'est pas  $\mathcal{C}^1$ . Alors  $v(s)$  est appelé un *point de commutation*. On note  $K$  l'ensemble des points de commutation des *BC-extrémales* et  $W$  le lieu des points de commutation pour les *trajectoires optimales*.

Si  $(v, p, u)$  est un relèvement extrémal défini sur  $[0, T]$ , la fonction  $\varphi : t \rightarrow \varphi(t) = \langle p(t), Y(v(t)) \rangle$  s'appelle la *fonction de commutation*; alors le contrôle extrémal  $u$  est dit *bang* si  $u(t) = \varepsilon$ ,  $\varepsilon = \pm 1$ , et il est dit *bang-bang* si  $u$  est constante par morceaux sur  $[0, T]$  et à valeurs dans  $\{-1, +1\}$ ; enfin ce contrôle extrémal  $u$  est dit *régulier* si  $u(t) = \text{signe}(\varphi(t))$  presque partout, et il est dit (*totale*) *singulier* si  $\forall t \in [0, T]$ ,  $\varphi(t) = 0$ . On note  $\gamma_+$  (resp.  $\gamma_-$ ) un arc correspondant à  $u \equiv +1$  (resp.  $u \equiv -1$ ) et  $\gamma_s$  un arc correspondant à un contrôle singulier. On note  $\gamma_+\gamma_-$  un arc  $\gamma_+$  suivi par un arc  $\gamma_-$ ,  $\gamma_+\gamma_s$  un arc  $\gamma_+$  suivi par un arc  $\gamma_s$  et ainsi de suite pour toute *concaténation* d'arcs  $\gamma_+$ ,  $\gamma_-$  ou  $\gamma_s$ , certains de ces arcs pouvant être vides. Le relèvement extrémal  $(v, p, u)$  est dit *exceptionnel* si  $H|_{(v,p,u)} = 0$  presque partout.

Soit  $(v, u)$  une *BC*-extrémale définie sur  $[T, 0]$ ,  $T < 0$ . Le *cut point* le long de  $v$  est le premier point où  $v$  cesse d'être optimale c'est-à-dire le point  $v(t)$  où  $t$  est le temps de  $[T, 0]$  tel que  $v$  soit optimale sur  $]t, 0]$  et n'est pas optimale sur  $[t', 0] \forall t' < t$ . L'ensemble des cut points s'appelle le *cut locus* et se note  $C$ .

*L'objectif de ce travail est de stratifier  $W \cup C$ .*

### 2.3. Rappels sur la classification des extrémales régulières

En vue de rendre la lecture de cet article aisée, il convient de présenter brièvement les résultats de Kupka concernant la classification des relèvements extrémaux [15].

2.3.1. NOTATIONS. – Soit  $z = (v, p)$ ,  $\Sigma = \{(v, p) ; \langle p, Y(v) \rangle = 0\}$  et  $\Sigma' = \{(v, p) ; \langle p, Y(v) \rangle = \langle p, [X, Y](v) \rangle = 0\}$  où le crochet de Lie est calculé avec la convention :  $[Z_1, Z_2] = \frac{\partial Z_2}{\partial v} Z_1 - \frac{\partial Z_1}{\partial v} Z_2$  et où l'on note  $adZ_1(Z_2) = [Z_1, Z_2]$ .

Soit  $(z, u)$  un relèvement extrémal défini sur  $[0, T]$ , supposé *lisse*. En dérivant la fonction de commutation  $\varphi : t \rightarrow \varphi(t) = \langle p(t), Y(v(t)) \rangle$  il vient :

$$\dot{\varphi}(t) = \langle p(t), [X, Y](v(t)) \rangle$$

$$\ddot{\varphi}(t) = \langle p(t), ad^2 X(Y)(v(t)) - u(t)ad^2 Y(X)(v(t)) \rangle.$$

2.3.2. POINTS DE COMMUTATION NORMAUX. – Soit  $z_0 \in \Sigma$  et supposons que  $Y(v_0) \neq 0$  et  $z_0 \in \Sigma \setminus \Sigma'$ . Le point  $z_0$  est dit *normal*. Le comportement des bitrajectoires extrémales  $z = (v, p)$  au voisinage de  $z_0$  est donné par le lemme suivant :

LEMME. — Notons  $z^+$  (resp.  $z^-$ ) la bitrajectoire extrémale correspondant à  $u \equiv +1$  (resp.  $-1$ ). Si l'on note  $\varphi^+$  (resp.  $\varphi^-$ ) la fonction de commutation évaluée le long de  $z^+$  (resp.  $z^-$ ) et  $t_0$  le temps de commutation avec  $z^+(t_0) = z^-(t_0) = z_0 = (v_0, p_0)$ , on a :

$$\dot{\varphi}^+(t_0) = \dot{\varphi}^-(t_0) = \langle p_0, [X, Y](v_0) \rangle \text{ (loi de réflexion).}$$

De plus si  $z = (v, p)$  est une bitrajectoire extrémale passant par  $z_0$  on a :

(i) si  $\langle p_0, [X, Y](v_0) \rangle < 0$  alors  $v = \gamma_+ \gamma_-$

(ii) si  $\langle p_0, [X, Y](v_0) \rangle > 0$  alors  $v = \gamma_- \gamma_+$

2.3.3. LE CAS DU PLI. — Soit  $z_0 = (v_0, p_0) \in \Sigma'$  et supposons que  $Y(v_0)$  est non nul et que  $\lambda^+$  et  $\lambda^-$  sont non nuls où  $\lambda^+$  (resp.  $\lambda^-$ )  $= \langle p_0, \text{ad}^2 X(Y)(v_0) -$  (resp.  $+$ )  $\text{ad}^2 Y(X)(v_0) \rangle$ . Un tel point s'appelle un pli. Le comportement des bitrajectoires extrémales régulières  $z = (v, p)$  au voisinage de  $z_0$  est donné par les trois allures indiquées en figure 1 (le rôle de  $z^+$  et  $z^-$  est permutable en (ii)), qui correspondent à :

(i) cas hyperbolique :  $\lambda^+ > 0$  et  $\lambda^- < 0$ ,

(ii) cas parabolique :  $\lambda^+ \lambda^- > 0$ ,

(iii) cas elliptique :  $\lambda^+ < 0$  et  $\lambda^- > 0$ .

En particulier toutes les extrémales régulières sont bang-bang bien que le nombre de commutations ne soit pas uniformément borné dans le cas elliptique.

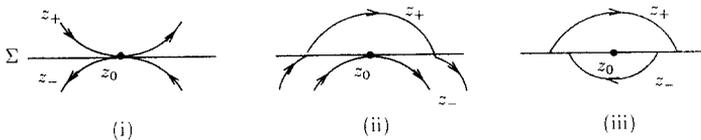


Fig. 1.

Dans ces figures  $\Sigma'$  se projette en  $z_0$ .

#### 2.4. Quelques propriétés des extrémales singulières

Les relèvements extrémaux singuliers vérifient  $\forall t \in [0, T]$   $\langle p(t), Y(v(t)) \rangle = 0$ , c'est-à-dire que les bitrajectoires extrémales singulières  $z(t) = (v(t), p(t))$ ,  $t \in [0, T]$  sont contenues dans  $\Sigma$ . L'objet de ce paragraphe est de montrer qu'ils sont, au moins génériquement, solutions d'une équation différentielle analytique sur  $\Sigma'$  et de rappeler leur statut

d'optimalité pour le problème point-point, c'est-à-dire lorsque la variété terminale est réduite à un point, ceci sous des conditions de codimension zéro ou un pour le système  $(X, Y)$ .

2.4.1. LEMME. – Notons  $S = \{(v, p) \in \Sigma' ; \langle p, ad^2 Y(X)(v) \rangle = 0\}$ . Les relèvements extrémaux singuliers  $(v, p, u)$  sont tels que  $(v, p)$  est contenu dans  $\Sigma'$  et ceux qui sont tels que  $(v, p)$  est contenu dans  $\Sigma' \setminus S$  sont les solutions de l'équation différentielle hamiltonienne sur  $\Sigma' \setminus S$

$$\dot{v} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial v} \quad (8)$$

où le contrôle singulier est donné pour  $(v(t), p(t)) \in \Sigma' \setminus S$  par  $u(t) = \hat{u}(v(t), p(t))$  avec :

$$\hat{u}(v, p) = \frac{\langle p, ad^2 X(Y)(v) \rangle}{\langle p, ad^2 Y(X)(v) \rangle} \quad (9)$$

et  $\hat{H}(v, p) = \langle p, X(v) + \hat{u}(v, p)Y(v) \rangle$ .

*Preuve.* – En dérivant l'équation de contrainte  $\langle p, Y(v) \rangle \equiv 0$  le long de  $(v(t), p(t), u(t))$  il vient :  $\langle p, [X, Y](v) \rangle = \langle p, ad^2 X(Y)(v) - u ad^2 Y(X)(v) \rangle \equiv 0$  et le contrôle singulier est bien  $\hat{u}$ . Par ailleurs  $\frac{\partial \hat{H}}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p}$  et  $\frac{\partial \hat{H}}{\partial v} = \frac{\partial H}{\partial v}$  sur  $\langle p, Y(v) \rangle \equiv 0$ , d'où l'assertion.

On peut observer que (8) définit bien un champ de vecteurs hamiltonien sur  $\Sigma' \setminus S$  pour la structure induite par la structure symplectique canonique de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

2.4.2. DÉFINITIONS ET NOTATIONS. – Soit  $(v, p, u)$  un relèvement singulier défini sur  $[0, T]$  et tel que  $(v, p)$  est contenu dans  $\Sigma' \setminus S$ . On dit que  $u$  est *admissible* si  $\forall t \in [0, T], u(t) = \hat{u}(v(t), p(t)) \in [-1, +1]$ . Un tel contrôle est dit *saturant* si  $u(0)$  ou  $u(T) = \pm 1$ . Supposons que l'application  $t \mapsto v(t)$  soit injective. On peut alors en utilisant un difféomorphisme local l'identifier à :  $t \mapsto (t, 0, \dots, 0)$ . Par ailleurs en utilisant un feedback, on peut identifier (en changeant  $X$  en  $\hat{X} = X + \hat{u}Y$ ) le contrôle singulier au contrôle nul. Avec ces normalisations introduisons alors  $K(t) = \{ad^k \hat{X}(Y)(v(t)) ; k = 0, \dots, +\infty\}_{e.v.}$ ,  $K(t)$  s'appelle le *premier cône de Pontriaguine*. D'après [9] on dit que  $(v, u)$  est une extrémale singulière si et seulement si  $\forall t \in ]0, T[$   $K(t)$  est de codimension au moins égale à un. Faisons les hypothèses suivantes :

- (H1)  $\forall t \in ]0, T[$ ,  $K(t)$  est de codimension 1 et de plus pour tout  $t \in [0, T]$  les  $(n-1)$  vecteurs  $\{ad^k \hat{X}(Y)(v(t)) ; k = 0, \dots, n-2\}$  sont indépendants.

(H2)  $\forall t \in [0, T], \hat{X}(v(t)) \notin \{ad^k \hat{X}(Y)(v(t)) ; k = 0, \dots, n-3\}_{e.v.}$   
 si  $n \geq 3$  et si  $n = 2$ ,  $\hat{X}(v(t))$  et  $Y(v(t))$  sont indépendants.

En dérivant  $\langle p(t), Y(v(t)) \rangle = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  on en déduit que  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, T], \langle p(t), ad^k \hat{X}(Y)(v(t)) \rangle = 0$ , et le vecteur adjoint est donc orthogonal à  $K(t)$  en tout instant  $t$  ; par ailleurs si  $h$  est la valeur du hamiltonien  $\hat{H} = \langle p, \hat{X}(v) \rangle$  le long du relèvement extrémal,  $p$  est orienté selon la convention  $h \geq 0$  (voir 2.1, condition (6)) et est défini de façon unique à un facteur près sous les hypothèses (H1) et (H2). On dira que le relèvement extrémal singulier est *exceptionnel* si  $h = 0$  et *hyperbolique* (resp. *elliptique*) si  $h > 0$  et  $\forall t \in [0, T], \langle p(t), ad^2 Y(\hat{X})(v(t)) \rangle < 0$  (resp.  $> 0$ ).

2.4.3. PROPOSITION. – Soit  $(v, u)$  une extrémale singulière admissible définie sur  $[0, T]$  et vérifiant (H1) et (H2). Alors si  $T$  est assez petit, la trajectoire  $v$  est temps minimale (resp. maximale) pour le problème point-point ssi on est dans le cas hyperbolique ou exceptionnel (resp. elliptique).

*Preuve.* – Ces résultats proviennent de [3].

Des résultats 2.3 et 2.4 on déduit les propriétés suivantes.

## 2.5. Propriétés

Soit  $(v, u)$  une extrémale singulière définie sur  $[0, T]$  vérifiant (H1) et (H2). Alors dans le cas hyperbolique ou elliptique  $u \in ]-1, +1[$ , et  $(v, u)$  admet un seul relèvement extrémal  $(v, p, u)$  où  $p \in \mathbb{P}^{n-1}$  (espace projectif). Le point  $z_0 = (v(0), p(0))$  est un pli et les relèvements extrémaux sont donnés par la figure 1 (i) si  $(v, p, u)$  est hyperbolique et (iii) si  $(v, p, u)$  est elliptique. Dans le cas exceptionnel,  $u \in ]-1, +1[$  et  $(v, u)$  admet deux relèvements extrémaux  $(v, p, u)$  avec  $p \in S^{n-1}$ , l'un tel que  $z_0 = (v(0), p(0))$  soit un point pli hyperbolique (figure 1 (i)) et l'autre tel que  $z_0 = (v(0), -p(0))$  soit un point pli elliptique (figure 1 (iii)). Le cas parabolique correspond à la situation où  $u \notin ]-1, +1[$ , i.e. n'est pas admissible.

## 2.6. Le cas $n = 2$

2.6.1. LEMME. – Les relèvements extrémaux singuliers  $(v, p, u)$  sont tels que les trajectoires  $v$  sont contenues dans le lieu des points où  $Y$  et  $[X, Y]$  sont colinéaires. Si  $ad^2 Y(X)(v)$  n'est jamais colinéaire à  $Y(v)$ , le contrôle singulier est donné par (9) et  $\hat{u}$  ne dépend pas de  $p$  si  $Y(v)$  ne s'annule pas.

*Preuve.* – On a  $\langle p, Y(v) \rangle = \langle p, [X, Y](v) \rangle \equiv 0$ , dans le cas singulier et donc, puisque  $p \neq 0$  en tout instant,  $Y(v)$  et  $[X, Y](v)$  sont colinéaires.

Le contrôle singulier est défini par (9) et  $p$  peut être éliminé en utilisant  $\langle p, Y(v) \rangle \equiv 0$ .

**2.6.2. PROPOSITION.** – Soit  $v_0$  tel que  $X, Y$  sont indépendants en  $v_0$  ainsi que  $Y, [X, Y]$ . Alors dans un voisinage de  $v_0$  toute trajectoire optimale est régulière avec au plus une commutation.

Soit  $v_0$  tel que  $X, Y$  sont indépendants en  $v_0$  et  $Y, [X, Y]$  sont colinéaires en  $v_0$ . Alors dans le cas hyperbolique, une trajectoire optimale est de la forme  $\gamma_{\pm}\gamma_s\gamma_{\pm}$ , dans le cas parabolique, de la forme  $\gamma_+\gamma_-\gamma_+$  ou  $\gamma_-\gamma_+\gamma_-$ . Dans le cas elliptique toute trajectoire optimale est bang-bang avec au plus une commutation.

*Preuve.* – Tous ces résultats viennent de la classification des extrémales excepté dans le cas elliptique étudié en [22].

## 2.7. Le cas $n = 3$

**2.7.1. LEMME.** – Notons  $D = \det(Y, [X, Y], [Y, [X, Y]])$ ,  $D' = \det(Y, [X, Y], [X, [X, Y]])$  et  $D'' = \det(Y, [X, Y], X)$ . Les extrémales singulières dont les trajectoires  $v$  sont contenues dans  $\mathbb{R}^3 \setminus (D = 0)$  sont les solutions de

$$\dot{v} = \hat{X}(v), \quad \hat{X}(v) = X(v) + \hat{u}(v)Y(v), \quad \hat{u}(v) = -D'(v)/D(v) \quad (10)$$

Alors dans le cas hyperbolique (resp. elliptique, exceptionnel), ces extrémales sont les solutions non réduites à 1 point ou non périodiques de (10) contenues dans  $D''D > 0$ , (resp.  $D''D < 0, D'' = 0$ ) telles que  $\hat{u} \in ]-1, +1[$ .

*Preuve.* – Les relèvements singuliers  $(v, p, u)$  vérifient

$$\langle p, Y(v) \rangle = \langle p, [X, Y](v) \rangle = \langle p, ad^2 X(Y)(v) + u[Y, [X, Y]](v) \rangle \equiv 0$$

En dehors de  $D = 0$ , le contrôle singulier est donc donné par le feedback  $\hat{u}$ . On vérifie que l'ensemble  $D'' = 0$  est un ensemble invariant pour (10) dont les solutions sont les extrémales exceptionnelles. Lorsque  $\hat{u} \in ]-1, +1[$ , cet ensemble représente la séparation entre la zone hyperbolique  $D''D > 0$  et la zone elliptique  $D''D < 0$ .

