Irrégularité et Conducteur de Swan p-adiques

Adriano Marmora

Received: July 6, 2004

Communicated by Takeshi Saito

Abstract. Let V be a de-Rham representation of the Galois group of a local field of mixed characteristic $(0, p)$. We relate the Swan conductor of the associated Weil-Deligne representation to the irregularity of the corresponding p-adic differential equation.

2000 Mathematics Subject Classification: 11F80,11F85,11S15,12H25
Keywords and Phrases: p-adic representation, de-Rham representation, Swan conductor, p-adic differential equation, p-adic irregularity.

1 Introduction

Soient K un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0, de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$, et $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. On note G_K le groupe de Galois de $\overline{K}/K$ et I_K le sous-groupe d'inertie. Fontaine a défini une hiérarchie sur les représentations p-adiques de G_K(i.e. les $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action continue de G_K) : représentations de de Rham $\supset$ rep. semi-stables $\supset$ rep. cristallines. Le théorème de monodromie p-adique affirme que toute représentation de de Rham est potentiellement semi-stable, i.e. sa restriction à un sous-groupe ouvert de G_K est semi-stable. Le but de cet article est l'étude d'invariants numériques qui mesurent le défaut de semi-stabilité de représentations potentiellement semi-stables. Une telle représentation est entièrement décrite par son module de Weil-Deligne $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$. Celui-ci est muni d'une action de G_K dont la restriction à l'inertie se factorise par un quotient fini. Fontaine [10] définit les conducteurs de Swan et d'Artin de V, notés respectivement $\mathrm{sw}(V)$ et $\mathrm{ar}(V)$, comme étant les conducteurs de Swan et d'Artin de $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$. Dans un travail récent [3], Berger associe à toute représentation de de Rham V une équation différentielle p-adique $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ munie d'une structure de Frobenius. À une équation différentielle p-adique M munie d'une structure de Frobenius,

Christol et Mebkhout [7] associent un invariant entier $\mathrm{irr}(M)$, l'irrégularité de M.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient μ_n le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité dans $\overline{K}$ et $K_n = K(\mu_n)$. Pour une représentation p-adique V de G_K, on note V_n sa restriction au sous-groupe $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K_n)$. Le résultat principal de cet article est le suivant.

THÉORÈME 1.1. *Pour toute représentation de de Rham* V *de* G_K*, on a*

$$\mathrm{irr}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{sw}(V_n).$$

Le théorème 1.1 est l'analogue en caractéristique zéro d'un théorème de Tsuzuki en caractéristique $p > 0$. Soit E un corps de valuation discrète complet, de caractéristique p et de corps résiduel parfait. Dans [22], Tsuzuki montre que la catégorie des représentations p-adiques de $\mathrm{G}_E = \mathrm{Gal}(E^{\mathrm{sep}}/E)$ dont l'inertie agit par un quotient fini (monodromie finie), est équivalente à la catégorie des φ-∇-modules étales sur un corps valué $\mathcal{E}^\dagger(E)$ de caractéristique 0, d'anneau d'entiers hensélien et de corps résiduel E (voir §4.3 pour la définition). Puis dans [23], il démontre l'égalité entre le conducteur de Swan de la restriction à l'inertie d'une telle représentation et l'irrégularité du ∇-module correspondent. Dans la démonstration de 1.1, on se ramène, par la théorie du corps des normes, au cas d'un corps de valuation discrète complet d'égale caractéristique $p > 0$. Cependant, on ne peut pas appliquer directement le résultat de Tsuzuki, car dans notre cas, l'action de l'inertie ne se factorise pas par un quotient fini. La stratégie de la démonstration consiste à décrire la représentation de Weil-Deligne en termes de l'équation différentielle de Berger, puis de reprendre une partie de la preuve de Tsuzuki (l'induction de Brauer). Comme corollaires du théorème 1.1, on en déduit un résultat analogue pour le conducteur d'Artin (cf. 5.7) et l'égalité entre un polygone de Newton de pentes p-adiques et une limite de polygones de Newton de pentes de Swan (cf. 5.9).
Quand cet article a été déjà achevé, l'auteur a reçu une prépublication de P.Colmez [6] dont le résultat principal est une formule pour $\mathrm{sw}(V)$ en termes d'une filtration sur $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. Les deux travaux sont indépendants et les méthodes utilisées semblent différentes.
Cet article est une partie de la thèse de doctorat en mathématique que je prépare à l'université de Paris 13, sous la direction d'Ahmed Abbes. Je tiens ici à le remercier pour son soutien constant tout le long de ce travail et ses lectures attentives des versions préliminaires de ce texte. Je remercie également le referee qui, par ses remarques, a amélioré ce manuscrit.

NOTATIONS

Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $W = \mathrm{W}(k)$ (resp. $W_n = \mathrm{W}_n(k)$) l'anneau des vecteurs de Witt infinis (resp. de longueur $n \geq 1$) et $K_{\mathrm{a}} = \mathrm{Fr}\, W$ le corps des fractions de W. On note $|\cdot|$ la valeur absolue de K_{a} normalisée par $|p| = p^{-1}$ et σ l'endomorphisme de Frobenius agissant sur k,

W_n, W et K_{a}. On fixe une extension finie K/K_{a} totalement ramifiée et une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. On note $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}_K$ dans $\overline{K}$, $\overline{k}$ son corps résiduel, $\mathcal{O}_{\mathrm{C}}$ le complété p-adique de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ et $\mathrm{C} = \mathrm{Fr}\,\mathcal{O}_{\mathrm{C}}$. Pour toute extension finie L de K_{a}, contenue dans $\overline{K}$, on note $\mathcal{O}_L$ son anneau d'entiers, k_L son corps résiduel et $L_{\mathrm{a}} = \mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k_L)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soient μ_n le groupe des racines p^n-ièmes de l'unité dans $\overline{K}$ et $L_n = L(\mu_n)$. On note L_∞ la réunion des L_n, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{H}_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L_\infty)$ et $\Gamma_L = \mathrm{Gal}(L_\infty/L)$. Soit $\chi : \mathrm{G}_K \to \mathbb{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Une représentation galoisienne p-adique (ou une $\mathbb{Q}_p$-représentation galoisienne) est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action linéaire et continue de G_K. On note $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)$ la catégorie des $\mathbb{Q}_p$-représentations de G_K.

2 CONDUCTEURS

On note $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{st}} = \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}[X]$ les anneaux des périodes de Fontaine associés à K (cf. [12]). Soient $N : \mathrm{B}_{\mathrm{st}} \to \mathrm{B}_{\mathrm{st}}$ la $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$-dérivation qui envoie X sur -1 et φ le Frobenius agissant sur $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ et B_{st}. Cettes applications vérifient $N\varphi = p\varphi N$. Ces anneaux sont munis d'une action continue de $\mathrm{G}_{K_{\mathrm{a}}}$ commutante avec φ et N. Soit L/K_{a} une extension finie contenue dans $\overline{K}$. On note $\mathrm{G}_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$. On rappelle que $\mathrm{B}_{\mathrm{st}}^{\mathrm{G}_L} = \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\mathrm{G}_L} = L_{\mathrm{a}}$ (cf. [13, 5.1.2] et [12, 4.2.5]).
Pour tout $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)$, Fontaine définit $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{G}_K}$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V) = (\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{G}_K}$. Ce sont des K_{a}-espaces vectoriels de dimensions inférieures où égales à la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$. Le Frobenius de $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ induit un endomorphisme σ-semi-linéaire $\varphi : \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, appelé Frobenius. L'espace $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est muni d'un Frobenius φ et d'un endomorphisme K_{a}-linéaire N, vérifiant $N\varphi = p\varphi N$. On rappelle que V est dite cristalline (resp. semi-stable) si $\dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ (resp. $\dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$). Elle est dite potentiellement cristalline (resp. potentiellement semi-stable) s'il existe une extension finie K'/K telle que la restriction de V à $\mathrm{G}_{K'}$ est cristalline (resp. semi-stable). On note P le corps $K \otimes_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(\overline{k})$. C'est le complété p-adique de l'extension maximale non-ramifiée K^{nr} de K dans $\overline{K}$. Le groupe d'inertie absolu de K est canoniquement isomorphe à G_P, le groupe de Galois absolu de P. Dans la suite, pour tout $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)$, on considère la restriction de V à I_K comme une représentation p-adique de G_P. Par [12, 5.1.5], une représentation V est cristalline (resp. potentiellement cristalline, resp. semi-stable, resp. potentiellement semi-stable) si et seulement si sa restriction à I_K est cristalline (resp. potentiellement cristalline, resp. semi-stable, resp. potentiellement semi-stable).
Soit V une représentation p-adique potentiellement semi-stable de dimension n. Fontaine définit $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) = \varinjlim_{G' \leq \mathrm{G}_K} (\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G'}$, où la limite est prise sur les sous-groupes ouverts G' de G_K (cf. [13, 5.6.4]). C'est un $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'une action semi-linéaire de G_K. Si L/K est une extension galoisienne finie telle que V est semi-stable comme représentation de G_L, alors $(\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{G}_L}$ est un L_{a}-espace vectoriel de dimension n et l'action