**2.7.2. PROPOSITION.** – La synthèse temps minimale pour le problème point-point au voisinage de  $v_0 \in \mathbb{R}^3$  est la suivante. Si  $v_0 \in D''D > 0$ ,  $\hat{X}(v_0) \neq 0$  et  $\hat{u}(v_0) \in ]-1, +1[$  (cas hyperbolique), une trajectoire optimale est de la forme  $\gamma_{\pm}\gamma_s\gamma_{\pm}$ . Si  $v_0 \in D''D < 0$ ,  $\hat{X}(v_0) \neq 0$  et  $\hat{u}(v_0) \in ]-1, +1[$  (cas elliptique), toute trajectoire optimale est bang-bang avec au plus deux

*commutations.* Si  $v_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{D = 0 \text{ ou } \hat{X} = 0\}$  et  $\hat{u}(v_0) \notin [-1, +1]$  (cas parabolique) toute trajectoire optimale est bang-bang, avec au plus deux commutations.

*Preuve.* – Ces résultats proviennent de [21].

### 3. CLASSIFICATION PLANE GÉNÉRIQUE

Nous rappelons ici quelques résultats de [5] où est proposée une application de cette étude aux réacteurs chimiques

#### 3.1. Définitions et notations

Soit le système (1) noté  $(X, Y)$ , supposé plan et on note  $v = (x, y)$ , les points de  $\mathbb{R}^2$ . Un système de coordonnées  $(U, v)$  tel que la restriction de  $Y$  à  $U$  est  $\frac{\partial}{\partial y}$  est dit *adapté*. On se place au voisinage d'un point  $v_0 \in \mathbb{R}^2$  identifié à 0. La variété terminale  $N$  est identifiée localement à l'image d'un voisinage de 0 par une immersion  $F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$  telle que  $F(0) = 0$ . La classification générique consiste à analyser toutes les situations de *codimension 0 ou 1* sur la série de Taylor de  $(X, Y, F)$  en 0. On traitera par ailleurs des situations de codimension 2, utiles pour la géométrie du problème dans  $\mathbb{R}^3$ .

#### 3.2. Hypothèse A1

On peut identifier localement  $N$  au segment  $x = 0, y \in ] - \varepsilon, +\varepsilon[$ . Il est clair que l'on peut se limiter à calculer la loi optimale pour, par exemple, le demi-espace  $x < 0$ . Notons  $C(v)$  le convexe  $\{X(v) + uY(v) ; |u| \leq 1\}$ . L'hypothèse A1 est de supposer  $X$  et  $Y$  non colinéaires en 0 et  $C(0)$  contenu dans le demi-espace  $x > 0$ . La normale  $n$  à  $N$  au voisinage de 0 est orientée par convention vers le demi-espace  $x > 0$ . Alors pour tout  $BC$ -relèvement extrémal  $(v, p, u)$  défini sur  $[T, 0]$ ,  $T < 0$  avec  $v(0) \in N$ , voisin de 0, on peut donc poser  $p(0) = n(v(0))$ .

#### 3.3. Le cas A1 générique

Par hypothèse, en 0,  $X \pm Y$  ne sont pas tangents à  $N$  et avec notre convention on a  $\langle n(v_0), X(v_0) \pm Y(v_0) \rangle > 0$  pour  $v_0 \in N$  voisin de 0 ; et tout  $BC$ -relèvement extrémal  $(v, p, u)$  sur  $[T, 0]$ ,  $T < 0$ , avec  $v(0) \in N$  voisin de 0, vérifie  $p(0) = n(v(0))$ . Supposons  $\langle n(0), Y(0) \rangle \neq 0$ , alors la loi optimale est donnée par la condition de transversalité :

$$u \equiv \text{signe} (\langle n(0), Y(0) \rangle) \quad (11)$$

Remarquons que c'est le contrôle qui *maximise la vitesse de déplacement normale*.

### 3.4. Le cas A1 de codimension un

On va analyser maintenant la situation où  $\langle n(0), Y(0) \rangle = 0$ , c'est-à-dire où  $Y$  est tangent à  $N$ . Alors  $\hat{N} = \{(x, p) ; x \in N \text{ et } p \perp T_x N\}$  intersecte la surface  $\Sigma = \{(x, p) ; \langle p, Y(x) \rangle = 0\}$  en  $(0, n(0))$  et les  $BC$ -extrémales peuvent commuter dans un voisinage de 0. Citons un lemme général.

3.4.1. LEMME. – Soit  $\gamma$  un arc admissible atteignant  $N$  en  $v_0$  et associé à un contrôle  $u_0$  constant,  $\gamma$  étant supposé non contenu dans  $N$ . Notons  $Z = X + u_0 Y$  et  $\lambda(\delta, P) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \delta^k}{k!} \text{ad}^k Z(P)(v_0) - Z(v_0)$  avec  $\delta \in \mathbb{R}$  et  $P$  champ de vecteurs. Si  $\gamma$  est optimale, alors pour tout  $\delta \geq 0$  assez petit et pour tout  $P$  élément de  $\{X + uY ; |u| \leq 1\}$  on doit avoir  $\langle n, \lambda(\delta, P) \rangle \leq 0$  où  $n$  est la normale à  $N$  en  $v_0$ , orientée vers le demi-espace ne contenant pas  $\gamma$ .

*Preuve.* – Voir [5].

3.4.2. HYPOTHÈSES. – On a donc  $\langle n(0), Y(0) \rangle = 0$ . Supposons  $Y(0) \neq 0$  et  $\langle n(0), [X, Y](0) \rangle \neq 0$ . Observons que d'après A1,  $\langle n(0), X(0) \rangle > 0$ .

3.4.3. MÉTHODE D'ANALYSE. – Notre objectif est d'évaluer au voisinage de 0, la courbe de commutation  $K$  et le cut locus  $C$ . Pour cela, il est commode d'utiliser les normalisations suivantes. Puisque  $X$  et  $Y$  sont transverses en 0, on peut supposer localement que  $Y = \frac{\partial}{\partial y}$  et que la trajectoire associée à  $u \equiv 0$  est la trajectoire  $t \rightarrow (t, 0)$ .

Le système (1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{x} = \alpha(x, y) &= 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} a_i(x) y^i \\ \dot{y} = \beta(x, y) + u &= \sum_{i=1}^{+\infty} b_i(x) y^i + u, \quad |u| \leq 1 \end{aligned} \tag{12}$$

De plus en changeant si nécessaire  $y$  en  $-y$  et  $u$  en  $-u$ , on peut supposer que  $a = a_1(0) > 0$ , où  $a$  est  $-\langle n(0), [X, Y](0) \rangle$  avec  $n(0) = (1, 0)$  normale à  $N$  en 0. La variété terminale  $N$  est localement paramétrisée comme l'image de  $s \mapsto (c(s), s)$  où  $c(s) = ks^2 + o(s^2)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  étant tangent à  $N$  en 0. Le coefficient  $k$  paramétrise la courbure de  $N$ . La normale  $n(v_0)$  à  $N$  en  $v_0 \in N$  orientée suivant la convention  $\langle n(v_0), X(v_0) \rangle > 0$  s'écrit  $(n_1, n_2)$ , avec  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = -c'(s) = -2ks + o(s)$ . En  $v_0 \in N$  voisin de 0, le contrôle optimal est donné par la condition de transversalité (11).

De plus, si  $k < 0$  les  $BC$ -trajectoires extrémales peuvent se couper au voisinage de 0, contrairement au cas  $k > 0$  (voir fig. 2).

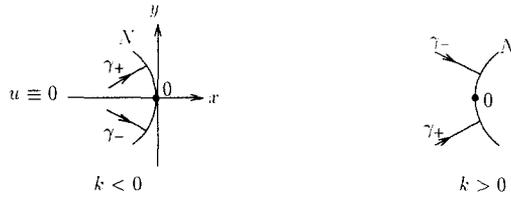


Fig. 2.

Le système adjoint associé à (12), où  $p = (p_1, p_2)$  s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -p_1 \sum_{i=1}^{+\infty} a'_i(x)y^i - p_2 \sum_{i=1}^{+\infty} b'_i(x)y^i \\ \dot{p}_2 &= -p_1 \sum_{i=1}^{+\infty} i a_i(x)y^{i-1} - p_2 \sum_{i=1}^{+\infty} i b_i(x)y^{i-1} \end{aligned} \quad (13)$$

où  $a'_i, b'_i$  sont les dérivées de  $a_i, b_i$  par rapport à  $x$ . Si  $u$  est analytique par morceaux, toute solution  $(v, p)$  de (12), (13) avec  $(v(0), p(0)) \in \hat{N}$  et  $v(0)$  voisin de 0, peut être évaluée pour  $t$  petit en utilisant l'analyticité.

3.4.4. LEMME. — Une trajectoire aboutissant en  $v_0 \in N$  voisin mais distinct de 0 ne peut être optimale que si elle est de la forme  $\gamma_+$  ou  $\gamma_+\gamma_-$ , les arcs considérés étant tous non vides.

*Preuve.* — Voir [5].

3.4.5. LEMME. — L'arc  $\gamma_-$  arrivant en 0 (noté  $\gamma_-^0$ ) n'est pas optimal.

*Preuve.* — On développe la fonction de commutation associée à  $\gamma_-^0$  à l'ordre 1 en  $t$ .

3.4.6. LEMME. — Supposons  $k \neq 0$ . Les points de commutation des  $BC$ -extrémales  $\gamma_+\gamma_-$  forment une courbe analytique  $K$  dont l'espace tangent en 0 est  $\mathbb{R}(-2k/a, 1 + 2k/a)$ .

*Preuve.* — Intégrons (12), (13) pour  $t \leq 0$ , avec les conditions initiales  $v(0) \in N, p(0) = n(v(0)) = (1, -2ks + o(s))$ . On obtient  $p_1(t) = 1 + o(1), p_2(t) = -2ks - at + o(s, t)$ . Les temps de commutation sont donnés en résolvant  $p_2(t) = 0, t \leq 0$ . On obtient donc  $\bar{t} = -2ks/a + o(s)$ . De plus si  $k < 0$ , on doit avoir  $s < 0$  et si  $k > 0, s > 0$ . Le point de commutation des  $BC$ -extrémales  $\gamma_+\gamma_-$  est donc  $(x(\bar{t}), y(\bar{t})) = s(-2k/a, 1 + 2k/a) + o(s)$  et le lemme est prouvé.

La synthèse optimale dépend du fait que les extrémales  $\gamma_+\gamma_-$  traversent  $K$  ou se réfléchissent sur  $K$ . On a :

3.4.7. LEMME. – *Les cas génériques sont ceux où  $k \neq 0$  et  $k \neq -a/4$ . Une BC-extrémale  $\gamma_+\gamma_-$  traverse  $K$  si  $k > 0$  ou  $-a/4 < k < 0$  et se réfléchit sur  $K$  si  $k < -a/4$ .*

*Preuve.* – Il suffit de comparer les pentes respectives de  $K$  et de la trajectoire  $\gamma_+^0$  qui est  $+1$ . D'où les situations géométriques représentées par la figure 3.

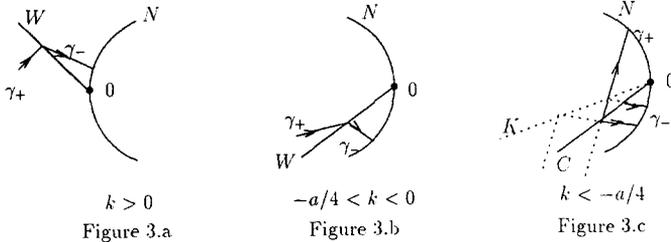


Fig. 3.

3.4.8. LEMME. – *Les synthèses optimales sont données par la figure 3 où  $W$  est une courbe lisse de pente  $-1 - a/2k$  en 0 et le cut locus  $C$  est une courbe lisse de pente  $-a/4k$  en 0.*

*Preuve.* – Dans les deux premiers cas la situation est claire car au voisinage de 0, dans le domaine  $x < 0$ , il existe une seule BC-trajectoire extrémale  $\gamma_+\gamma_-$  pour atteindre la cible.

Considérons le cas  $k < -a/4$  et montrons qu'une trajectoire optimale est sans commutation. Supposons donc que des trajectoires optimales  $\gamma_+\gamma_-$  s'accablent en 0 (voir fig 3). Alors on peut construire une trajectoire optimale de la forme  $\gamma_+\gamma_-\gamma_+\gamma_-$ , ce qui est absurde d'après le lemme 3.4.4.

Le cut locus  $C$  existe dans ce cas  $k < -a/4$  pour des raisons topologiques : en effet, la fonction temps minimale est continue. On calcule  $C$  en évaluant l'ensemble sous-analytique  $L = \{v_1 = (x_1, y_1), x_1 < 0 \text{ tels que } \exp t(X \pm Y)(v_1) \text{ intersecte } N\}$ , où  $\exp tZ$  désigne le groupe local à un paramètre associé à  $Z$  :  $L$  est la ligne de partage, c'est-à-dire l'ensemble des points où la loi optimale n'est pas unique (cf. [19]). En calculant, il vient que  $L$  est une courbe lisse dont la tangente en 0 a pour pente  $-a/4k \in ]0, 1[$  avec  $C = L$ . Observons aussi qu'il n'y a pas ici de trajectoire optimale passant par 0.

3.4.9. REMARQUE : COMPLEXITÉ. – Les courbes  $K$  et  $C$  peuvent être calculées à l'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  si l'on développe  $c$  à l'ordre  $m + 1$ ,  $\alpha$  à l'ordre  $m$  et  $\beta$  à l'ordre  $m - 1$  (avec les notations introduites en 3.4.3), ces ordres étant minimaux.

### 3.5. Le cas du pli générique

L'objet de ce paragraphe est de calculer la synthèse optimale quand une extrémale singulière rencontre la cible en un point où  $Y$  est tangent à  $N$ . C'est une situation non générique, mais elle est intéressante pour deux raisons. Elle devient générique si  $n = 3$  et par ailleurs elle est techniquement intéressante : l'étude menée dans [5] utilise des évaluations de l'ensemble d'accessibilité et des calculs directs comme dans le paragraphe précédent.

3.5.1. HYPOTHÈSES. – On suppose que le système vérifie la condition A1. De plus on va supposer qu'en 0,  $Y$  est tangent à  $N$  et  $Y, [X, Y]$  sont colinéaires. C'est donc une situation de codimension deux. De plus on suppose que le lieu des points où  $Y, [X, Y]$  sont colinéaires est une courbe analytique et que  $ad^2Y(X)(0)$  n'est pas colinéaire à  $Y(0)$ . Avec ces hypothèses il passe par 0 une unique  $BC$ -extrémale singulière. Elle est admissible si  $\hat{u}(0) \in ]-1, +1[$ .

3.5.2. PROPOSITION. – Soit  $(v, u)$  une extrémale singulière, définie sur  $[0, T]$ , hyperbolique, le contrôle singulier  $\hat{u}$  défini par (9) appartenant à  $] -1, +1[$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de la trajectoire  $v(\cdot)$  tel que  $v$  soit l'unique trajectoire optimale joignant  $v(0)$  à  $v(T)$ , pour toutes les solutions de (1) contenues dans  $V$ . De plus, si  $V$  est assez petit, l'ensemble d'accessibilité de (1) restreint à  $V$ , noté  $A^+(v(0), T)$  est d'intérieur non vide et sa frontière est convexe au voisinage de  $v(T)$ , paramétrée par  $s \mapsto d(s)$ , avec  $d(0) = v(T)$ ,  $d'(0) \in \mathbb{R}Y(v(T))$ ,  $C^2$  mais pas  $C^3$  en général. De plus dans tout système de coordonnées adapté (où par définition  $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ ) sa courbure est zéro.

*Preuve.* – Voir [5].

3.5.3. NORMALISATIONS. – On normalise le système et la variété terminale au voisinage de 0. On peut supposer  $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ . Observons que l'objet géométrique important est l'arc singulier. Identifions donc le lieu des points où  $Y$  et  $[X, Y]$  sont colinéaires à  $y = 0$  et l'arc singulier à  $t \rightarrow (t, 0)$ . Le système s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(x, y) = 1 + y^2 X_1(x, y) \\ \dot{y} &= \beta(x, y) + u = -\hat{u}(x) + y X_2(x, y) + u, \quad |u| \leq 1 \end{aligned} \tag{14}$$

Posons  $a = X_1(0,0)$  et observons que l'arc singulier est admissible si  $\hat{u}(0) \in ]-1, +1[$ ; dans ce cas il est elliptique si  $a > 0$ , hyperbolique si  $a < 0$ . La variété terminale est paramétrisée par  $s \mapsto (c(s), s)$ , où  $c(s) = ks^2 + o(s^2)$ . Le système adjoint associé à (14), où  $p = (p_1, p_2)$  s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -p_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x, y) - p_2 \frac{\partial \beta}{\partial x}(x, y) \\ \dot{p}_2 &= -p_1 \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x, y) - p_2 \frac{\partial \beta}{\partial y}(x, y) \end{aligned} \tag{15}$$

3.5.4. CAS HYPERBOLIQUE

PROPOSITION. – Avec les normalisations précédentes, si l'arc  $t \rightarrow (t, 0)$  est hyperbolique, c'est-à-dire  $a < 0$  et  $\hat{u}(0) \in ]-1, +1[$ , la synthèse optimale est donnée par la figure 4.

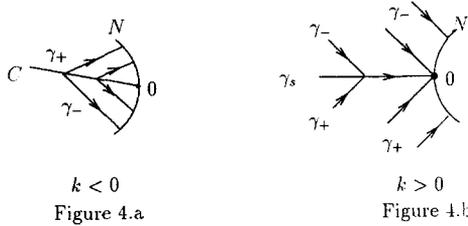


Fig. 4.

Preuve. – Posons  $z_0 = ((0,0), (1,0))$ . Selon la terminologie de 2.3.3, c'est un point pli hyperbolique et d'après 2.6.2 les trajectoires extrémales voisines de  $z_0$  sont de la forme  $\gamma_{\pm}\gamma_s\gamma_{\pm}$ . La trajectoire  $\gamma_s$  est optimale pour le problème point-point et pour décider de son statut d'optimalité dans notre problème on utilise la proposition 3.5.2. Soit  $v_1 = (T, 0)$ ,  $T < 0$  assez petit. Puisque la frontière de l'ensemble d'accessibilité  $A^+(v_1, T)$ -est de courbure nulle, on a deux situations si  $k \neq 0$  (voir fig. 5).

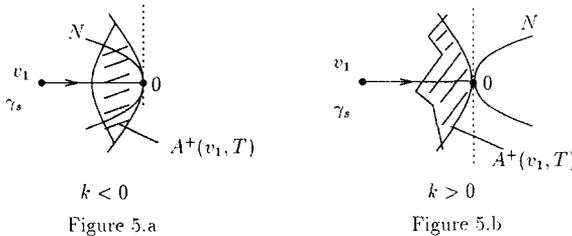


Fig. 5.

Dans le premier cas ( $k < 0$ ),  $N$  rencontre l'intérieur de l'ensemble des états accessibles en temps  $T$  et clairement  $\gamma_s$  n'est pas optimale, contrairement à la seconde situation ( $k > 0$ ).

Évaluons maintenant les points de commutation, à l'aide de (15). Soit  $v_0 = (c(s), s) \in N$  et la normale étant  $n(v_0) = (1 - c'(s))$ . En intégrant (14), (15) avec  $u \equiv \varepsilon = \pm 1$ ,  $v(0) \in N$ ,  $p(0) = n(v(0))$  et  $p = (p_1, p_2)$ , on obtient :

$$p_2(t) = -c'(s) - at^2(\varepsilon - \hat{u}(0)) - t(2as - c'(s)X_2(O)) + o(|s, t|^2) \quad (16)$$

où les temps de commutation sont solutions de  $p_2(t) = 0$ ,  $t \leq 0$ . De plus, on a d'après les conditions de transversalité  $\varepsilon ks < 0$ .

On en déduit que puisque  $a < 0$ , une  $BC$ -trajectoire extrémale  $\gamma_+$  ou  $\gamma_-$  issue de  $v_0 \neq 0$  est sans commutation si  $k \neq 0$ . On en déduit la synthèse dans le cas  $k > 0$ . Dans le cas  $k < 0$ , les  $BC$ -trajectoires extrémales se recoupent et un cut locus  $C$  apparaît, la pente de  $C$  en 0 (évaluée par la même méthode qu'en 3.4.8) étant  $-\hat{u}(0)$ .

### 3.5.5. CAS ELLIPTIQUE

PROPOSITION. — Si l'arc  $t \rightarrow (t, 0)$  est elliptique, c'est-à-dire  $a > 0$  et  $\hat{u}(0) \in ]-1, +1[$ , la synthèse optimale est donnée par les figures 6.a et 6.b.

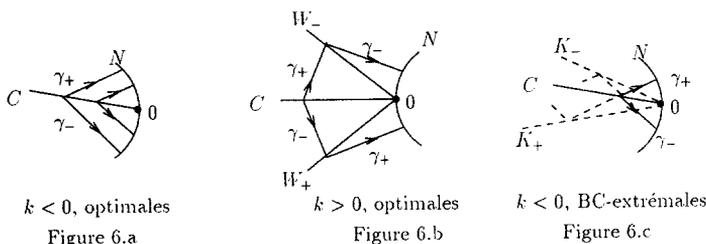


Fig. 6.

*Preuve.* — Le point  $z_0 = ((0, 0), (1, 0))$  de  $\hat{N}$  est un point pli elliptique, selon la terminologie de 2.3.3. On en déduit donc que les arcs  $\gamma_+$  ou  $\gamma_-$  passant par 0 ne sont pas  $BC$ -extrémaux. D'après 2.6.2, toute trajectoire optimale pour le problème point-point est bang-bang avec au plus une commutation. Évaluons les temps de commutation pour une  $BC$ -trajectoire extrémale  $\gamma_+$  ou  $\gamma_-$ . On utilise (16) et l'on obtient :

$$\text{pour } \gamma_\varepsilon, t_\varepsilon = -\sqrt{\frac{-2ks}{a(\varepsilon - \hat{u}(0))}} + o(\sqrt{|s|}) \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1$$

et les courbes de commutation correspondantes sont donc  $K_\varepsilon$  d'équation  $y = (1 - \varepsilon \hat{u}(0))x + o(x)$ . Donc si  $k \neq 0$  les  $BC$ -trajectoires extrémales sont données par les figures 6.b et 6.c.

On observe que les  $BC$ -trajectoires extrémales se coupent avant de commuter, si  $k < 0$  et après la commutation si  $k > 0$ . La synthèse optimale s'en déduit comme en 3.4. Pour  $k \neq 0$  un cut locus  $C$  apparaît, et la pente de  $C$  en 0 est  $-\hat{u}(0)$  si  $k < 0$  et 0 si  $k > 0$ .

3.5.6. CAS PARABOLIQUE

PROPOSITION. – Supposons  $\hat{u}(0) \notin [-1, +1]$ , par exemple  $\hat{u}(0) > 1$ . La synthèse optimale est alors donnée par la figure 4.a (vue en 3.5.4) si  $k < 0$  et par la figure 7 si  $k > 0$ .

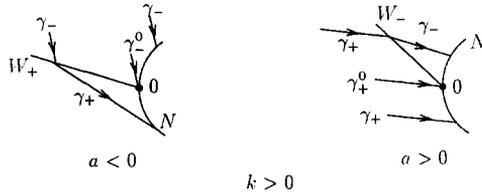


Fig. 7.

Preuve. – Calculons les points de commutation en utilisant (16), et observons que les  $BC$ -trajectoires extrémales se réfléchissent sur le lieu des commutations si  $k < 0$  et le traversent si  $k > 0$ . Comme en 3.4, on en déduit que si  $k < 0$ , une trajectoire optimale est de la forme  $\gamma_+$  ou  $\gamma_-$  et qu'il existe un cut locus de pente  $-\hat{u}(0)$  en 0, alors que si  $k > 0$ , une trajectoire optimale est de la forme  $\gamma_- \gamma_+$  (resp.  $\gamma_+ \gamma_-$ ) si  $a < 0$  (resp.  $a > 0$ ).

3.5.7. REMARQUE : COMPLEXITÉ. – La courbe  $C$  qui apparaît pour  $k < 0$  peut être calculée (par la même méthode qu'en 3.4.8) à l'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  si l'on développe  $c$  à l'ordre  $m + 1$ ,  $\alpha$  à l'ordre  $m$  et  $\beta$  à l'ordre  $m - 1$  (avec les notations introduites en 3.5.3), ces ordres étant minimaux.

Les courbes de commutation  $K_-$  et  $K_+$  peuvent être calculées à l'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  si l'on développe  $c$  à l'ordre  $\text{Int}(m/2) + 1$  ( $\text{Int}$  désignant la partie entière),  $\alpha$  à l'ordre  $m$  et  $\beta$  à l'ordre  $m - 1$ , ces ordres étant minimaux.

Le calcul de la courbe  $C$  qui apparaît pour  $a > 0$  et  $k > 0$  est plus complexe et a été mené à l'ordre 1 en développant  $c$  et  $\alpha$  à l'ordre 2 et  $\beta$  à l'ordre 0.

3.6. Le cas exceptionnel générique

3.6.1. HYPOTHÈSES ET NORMALISATIONS. – On traite le cas où  $C(0) \cap N$  est non réduite à 0 : l'hypothèse A1 est violée. Examinons tout d'abord le cas où l'une des courbes  $\gamma_+$  ou  $\gamma_-$  arrivant en 0 (notée  $\gamma_+^0$  ou  $\gamma_-^0$ ) est tangente

à  $N$  en  $0$ ; on peut supposer que c'est la courbe  $\gamma_+^0$ . Par ailleurs on fait les hypothèses génériques suivantes :  $Y$  et  $X - Y$  ne sont pas tangents à  $N$  en  $0$  et le contact de  $\gamma_+^0$  avec  $N$  en  $0$  est minimal. On peut alors choisir en  $0$  un système de coordonnées tel que  $Y = \frac{\partial}{\partial x}$  et  $N$  est la courbe  $s \mapsto (0, s)$ . Le système s'écrit alors localement :  $\dot{x} = X_1 + u$ ,  $\dot{y} = X_2$ , avec  $X_1(0) = -1$ ,  $\frac{\partial X_1}{\partial y}(0) = a \neq 0$  et  $X_2(0) \neq 0$ . On peut supposer  $X_2(0) > 0$ . On a alors

3.6.2. PROPOSITION. – Avec les normalisations et les notations précédentes, la synthèse optimale est donnée par la figure 8.

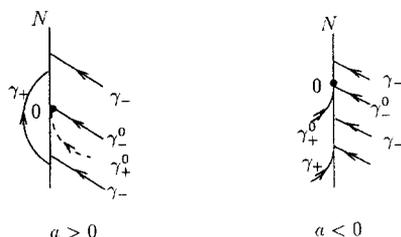


Fig. 8.

*Preuve.* – Voir [5].

On observe que si  $a > 0$ , la cible est accessible de tout point, mais la fonction temps minimale est non continue dans le secteur  $x < 0$ . Par contre, dans le cas  $a < 0$ , la cible n'est pas accessible à partir des points de  $x < 0$ , au-dessus de l'arc  $\gamma_+^0$ .

De cette analyse on déduit le résultat suivant, qui s'interprète comme une condition de transversalité généralisée.

3.6.3. PROPOSITION. – Supposons que  $Y$  et  $X - Y$  ne sont pas tangents à  $N$  en  $0$  et que l'intersection de l'espace tangent à  $N$  en  $0$  avec  $C(0)$  n'est pas réduite à  $0$ . Alors dans le domaine contenant l'arc  $\gamma_-$  arrivant en  $0$ , une trajectoire optimale est de la forme  $\gamma_-$ .

*Preuve.* – On peut supposer que  $N$  est l'axe  $0y$  et que la trajectoire  $\gamma_-$  arrivant en  $0$  est dans le secteur  $x \geq 0$ . On remplace le système  $\dot{v} \in C(v)$  par le système tronqué  $\dot{v} \in C(v) \cap (\dot{x} \leq 0)$ .

#### 4. LE CAS PLAT EN DIMENSION DEUX

L'objet de ce paragraphe est de classer les situations génériques lorsque  $Y$  est supposé tangent à  $N$  en chaque point, c'est le cas pour le problème

de contrôle des réacteurs chimiques. On a alors  $\hat{N} \subset \Sigma$  et *tous les points terminaux des BC-trajectoires extrémales sont des points de commutation*. La variété terminale  $N$  est identifiée à l'axe  $0y$ , c'est-à-dire à l'image de  $s \mapsto (0, s)$ .

#### 4.1. Le cas générique

On suppose que  $Y$  ne s'annule pas en  $0$ , et que  $X$  et  $[X, Y]$  sont transverses à  $N$  en  $0$ . On note  $n = (1, 0)$ , la normale à  $N$  et l'on considère  $v_0 \in N$  voisin de  $0$ . La synthèse optimale est donnée par la condition de transversalité :

$$\langle n(v_0), [X, Y](v_0) \rangle < 0 \quad (17)$$

qui résulte de 2.3.2.

#### 4.2. Le cas du pli générique

4.2.1. HYPOTHÈSES ET NORMALISATIONS. – On suppose qu'en  $0$ ,  $Y$  et  $[X, Y]$  sont colinéaires. Faisons par ailleurs les hypothèses génériques suivantes :  $Y(0) \neq 0$  et  $X$  et  $ad^2Y(X)$  sont transverses à  $N$  en  $0$ . Le lieu des points où  $Y$  et  $[X, Y]$  sont colinéaires est alors une courbe simple transverse à  $N$  et le système peut s'écrire comme (14) (vue en 3.5.3) :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(x, y) = 1 + y^2 X_1(x, y) \\ \dot{y} &= \beta(x, y) + u = -\hat{u}(x) + yX_2(x, y) + u, \quad |u| \leq 1 \end{aligned}$$

Si l'on pose  $a = X_1(0, 0)$ , l'arc singulier aboutissant en  $0$  est admissible si  $\hat{u}(0) \in ]-1, +1[$ ; dans ce cas il est elliptique si  $a > 0$ , hyperbolique si  $a < 0$ . On va supposer que le contrôle singulier  $\hat{u}(0)$  n'est pas saturant, c'est-à-dire  $|\hat{u}(0)| \neq 1$ . La variété terminale est paramétrisée par  $s \mapsto (0, s)$ .

4.2.2. PROPOSITION. – Si l'arc  $t \rightarrow (t, 0)$  est hyperbolique, c'est-à-dire  $a < 0$  et  $\hat{u}(0) \in ]-1, +1[$ , la synthèse optimale est donnée par la figure 4.b (vue en 3.5.4).

*Preuve.* – La preuve est similaire à celle de 3.5.4 (voir fig. 5.b). Les commutations sont obtenues d'après (16) en résolvant :

$$p_2(t) = -at^2(\varepsilon - \hat{u}(0)) - 2ast + o(|s, t|^2) = 0 \quad (18)$$

pour  $t \leq 0$ ,  $\varepsilon = \pm 1$  et  $\varepsilon s < 0$ , cette dernière condition venant de (17). Alors l'examen de (18) montre que les BC-trajectoires extrémales ne commutent qu'en  $t = 0$ .

4.2.3. PROPOSITION. – Si l'arc  $t \rightarrow (t, 0)$  est elliptique, c'est-à-dire  $a > 0$  et  $\hat{u}(0) \in ]-1, +1[$ , la synthèse optimale est donnée par la figure 6.a (vue en 3.5.5), où le cut locus a pour pente  $-\frac{2}{3}\hat{u}(0)$  en 0.

Preuve. – La preuve est similaire à celle de 3.5.5. D'après (17), puisque  $a > 0$ , on a  $\varepsilon s > 0$ . Alors d'après (18) les temps de commutation sont :

$$\text{pour } \gamma_\varepsilon, t_\varepsilon = \frac{-2s}{\varepsilon - \hat{u}(0)} + o(s) \text{ avec } \varepsilon = \pm 1 \quad (19)$$

d'ordre  $s$ . Le lieu des points de commutation des  $BC$ -trajectoires extrémales forme donc deux courbes  $K_\varepsilon$  d'équation  $y = \frac{\varepsilon - \hat{u}(0)}{2}x + o(x)$ . En conséquence les  $BC$ -trajectoires extrémales  $\gamma_+$  et  $\gamma_-$  se croisent avant de commuter comme dans la figure 6.c de 3.5.5. On en déduit l'existence d'un cut locus  $C$  de pente  $-\frac{2}{3}\hat{u}(0)$  en 0, calculée par la même méthode qu'en 3.4.8.

4.2.4. PROPOSITION. – Supposons  $|\hat{u}(0)| > 1$ . Sans nuire à la généralité, on peut alors supposer  $\hat{u}(0) > 0$ . La synthèse optimale est alors donnée par la figure 9.

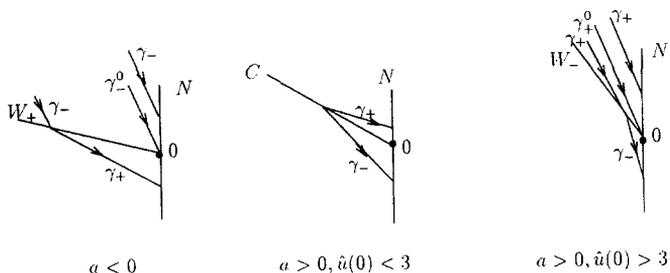


Fig. 9.

Preuve. – Le point  $z_0 = ((0, 0), (1, 0))$  est un point pli parabolique. L'analyse utilise (18) et (19) comme en 4.2.3. Une  $BC$ -trajectoire extrémale  $\gamma_+\gamma_-$  se réfléchit sur  $K_-$  si  $\hat{u}(0) < 3$  et traverse  $K_-$  si  $\hat{u}(0) > 3$ . On en déduit les synthèses correspondantes.