de G_K se factorise par $\mathrm{Gal}(L/K)$. On a un isomorphisme de représentations $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) \cong K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}} \otimes_{L_{\mathrm{a}}} (\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{G}_L}$. Par conséquent la restriction $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|I_K}$ est une représentation linéaire de I_K qui se factorise à travers le sous-groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}(L/K)$.

DÉFINITION 2.1. [10, 7.4.7] *Soit V une représentation p-adique potentiellement semi-stable. Les conducteurs de Swan et d'Artin de* $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|I_K}$ *sont aussi appelés conducteur de Swan et d'Artin de V et notés respectivement* $\mathrm{sw}(V)$ *et* $\mathrm{ar}(V)$.

Si G_K agit par un quotient fini $\mathrm{Gal}(L/K)$ sur V, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V) = K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et $\mathrm{sw}(V)$ et $\mathrm{ar}(V)$ coïncident avec $\mathrm{sw}(\mathrm{Gal}(L/K), V)$ et $\mathrm{ar}(\mathrm{Gal}(L/K), V)$ respectivement.
Pour une représentation V potentiellement semi-stable, on considère aussi la variante

$$\mathrm{ar}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathrm{ar}(V) + \dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V) - \dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V).$$

3 THÉORIE DE HODGE p-ADIQUE ET (φ, Γ)-MODULES

3.1 LES ANNEAUX

On pose $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}}(W_n[\![T]\!][\frac{1}{T}])$, qui est aussi la complétion p-adique de $W[\![T]\!][\frac{1}{T}]$. C'est un anneau de valuation discrète, complet, de caractéristique 0, absolument non ramifié, de corps résiduel $k(\!(T)\!)$. Son corps de fractions $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}[1/p]$ est canoniquement isomorphe à

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n T^n \,\middle|\, a_n \in K_{\mathrm{a}}, (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \text{ bornée et } \lim_{n\to-\infty} |a_n| = 0 \right\}.$$

On pose

$$\mathcal{E}^\dagger = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n T^n \in \mathcal{E} \,\middle|\, \exists\, 0 < \rho < 1 \text{ vérifiant } \lim_{n\to-\infty} |a_n|\rho^n = 0 \right\},$$

l'anneau des séries dans $\mathcal{E}$ qui convergent sur une couronne $\{x \in \mathrm{C} \,|\, \rho \leq |x|_{\mathrm{C}} < 1\}$ pour un réel $0 < \rho < 1$. Pour tout $s \in \mathcal{E}^\dagger$, on note $\mathrm{v}_1(s) = \inf_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{v}_{K_{\mathrm{a}}}(a_n)$ la valuation de Gauss. On rappelle que cette valuation sur $\mathcal{E}^\dagger$ est discrète et que l'anneau de valuation $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ est hensélien, de corps résiduel $k(\!(T)\!)$(cf.[16, §2]).
On note aussi σ l'endomorphisme $x \mapsto x^p$ de $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$. Soit R (cf. [11, §A3.1.1]) la limite projective du système

$$\cdots \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}.$$

C'est une $\overline{k}$-algèbre intègre, parfaite de caractéristique p. On dispose de la description suivante : $R \cong \{(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} | \, x^{(n)} \in \mathcal{O}_{\mathrm{C}}, \, (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\}$, où, à droite, la multiplication est donnée composante par composante et la somme par la formule $(x+y)^{(n)} = \lim_{m\to+\infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$. L'anneau R est complet pour la valuation (non-discète) définie, pour tout $x \in R$, par $\mathrm{v}_R(x) = \mathrm{v}_{\mathrm{C}}(x^{(0)})$, où v_{C} est la valuation de C normalisée par $\mathrm{v}_{\mathrm{C}}(p) = 1$. Le corps $\mathrm{Fr}\, R$ est algébriquement clos (cf. [11, A3.1.6]). On rappelle que $\mathrm{W}(R) \cong \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{W}_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})$, où les applications de transition sont la composition des morphismes de troncation et du Frobenius σ de $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$. C'est une $\mathrm{W}(\overline{k})$-algèbre. Le groupe $\mathrm{G}_{K_{\mathrm{a}}}$ agit par fonctorialité sur $\mathrm{W}(R)$ et $\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$. On appelle φ le Frobenius de $\mathrm{W}(R)$ (resp. $\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$). On fixe une fois pour toutes un élément $\varepsilon \in R$ tel que $\varepsilon^{(0)} = 1$ et $\varepsilon^{(1)} \neq 1$. Pour tout x dans R, on note $[x]$ son relèvement de Teichmüller dans $\mathrm{W}(R)$.

On vérifie facilement que $((\overline{\varepsilon^{(n)}}, 0, \ldots, 0) - 1)^{p^n} = 0$ dans $\mathrm{W}_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})$. On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un morphisme continu $W[T]/T^{p^n} \to \mathrm{W}_n(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}})$, qui envoie T sur $(\overline{\varepsilon}^{(n)}, 0, \ldots, 0) - 1$ et $w \in W$ sur $\sigma^{-n}(w)$. D'où un morphisme continu de W-algèbres $W[\![T]\!] \to \mathrm{W}(R)$, qui envoie T dans $[\varepsilon] - 1$. Comme $[\varepsilon] - 1$ est inversible dans $\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$, on obtient un homomorphisme continu de W-algèbres $W[\![T]\!][\frac{1}{T}] \to \mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$, qui se factorise par complétion p-adique en

$$\begin{tikzcd} W[\![T]\!][\frac{1}{T}] \arrow[rr] \arrow[dr, hook] & & \mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R) \\ & \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

L'homomorphisme i est injectif car $i(p) \neq 0$. En inversant p, on obtient $i : \mathcal{E} \to \mathrm{Fr}\, \mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$.

Lemme 3.1. [11, A3.2.2] *Les anneaux $i(\mathcal{E})$ et $i(\mathcal{E}^\dagger)$ ne dépendent pas du choix de ε . Ils sont stables par les actions de $\mathrm{G}_{K_{\mathrm{a}}}$ et du Frobenius φ sur $\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$. Les actions induites de $\mathrm{G}_{K_{\mathrm{a}}}$ et de φ sur $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^\dagger$ sont données par*

$$\forall g \in \mathrm{G}_{K_{\mathrm{a}}}, \qquad g(T) = (T+1)^{\chi(g)} - 1, \qquad \varphi(T) = (T+1)^p - 1.$$

L'action de $\mathrm{G}_{K_{\mathrm{a}}}$ se factorise par $\Gamma_{K_{\mathrm{a}}}$.