4.2.5. REMARQUE : COMPLEXITÉ. – Les courbes de commutation  $K_+$  et  $K_-$  et la courbe  $C$  peuvent être calculées à l'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  si l'on développe  $\alpha$  à l'ordre  $m + 1$  et  $\beta$  à l'ordre  $m - 1$  (avec les notations introduites en 4.2.1), ces ordres étant minimaux.

### 4.3. Le cas exceptionnel plat générique

4.3.1. HYPOTHÈSES ET NORMALISATIONS. – Supposons que  $X$  soit tangent à  $N$  en  $0$ . Faisons par ailleurs les hypothèses génériques suivantes :  $Y$  et  $X \pm Y$  ne s'annulent pas en  $0$  et  $[X, Y]$  n'est pas tangent à  $N$  en  $0$ . Le système s'écrit alors localement

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by + o(|x, y|) \\ \dot{y} &= X_2(x, y) + u, \quad |u| \leq 1\end{aligned}$$

où  $b = -\langle n, [X, Y](0) \rangle \neq 0$  et  $n = (1, 0)$  est la normale à  $N$  en  $0$ . Via une transformation linéaire on peut supposer  $a = 0$ . En changeant éventuellement  $x$  en  $\lambda x$ ,  $y$  en  $-y$ , on peut supposer aussi que  $b = 1$  et  $1 + X_2(0) > 0$ .

4.3.2. PROPOSITION. – Avec les normalisations précédentes la synthèse optimale est donnée par la figure 10.

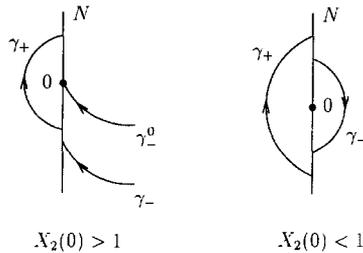


Fig. 10.

*Preuve.* – Voir [5].

La différence entre les deux situations provient des propriétés de contrôlabilité du système. Dans le cas  $X_2(0) > 1$ , la cible n'est pas accessible pour les points du domaine  $x > 0$ , au-dessus de la trajectoire  $\gamma_-$  arrivant en  $0$ . Dans le cas  $X_2(0) < 1$ , l'origine est localement contrôlable.

## 5. CLASSIFICATION GÉNÉRIQUE EN DIMENSION TROIS

### 5.1. Définitions et notations

Soit le système (1) noté  $(X, Y)$  considéré en dimension trois où l'on note  $v = (x, y, z)$  les points de  $\mathbb{R}^3$ . On se place au voisinage d'un point de  $N$  dans  $\mathbb{R}^3$ , identifié à  $0$ . La variété terminale  $N$  est identifiée localement à l'image d'un voisinage de  $0$  par une immersion  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  telle

que  $F(0) = 0$ . Notre classification générique consistera à analyser des singularités de codimension au plus deux. Pour effectuer des normalisations, nous utiliserons l'action du pseudo-groupe engendré par les transformations suivantes :

- (i) Difféomorphisme local  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \psi(0) = 0$ , changeant la paramétrisation  $c$  de  $N$ ,
- (ii) Difféomorphisme local  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \varphi(0) = 0$  de l'espace d'états,
- (iii) Transformation feedback  $u \rightarrow -u$ .

## 5.2. Hypothèse A1

On peut identifier localement  $N$  au plan  $x = 0$ . Notons, de même qu'en 3.2,  $C(v)$  le convexe  $\{X(v) + uY(v) ; |u| \leq 1\}$ . L'hypothèse A1 se formule ainsi :  $C(0)$  est contenu dans le demi-espace  $x > 0$  et  $\det(X, Y, [X, Y])$  est non nul en 0. La normale  $n$  à  $N$  au voisinage de 0 est orientée par convention vers le demi-espace  $x > 0$ . Alors pour tout BC-relèvement extrémal  $(v, p, u)$  défini sur  $[T, 0], T < 0$  avec  $v(0) \in N$  voisin de 0, on peut donc poser  $p(0) = n(v(0))$ .

## 5.3. Le cas A1 générique

Sous l'hypothèse A1 supposons  $\langle n(0), Y(0) \rangle \neq 0$ . Alors la loi optimale est donnée par la condition de transversalité (11) vue en 3.3 : le contrôle est régulier, il vaut  $u \equiv \varepsilon$  avec  $\varepsilon = \pm 1$  tel que  $\varepsilon \langle n(0), Y(0) \rangle > 0$ .

## 5.4. Le cas A1 de codimension un

Sous l'hypothèse A1 considérons maintenant le cas où  $\langle n(0), Y(0) \rangle = 0$ , c'est-à-dire où  $Y$  est tangent à  $N$  en 0, mais en nous plaçant dans le cas non plat. Alors la condition  $\langle n(v_0), Y(v_0) \rangle = 0$  définit sur  $N$  une courbe génériquement transverse à  $Y$  le long de laquelle  $Y$  est tangent à  $N$ . Dans ce cas, on applique en tout point  $v_0 \in N$  voisin de 0 la condition de transversalité (11) vue en 3.3 si  $\langle n(v_0), Y(v_0) \rangle \neq 0$  et le lemme 2.3.2 si  $\langle n(v_0), Y(v_0) \rangle = 0$ .

5.4.1. HYPOTHÈSES ET NORMALISATIONS. — On a  $\langle n(0), Y(0) \rangle = 0$ . Supposons  $\langle n(0), [X, Y](0) \rangle \neq 0$ , et observons qu'avec la convention prise en 5.2  $\langle n(0), X(0) \rangle > 0$ . Afin d'évaluer au voisinage de 0 la surface de commutation  $W$  et le cut locus  $C$ , nous effectuerons dans tout le paragraphe 5.4 les normalisations suivantes : nous supposerons que localement  $Y = \frac{\partial}{\partial z}$ , que la trajectoire associée à  $u \equiv 0$  aboutissant en 0 est  $t \rightarrow (t, 0, 0)$ , et enfin nous prendrons une branche de la courbe de  $N$  d'équation  $\langle n(v_0), Y(v_0) \rangle = 0$  pour axe  $0y$ .

Le système (1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(x, y, z) = 1 + \sum_{i+j>0} a_{ij}(x) y^i z^j \\ \dot{y} &= \beta(x, y, z) = \sum_{i+j>0} b_{ij}(x) y^i z^j \\ \dot{z} &= \gamma(x, y, z) + u = \sum_{i+j>0} c_{ij}(x) y^i z^j + u, \quad |u| \leq 1 \end{aligned} \quad (20)$$

De plus en changeant si nécessaire  $z$  en  $-z$  et  $u$  en  $-u$ , on peut supposer que  $a = a_{01}(0) > 0$ , où  $a$  est  $-\langle n(0), [X, Y](0) \rangle$  avec  $n(0) = (1, 0, 0)$  normale à  $N$  en  $0$ . La variété terminale  $N$  est alors localement paramétrée en  $(w, s) \mapsto (c(w, s), w, s)$  où  $c(w, s) = \sum_{i=2}^{+\infty} \alpha_i(w) s^i$  car  $0y$  est contenu dans  $N$  et  $Y = \frac{\partial}{\partial z}$  est tangent à  $N$  le long de  $0y$ . En posant  $k = \alpha_2(0)$ , on a génériquement  $k \neq 0$ . De plus la normale  $n(v_0)$  à  $N$  en  $v_0 = (c(w, s), w, s) \in N$  orientée suivant la convention  $\langle n(v_0), X(v_0) \rangle > 0$  s'écrit  $n(v_0) = (1, -\frac{\partial c}{\partial w}(w, s), -\frac{\partial c}{\partial s}(w, s))$ .

5.4.2. NOTATIONS ET PROPRIÉTÉ. – Dans toute la suite, nous noterons  $\Gamma_\varepsilon$  la surface constituée des trajectoires  $\gamma_\varepsilon$ ,  $\varepsilon \in \{+, -\}$ , aboutissant sur  $0y$ , et  $\gamma_\varepsilon(w_0)$  l'élément de  $\Gamma_\varepsilon$  aboutissant en  $(0, w_0, 0)$ ; enfin  $K_\varepsilon$  désignera la surface de commutation des BC-extrémales de contrôle  $\varepsilon$  sur  $N$ .

PROPOSITION. – *Il y a au plus une commutation sur une BC-extrémale aboutissant en  $v_0 \in N$  tel que  $\langle n(v_0), Y(v_0) \rangle \neq 0$  et s'il y a commutation, le contrôle est  $-1$  sur la cible. Alors  $K_-$  est lisse et son espace tangent en  $0$  est  $\{(-2k/a, 0, 1 + 2k/a), (0, 1, 0)\}_{e.v.}$*

Preuve. – Le point  $((0, 0, 0), n(0) = (1, 0, 0))$  est un point de commutation normal selon la terminologie de 2.3.2, et au voisinage de  $0$  toute BC-trajectoire extrémale admet au plus une commutation.

Soit  $v_0 = (c(w, s), w, s) \in N$  voisin de  $0$  tel que  $\langle n(v_0), Y(v_0) \rangle \neq 0$ . En un tel point la condition de transversalité s'écrit  $\varepsilon \frac{\partial c}{\partial s}(w, s) < 0$ , c'est-à-dire si  $k \neq 0$   $\varepsilon k s < 0$ . En notant  $(v, p, u)$  le BC-relèvement extrémal associé, avec  $p = (p_1, p_2, p_3)$ , il y aura commutation à l'instant  $\bar{t} < 0$  solution de  $p_3(\bar{t}) = 0$ ; on trouve à l'aide de la forme semi-normale écrite en 5.4.1 où  $\alpha$  est développé à l'ordre 1 et  $\beta, \gamma$  à l'ordre 0 :

$$\bar{t} = -(1/a + O(|w, s|)) \frac{\partial c}{\partial s}(w, s) = -2ks/a + sO(|w, s|)$$

et donc, puisque  $a > 0$ ,  $\bar{t} < 0 \Leftrightarrow \varepsilon = -1$ . Remarquons que  $\bar{t}$  est indépendant de  $w$  à l'ordre 1. On obtient l'espace tangent à  $K_-$  par des calculs directs.

5.4.3. SYNTHÈSE ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA SYNTHÈSE. – Dans tous les cas traités ici, la synthèse optimale est constituée de feuilletages invariants de dimension 2, transverses à la cible. On représentera cette synthèse optimale dans chacune des feuilles qu'on aura aplaties par un homéomorphisme conservant globalement la cible. On observera alors que la synthèse optimale au voisinage d'une singularité de codimension 2 s'interprète comme une bifurcation de synthèses pour des systèmes plans. Dans le cas exceptionnel, on verra dans un article ultérieur [16] que ce n'est pas toujours le cas.

5.4.4. SINGULARITÉS DE CODIMENSION UN. – En nous plaçant dans les conditions génériques  $k(a + 4k) \neq 0$ , la synthèse est décrite par la figure 3 (vue en 3.4.8), avec si  $k < -a/4$  existence d'un cut locus  $C$  dont l'espace tangent en 0 est  $\{(-4k, 0, a), (0, 1, 0)\}_{e.v.}$ ; dans ce cas  $k < -a/4$  il n'y a pas de trajectoire optimale arrivant sur  $0y$ .

*Preuve.* – Les calculs de commutation à l'ordre 1 ne font pas intervenir  $w$ . Alors, de même que dans le plan, la commutation n'est possible sur les optimales que si les BC-trajectoires extrémales ne se réfléchissent pas sur  $K_-$ . D'où les synthèses.

Pour  $k < -a/4 < 0$  on détermine le cut locus  $C$  en écrivant que  $C_0 \in C$  équivaut à  $C_0 = v_+(t_0) = v_-(0)$  avec  $v_\varepsilon(t) = \exp(t(X + \varepsilon Y))(v_\varepsilon(0))$ ,  $v_+(0) = (c(w, s), w, s) \in N$ ,  $t_0 < 0$  et la condition  $v_-(-t_0) \in N$ . On trouve l'espace tangent à  $C$  en 0 en développant  $c$  à l'ordre 2,  $\alpha$  à l'ordre 1 et  $\beta, \gamma$  à l'ordre 0 dans la forme semi-normale écrite en 5.4.1.

5.4.5. REMARQUE : COMPLEXITÉ. – Les surfaces  $K_\varepsilon$  et  $C$  peuvent être calculées à l'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  si l'on développe  $c$  à l'ordre  $m + 1$ ,  $\alpha$  à l'ordre  $m$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  à l'ordre  $m - 1$  (avec les notations introduites en 5.4.1), ces ordres étant minimaux.

5.4.6. SINGULARITÉS NORMALES DE CODIMENSION DEUX. – Plaçons-nous sous les hypothèses et avec les normalisations de 5.4.1, avec de plus  $k(a + 4k) = 0$ .

PREMIER CAS. –  $a = -4k$  Dans ce cas, puisque par hypothèse  $a > 0$ , on a  $k < 0$ .

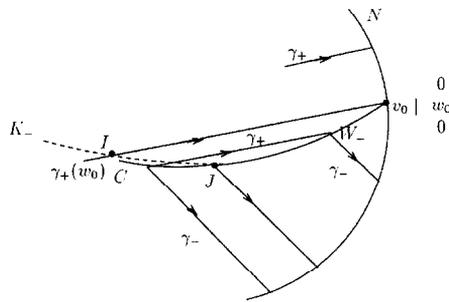
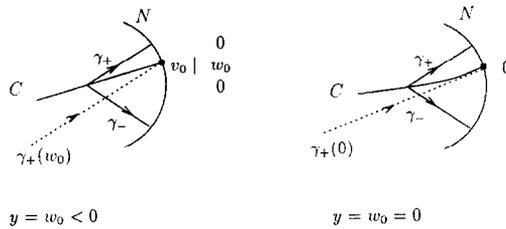
Les points voisins mais différents de 0 situés sur  $0y$  présentent des singularités de codimension un. En ces points arrive soit un cut locus soit une surface de commutation d'après 5.4.4. En changeant au besoin  $y$  en  $-y$  on peut supposer qu'il y a un cut locus au voisinage de  $(0, w_0, 0)$  avec  $w_0 < 0$ .

On établit la synthèse en utilisant la condition de transversalité  $\varepsilon ks < 0$  établie dans la preuve de 5.4.2 et en étudiant les positions relatives de  $K_-$  et  $\Gamma_+$ .

Ces surfaces se coupent en  $0y$  et en une autre courbe que nous noterons  $\mathcal{I}$  et qui génériquement n'est pas tangente à  $x0z$  en  $0$ . Alors localement  $\mathcal{I}$  est contenue dans le demi-espace ( $y \geq 0$ ) (voir fig. 11.a) ou dans le demi-espace ( $y \leq 0$ ) (voir fig. 11.b). En notant  $\mathcal{J} = C \cap K_-$ ,  $\mathcal{J}$  est le lieu des points  $J$  tels que  $(X + Y)(J)$  est tangent en  $J$  à  $C$  et à  $K_-$ . Donc  $C \cup W_-$  est  $C^1$ . La synthèse est alors donnée par la figure 11.

On remarque que dans chacun des deux cas décrits par la figure 11 apparaît une bifurcation entre  $C$  et  $W$ .

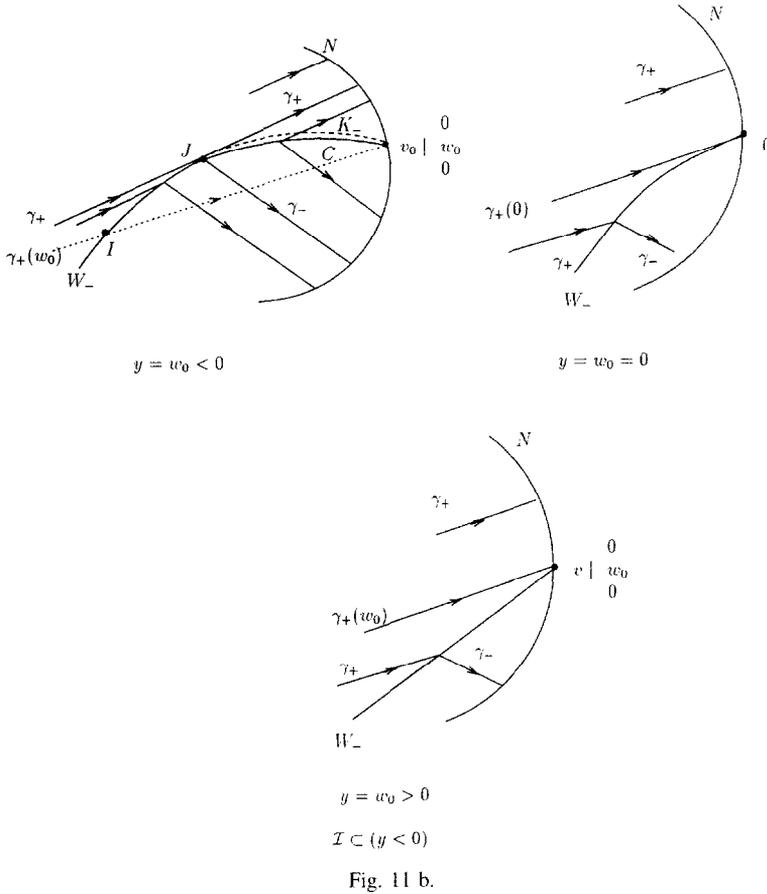
SECOND CAS. --  $k = 0$  Se reporter à [18].



$y = w_0 > 0$

$\mathcal{I} \subset (y > 0)$

Fig. 11 a.



### 5.5. Le cas du pli générique

L'objet de ce paragraphe est de calculer la synthèse optimale quand une BC-extrémale singulière rencontre la cible  $N$  en un point où  $Y$  est tangent à  $N$ .

5.5.1. HYPOTHÈSES ET NORMALISATIONS. – On suppose comme en 5.4 que le système  $(X, Y)$  vérifie l'hypothèse A1 et que  $Y$  est tangent à  $N$  en  $0$ , mais en nous plaçant dans le cas non plat. De plus on suppose  $\langle n(0), [X, Y](0) \rangle = 0$  et  $\det(Y, [X, Y], ad^2 Y(X))$  non nul en  $0$ . Sous ces hypothèses il arrive en  $0$  (et seulement en ce point) une unique BC-extrémale singulière : nous la noterons  $\gamma_s^0$  et nous savons (d'après le lemme 2.7.1) qu'elle vérifie (10).

Nous pouvons alors effectuer les premières normalisations suivantes :

Nous supposons que localement  $Y = \frac{\partial}{\partial z}$ , que  $\gamma_s^0$  est  $t \rightarrow (t, 0, 0)$  et que la courbe de  $N$  d'équation  $\langle n(v_0), Y(v_0) \rangle = 0$  est l'axe  $0y$ . De même qu'en 5.4.1, la variété terminale  $N$  est alors localement paramétrisée en  $(w, s) \mapsto (c(w, s), w, s)$  où  $c(w, s) = \sum_{i=2}^{+\infty} \alpha_i(w) s^i$ .

Une seconde normalisation est effectuée en appliquant localement un difféomorphisme  $\Phi$  de  $\mathbb{R}^3$  laissant  $0x$  et  $y0z$  invariants point par point, préservant  $Y = \frac{\partial}{\partial z}$  et fixant  $[X, Y]$  le long de  $0x$ , *i.e.*

$$\Phi^*([X, Y](0))|_{0x} = [X, Y]|_{0x}$$

Alors le système image du système initial par  $\Phi$  (encore noté  $(X, Y)$  pour simplifier) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(x, y, z) = 1 + \sum_{i+j \geq 2} a_{ij}(x) y^i z^j \\ \dot{y} &= \beta(x, y, z) = bz + b_{10}(x)y + \sum_{i+j \geq 2} b_{ij}(x) y^i z^j \\ \dot{z} &= \gamma(x, y, z) + u = u - \hat{u}(x) + cz + c_{10}(x)y + \sum_{i+j \geq 2} c_{ij}(x) y^i z^j, \quad |u| \leq 1 \end{aligned} \quad (21)$$

avec  $b \neq 0$ ,  $a = a_{02}(0) \neq 0$ . De plus on a génériquement  $k = \alpha_2(0) \neq 0$  et  $a' = a_{11}(0) \neq 0$ . Alors en changeant si nécessaire  $y$  en  $-y$ , on peut supposer que  $a' > 0$ .

Observons que  $\gamma_s^0$  est admissible si  $\hat{u}(0) \in ]-1, +1[$ ; dans ce cas il est elliptique si  $a > 0$ , hyperbolique si  $a < 0$ . Dans le cas parabolique où  $|\hat{u}(0)| > 1$ , on peut supposer  $\hat{u}(0) > 1$  en changeant si nécessaire  $u$  en  $-u$  et  $z$  en  $-z$ . Nous supposons dans la suite de ce paragraphe 5.5 que  $\gamma_s^0$  n'est pas saturée, *i.e.* que  $|\hat{u}(0)| \neq 1$ , ce qui est génériquement le cas.

Remarquons enfin que la normale  $n(v_0)$  à  $N$  en  $v_0 = (c(w, s), w, s) \in N$  orientée suivant la convention  $\langle n(0), X(0) \rangle > 0$  de 5.2 s'écrit  $n(v_0) = (1, -\frac{\partial c}{\partial w}(w, s), -\frac{\partial c}{\partial s}(w, s))$

*Preuve.*

- Après les premières normalisations le système (1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 + \sum_{i+j > 0} a_{ij}(x) y^i z^j \\ \dot{y} &= \sum_{i+j > 0} b_{ij}(x) y^i z^j \\ \dot{z} &= u - \hat{u}(x) + \sum_{i+j > 0} c_{ij}(x) y^i z^j \end{aligned}$$

et, de même qu'en 5.4.1, on obtient la paramétrisation de  $N$  puisque  $0y$  est contenu dans  $N$  et que  $Y = \frac{\partial}{\partial z}$  est tangent à  $N$  le long de  $0y$ . On prend alors  $n(0) = (1, 0, 0)$  pour normale à  $N$  en  $0$ .

Puisque  $[X, Y](v) = -(\frac{\partial \alpha}{\partial z}(v), \frac{\partial \beta}{\partial z}(v), \frac{\partial \gamma}{\partial z}(v))$ , on trouve :  $\frac{\partial \alpha}{\partial z}(0) = a_{01}(0) = 0$  car  $\langle n(0), [X, Y](0) \rangle > 0$  par hypothèse, et donc  $\frac{\partial \beta}{\partial z}(0) = b_{01}(0) \neq 0$  car, d'après l'hypothèse A1,  $[X, Y]$  et  $Y$  ne sont pas colinéaires en  $0$ .

• Notons alors  $b = b_{01}(0), c = c_{01}(0)$ . Après avoir appliqué  $\Phi$  (pour simplifier, la dénomination des coordonnées et des fonctions est inchangée) on a :

$$[X, Y](x, 0, 0) = [X, Y](0) |_{0x} = -b \frac{\partial}{\partial y} |_{0x} - c \frac{\partial}{\partial z} |_{0x}$$

c'est-à-dire  $a_{01} \equiv 0, b_{01} \equiv b$  et  $c_{01} \equiv c$  Donc le système (1) s'écrit comme (21), avec de plus, puisque  $b \neq 0$ , le long de  $0x$  :  $\{[X, Y], Y\}_{e.v.} = \{\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}_{e.v.}$ . Donc sur  $\gamma_s^0$  identifiée à  $0x$ , puisque  $\langle p, Y(v) \rangle = \langle p, [X, Y](v) \rangle \equiv 0$ , on a  $p \equiv (1, 0, 0)$ ; alors en considérant l'équation adjointe vérifiée par la seconde composante de  $p$ , on obtient  $a_{10} \equiv 0$

• Enfin puisque  $\langle n(0), ad^2 Y(X)(0) \rangle > = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2}(0) = 2a_{02}(0)$  et que par hypothèse on a  $\langle n(0), Y(0) \rangle > = \langle n(0), [X, Y](0) \rangle > = 0$  et  $\det(X, [X, Y], ad^2 Y(X)) \neq 0$  en  $0$ , on obtient  $a_{02}(0) \neq 0$ .

5.5.2. CONDITION DE TRANSVERSALITÉ SUR  $N \setminus 0y$ . – De même qu'en 5.4.2 une trajectoire aboutissant en  $v_0 = (c(w, s), w, s) \in N \setminus 0y$  ne peut être optimale que si son arc final est  $\gamma_\varepsilon$  non vide avec  $\varepsilon ks < 0$ .

5.5.3 COMMUTATION. – Les résultats énoncés dans ce paragraphe seront utilisés dans l'évaluation de toutes les synthèses.

Reprenons les notations de 5.4.2 et évaluons  $\Gamma_\varepsilon$  et  $K_\varepsilon$  à l'ordre 2 à l'aide du système (21) trouvé après normalisations en 5.5.1.

PROPOSITION. – La surface semi-analytique  $K_\varepsilon$  est incluse dans la surface  $K_\varepsilon$  d'équation  $\langle p, Y(v) \rangle = 0$  et vérifie de plus les conditions

$$x \leq 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon(az + a'y) \leq 0$$

où l'on note  $a = a_{02}(0) \neq 0$  et  $a' = a_{11}(0) > 0$ . On observe que  $K_\varepsilon$  est au dessus (resp. en dessous) de  $\Gamma_\varepsilon$  si  $\varepsilon k < 0$  (resp. si  $\varepsilon k > 0$ ). En notant  $k_\varepsilon = K_\varepsilon \cap \Gamma_\varepsilon$ , cette courbe  $k_\varepsilon$  peut être paramétrée en :

$$\begin{aligned} x &= t + O(t^2) \\ y &= -a(\varepsilon - \hat{u}(0))t/a' + O(t^2) \\ z &= (\varepsilon - \hat{u}(0))t + O(t^2) \quad \text{avec} \quad t \leq 0 \end{aligned}$$

Alors toute trajectoire  $\gamma_\varepsilon$  passant par un point de  $k_\varepsilon \setminus \{0\}$  aboutit en un point  $v_0$  de  $0y$  avec  $v_0 \neq 0$  et cette trajectoire sera BC-extrémale ssi  $\varepsilon(\varepsilon - \hat{u}(0))a > 0$

*Preuve.* – En notant  $b' = b_{10}(0)$  et  $c' = c_{10}(0)$ , et en développant  $c$  à l'ordre 2,  $\alpha$  à l'ordre 2 et  $\beta, \gamma$  à l'ordre 1 dans la forme semi-normale écrite en 5.5.1, on obtient par calcul direct une paramétrisation de  $\Gamma_\varepsilon$  à l'ordre 2 en :

$$\begin{aligned}x &= t + tO(|t, w_0|^2) \\y &= w_0 + b'w_0t + b(\varepsilon - \hat{u}(0))t^2/2 + tO(|t, w_0|^2) \\z &= (\varepsilon - \hat{u}(0))t + c'w_0t + (c(\varepsilon - \hat{u}(0)) - \hat{u}'(0))t^2/2 + tO(|t, w_0|^2)\end{aligned}$$

et une paramétrisation de  $\mathcal{K}_\varepsilon$  à l'ordre 2 en :

$$\begin{aligned}x &= t + tO(|t, w|^2) \\y &= w + b'wt + b(\varepsilon - \hat{u}(0))t^2/2 + tO(|t, w|^2) \\z &= (\varepsilon - \hat{u}(0))t + (c' - a'/2k)wt \\&\quad + [(c - a/k)(\varepsilon - \hat{u}(0)) - \hat{u}'(0)]t^2/2 + tO(|t, w|^2)\end{aligned}$$

Cette paramétrisation de  $\mathcal{K}_\varepsilon$  découle de la relation

$$s = -(a'/2k)wt - (a/2k)(\varepsilon - \hat{u}(0))t^2 + tO(|t, w|^2)$$

qui est obtenue en résolvant  $p_3(t) = 0$ .

On peut remarquer que  $\Gamma_\varepsilon$  et  $\mathcal{K}_\varepsilon$  coïncident à l'ordre 1.

Pour  $\mathcal{K}_\varepsilon$ , la condition  $x \leq 0$  vient du fait que  $t \leq 0$ , et on a nécessairement  $\varepsilon(az + a'y) \leq 0$  d'après la condition de transversalité en dehors de  $0y$  qui s'énonce  $\varepsilon ks < 0$  (cf. 5.5.2).

Par définition de  $k_\varepsilon$  toute trajectoire  $\gamma_\varepsilon$  passant par un point de  $k_\varepsilon \setminus \{0\}$  aboutit sur  $0y \setminus \{0\}$  sur lequel la condition de transversalité s'écrit  $\varepsilon(\varepsilon - \hat{u}(0))a > 0$ .

#### 5.5.4. SYNTHÈSE POUR $k < 0$

**PROPOSITION.** – *Dans le cas où  $k < 0$ , aucune trajectoire optimale n'arrive sur  $0y$  au voisinage de 0, et la synthèse comporte un cut locus, ensemble sous-analytique dont le plan tangent en 0 est  $\{(1, 0, -\hat{u}(0)), (0, 1, 0)\}_{e.v.}$ . Cette synthèse est donnée par la figure 4.a (vue en 3.5.4).*

*Preuve.* – D'après 5.5.1 tout point  $v_0 = (0, w_0, 0)$  de  $0y \setminus \{0\}$  voisin de 0 vérifie :  $\langle n(v_0), Y(v_0) \rangle = 0$  et  $\langle n(v_0), [X, Y](v_0) \rangle \neq 0$ , donc présente une singularité de codimension un. Alors on peut appliquer pour  $v_0$  les

résultats de 5.4.4 où  $a$  est remplacé par  $\frac{\partial \alpha}{\partial z}(v_0) \sim a'w_0$  avec les notations prises en 5.5.3. De plus la trajectoire singulière aboutissant en  $v_0$  n'est pas optimale (d'après 3.5.4 pour  $a < 0$  et d'après 2.4.3 pour  $a > 0$ ). Un cut locus apparaît; on utilise la même méthode qu'en 5.4.4 pour le déterminer en développant  $c$  à l'ordre 2,  $\alpha$  à l'ordre 1 et  $\beta, \gamma$  à l'ordre 0 dans la forme semi-normale écrite en 5.5.1.

REMARQUE : COMPLEXITÉ. – La surface  $C$  peut être calculée à l'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  si l'on développe  $c$  à l'ordre  $m+1$ ,  $\alpha$  à l'ordre  $m$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  à l'ordre  $m-1$  (avec les notations introduites en 5.5.1), ces ordres étant minimaux.

Dans la suite de ce paragraphe 5.5 nous supposons  $k > 0$ .

5.5.5. LEMME. – Notons  $\sigma_\varepsilon$  la courbe de  $K_\varepsilon$  caractérisée par  $\langle p, [X, Y](v) \rangle = 0$  (alors que  $K_\varepsilon$  est la surface d'équation  $\langle p, Y(v) \rangle = 0$ ). Alors  $\sigma_\varepsilon$  peut être paramétrée en :

$$\begin{aligned} x &= t + O(t^2) \\ y &= -2a(\varepsilon - \hat{u}(0))t/a' + O(t^2) \\ z &= (\varepsilon - \hat{u}(0))t + O(t^2) \end{aligned}$$

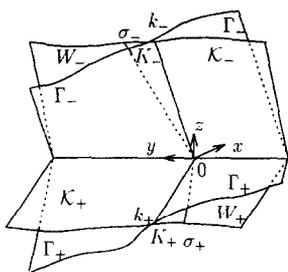
A l'aide de 5.5.3 nous obtenons les positions relatives de  $\Gamma_\varepsilon, K_\varepsilon$  et  $\sigma_\varepsilon$  indiquées par la figure 12 sur laquelle nous avons aussi indiqué  $W_\varepsilon$  qui sera caractérisée ultérieurement (paragraphe 5.5.6 à 5.5.8).

5.5.6. CAS HYPERBOLIQUE. – Nous supposons  $a < 0$  et  $\hat{u}(0) \in ]-1, 1[$

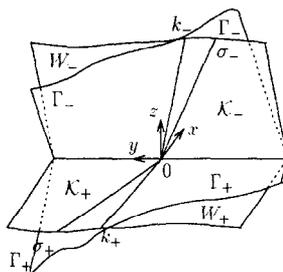
D'après 2.7.2, au voisinage de 0, une trajectoire optimale est de la forme  $\gamma_\pm \gamma_s \gamma_\pm$ , certains arcs pouvant être vides.

PROPOSITION. – Soit  $\Sigma_\varepsilon$  la surface constituée des trajectoires associées aux BC-relèvements extrémaux de contrôle singulier sur  $K_\varepsilon$ . Alors  $\gamma_s^0$  est incluse dans  $\Sigma_+$  et dans  $\Sigma_-$ , et  $\Sigma_\varepsilon \cap K_\varepsilon = \sigma_\varepsilon$ . La synthèse est décrite par la figure 13. La feuille  $y = 0$  est homéomorphe à la synthèse en dimension 2 (voir en 3.5.4 la figure 4.b). Dans chaque feuille  $y = w_0$  avec  $w_0 \neq 0$  il existe une seule trajectoire optimale aboutissant en  $(0, w_0, 0)$  (cette trajectoire est  $\gamma_\varepsilon$  avec  $\varepsilon w_0 > 0$ , sans commutation), et il existe des trajectoires optimales de la forme bang-singulière-bang. Nous en déduisons que la surface  $W_\varepsilon$ , semi-analytique, est strictement incluse dans  $K_\varepsilon$  et a pour frontière  $\sigma_\varepsilon$ . Les ouverts où le contrôle optimal est  $+1$  ou  $-1$  sont séparés par  $W_+ \cup \Sigma_+ \cup \Sigma_- \cup W_-$ , cette surface sous-analytique n'étant pas  $C^1$  le long de  $\sigma_\varepsilon$  mais  $\Sigma_+ \cup \Sigma_-$  étant  $C^1$  en 0.