On rappelle brièvement la construction du corps des normes (cf. [25, §2.2]). L'extension maximale modérément ramifiée de K dans K_∞ est finie. Soit n_1 le plus petit entier tel que K_∞/K_{n_1} soit totalement sauvagement ramifiée. On choisit une uniformisante u de K_{n_1}. Pour tout $n \geq n_1$, le Frobenius de $\mathcal{O}_{K_{n+1}}/u\mathcal{O}_{K_{n+1}}$ se factorise à travers $\mathcal{O}_{K_n}/u\mathcal{O}_{K_n} \subset \mathcal{O}_{K_{n+1}}/u\mathcal{O}_{K_{n+1}}$. Soit $\lambda_n : \mathcal{O}_{K_{n+1}}/u\mathcal{O}_{K_{n+1}} \to \mathcal{O}_{K_n}/u\mathcal{O}_{K_n}$ le morphisme ainsi défini. On pose $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{K_n}/u\mathcal{O}_{K_n}$, où les applications de transitions sont les λ_n. C'est un anneau de valuation discrète, complet, de corps résiduel canoniquement isomorphe au corps résiduel de K_∞, qui est une extension finie k' de k. Il ne dépend pas du choix de u. Soit $\mathrm{E}_K = \mathrm{Fr}\, \mathcal{O}_{\mathrm{E}_K}$. Par fonctorialité de la construction, on associe à $\overline{K}$ une clôture séparable $\mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}}$ de E_K et $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_K^{\mathrm{sep}}/\mathrm{E}_K)$ est canoniquement isomorphe à H_K. Pour tout $n \geq n_1$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{K_{n+1}}/u\mathcal{O}_{K_{n+1}} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\lambda_n"] & \mathcal{O}_{\overline{K}}/u\mathcal{O}_{\overline{K}} \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathcal{O}_{K_n}/u\mathcal{O}_{K_n} \arrow[r, hook] & \mathcal{O}_{\overline{K}}/u\mathcal{O}_{\overline{K}} \end{tikzcd}$$

Comme $R \cong \varprojlim_{n \geq n_1} \mathcal{O}_{\overline{K}}/u\mathcal{O}_{\overline{K}}$, on en déduit des applications injectives $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K} \hookrightarrow R$ et $\mathrm{E}_K \hookrightarrow \mathrm{Fr}\, R$.

Soient $\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}$ l'extension maximale non-ramifiée de $\mathcal{E}$ dans $\mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\mathrm{sh}}$ son anneau d'entiers. Par fonctorialité de la hensélisation, $\mathrm{G}_{K_\mathrm{a}}$ et φ agissent sur $\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}$. L'inclusion $i : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \hookrightarrow \mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$ induit, par réduction modulo p, un isomorphisme canonique entre les corps résiduels de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et $\mathrm{E}_{K_\mathrm{a}}$. Par conséquent, $\mathrm{Gal}(\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}/\mathcal{E})$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{H}_{K_\mathrm{a}}$. Soit L une extension finie de K_a. On pose $\mathcal{E}_L = (\mathcal{E}^{\mathrm{nr}})^{\mathrm{H}_L}$. C'est une extension finie non ramifiée de $\mathcal{E}$. Elle est munie d'actions naturelles de Γ_L et de φ . Pour L/K_a finie galoisienne, $\mathcal{E}_L$ est muni d'une action naturelle de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\mathrm{a})$. On note $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$ l'anneau de valuation de $\mathcal{E}_L$. On note k'_L le corps résiduel de E_L et $L' = \mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(k'_L)$. Si L est absolument non-ramifié, alors $k'_L = k_L$ et $L' = L_\mathrm{a} = L$ (cf. [20, Ch.IV, Prop.17]). Dans ce cas le corps $\mathcal{E}_L$ a la description simple suivante.

Lemme 3.2. *Soit L/K_a une extension finie non-ramifiée. Il existe un isomorphisme canonique $\mathcal{E}_L \cong \mathcal{E} \otimes_{K_\mathrm{a}} L$, compatible avec l'action de Γ_L et du Frobenius. Pour L/K_a finie galoisienne, cet isomorphisme est compatible à l'action de* $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\mathrm{a})$.

Démonstration. L'anneau $\mathcal{E}\otimes_{K_\mathrm{a}} L$ est un corps car K_a est algébriquement fermé dans $\mathcal{E}$ et p est inversible. Comme $L = L_\mathrm{a} \subseteq \mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$, l'inclusion i s'étend, par linéarité, en $i_L : \mathcal{E} \otimes_{K_\mathrm{a}} L \hookrightarrow \mathrm{Fr}\,\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\, R)$. L'image de cette application est contenue dans $\mathcal{E}_L$. On a $|i_L(\mathcal{E} \otimes_{K_\mathrm{a}} L) : \mathcal{E}| = |k_L : k| = |\mathrm{E}_L : \mathrm{E}_{K_\mathrm{a}}| = |\mathcal{E}_L : \mathcal{E}|$, donc $i_L(\mathcal{E} \otimes_{K_\mathrm{a}} L) = \mathcal{E}_L$. □

Proposition 3.3. [11, A2.2.1] *Soient $\overline{\pi}$ une uniformisante de E_L et π un relèvement dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$. Il existe un unique isomorphisme continu de L'-algèbres, $\psi_\pi : \mathcal{E}_{L'} \to \mathcal{E}_L$ qui envoie T sur π.*

Démonstration. L'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$ est de valuation discrète, complet, absolument non-ramifié. C'est donc un anneau de Cohen (cf. [9, IV_0 19.8.5]). Par [9, IV_0 19.8.6(ii)] il existe un isomorphisme $\psi : \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{L'}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$ relevant l'isomorphisme $k'_L(\!(T)\!) \to \mathrm{E}_L$ qui envoie T sur $\overline{\pi}$. On note $\omega = \pi - \psi(T) \in p\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$. Soit

$s = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_nT^n \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{L'}}$. On écrit

$$\sum_{n=0}^{m} a_n\pi^n = \sum_{n=0}^{m} a_n(\psi(T)+\omega)^n = \sum_{n=0}^{m} a_n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\psi(T)^i\omega^{n-i} =$$
$$= \sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{m-j} a_{j+i}\binom{j+i}{i}\psi(T)^i\right)\omega^j = \sum_{j=0}^{m}\psi\left(\sum_{i=0}^{m-j} a_{j+i}\binom{j+i}{i}T^i\right)\omega^j,$$

où $j = n-i$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose $s_j = \sum_{i=0}^{+\infty} a_{j+i}\binom{j+i}{i}T^i \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{L'}}$. On définit $\psi_\pi(s) = \sum_{n<0} a_n\pi^n + \sum_{j\geq 0}\psi(s_j)\omega^j$, qui converge p-adiquement car $\omega \in p\mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$ et $\lim_{n\to-\infty} a_n = 0$. L'application ψ_π est un isomorphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{L'}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{E}_L}$, qui envoie T sur π. On la prolonge en un isomorphisme $\mathcal{E}_{L'} \to \mathcal{E}_L$. L'unicité est évidente. □

Soient $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathcal{E}^\dagger}$ l'hensélisé strict de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger}$ dans $\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\,R)$ et ${\mathcal{E}^\dagger}^{\mathrm{nr}}$ son corps des fractions. Par fonctorialité de la hensélisation, $\mathrm{G}_{K_{\mathrm{a}}}$ et φ agissent sur ${\mathcal{E}^\dagger}^{\mathrm{nr}}$. Comme plus haut, l'inclusion canonique $\mathcal{O}^{\mathrm{sh}}_{\mathcal{E}^\dagger} \hookrightarrow \mathrm{W}(\mathrm{Fr}\,R)$ induit un isomorphisme $\mathrm{Gal}({\mathcal{E}^\dagger}^{\mathrm{nr}}/\mathcal{E}^\dagger) \cong \mathrm{H}_{K_{\mathrm{a}}}$. Soit L une extension finie de K_{a}. On pose $\mathcal{E}^\dagger_L = ({\mathcal{E}^\dagger}^{\mathrm{nr}})^{\mathrm{H}_L}$. C'est une extension finie non ramifiée de $\mathcal{E}^\dagger$, de corps résiduel E_L. Pour L/K_{a} finie galoisienne non-ramifiée, on démontre comme dans le lemme 3.2, qu'il y a un isomorphisme canonique, $\mathcal{E}^\dagger \otimes_{K_{\mathrm{a}}} L \cong \mathcal{E}^\dagger_L$, compatible avec l'action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_{\mathrm{a}})$ et du Frobenius.