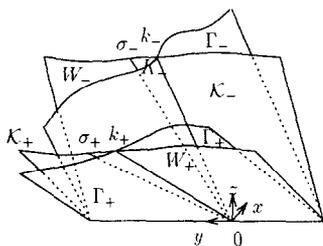
Preuve. – Nous utiliserons l'étude effectuée en dimension 2 pour la feuille  $y = 0$  (cf. 3.5.4).



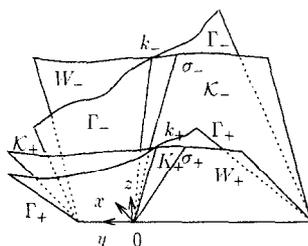
(i) cas hyperbolique



(ii) cas elliptique



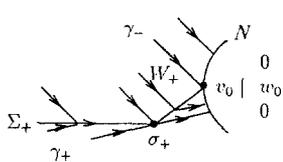
$a < 0$



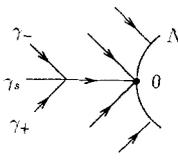
$a > 0$

(iii) cas parabolique

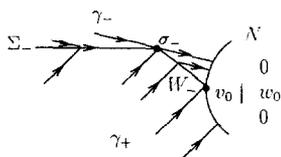
Fig. 12.



$y = w_0 < 0$



$y = 0$



$y = w_0 > 0$

Fig. 13.

Dans chaque feuille  $y = w_0, w_0 \neq 0$ , on utilise l'étude des singularités de codimension 1 dans le plan (voir en 3.4.8 la figure 3.a où  $a$  est changé en  $a'w_0$  comme dans la preuve de 5.5.4). De plus, d'après 5.5.3, toute trajectoire  $\gamma_\varepsilon$  passant par un point de  $k_\varepsilon \setminus \{0\}$  aboutit en un point de  $0y \setminus \{0\}$  et n'est pas BC-extrémale. Donc toute BC-trajectoire extrémale aboutissant sur  $0y \setminus \{0\}$  est sans commutation; en fait une telle trajectoire est optimale. On peut aussi remarquer qu'en un point de  $K_\varepsilon$  situé entre  $k_\varepsilon$  et  $\sigma_\varepsilon$ , le contrôle optimal est nécessairement  $\varepsilon$ . Or la trajectoire de contrôle  $\varepsilon$  issue de ce point n'est pas BC-extrémale: le contrôle ne peut donc pas être régulier. Il y a par conséquent des trajectoires optimales de la forme bang-singulière-bang. Enfin, d'après le lemme 5.5.5,  $\sigma_\varepsilon$  est tangente en 0 au plan d'équation  $a'y + 2az = 0$  et l'on en déduit donc que  $\Sigma_+ \cup \Sigma_-$  est  $C^1$  en 0, alors que d'après 5.5.3 le plan tangent à  $K_\varepsilon$  en 0 a pour équation  $z = (\varepsilon - \hat{u}(0))x$  donc  $\Sigma_\varepsilon \cup K_\varepsilon$  n'est pas  $C^1$  le long de  $\sigma_\varepsilon$ .

5.5.7. CAS ELLIPTIQUE. – Nous supposons  $a > 0$  et  $\hat{u}(0) \in ]-1, 1[$ .

D'après 2.7.2, au voisinage de 0, une trajectoire optimale est bang-bang avec au plus deux commutations. Nous allons montrer qu'en fait aucune optimale ne peut commuter deux fois.

LEMME. – *La seconde commutation d'un BC-relèvement extrémal bang-bang de contrôle  $\varepsilon$  sur  $N$  a lieu sur un ensemble semi-analytique  $K'_\varepsilon$ . On a  $K'_\varepsilon \cap \mathcal{K}_\varepsilon = \sigma_\varepsilon$  (avec d'après 5.5.5  $\sigma_\varepsilon \cap K_\varepsilon = \{0\}$ ) et  $K'_\varepsilon \cap K_{-\varepsilon} = k_{-\varepsilon}$ .*

*Preuve.* – Nous envisageons une BC-trajectoire extrémale  $\gamma_\varepsilon \gamma_{-\varepsilon} \gamma_\varepsilon$  et, en notant  $t_1 < 0$  l'instant de première commutation pour l'arc  $\gamma_\varepsilon$  aboutissant sur  $N$ , nous cherchons  $t_2 < t_1$  l'instant de deuxième commutation pour l'arc  $\gamma_{-\varepsilon}$  aboutissant en

$$v_\varepsilon(t_1) = (t_1 + O(|t_1, w|^2), w + t_1 O(|t_1, w|), (\varepsilon - \hat{u}(0))t_1 + t_1 O(|t_1, w|)) \in K_\varepsilon$$

avec  $p_3(t_1) = 0$  (cf. 5.5.3). En résolvant  $\langle p(t_2), Y(v_{-\varepsilon}(t_2)) \rangle = 0$  avec le même modèle qu'en 5.5.3 (i.e. le système (21) de 5.5.1 où l'on développe  $\alpha$  à l'ordre 2 et  $\beta, \gamma$  à l'ordre 1), nous trouvons

$$t_2 - t_1 \sim 2 \frac{\varepsilon - \hat{u}(0)}{\varepsilon + \hat{u}(0)} t_1 + \frac{a'}{a(\varepsilon + \hat{u}(0))} w$$

la condition  $t_2 - t_1 < 0$  étant donc assurée par  $(\varepsilon + \hat{u}(0))(2z_\varepsilon(t_1) + \frac{a'}{a} y_\varepsilon(t_1)) < 0$ , ce qui est vrai pour tout  $v_\varepsilon(t_1) \in K_\varepsilon$  avec  $t_1 < 0$ .

Soit  $(v, p, u)$  un relèvement de contrôle  $\varepsilon$  sur  $N$  tel qu'il existe  $t_1 < 0$  vérifiant  $v(t_1) \in K'_\varepsilon \cap \mathcal{K}_\varepsilon$  : il satisfait à (4) et (7), relations introduites en 2.1, et il présente en  $v(t_1)$  deux commutations confondues,

donc la fonction de commutation admet en  $t_1$  un zéro multiple : on en déduit que  $\langle p(t_1), Y(v(t_1)) \rangle = \langle p(t_1), [X, Y](v(t_1)) \rangle = 0$ , c'est-à-dire que  $v(t_1) \in \sigma_\varepsilon \setminus \{0\}$  ( $v(t_1) \notin K_\varepsilon$  et ne vérifie pas (5)).

On peut considérer que toute BC-trajectoire extrémale de contrôle  $\varepsilon$  en  $(0, w_0, 0)$  où  $w_0 \neq 0$  (avec donc  $\varepsilon w_0 > 0$  d'après 5.5.2) a eu sa première commutation à l'instant  $t_1 = 0$ : elle peut donc être considérée comme une trajectoire d'arcs finaux  $\gamma_\varepsilon \gamma_{-\varepsilon}$ , le contrôle  $-\varepsilon$  étant appliqué pendant un temps nul; alors d'après 5.5.3 il y aura une seconde commutation en un point de  $k_\varepsilon$  : on en déduit que  $K_\varepsilon \cap K'_\varepsilon = k_\varepsilon$ .

PROPOSITION. – La synthèse est décrite par la figure 14. La feuille  $y = 0$  est homéomorphe à la synthèse en dimension 2 (voir en 3.5.5 la figure 6.b). Dans chaque feuille  $y = w_0$  avec  $w_0 \neq 0$  il existe une seule trajectoire optimale aboutissant en  $(0, w_0, 0)$  (cette trajectoire passe par un point de  $k_\varepsilon$ , avec  $\varepsilon w_0 > 0$ ).

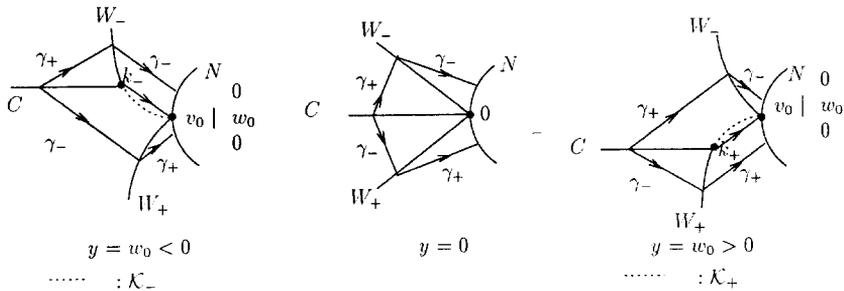


Fig. 14.

Contrairement aux extrémales, les optimales ne commutent pas deux fois et il y a un cut locus  $C$ . Le paramètre de bifurcation est  $w$ . Nous en déduisons que  $W_\varepsilon = K_\varepsilon$  et que les ouverts où le contrôle optimal est  $+1$  ou  $-1$  sont séparés par  $W_+ \cup C \cup W_-$ .

Preuve. – D'après 5.5.3 et comme ici  $|\hat{u}(0)| < 1$  et  $a > 0$ , toute trajectoire  $\gamma_\varepsilon$  passant par un point de  $k_\varepsilon \setminus \{0\}$  aboutit en un point  $(0, w_0, 0)$  avec  $w_0 \neq 0$  et est BC-extrémale (donc on a  $\varepsilon w_0 > 0$  d'après 5.5.2). Les positions relatives de  $K_\varepsilon$  et  $K'_\varepsilon$  établies en utilisant le lemme ci-dessus et les positions relatives de  $k_\varepsilon$  et  $\sigma_\varepsilon$  indiquées figure 12 (ii) (vue en 5.5.5). On vérifie alors que les BC-trajectoires extrémales se recoupent avant la seconde commutation, ce qui justifie l'existence d'un cut locus. Par calcul direct, de même qu'en dimension 2 (cf. 3.5.5) on trouve, en développant  $c$  à l'ordre 2,  $\alpha$  à l'ordre 2 et  $\beta, \gamma$  à l'ordre 1 dans la forme semi-normale

écrite en 5.5.1, la paramétrisation suivante de  $C$  :

$$\begin{aligned}
 x &= -\frac{a'}{a(1-\hat{u}(0))}w + \frac{2}{1-\hat{u}(0)}t + o(|t, w|^2) \\
 y &= w + o(|t, w|) \\
 z &= -\frac{a'}{a}w + o(|t, w|)
 \end{aligned}$$

La synthèse en découle.

5.5.8. CAS PARABOLIQUE. – Nous supposons  $\hat{u}(0) > 1$  (cf. 5.5.1).

Rappelons (voir 2.7.2) qu’au voisinage de 0 toute trajectoire optimale est bang-bang avec au plus deux commutations.

PROPOSITION. – La synthèse est décrite par la figure 15. La feuille  $y = 0$  est homéomorphe à la synthèse en dimension 2 (voir en 3.5.6 la figure 7). Dans chaque feuille  $y = w_0$  avec  $w_0 \neq 0$  il existe une seule trajectoire optimale aboutissant en  $(0, w_0, 0)$ ; cette trajectoire, qui vérifie  $\varepsilon w_0 > 0$ , commute ssi  $\varepsilon a < 0$ ; il existe des trajectoires optimales commutant deux fois, de contrôle  $\varepsilon$  sur  $N$  vérifiant  $\varepsilon a > 0$  : on note  $W'_\varepsilon$  la surface de seconde commutation de ces trajectoires. On a pour  $\varepsilon a > 0$   $W_{-\varepsilon} = K_{-\varepsilon}$ ,

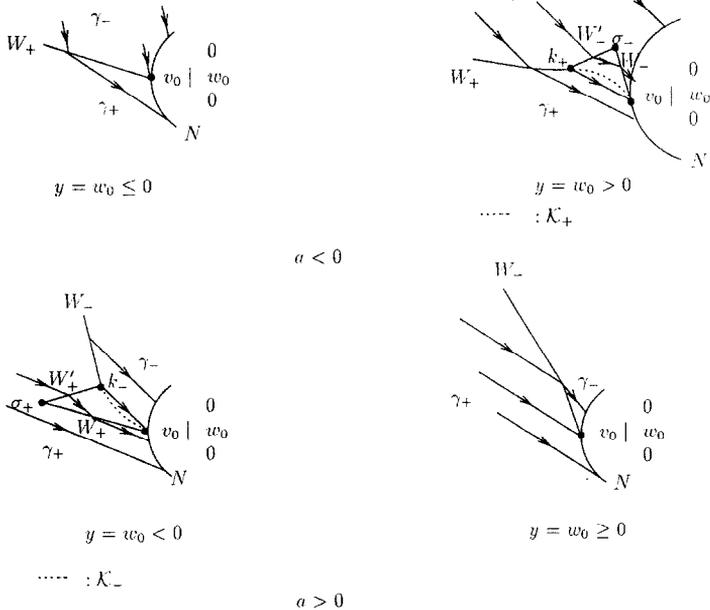


Fig. 15.

$W_\varepsilon$  strictement incluse dans  $K_\varepsilon$  de frontière  $\sigma_\varepsilon$ ,  $W_{-\varepsilon} \cap W'_{-\varepsilon} = k_{-\varepsilon}$  et  $W_\varepsilon \cap W'_\varepsilon = \sigma_\varepsilon$ . Les ouverts où le contrôle optimal est  $+1$  ou  $-1$  sont séparés pour  $\varepsilon a > 0$  par  $W_\varepsilon \cup W'_\varepsilon \cup W_{-\varepsilon}$ .

*Preuve.* – On utilise les positions relatives de  $\mathcal{K}_\varepsilon$ ,  $\Gamma_\varepsilon$  et  $\sigma_\varepsilon$  indiquées par la figure 12 (iii) (vue en 5.5.5), et de la même manière qu'en dimension 2 (cf. 3.5.6) on obtient alors les synthèses pour les feuilles  $y = w_0$  avec  $aw_0 \geq 0$ .

De plus, de même que dans le cas elliptique (cf. preuve du lemme de 5.5.7), en notant  $t_i$  l'instant de  $i$ -ème commutation d'une BC-trajectoire extrémale  $\gamma_\varepsilon \gamma_{-\varepsilon} \gamma_\varepsilon$  et  $K'_\varepsilon$  le lieu de seconde commutation de telles trajectoires, la condition de seconde commutation s'écrit :

$$(\varepsilon + \hat{u}(0))(2z_\varepsilon(t_1) + \frac{a'}{a}y_\varepsilon(t_1)) \leq 0 \tag{22}$$

où  $v_\varepsilon(t_1) \in K_\varepsilon$  et donc, d'après l'étude des commutations faite en 5.5.3 :

$$\varepsilon(az_\varepsilon(t_1) + a'y_\varepsilon(t_1)) \leq 0 \tag{23}$$

avec  $z_\varepsilon(t_1) \sim (\varepsilon - \hat{u}(0))t_1$

Or, puisque  $\hat{u}(0) > 1$  et  $t_1 < 0$ , on a  $z_\varepsilon(t_1) > 0$  et

$$(22) \Leftrightarrow z_\varepsilon(t_1) + \frac{1}{\varepsilon a}[\varepsilon(az_\varepsilon(t_1) + a'y_\varepsilon(t_1))] \leq 0$$

Donc il apparaît que pour  $\varepsilon a < 0$ , (22) et (23) sont incompatibles, i.e. que  $K'_\varepsilon$  est vide.

Et pour  $\varepsilon a > 0$  on montre, de même que dans le cas elliptique (cf. preuve du lemme de 5.5.7), que  $\mathcal{K}_\varepsilon \cap K'_\varepsilon = \sigma_\varepsilon$  et  $K_{-\varepsilon} \cap K'_\varepsilon = k_{-\varepsilon}$ , mais avec ici  $\sigma_\varepsilon \subset K_\varepsilon$  comme on l'a vu en calculant l'espace tangent à  $\sigma_\varepsilon$  en 0 (cf. lemme 5.5.5). Nous en déduisons que, pour  $\varepsilon a > 0$ ,  $W_{-\varepsilon} = K_{-\varepsilon}$  et  $W_{-\varepsilon}$  a pour frontière  $k_{-\varepsilon}$  dans  $\mathcal{K}_{-\varepsilon}$ ,  $W_\varepsilon$  est strictement inclus dans  $K_\varepsilon$  et  $W_\varepsilon$  a pour frontière  $\sigma_\varepsilon$  dans  $K_\varepsilon$ , avec  $W_\varepsilon \cap W'_\varepsilon = \sigma_\varepsilon$  et  $K_{-\varepsilon} \cap W'_\varepsilon = k_{-\varepsilon}$ . La synthèse pour les feuilles  $y = w_0$  où  $aw_0 < 0$  en découle.

### 5.5.9. REMARQUES

COMPLEXITÉ. – Les surfaces  $\mathcal{K}_\varepsilon$  peuvent être calculées à l'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  si l'on développe  $c$  et  $\alpha$  à l'ordre  $m$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  à l'ordre  $m - 1$  (avec les notations introduites en 5.5.1), ces ordres étant minimaux. Le calcul des surfaces  $C$  (cas elliptique) et  $W'_\varepsilon$  (cas parabolique) est plus complexe et n'a été mené qu'à l'ordre 1.

CAS EXCEPTIONNEL. – Ce cas est générique mais son étude est complexe et sera présentée dans un article ultérieur.