Proposition 3.4. [16, Prop. 3.4] *Soit $\overline{\pi}$ une uniformisante de E_L. Il existe un relèvement π de $\overline{\pi}$ dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}^\dagger_L}$ tel que sous l'isomorphisme $\psi_\pi : \mathcal{E}_{L'} \to \mathcal{E}_L$, on ait $\psi_\pi(\mathcal{E}^\dagger_{L'}) = \mathcal{E}^\dagger_L$.*

On note

$$\mathcal{R} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_nT^n \,\middle|\, a_n \in K_{\mathrm{a}},\ \exists \rho_c \in]0,1[\text{ t.q. } \forall \rho \in]\rho_c, 1[\,,\ \lim_{n\to\pm\infty} |a_n|\rho^n = 0 \right\}.$$

On munit cet anneau d'une action du Frobenius et de $\Gamma_{K_{\mathrm{a}}}$ en posant :

$$\varphi(T) = (1+T)^p - 1 \text{ et } \forall\gamma \in \Gamma_{K_{\mathrm{a}}}, \quad \gamma(T) = (1+T)^{\chi(\gamma)} - 1.$$

On pose $t = \log(T+1) \in \mathcal{R}$, qu'on note aussi abusivement $\log[\varepsilon]$, bien qu'il n'appartienne pas à $\mathrm{W}(\mathrm{Fr}\,R)$. On a une inclusion $\mathcal{E}^\dagger \subset \mathcal{R}$ compatible avec les actions du Frobenius et de $\Gamma_{K_{\mathrm{a}}}$.
Pour toute extension finie L/K_{a}, on pose $\mathcal{R}_L = \mathcal{R}\otimes_{\mathcal{E}^\dagger}\mathcal{E}^\dagger_L$. On vérifie que cet anneau est intègre. C'est une extension étale finie de $\mathcal{R}$. On le munit du Frobenius produit tensoriel des Frobenius sur $\mathcal{R}$ et sur $\mathcal{E}^\dagger_L$. Si L/K_{a} est galoisienne finie, alors le groupe $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_{\mathrm{a}})$ agit sur $\mathcal{R}_L$ en agissant sur $\mathcal{R}$ à travers le quotient $\Gamma_{K_{\mathrm{a}}}$ et sur $\mathcal{E}^\dagger_L$ via son action naturelle. On a $\mathcal{R}_L^{\mathrm{Gal}(L_\infty/(K_{\mathrm{a}})_\infty)} = \mathcal{R}$. On vérifie

facilement que $\log\frac{(1+T)^p-1}{T^p} \in \mathcal{R}$ et pour tout $\gamma \in \Gamma_{K_{\mathrm{a}}}$, $\log\frac{(1+T)^{\chi(\gamma)}-1}{T} \in \mathcal{R}$. On prolonge les actions de φ et $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_{\mathrm{a}})$ à l'anneau des polynômes $\mathcal{R}_L[X]$ par

$$\varphi_L(X) = pX + \log\frac{(1+T)^p-1}{T^p}$$
$$\forall\gamma \in \mathrm{Gal}(L_\infty/K_{\mathrm{a}}), \quad \gamma(X) = X + \log\frac{(1+T)^{\chi(\gamma)}-1}{T}.$$

On notera formellement $X = \log T$. On désigne par $\mathcal{R}[1/t]$ (resp. $\mathcal{R}[\log T][1/t]$) le localisé de $\mathcal{R}$ (resp. $\mathcal{R}[\log T]$) en t. Dans la suite, on considérera souvent sur $\mathcal{R}_L[1/t]$ et $\mathcal{R}_L[\log T][1/t]$ l'action du sous groupe Γ_L de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_{\mathrm{a}})$. On vérifie que (cf. [3, Prop. 3.3])

$$(\mathcal{R}_L[\log T][1/t])^{\Gamma_L} = L_{\mathrm{a}}.$$

Soit L/K_{a} une extension finie galoisienne, on a $\mathcal{R}_{L'} \cong \mathcal{R}\otimes_{K_{\mathrm{a}}} L'$. Si on prend un relevement $\pi \in \mathcal{E}_L^\dagger$ d'une uniformisante de E_L, satisfaisant la proposition 3.4, alors ψ_π se prolonge en un isomorphisme $\psi_\pi : \mathcal{R}_{L'} \to \mathcal{R}_L$.

3.2 Le théorème de comparaison de Berger

Un (φ,Γ)-module sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ (resp. $\mathcal{E}_K$) est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$-module de type fini (resp. un $\mathcal{E}_K$-espace vectoriel de dimension finie) muni d'une action semi-linéaire et continue de Γ_K et d'un endomorphisme φ semi-linéaire par rapport au Frobenius de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ (resp. $\mathcal{E}_K$) commutant entre eux. On dit qu'un (φ,Γ)-module $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$ est étale si l'image $\varphi(\mathcal{M})$ engendre $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$.
Pour tout (φ,Γ)-module M sur $\mathcal{E}_K$ on peut choisir un réseau stable par φ et Γ_K, qui est donc un (φ,Γ)-module sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K}$. On dit qu'un (φ,Γ)-module M sur $\mathcal{E}_K$ est étale s'il existe un réseau $\mathcal{M}$ de M stable par Γ_K et φ qui est étale. On note $\Phi\Gamma^{\text{ét}}_{\mathcal{E}_K}$ la catégorie dont les objets sont les (φ,Γ)-modules étales et les morphismes sont les applications linéaires commutant avec φ et Γ_K. Dans [11], Fontaine construit une équivalence de catégories entre $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)$ et $\Phi\Gamma^{\text{ét}}_{\mathcal{E}_K}$. On rappelle sa construction brièvement. On note $\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}$ le completé p-adique de $\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}$. Pour toute $\mathbb{Q}_p$-représentation V de G_K, on considère le $\mathcal{E}_K$-espace vectoriel $\mathrm{D}(V) = (\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}\otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\mathrm{H}_K}$ muni des actions semi-linéaires de Γ_K et de φ . C'est un objet de $\Phi\Gamma^{\text{ét}}_{\mathcal{E}_K}$. Le foncteur D définit une équivalence de catégories entre $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)$ et $\Phi\Gamma^{\text{ét}}_{\mathcal{E}_K}$.

THÉORÈME 3.5 (CHERBONNIER-COLMEZ). [5, III 5.2] *Soit $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\mathrm{G}_K)$. La famille des sous-$\mathcal{E}_K^\dagger$-modules de type fini de $\mathrm{D}(V)$ stables par φ et Γ_K admet un plus grand élément $\mathrm{D}^\dagger(V)$ et on a*

$$\mathrm{D}(V) = \mathcal{E}_K\otimes_{\mathcal{E}_K^\dagger}\mathrm{D}^\dagger(V).$$

Pour toute représentation p-adique V de G_K, Berger définit $\mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V) = \mathcal{R}_K \otimes_{\mathcal{E}^\dagger_K} \mathrm{D}^\dagger(V)$ et $\mathrm{D}^\dagger_{\log}(V) = \mathcal{R}_K[\log T] \otimes_{\mathcal{E}^\dagger_K} \mathrm{D}^\dagger(V)$ avec les actions évidentes de φ et Γ_K (cf.[3, §3.2]). Soit L/K une extension galoisienne finie. Le module $\mathrm{D}(V_{|\mathrm{G}_L})$, est muni naturellement d'une action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$. Par le théorème 3.5, on obtient une action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ sur $\mathrm{D}^\dagger(V_{|\mathrm{G}_L})$ et donc sur $\mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V_{|\mathrm{G}_L})$ et $\mathrm{D}^\dagger_{\log}(V_{|\mathrm{G}_L})$.

Théorème 3.6 (Berger). [3, 3.6] *Soit V est une représentation p-adique de G_K. On a des isomorphismes canoniques :*

$$\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \cong \left(\mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]\right)^{\Gamma_K} \text{ et } \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V) \cong \left(\mathrm{D}^\dagger_{\log}(V)[1/t]\right)^{\Gamma_K}.$$

Soit L/K une extension galoisienne finie. Alors les isomorphismes ci-dessus $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V_{|\mathrm{G}_L}) \cong \left(\mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V_{|\mathrm{G}_L})[1/t]\right)^{\Gamma_L}$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_L}) \cong \left(\mathrm{D}^\dagger_{\log}(V_{|\mathrm{G}_L})[1/t]\right)^{\Gamma_L}$ sont équivariants pour les actions naturelles de $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Remarque 3.7. *Dans [3, 3.6], l'assertion sur l'équivariance par rapport à* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *n'apparait pas. C'est une conséquence immédiate de la démonstration. On l'a mise en évidence pour l'importance qu'elle jouera dans la suite.*

4 Équations différentielles p-adiques

Soit $\hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/K_{\mathrm{a}}}$ le module des différentielles continues de $\mathcal{R}$ sur K_{a}. C'est un $\mathcal{R}$-module libre de rang 1 de base $\frac{dT}{T+1} = \frac{d[\varepsilon]}{[\varepsilon]}$. Soient L/K_{a} une extension finie et L' l'extension finie non-ramifiée de K_{a} qui lui est associée dans la section §3.1 (au dessus de Lemme 3.2). Comme $\mathcal{R} \hookrightarrow \mathcal{R}_L$ est étale finie et L'/K_{a} est finie, on a un isomorphisme canonique $\hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}_L/L'} \cong \mathcal{R}_L \otimes_{\mathcal{R}} \hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/K_{\mathrm{a}}}$. On étend la dérivation $d : \mathcal{R} \to \hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/K_{\mathrm{a}}}$ en $d\colon \mathcal{R}[\log T] \to \hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}/K_{\mathrm{a}}}$, en posant $d(\log T) = \frac{1}{T} dT$. Le corps des constantes de $\mathcal{R}_L[1/t]$ et de $\mathcal{R}_L[\log T]$ est L'.

On appelle équation différentielle p-adique (ou module à connexion) sur $\mathcal{R}_K$ un $\mathcal{R}_K$-module de présentation finie muni d'une connexion. On démontre qu'un tel module est forcement libre (cf. [2, Prop. 2.3]). Une équation différentielle p-adique est dite unipotente (resp. quasi-unipotente) si elle est extension itérée d'équations différentielles triviales (resp. s'il existe une extension finie L/K telle que $M \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_L$ soit unipotente). On dit qu'une équation différentielle p-adique M est munie d'une structure de Frobenius s'il existe un endomorphisme $\varphi_M : M \to M$, φ-semi-linéaire, horizontal, tel que $\varphi_M(M)$ engendre M sur $\mathcal{R}_K$.

4.1 Équation différentielle p-adique associée à une représentation de de Rham

Soit V une représentation galoisienne p-adique de G_K. On rappelle que Berger démontre que pour tout $x \in \mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]$, la limite $\lim_{\gamma \to \mathrm{Id}_{\Gamma_K}} \frac{\gamma(x)-x}{\chi(\gamma)-1}$ existe

(cf. [3, §5.1]). On note cette limite $\nu(x)$. L'application $x \mapsto t^{-1}\nu(x) \otimes \frac{dT}{T+1}$ définit une connexion $\nabla_V\colon \mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t] \to \mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t] \otimes_{\mathcal{R}_K} \hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}_K/K'}$.
Soit V une représentation de de Rham de dimension n. On rappelle que Berger montre qu'il existe un unique sous-$\mathcal{R}_K$-module libre de rang n de $\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]$ stable par $t^{-1}\nu$. On l'appelle $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$. Il est stable par l'action du Frobenius et de Γ_K (cf. [3, §5.4 et §5.5] ou [4, IV.4]). On vérifie qu'il est une muni d'une structure de Frobenius. Par construction, on associe à un morphisme de représentations de de Rham $V_1 \to V_2$, un morphisme d'équations différentielles p-adiques $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_1) \to \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_2)$.

Théorème 4.1 (Berger). [3, 5.20] *On a un foncteur additif $V \mapsto \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$, de la catégorie des représentations p-adiques de de Rham de G_K, dans la catégorie des équations différentielles p-adiques sur $\mathcal{R}_K$ munies d'une structure de Frobenius. Ce foncteur associe à une représentation de dimension n une équation différentielle de rang n. C'est un $\otimes$-foncteur exacte et fidèle. L'équation $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ est quasi-unipotente si et seulement si la représentation V est potentiellement semi-stable. L'équation $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ est unipotente (resp. triviale) si et seulement s'il existe n tel que la restriction de V à G_{K_n} soit semi-stable (resp. cristalline).*

On étend ∇_V en une connexion ∇_V sur $\mathrm{D}^{\dagger}_{\log}(V)$ et $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_K[\log T]$, en posant $\nabla_V(\log T) = \frac{dT}{T}$.
Soit M un module à connexion sur $\mathcal{R}_K$. On vérifie aisément que la dimension sur L' des sections horizontales de $M \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_L[\log T]$ est inférieure ou égale au rang de M. Si on a l'égalité on dit que M est triviale sur $\mathcal{R}_L[\log T]$. Le module M est unipotent si et seulement si M est triviale sur $\mathcal{R}_K[\log T]$.

Corollaire 4.2. *Si V est cristalline (resp. semi-stable), alors*

$$\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \otimes_{K_{\mathrm{a}}} K' \cong \left(\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]\right)^{\nabla_V} \cong \left(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)\right)^{\nabla_V}$$
$$\left(\textit{resp. } \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V) \otimes_{K_{\mathrm{a}}} K' \cong \left(\mathrm{D}^{\dagger}_{\log}(V)[1/t]\right)^{\nabla_V} \cong \left(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_K[\log T]\right)^{\nabla_V}\right).$$

Démonstration. Le théorème 3.6 implique que $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \cong \left(\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]\right)^{\Gamma_K}$. Par définition de ∇_V, on a $\left(\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]\right)^{\Gamma_K} \subseteq \left(\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]\right)^{\nabla_V}$. Car si $x \in \left(\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]\right)^{\Gamma_K}$, alors $\nu(x) = \lim_{\gamma \to \mathrm{Id}_{\Gamma_K}} \frac{\gamma(x)-x}{\chi(\gamma)-1} = 0$. D'autre part, par définition, on a aussi, $\left(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)\right)^{\nabla_V} \subseteq \left(\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]\right)^{\nabla_V}$. On vérifie facilement que la dimension sur K' de $\left(\mathrm{D}^{\dagger}_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]\right)^{\nabla_V}$ est inférieure ou égale à $\dim_{\mathbb{Q}_p} V$. Comme V est cristalline, $\dim_{\mathbb{Q}_p} V = \dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \dim_{K'} \left(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)\right)^{\nabla_V}$. D'où les premiers isomorphismes. Le cas semi-stable est analogue. □

Théorème 4.3 (André, Kedlaya, Mebkhout). [1, 7.1.5] [15, 1.1] [18, 5.0-23] *Tout module à connexion sur $\mathcal{R}_K$, admettant une structure de Frobenius est quasi-unipotent.*