## 6. LE CAS PLAT EN DIMENSION TROIS

Dans ce cas  $Y$  est supposé tangent à  $N$  en chaque point : rappelons que le problème de contrôle des réacteurs chimiques décrit dans le paragraphe 1 satisfait à cette hypothèse. Alors tous les points terminaux des BC-trajectoires extrémales sont des points de commutation. La variété terminale  $N$  est identifiée au plan  $x = 0$  et par convention la normale à  $N$ , notée  $n$ , vaut  $n = (1, 0, 0)$ .

### 6.1. Le cas générique

On suppose que  $\det(X, Y, [X, Y])$  n'est pas nul en 0, et que  $[X, Y]$  est transverse à  $N$  en 0. La synthèse est donnée par la condition de transversalité (17) vue en 4.1.

### 6.2. Le cas du pli

6.2.1. HYPOTHÈSES ET NORMALISATIONS. – On suppose que  $\det(X, Y, [X, Y])$  et  $\det(Y, [X, Y], ad^2 Y(X))$  sont non nuls en 0, et que  $\langle n, [X, Y](0) \rangle = 0$ . Sous ces hypothèses l'ensemble des points  $v_0$  de  $N$  voisins de 0 tels que  $\langle n, [X, Y](v_0) \rangle = 0$  est une courbe passant par 0 et transverse à  $Y$ ; et en chacun de ces points  $v_0$  il arrive une unique BC-extrémale singulière dont nous savons (d'après le lemme 2.7.1) qu'elle vérifie (10).

Nous effectuons alors les premières normalisations suivantes :

Nous supposons que localement  $Y = \frac{\partial}{\partial z}$ , que la BC-extrémale singulière arrivant en 0 est  $t \rightarrow (t, 0, 0)$  et que l'axe  $0y$  est une branche de la courbe de  $N$  d'équation  $\langle n, [X, Y](v_0) \rangle = 0$  dont on vérifie après les normalisations qu'elle est simple,  $N$  étant alors le plan  $y0z$ .

Une seconde normalisation est effectuée comme dans le cas du pli générique (cf. 5.5.1) pour obtenir  $[X, Y]$  constant le long de  $0x$  en préservant les normalisations précédentes. Finalement le système  $(X, Y)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(x, y, z) = 1 + \sum_{i+j \geq 2} a_{ij}(x) y^i z^j \\ \dot{y} &= \beta(x, y, z) = bz + b_{10}(x)y + \sum_{i+j \geq 2} b_{ij}(x) y^i z^j \\ \dot{z} &= \gamma(x, y, z) + u = u - \hat{u}(x, y, z) + cz + c_{10}(x)y \\ &\quad + \sum_{i+j \geq 2} c_{ij}(x) y^i z^j, \quad |u| \leq 1 \end{aligned} \tag{24}$$

avec  $b \neq 0$ ,  $a = a_{02}(0) \neq 0$  et  $\forall i \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_{i1}(0) = 0$ .

Observons que tout arc singulier aboutissant en  $v_0 \in 0y$  voisin de 0 est admissible ssi  $\hat{u}(0, 0, 0) \in ]-1, 1[$  et que dans ce cas il est hyperbolique si  $a < 0$ , elliptique si  $a > 0$ ; dans le cas parabolique, c'est-à-dire le cas où  $\hat{u}(0, 0, 0) \notin ]-1, 1[$ , on peut supposer que  $\hat{u}(0, 0, 0) > 1$  en changeant si nécessaire  $u$  en  $-u$  et  $z$  en  $-z$ .

Nous traitons d'abord le cas générique où  $\hat{u}(0, 0, 0)$  n'est pas saturant, c'est-à-dire où  $|\hat{u}(0, 0, 0)| \neq 1$ .

6.2.2. PROPOSITION. – Une trajectoire  $\gamma_\varepsilon$  aboutissant en un point  $v_0 = (0, w_0, 0)$  de  $0y$  voisin de 0 est BC-extrémale ssi  $\varepsilon a(\varepsilon - \hat{u}(0, 0, 0)) < 0$ ; alors une telle trajectoire n'admet qu'une commutation (qui a lieu en  $v_0$ ). Avec les notations de 5.4.2, l'espace tangent à  $\Gamma_\varepsilon$  en 0 est  $\{(1, 0, -\hat{u}(0, 0, 0)), (0, 1, 0)\}_{e.v.}$ .

Une trajectoire  $\gamma_\varepsilon$  aboutissant en un point  $v_0 = (0, w_0, s_0)$  avec  $s_0 \neq 0$  voisin de 0 est BC-extrémale ssi  $\varepsilon a s_0 > 0$ ; alors une telle trajectoire n'admet qu'une commutation (qui a lieu en  $v_0$ ) ssi  $(\varepsilon - \hat{u}(0, 0, 0))s_0 < 0$ . Dans le cas où  $(\varepsilon - \hat{u}(0, 0, 0))s_0 > 0$  l'instant de seconde commutation est  $\bar{t} = -2s_0/(\varepsilon - \hat{u}(0, 0, 0)) + s_0 O(|w_0, s_0|)$ . Alors  $K_\varepsilon$  est semi-analytique, incluse dans la surface  $K_\varepsilon$  paramétrée en :

$$\begin{aligned}x &= t + tO(|t, w_0|^2) \\y &= w_0 + tO(|t, w_0|) \\z &= (\varepsilon - \hat{u}(0, 0, 0))t/2 + tO(|t, w_0|)\end{aligned}$$

et vérifie de plus les conditions

$$x \leq 0 \quad , \quad \varepsilon a(\varepsilon - \hat{u}(0, 0, 0)) > 0.$$

Preuve. – On procède par calculs directs en développant  $\alpha$  à l'ordre 2 et  $\beta, \gamma$  à l'ordre 0 (avec les notations introduites en 6.2.1), et en appliquant la condition de transversalité.

6.2.2. REMARQUE. – Les plis génériques sont ici de codimension 1 et ces cas ont été étudiés en dimension 2 dans le paragraphe 4.2. Cette étude conduit aux résultats suivants.

6.2.3. CAS HYPERBOLIQUE. – Nous supposons  $a < 0$  et  $\hat{u}(0, 0, 0) \in ]-1, 1[$ . La synthèse est donnée par la figure 4 b (vue en 3.5.4).

6.2.4. CAS ELLIPTIQUE. – Nous supposons  $a > 0$  et  $\hat{u}(0, 0, 0) \in ]-1, 1[$ . La synthèse est donnée par la figure 6.a (vue en 3.5.5). Cette synthèse comporte un cut locus, ensemble sous analytique dont le plan tangent en 0 est  $\{(1, 0, -2\hat{u}(0, 0, 0)/3), (0, 1, 0)\}_{e.v.}$ .

6.2.5. CAS PARABOLIQUE. – Nous supposons  $|\hat{u}(0, 0, 0)| > 1$ . En changeant si nécessaire  $z$  en  $-z$  et  $u$  en  $-u$  on peut se ramener à  $\hat{u}(0, 0, 0) > 1$ .

La synthèse est donnée par la figure 9 (vue en 4.2.4). Le cut locus qui apparaît dans le cas où  $a > 0$  et  $\hat{u}(0, 0, 0) \in ]1, 3[$  a pour plan tangent en 0  $\{(1, 0, -2\hat{u}(0, 0, 0)/3), (0, 1, 0)\}_{e.v.}$ .

REMARQUE : COMPLEXITÉ. – Les surfaces de commutation  $K_+$  et  $K_-$  et la surface  $C$  peuvent être calculées à l'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  si l'on développe  $\alpha$  à l'ordre  $m + 1$  et  $\beta, \gamma$  à l'ordre  $m - 1$  (avec les notations introduites en 6.2.1), ces ordres étant minimaux.

6.2.7. CAS SATURÉ. – Nous supposons  $|\hat{u}(0, 0, 0)| = 1$ . Sans nuire à la généralité on peut alors supposer  $\hat{u}(0, 0, 0) = 1$ .

Si  $a > 0$ , la synthèse s'obtient par passage à la limite dans les cas elliptique (cf. 6.2.4) et parabolique (cf. 6.2.5) : il y a cut locus (voir en 3.5.5 la figure 6.a et en 4.2.4 la figure 9).

Dans la suite de ce paragraphe 6.2.7, nous supposerons  $a < 0$ .

PROPOSITION. – Le modèle :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 + az^2 + \alpha'_2 xz^2 + \alpha'_0 xy^2 + \alpha_3 z^2 + \alpha_2 yz^2 \\ \dot{y} &= bz \\ \dot{z} &= u - 1 - \hat{u}_x x - \hat{u}_y y + cz \end{aligned} \quad (25)$$

avec  $\hat{u}_x := \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(0, 0, 0)$ ,  $\hat{u}_y := \frac{\partial \hat{u}}{\partial y}(0, 0, 0)$ ,  $a < 0$ ,  $b \neq 0$  ( $\hat{u}_x$  et  $\hat{u}_y$  sont génériquement non nuls et l'on peut supposer  $\hat{u}_y > 0$  sans restreindre la généralité) conduit au développement de la fonction de commutation  $\varphi = p_3$  à l'ordre 3 en  $(t, w_0, s_0)$  où  $v(0) = (0, w_0, s_0)$ . La trajectoire  $\gamma_\varepsilon$  aboutissant en  $(0, 0, s_0)$  avec  $s_0 \neq 0$  est BC-extrémale ssi  $\varepsilon s_0 < 0$ ,  $\gamma_-$  aboutissant en 0 est BC-extrémale et  $\gamma_+$  aboutissant en 0 est BC-extrémale ssi  $\hat{u}_x > 0$ .

Preuve. – A partir des normalisations effectuées en 6.2.1 on identifie  $\Gamma_s$  au plan  $xOy$  et on prend  $X + \hat{u}Y \equiv \frac{\partial}{\partial x}$  le long de  $Oy$ . Alors on obtient le système :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 + \sum_{i+j \geq 2} a_{ij}(x)y^i z^j \\ \dot{y} &= bz + b_{10}(x)y + \sum_{i+j \geq 2} b_{ij}(x)y^i z^j \\ \dot{z} &= u - \hat{u}(x, y) + cz + \sum_{j \geq 1, i+j \geq 2} c_{ij}(x)y^i z^j, \quad |u| \leq 1 \end{aligned}$$

avec  $a := a_{02}(0) < 0$ ,  $b \neq 0$ , pour  $i \geq 1$   $a_{i1}(0) = b_{i0}(0) = 0$  et pour  $i \geq 2$   $a_{i0}(0) = 0$ .

En évaluant  $\hat{u}(x, y)$  au premier ordre à l'aide de la formule (10) du lemme 2.7.1 on trouve  $a'_{11}(0) = 0$ .

On en déduit le modèle (25) qui donne  $p_3$  à l'ordre 3 par application du principe du maximum et qui conduit aux paramétrisations suivantes en notant  $K_+$  la surface de commutation des BC-extrémales de contrôle +1 sur  $N$ ,  $\Gamma_s$  la surface constituée des trajectoires singulières et pour  $s_0 \leq 0$   $\Gamma_+(s_0)$  la nappe des trajectoires  $\gamma_+$  aboutissant sur la droite de  $N$  d'équation  $z = s_0$  :

pour  $\Gamma_+(s_0)$ ,  $s_0 \in \mathbb{R}_-$  :

$$\begin{aligned}x &= t + tO(|t, w_0, s_0|^2) \\y &= w_0 + bs_0t + tO(|t, w_0, s_0|^2) \\z &= s_0 + (cs_0 - \hat{u}_y w_0)t - \hat{u}_x \frac{t^2}{2} + tO(|t, w_0, s_0|^2)\end{aligned}$$

et pour  $K_+$  :

$$\begin{aligned}x &= t + tO(|t, w_0|^2) \\y &= w_0 + tO(|t, w_0|^2) \\z &= -\hat{u}_y w_0 \frac{t}{2} - \hat{u}_x \frac{t^2}{3} + tO(|t, w_0, s_0|^2)\end{aligned}$$

avec  $x \leq 0$  et  $\hat{u}_x x + 3\hat{u}_y y \geq 0$ .

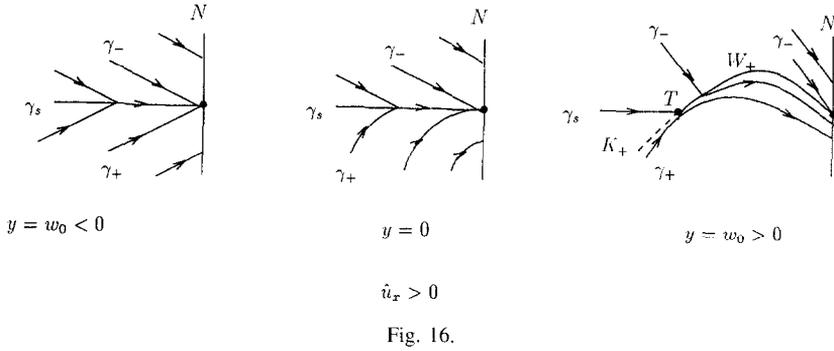
On en déduit donc que la courbe  $K_+ \cap (\Gamma_s = x=0y)$  est paramétrée en :

$$\begin{aligned}x &= t + O(t^3) \\y &= -\frac{2\hat{u}_x}{3\hat{u}_y}t + O(t^2) \\z &= 0\end{aligned}$$

## SYNTHÈSE

PREMIER CAS :  $\hat{u}_x > 0$ . Dans ce cas l'arc singulier aboutissant en 0 est admissible et la courbe  $\mathcal{T} = K_+ \cap \Gamma_s$  est contenue dans le demi-espace  $y > 0$ . Lorsque  $s_0$  diminue à partir de 0,  $K_+ \cap \Gamma_+(s_0)$ , qui contient deux points pour  $s_0$  voisin de 0, devient vide : il y a donc une situation intermédiaire de tangence. En tout point de la courbe de tangence, pour l'arc  $\gamma_+$  correspondant, la fonction de commutation  $\varphi$  s'annule sans changer de signe et donc  $\varphi = \varphi' = 0$ ; nous en concluons qu'un tel point (noté  $T$  en figure 16) appartient à  $\mathcal{T}$ . On en déduit la synthèse, donnée par la figure 16.

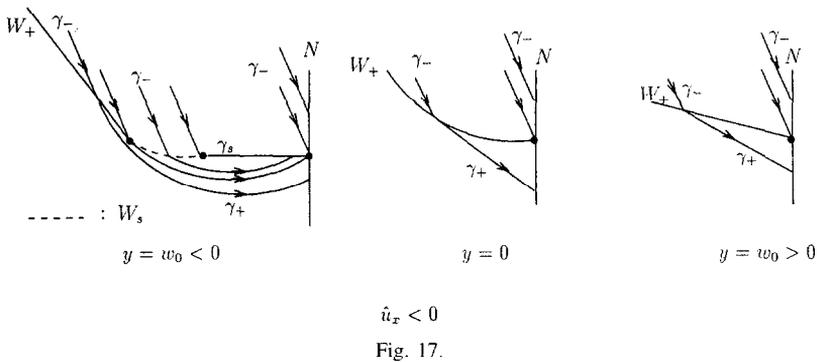
SECOND CAS :  $\hat{u}_x < 0$ . Dans ce cas l'arc singulier aboutissant en 0 n'est pas admissible et la courbe  $\mathcal{T} = K_+ \cap \Gamma_s$  est contenue dans le demi-espace  $y < 0$ . En utilisant là encore les paramétrisations de  $\Gamma_+(s_0)$  et de  $K_+$  obtenues à l'aide de (25), on trouve que le lieu de commutation des optimales est constitué de deux strates  $W_+$  et  $W_s$ . On a  $W_+ = K_+$ .



Et  $W_s$  surface définie comme le lieu de commutation des trajectoires de contrôle singulier sur  $N$  et de contrôle  $+1$  en  $(x_0, w_0, 0)$  avec  $x_0 \leq 0$  et  $\hat{u}_x x_0 + \hat{u}_y w_0 \leq 0$  est paramétrée en :

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3}t - \frac{\hat{u}_y}{\hat{u}_x}w_0 + tO(|t, w_0|^2) \\ y &= w_0 + tO(|t, w_0|^2) \\ z &= -\hat{u}_x \frac{t^2}{6} + tO(|t, w_0|^2) \end{aligned}$$

avec  $t \in [-3\frac{\hat{u}_y}{\hat{u}_x}w_0, 0]$ . Ceci permet de vérifier que  $W_+ \cup W_s$  n'est pas  $C^1$  alors que  $W_s \cup \Gamma_s$  est  $C^1$  mais n'est pas  $C^2$ . On en déduit la synthèse, donnée par la figure 17.