4.2 Rappels sur l'irrégularité d'une équation différentielle p-adique

On rappelle brièvement la définition de l'indice d'une équation différentielle p-adique introduite initialement par Robba (cf. [7, §2.3] et [8, §14]). Soient C un corps et u un endomorphisme d'un C-espace vectoriel V. On dit que u admet un indice si $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Coker} u$ sont de dimension finie et on appelle indice de u l'entier $\chi(u,V) = \dim_C \operatorname{Ker} u - \dim_C \operatorname{Coker} u$. On note $\mathcal{A} = \{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n \in \mathcal{R}\}$. C'est la sous-algèbre de $\mathcal{R}$ des séries convergentes sur le disque ouvert. On note γ_+ l'inclusion de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{R}$ et et γ^+ la troncation $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n T^n$ de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{A}$. Pour tout nombre naturel n, on note abusivement γ_+ (resp. γ^+) l'inclusion de $\mathcal{A}^{\oplus n}$ dans $\mathcal{R}^{\oplus n}$ (resp. la projection de $\mathcal{R}^{\oplus n}$ sur $\mathcal{A}^{\oplus n}$). Soit M un module à connexion sur $\mathcal{R}$ de rang n. On choisit une base de M. Soient $\xi = T\frac{d}{dT}$ et G la matrice de la dérivation $\nabla_\xi : M \to M$ par rapport à cette base. Soit u le K_{a}-endomorphisme $T\frac{d}{dT} - G$ de $\mathcal{R}^{\oplus n}$. On dit que M admet un indice généralisé sur $\mathcal{A}$ si $\gamma^+ \circ u \circ \gamma_+$ admet un indice. Ceci ne dépend pas de la base choisie. On note $\widetilde{\chi}(M,\mathcal{A}) = \chi(\gamma^+ \circ u \circ \gamma_+, \mathcal{A}^{\oplus n})$. Si deux modules à connexion sur $\mathcal{R}$, M' et M'' ont un indice généralisé, alors pour toute extension M de M' par M'', $\widetilde{\chi}(M,\mathcal{A}) = \widetilde{\chi}(M',\mathcal{A}) + \widetilde{\chi}(M'',\mathcal{A})$.

Théorème 4.4 (Christol-Mebkhout). *Soit M une équation différentielle p-adique ayant une structure de Frobenius. Alors M admet un indice généralisé sur $\mathcal{A}$.*

Démonstration. L'existence d'une structure de Frobenius implique la solubilité de M et que ses exposants sont non-Liouville (cf. [7, §2.5]). Le corps de constantes K_{a} est de valuation discrète donc maximalement complet. C'est donc un cas particulier de [8, Th. 14.11]. □

Pour une équation différentielle p-adique M munie d'une structure de Frobenius, on appelle irrégularité de M et on note $\operatorname{irr}(M)$, l'indice généralisé $\widetilde{\chi}(M,\mathcal{A})$.

Remarque 4.5. *1. Soient L/K_{a} une extension finie et M un module libre de rang r sur $\mathcal{R} \otimes_{K_{\mathrm{a}}} L$ muni d'une connexion. On considère M comme une équation différentielle p-adique sur $\mathcal{R}$ de rang $r \dim_{K_{\mathrm{a}}} L$. Si M admet un indice généralisé, on pose $\operatorname{irr}(M) = (\dim_{K_{\mathrm{a}}} L)^{-1}\widetilde{\chi}(M,\mathcal{A})$.*
2. Soit M une équation différentielle p-adique sur $\mathcal{R}_K$. On choisit un élément π dans $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_K^\dagger}$ comme dans 3.4. Via les isomorphismes $\psi_\pi : \mathcal{R}_{K'} \to \mathcal{R}_K$ et $\mathcal{R}_{K'} \cong \mathcal{R} \otimes_{K_{\mathrm{a}}} K'$, on peut définir l'irrégularité de M. On vérifie que ceci ne dépend pas du choix de π.
3. L'indice généralisé coïncide avec la définition d'indice sur $\mathcal{E}^\dagger$ de Tsuzuki dans [23, §1] (cf. [17, §8]).

4.3 Équations quasi-unipotentes

La catégorie des équations différentielles p-adiques quasi-unipotentes est tannakienne neutre. On rappelle ici des constructions classiques (cf. [1] et [17]).

Soit $k(\!(T)\!)^{\mathrm{sep}}$ une clôture séparable fixée de $k(\!(T)\!)$ (dans la section 5 on suppose $k(\!(T)\!)^{\mathrm{sep}} \subset \operatorname{Fr} R$). Soit $E/k(\!(T)\!)$ une extension séparable finie contenue dans $k(\!(T)\!)^{\mathrm{sep}}$. On note k_E son corps résiduel, $\mathrm{G}_E = \mathrm{Gal}(k(\!(T)\!)^{\mathrm{sep}}/E)$ et I_E le sous-groupe d'inertie. On pose $\mathcal{E}(E) = (\mathcal{E}^{\mathrm{nr}})^{\mathrm{G}_E}$, $\mathcal{E}^\dagger(E) = \mathcal{E}(E) \cap \mathcal{E}^{\dagger^{\mathrm{nr}}}$ et $\mathcal{R}(E) = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} \mathcal{E}^\dagger(E)$. Évidement, si E est égal au corps de normes E_L associé à une extension finie L/K, alors $\mathcal{E}(\mathrm{E}_L) = \mathcal{E}_L$, $\mathcal{E}^\dagger(\mathrm{E}_L) = \mathcal{E}_L^\dagger$ et $\mathcal{R}(\mathrm{E}_L) = \mathcal{R}_L$. Les propriétés qu'on a rappelées dans les sections précédentes pour $\mathcal{E}_L, \mathcal{E}_L^\dagger, \mathcal{R}_L$, en dehors de l'action de Γ_L, sont aussi valables pour $\mathcal{E}(E), \mathcal{E}^\dagger(E), \mathcal{R}(E)$. Soient F/E une extension galoisienne finie et M un $\mathcal{R}(E)$-module à connexion unipotent sur $\mathcal{R}(F)$. On considère le $\operatorname{Fr} \mathrm{W}(k_F)$-espace vectoriel des sections horizontales

$$S_F(M) = (M \otimes_{\mathcal{R}(E)} \mathcal{R}(F)[\log T])^{\nabla}.$$

On le munit d'une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(F/E)$ et d'un endomorphisme nilpotent de la façon suivante. Pour tout $g \in \mathrm{Gal}(F/E)$ et $x \in M \otimes_{\mathcal{R}(E)} \mathcal{R}(F)[\log T]$, on pose $g(x) = (\mathrm{Id} \otimes g)(x)$. On considère sur $M \otimes_{\mathcal{R}(E)} \mathcal{R}(F)[\log T]$ l'application $\mathrm{Id} \otimes N$, où N est la $\mathcal{R}(F)$-dérivation de $\mathcal{R}(F)[\log T]$ qui envoie $\log T$ sur 1. Cette application commute avec l'action de $\mathrm{Gal}(F/E)$. Les diagrammes suivantes sont commutatifs :

$$\begin{CD}
M \otimes_{\mathcal{R}(E)} \mathcal{R}(F)[\log T] @>{\nabla}>> M \otimes_{\mathcal{R}(E)} \mathcal{R}(F)[\log T] \otimes_{\mathcal{R}_F} \hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}_F/\operatorname{Fr} \mathrm{W}(k_F)} \\
@V{\mathrm{Id}\otimes g}VV @VV{\mathrm{Id}\otimes g \otimes dg}V \\
M \otimes_{\mathcal{R}(E)} \mathcal{R}(F)[\log T] @>{\nabla}>> M \otimes_{\mathcal{R}(E)} \mathcal{R}(F)[\log T] \otimes_{\mathcal{R}_F} \hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}_F/\operatorname{Fr} \mathrm{W}(k_F)}
\end{CD}$$

et

$$\begin{CD}
M \otimes_{\mathcal{R}(E)} \mathcal{R}(F)[\log T] @>{\nabla}>> M \otimes_{\mathcal{R}(E)} \mathcal{R}(F)[\log T] \otimes_{\mathcal{R}_F} \hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}_F/\operatorname{Fr} \mathrm{W}(k_F)} \\
@VV{\mathrm{Id}\otimes N}V @VV{\mathrm{Id}\otimes N \otimes \mathrm{Id}}V \\
M \otimes_{\mathcal{R}(E)} \mathcal{R}(F)[\log T] @>{\nabla}>> M \otimes_{\mathcal{R}(E)} \mathcal{R}(F)[\log T] \otimes_{\mathcal{R}_F} \hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}_F/\operatorname{Fr} \mathrm{W}(k_F)}
\end{CD}$$

On en déduit sur $S_F(M)$, une action de $\mathrm{Gal}(F/E)$ et un endomorphisme, qu'on note $N_{S_F(M)}$, commutant entre eux. On vérifie facilement que $N_{S_F(M)}$ est nilpotent. On peut résumer ces données en disant que $S_F(M)$ est une $\operatorname{Fr} \mathrm{W}(k_F)$-représentation semi-linéaire du schéma en groupes $\mathrm{Gal}(F/E) \times \mathbb{G}_a$, où $\mathrm{Gal}(F/E)$ est considéré comme schéma en groupes constant. La dimension de $S_F(M)$ sur $\operatorname{Fr} \mathrm{W}(k_F)$ est par construction égale au rang de M. Inversement, soit V une $\operatorname{Fr} \mathrm{W}(k_F)$-représentation semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(F/E) \times \mathbb{G}_a$. On note N_V l'endomorphisme nilpotent de V associé à l'action de $\mathbb{G}_a$. On pose

$$M_F(V) = \left\{ x \in V \otimes_{\operatorname{Fr} \mathrm{W}(k_F)} \mathcal{R}(F)[\log T] \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall g \in \mathrm{Gal}(F/E),\, g(x) = x, \\ (N_V \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N)(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

PROPOSITION 4.6. *Sous les hypothèses ci-dessus, $M_F(V)$ est un $\mathcal{R}(E)$-module libre de rang égal à la dimension de V.*

Démonstration. Comme $\mathcal{R}(F) = \mathcal{E}^\dagger(F) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger(E)} \mathcal{R}(E)$ et $\mathcal{E}^\dagger(E)$ est un corps on vérifie que

$$(V \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_F)} \mathcal{R}(F))^{\mathrm{Gal}(F/E)} = (V \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_F)} \mathcal{E}^\dagger(F))^{\mathrm{Gal}(F/E)} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger(E)} \mathcal{R}(E).$$

Comme $\mathrm{Gal}(\mathcal{E}^\dagger(F)/\mathcal{E}^\dagger(E)) = \mathrm{Gal}(F/E)$, on en déduit par un raisonnement classique (cf. [20, Ch.X Prop.3]) que $(V \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_F)} \mathcal{R}(F))^{\mathrm{Gal}(F/E)}$ est un $\mathcal{R}(E)$-module libre de rang égal à la dimension de V. On définit un isomorphisme

$$f : (V \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_F)} \mathcal{R}(F))^{\mathrm{Gal}(F/E)} \to M_F(V),$$

en posant $f(\sum_l v_l \otimes \alpha_l) = \sum_l \sum_{i=0}^{r-1} (-)^i N_V^i(v_l) \otimes \alpha_l (\log T)^i$, où r est un entier tel que $N_V^r = 0$. L'application inverse $g : M_F(V) \to (V \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_F)} \mathcal{R}(F))^{\mathrm{Gal}(F/E)}$, est induite par la projection $\mathcal{R}(F)[\log T] \to \mathcal{R}(F)$ qui envoie $\log T$ en 0. En fait, par construction $gf = \mathrm{Id}$ et pour conclure il suffit de montrer que g est injective. Soit $x = \sum_l v_l \otimes (\sum_{i=0}^d \alpha_{i,l}(\log T)^i)$. Supposons que $g(x) = \sum_l v_l \otimes \alpha_{0,l} = 0$. La relation $(N_V \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N)(x) = 0$ équivaut à

$$\forall i = 0, \dots, d, \quad \sum_l N_V(v_l) \otimes \alpha_{i,l} = -\sum_l v_l \otimes (i+1)\alpha_{i+1,l}. \qquad (\star)$$

Comme $\sum_l v_l \otimes \alpha_{0,l} = 0$, en appliquant $N_V \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N$, on obtient $\sum_l N_V(v_l) \otimes \alpha_{0,l} = 0$. D'où par $(\star)$, $\sum_l v_l \otimes \alpha_{1,l} = 0$. Ainsi, par récurrence, on montre $x = 0$. □

On munit $M_F(V)$ de la connexion induite par $d : \mathcal{R}(F)[\log T] \to \hat{\Omega}^1_{\mathcal{R}(F)/\mathrm{Fr\,W}(k_F)}$ et la connexion triviale sur V. Par construction, il est quasi-unipotent. Les inclusions naturelles

$$S_F(M) \subseteq M \otimes_{\mathcal{R}(E)} \mathcal{R}(F)[\log T] \text{ et } M_F(V) \subseteq V \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_F)} \mathcal{R}(F)[\log T]$$

induisent par linéarisation des isomorphismes

$$S_F(M) \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_F)} \mathcal{R}(F)[\log T] \to M \otimes_{\mathcal{R}(E)} \mathcal{R}(F)[\log T],$$
$$M_F(V) \otimes_{\mathcal{R}(E)} \mathcal{R}(F)[\log T] \to V \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_F)} \mathcal{R}(F)[\log T]$$

compatibles aux structures supplémentaires. On en déduit que le foncteur M_F est un quasi-inverse de S_F.

On introduit une variante de ces équivalences après extension des scalaires à $\overline{K}$. On rappelle que le produit $\mathcal{R}(E)_{\overline{K}} = \mathcal{R}(E) \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_E)} \overline{K}$ est intègre car $\mathrm{Fr\,W}(k_E)$ est algébriquement fermé dans $\mathcal{R}(E)$. Pour une extension galoisienne $E/k(\!(T)\!)$, on étend linéairement l'action de l'inertie $I(E/k(\!(T)\!))$ à $\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}$. Si F/E est une extension galoisienne finie, alors $\mathcal{R}(F)_{\overline{K}}^{I(F/E)} = \mathcal{R}(E)_{\overline{K}}$. Tout module à connexion M, libre de type fini sur $\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}$, provient par extension des scalaires, d'un module M', libre de type fini sur $\mathcal{R}(E) \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_E)} L$, où L est une extension finie de $\mathrm{Fr\,W}(k_E)$ contenue dans $\overline{K}$. On peut donc parler d'irrégularité de M (cf. Rem.4.5-1 et 4.5-2). Soit M un module à connexion sur $\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}$, unipotent sur $\mathcal{R}(F)_{\overline{K}}$. On pose

$$S'_F(M) = (M \otimes_{\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}} \mathcal{R}(F)_{\overline{K}}[\log T])^{\nabla}.$$

C'est une représentation linéaire de $I(F/E) \times \mathbb{G}_a$. De façon analogue à ci-dessus, le foncteur S'_F est une équivalence de catégories entre modules à connexion sur $\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}$, unipotents sur $\mathcal{R}(F)_{\overline{K}}$ et représentations linéaires sur $\overline{K}$ du schéma en groupes $I(F/E) \times \mathbb{G}_a$. Un quasi-inverse est donné par

$$M'_F(V) = \left\{ x \in V \otimes_{\overline{K}} \mathcal{R}(F)_{\overline{K}}[\log T] \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall g \in I(F/E),\ g(x) = x, \\ (N_V \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N)(x) = 0 \end{array} \right\}.$$

Pour tout $\mathcal{R}(E)$-module à connexion M, on considère son extension des scalaires $M \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_E)} \overline{K}$ comme module à connexion sur $\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}$. Il est évident que $S'_F(M \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_E)} \overline{K}) = S_F(M) \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_F)} \overline{K}$, où on ne considère sur $S_F(M)$ que l'action du sous-groupe $I(F/E) \times \mathbb{G}_a$ de $\mathrm{Gal}(F/E) \times \mathbb{G}_a$.
La proposition suivante est une variante d'une proposition de Tsuzuki [23].