6.2.8. CAS  $\hat{u}(0, 0, 0) = 3$  ET  $a > 0$ . – Dans ce cas, en reprenant les notations de 5.4.2, on trouve d'après l'étude du cas parabolique faite en 6.2.5 :  $\Gamma_+$ ,  $K_-$  et  $C$  tangentes en 0 et pour  $\hat{u}(0, w_0, 0) < 3$  (resp.  $> 3$ )

$\Gamma_+$  en dessous (resp. au dessus) de  $K_-$ . Donc les surfaces  $\Gamma_+$  et  $K_-$ , qui se coupent en  $0y$ , se coupent en une autre courbe, notée  $\mathcal{I}$ , génériquement transverse à  $x0y$ . Nous supposons, sans restreindre la généralité, que  $\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}(0,0,0) > 0$  et que  $C$  arrive sur  $0y$  (*i.e.* que  $K_-$  est au dessus de  $\Gamma_+$ ) pour les ordonnées strictement négatives. On termine l'étude comme dans le cas  $a = -4k$  du paragraphe 5.4.6 : la synthèse est donnée par la figure 18.

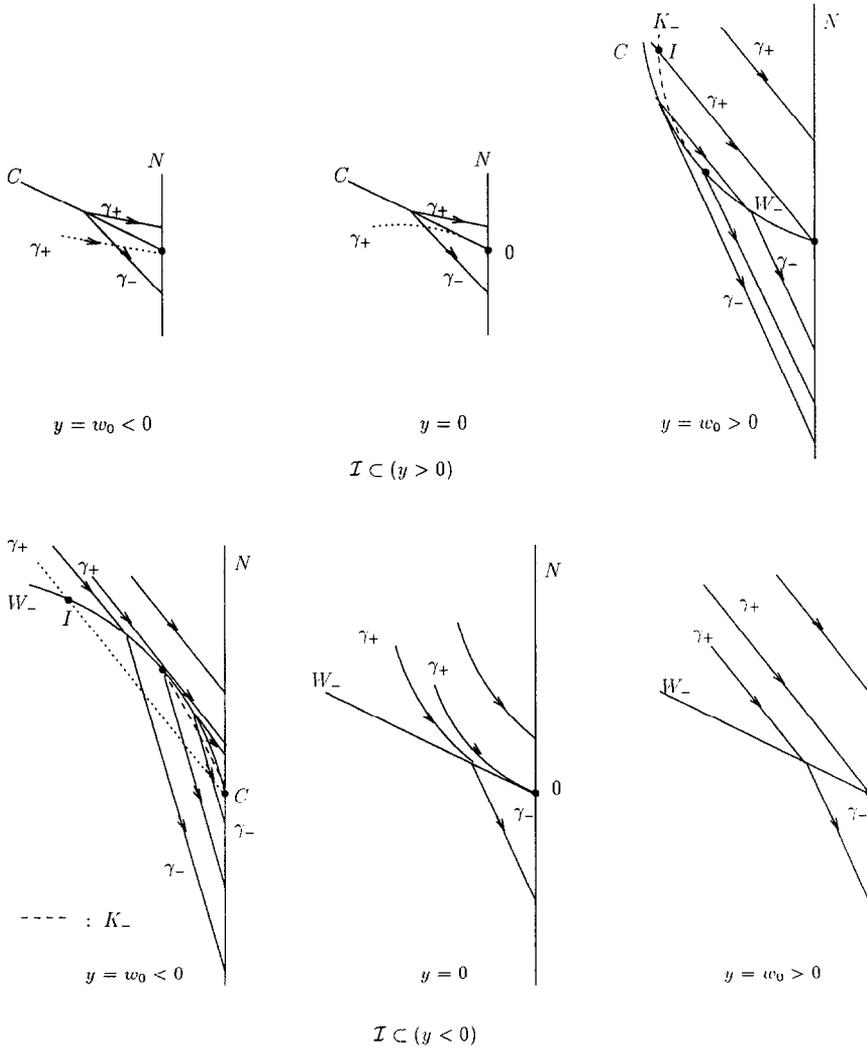


Fig. 18.

### 6.3. Cas exceptionnel

Nous supposons que  $X$  est tangent à  $N$  en  $0$ . Dans le cas où le système présente en  $0$  une singularité de codimension un, on voit dans chaque feuille les synthèses de la figure 10 (*cf.* 4.3.1). Les singularités de codimension deux sont complexes et sont présentées dans un article ultérieur [16]. Les synthèses seront décrites par des feuilletages non plans et ne peuvent être réduites à des bifurcations de synthèses en dimension 2. C'est un phénomène nouveau par rapport au travail de cet article. Par ailleurs, les problèmes d'accessibilité et de contrôlabilité subsistent.

### 6.4. Application aux réacteurs chimiques

6.4.1. NOTATIONS ET MODÉLISATION. – De même qu'en [5] nous considérons un schéma réactionnel  $A \mapsto B \mapsto C$  où chaque réaction est du premier ordre (*voir* paragraphe 1). Notre problème est ici d'obtenir en temps minimal une quantité donnée de produit  $B$ . On utilise notre étude pour construire la synthèse optimale au voisinage de la variété terminale. En notant  $c_1$  et  $c_2$  les concentrations respectives de  $A$  et  $B$ , et en reprenant les notations du paragraphe 1, nous trouvons que les équations du système sont (3), que le contrôle est  $u \in [u_-, u_+]$  et que la variété terminale est  $c_2 = d$  où  $d$  est une constante strictement positive donnée. On étudie le cas où  $u_- < 0 < u_+$  et  $\alpha > 1$ .

Pour exploiter les symétries du problème on introduit les coordonnées  $x = \ln(c_1)$  et  $y = c_2/c_1$ . Dans les coordonnées  $(x, y, v)$  le système s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -v \\ \dot{y} &= v - \beta v^\alpha y + vy \\ \dot{v} &= h(v)u \quad \text{avec} \quad h(v) = (Rv/E_1)\ln^2(v/A_1) \end{aligned} \tag{26}$$

où  $\beta > 0$ ,  $\alpha > 1$ ,  $u \in [u_-, u_+]$  et la cible  $N$  est  $ye^x = d$ . De plus les contraintes physiques sont  $y > 0$ ,  $v \in ]0, A_1[$ ,  $ye^x < d$ .

En utilisant les notations de 2.7, il vient :

6.4.2. LEMME. – On a  $D = h(v)^4 \alpha (\alpha - 1) \beta v^{\alpha-2} y$ ,  $D' = h(v)^3 (\alpha - 1) \beta v^\alpha$ ,  $D'' = h(v)^2 (\alpha - 1) \beta v^\alpha y$ . Le contrôle singulier est donc  $\hat{u} = -v^2 / (\alpha h(v) y)$ . Dans l'espace physique  $y > 0$ ,  $v \in ]0, A_1[$ , avec  $\alpha > 1$ , donc  $D \neq 0$ . Toutes les trajectoires singulières sont hyperboliques.

6.4.3. ÉTAT ADJOINT. – En notant  $p = (p_1, p_2, p_3)$  l'état adjoint, on a d'après le principe du maximum

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= 0 \\ \dot{p}_2 &= p_2(\beta v^\alpha - v) \\ \dot{p}_3 &= p_1 + p_2(\alpha\beta v^{\alpha-1}y - y - 1) + p_3h'(v)u \end{aligned}$$

En particulier  $p_1(t) = p_1(0)$  et  $p_2(t) = (\exp \int_0^t \beta v^\alpha(s) - v(s) ds) p_2(0)$ . On en déduit que  $p_1$  est une intégrale première et que  $p_2(t) \equiv 0$  ou le signe de  $p_2(t)$  est constant.

Comme  $N$  a pour équation  $ye^x = d$  et que le domaine physique est  $ye^x < d$ , une normale sortante est  $n = (d, e^x, 0)$ . Le vecteur adjoint  $p(t)$  vérifie en  $t = 0$  la condition de transversalité  $p(0) \in \mathbb{R}n$ . Dans le domaine  $\langle n, X \rangle > 0$  de  $N$ , il résulte de la convention  $H \geq 0$  du principe du maximum que l'on peut poser  $p(0) = n$ . Lorsque  $\langle n, X \rangle = 0$ , un calcul simple montre qu'un arc extrémal régulier avec  $p(0) = -n$  n'est pas optimal et donc on peut toujours utiliser le principe d'orientation  $p(0) = n$  pour les trajectoires optimales dans le secteur  $\langle n, X \rangle \geq 0$ .

6.4.4. STRATIFICATION DE LA VARIÉTÉ TERMINALE. – Les ensembles critiques sur  $N$  sont respectivement  $E : \langle n, X \rangle = 0$  et  $S : \langle n, [X, Y] \rangle = 0$  et en calculant il vient :

$$\begin{aligned} E : 1 - \beta v^{\alpha-1}y &= 0, & ye^x &= d \\ S : \alpha\beta v^{\alpha-1}y - 1 &= 0, & ye^x &= d \end{aligned}$$

On a  $E \cap S = \phi$  et le partitionnement de la cible  $N$  dans les coordonnées  $(y, v)$  est donné par la figure 19.

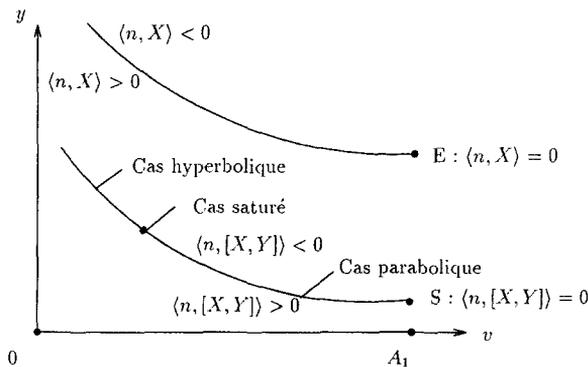


Fig. 19.

De plus, sur  $S : \langle n, [X, Y] \rangle = 0$ , d'après l'étude conduite en 6.2, on doit distinguer trois cas selon la valeur du contrôle singulier  $\hat{u}$ . Si  $\hat{u} \in ]u_-, u_+[$ , comme toutes les singulières sont hyperboliques, on est dans le cas hyperbolique 6.2.3. Si  $\hat{u} = u_-$  ou  $u_+$ , c'est le cas saturé 6.2.7 et si  $\hat{u} \notin [u_-, u_+]$ , on est dans le cas parabolique 6.2.5. En calculant  $\hat{u}$  sur  $S$ , il vient  $\hat{u} = -\frac{\beta E_1 v^\alpha}{R \ln^2(v/A_1)}$  et une étude élémentaire montre que sur  $S$ ,  $\hat{u}$  décroît de  $0^-$  à  $-\infty$  lorsque  $v$  croît de  $0^+$  à  $A_1^-$ .

6.4.5. SYNTHÈSE OPTIMALE. – La figure 20 obtenue par projection sur le plan  $(y, v)$  donne la synthèse optimale au voisinage des points de la cible situés strictement en dessous de  $E$ . La synthèse optimale au voisinage de  $E$  est d'une complexité trop grande pour être analysée dans cet article (voir 6.3).

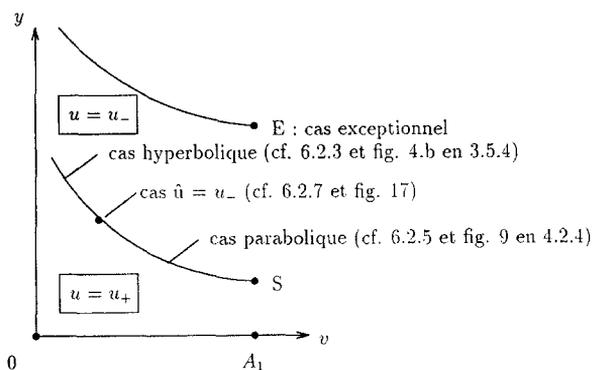


Fig. 20.

## 7. CONCLUSION

On a donc essentiellement étudié les situations de codimension deux et en tout cas mis en place les outils géométriques pour étudier le problème du temps minimal localisé au voisinage d'une variété terminale de codimension un. Bien que dans notre étude on ait supposé  $v \in \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , les cas hyperboliques, elliptiques et paraboliques génériques étudiés en 5.5 se généralisent à  $\mathbb{R}^n$ . L'étude de complexité a été conduite au maximum de nos capacités calculatoires et dans  $\mathbb{R}^3$  la classification est essentiellement topologique. Dans le cas plan, l'étude est plus satisfaisante et nos résultats sont en cours d'implémentation sous Mathematica.

Notre étude, appliquée à un système chimique de la forme  $A \mapsto B \mapsto C$  du premier ordre, montre que dans ce cas une loi optimale est non triviale,

même localement. En effet il y a des trajectoires optimales de la forme  $\gamma_+ \gamma_- \gamma_s$ . Toutefois la solution n'est pas trop complexe, et ceci pour deux raisons. D'une part le problème est plat et l'étude est plus simple que dans le cas générique (existence de symétries). Par ailleurs il n'y a pas de trajectoire singulière exceptionnelle dans l'espace physique. Dans un article à paraître on établit une borne globale sur le nombre de commutations d'une politique optimale et cela permet alors à l'aide de simulations numériques de calculer la synthèse optimale globale.

Une seconde étape dans notre étude est de traduire toutes les synthèses optimales calculées en termes de propriétés de la fonction temps minimale. Cela signifie que notre travail doit conduire à une théorie des singularités de cette fonction.

## RÉFÉRENCES

- [1] V. I. ARNOLD, S. M. GOUSSEIN ZADÉ et A. N. VARCHENKO, *Singularities of differentiable maps*, Tome 1, Nauka, Moscou, 1981.
- [2] R. BENEDETTI et J. J. RISLER, *Real algebraic and semi algebraic sets*, Hermann, Paris, 1990.
- [3] B. BONNARD et I. KUPKA, Théorie des singularités de l'application entrée/sortie et optimalité des trajectoires singulières dans le problème du temps minimal, *mathematicum*, vol. 5, 1993, pp. 111-159.
- [4] B. BONNARD et J. DE MORANT, Towards a geometric theory in the time minimal control of chemical batch reactors, *SIAM J. on Control and Opt.*, vol. 33, n° 5, sept. 1995, pp. 1279-1311.
- [5] B. BONNARD et M. PELLETIER, Time minimal synthesis for planar systems in the neighborhood of a terminal manifold of codimension one, summary in *J. of Mathematical systems, estimation and control*, vol. 5, n° 3, 1995.
- [6] B. BONNARD et M. PELLETIER, Time minimal synthesis with target of codimension one under generic conditions, *Pub. Banach Center*, vol. 32, 1995.
- [7] I. EKELAND, Discontinuité des champs hamiltoniens et existence de solutions optimales en calcul des variations, *Pub. IHES*, n° 47, 1977, pp. 1-32.
- [8] M. FEINBERG, Chemical reaction network structure and stability of complex isothermal reactions, *Chemical Engineering Sciences*, vol. 42, 10, 1987, pp. 2229-2268.
- [9] H. HERMES, Lie algebras of vector fields and local approximation of attainable sets, *SIAM J. on Control and Opt.*, vol. 16, 1978, pp. 715-727.
- [10] C. G. HILL, *An introduction to chemical engineering kinetics and reactor design*, John Wiley, New York, 1977.
- [11] W. KLINGENBERG, *A course in differential geometry*, Graduate texts in Mathematics, Springer Verlag, New York, 1978.
- [12] F. KLOK, Broken solutions of homogeneous variational problems, *J. of Diff. Equ.*, vol. 55, 1984, pp. 101-134.
- [13] S. KOBAYASHI, On conjugate and cut loci, in *Studies in global geometry*, vol. 4, S. S. Chern ed., Englewood Cliffs, Prentice Hall, NJ, 1967.
- [14] A. J. KRENER, The higher-order maximal principle and its applications to singular extremals, *SIAM J. on Control and Opt.*, vol. 15, 1977, pp. 256-293.
- [15] I. KUPKA, Geometric theory of extremals in optimal control problems, I. The fold and Maxwell cases, *TAMS*, vol. 299, 1973, pp. 225-243.
- [16] G. LAUNAY et M. PELLETIER, Synthèse optimale avec cible de codimension un : le cas d'arrivée tangentielle, *A paraître*.

- [17] E. B. LEE et L. MARKUS, *Foundations of optimal control theory*. John Wiley, New York, 1967.
- [18] M. PELLETIER, *Contribution à l'étude de quelques singularités de systèmes non linéaires*. Thèse, Université de Bourgogne, 1994.
- [19] H. POINCARÉ, Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, *TAMS*, vol. **6**, 1905, pp. 237-274.
- [20] L. PONTRIAGUINE *et al.*, *Théorie mathématique des processus optimaux*, ed. Mir., Moscou, 1974.
- [21] H. SCHÄTTLER, The local structure of time-optimal trajectories in dimension 3 under generic conditions, *SIAM J. on Control and Opt.*, vol. **26**, 1988, pp. 899-918.
- [22] H. J. SUSSMANN, The structure of time-optimal trajectories for single-input systems in the plane : the  $C^\infty$  non singular case, *SIAM J. on Control and Opt.*, vol. **25**, 1987, pp. 433-465.
- [23] H. J. SUSSMANN, Regular synthesis for time-optimal control for single-input real analytic systems in the plane, *SIAM J. on Control and Opt.*, vol. **25**, 1987, pp. 1145-1162.
- [24] R. J. WALKER, *Algebraic curves*. Princeton University Press, Princeton, 1951.

*(Manuscrit reçu le 20 juillet 1994;  
version révisée le 14 juin 1995.)*