Proposition 4.7. [1, 7.1.2] *Soient M un $\mathcal{R}(E)$-module à connexion quasi-unipotent et F/E une extension galoisienne finie telle que M soit unipotent sur $\mathcal{R}(F)$. Alors l'irrégularité de M est égale au conducteur de Swan de la représentation $S_F(M)$ du groupe d'inertie $I(F/E)$.*

Démonstration. Comme le conducteur de Swan et l'irrégularité ne varient pas par extension des scalaires on peut tensoriser avec $\overline{K}$. L'équivalence S'_F induit un isomorphisme entre le groupe de Grothendieck des $\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}$-modules à connexion, unipotents sur $\mathcal{R}(F)_{\overline{K}}$ et le groupe de Grothendieck des représentations de $I(E/F) \times \mathbb{G}_a$ sur $\overline{K}$. Dans ce dernier la classe d'une représentation V de $I(E/F) \times \mathbb{G}_a$ est égale à la classe de sa restriction à $I(F/E)$. Comme le conducteur de Swan et l'irrégularité se factorisent par le groupe de Grothendieck, il suffit de vérifier qu'ils se correspondent par S'_F. Dans cet isomorphisme l'induction d'une représentation correspond à l'oubli de structure pour le module à connexion correspondant. Le conducteur de Swan et l'irrégularité varient de la même façon par rapport à l'induction et à l'oubli respectivement. On peut, en appliquant le théorème d'induction de Brauer (cf. [21, §10]), se réduire au cas de dimension 1. Soit M un module à connexion sur $\mathcal{R}(E)_{\overline{K}}$ de rang 1, unipotent sur $\mathcal{R}(F)_{\overline{K}}$. On considère la représentation $S = S'_F(M)$ de $I = I(F/E)$. Soit Λ l'extension finie de $\mathbb{Q}_p$, obtenue en ajoutant les racines m-ièmes de l'unité, où m est l'exposant du groupe I. Par un autre théorème de Brauer (cf.[21, §12.2, Th.24]), il existe une représentation S_0 de I sur Λ telle que $S \cong S_0 \otimes_\Lambda \overline{K}$. On note $\Lambda' \subseteq \overline{K}$ l'extension non-ramifié de Λ de corps résiduel k_F. On rappelle que Tsuzuki [23] associe à S_0 un module à connexion $\mathcal{D}^\dagger(S_0)$ sur $\Lambda' \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_E)} \mathcal{E}^\dagger(E)$, d'irrégularité égale au conducteur de Swan de S_0 (en fait le cas de dimension 1 est dû à Matsuda [16]). On vérifie que $\mathcal{D}^\dagger(S_0) = (S_0 \otimes_\Lambda (\Lambda' \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_F)} \mathcal{E}^\dagger(F)))^I$, avec la connexion induite par celle de $\mathcal{E}^\dagger(F)$. Comme S est de rang 1, on a $M'_F(S) = (S \otimes_{\overline{K}} \mathcal{R}(F)_{\overline{K}})^I$. On termine par,

$$\begin{aligned} M'_F(S) &\cong \left(S_0 \otimes_\Lambda \overline{K} \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_F)} \left(\mathcal{E}^\dagger(F) \otimes_{\mathcal{E}^\dagger(E)} \mathcal{R}(E)\right)\right)^I \\ &\cong (S_0 \otimes_\Lambda \Lambda' \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_F)} \mathcal{E}^\dagger(F))^I \otimes_{(\Lambda' \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_E)} \mathcal{E}^\dagger(E))} (\overline{K} \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_E)} \mathcal{R}(E)) \\ &\cong \mathcal{D}^\dagger(S_0) \otimes_{(\Lambda' \otimes_{\mathrm{Fr\,W}(k_E)} \mathcal{E}^\dagger(E))} \mathcal{R}(E)_{\overline{K}}. \end{aligned}$$

□

5 Preuve du théorème 1.1 et corollaires

Soient V une représentation p-adique de G_K et L/K une extension galoisienne finie. On rappelle (cf. §3.2) que les modules $\mathrm{D}(V_{|\mathrm{G}_L})$, $\mathrm{D}^\dagger(V_{|\mathrm{G}_L})$ et $\mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V_{|\mathrm{G}_L})$ sont munis d'une action naturelle de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$. Pour tout $x \in \mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V_{|\mathrm{G}_L})[1/t]$ et $g \in \mathrm{Gal}(L_\infty/K)$, $g(t^{-1}\nu(x)) = \chi(g)^{-1}t^{-1}\nu(g(x))$. Pour V de de Rham, on en déduit une action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ sur $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_{|\mathrm{G}_L})$. On munit les modules $\mathrm{D}(V)$, $\mathrm{D}^\dagger(V)$, $\mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$ et $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$ de l'action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ via le quotient Γ_K.

Lemme 5.1. *Soient V une représentation p-adique de G_K et L/K une extension galoisienne finie. On a des isomorphismes canoniques :*

i) $\mathrm{D}(V_{|\mathrm{G}_L}) \cong \mathcal{E}_L \otimes_{\mathcal{E}_K} \mathrm{D}(V)$;

ii) $\mathrm{D}^\dagger(V_{|\mathrm{G}_L}) \cong \mathcal{E}^\dagger_L \otimes_{\mathcal{E}^\dagger_K} \mathrm{D}^\dagger(V)$;

iii) $\mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V_{|\mathrm{G}_L}) \cong \mathcal{R}_L \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)$;

iv) pour V de de Rham, $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_{|\mathrm{G}_L}) \cong \mathcal{R}_L \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$.

Ces isomorphismes sont compatibles avec les actions de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$.

Démonstration. i) On a une application $\mathcal{E}_K$-linéaire injective $\mathrm{D}(V) \to \mathrm{D}(V_{|\mathrm{G}_L})$, compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$. Comme $\dim_{\mathcal{E}_K} \mathrm{D}(V) = \dim_{\mathcal{E}_L} \mathrm{D}(V_{|\mathrm{G}_L}) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$, elle induit un isomorphisme $\mathcal{E}_L \otimes_{\mathcal{E}_K} \mathrm{D}(V) \cong \mathrm{D}(V_{|\mathrm{G}_L})$ équivariant pour l'action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$. ii) est une conséquence du Théorème 3.5. iii) se déduit directement de ii). iv) L'injection $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \subseteq \mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)[1/t]$ entraîne que $\mathcal{R}_L \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \subseteq \mathcal{R}_L \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V)[1/t] = \mathrm{D}^\dagger_{\mathrm{rig}}(V_{|\mathrm{G}_L})[1/t]$. C'est un sous-$\mathcal{R}_L$-module stable par $t^{-1}\nu$, par l'unicité de $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_{|\mathrm{G}_L})$ il est égal à $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_{|\mathrm{G}_L})$. □

Soit V une représentation potentiellement semi-stable de G_K. Choisissons une extension galoisienne finie L/K telle que la restriction de V à G_L soit semi-stable. Soit L'/K_{a} l'extension finie non-ramifiée associée à L dans la section

§3.1 (au dessus de Lemme 3.2). On considère le L'-espace vectoriel des sections horizontales

$$S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) = (\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_L[\log T])^{\nabla_V}.$$

L'action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ sur $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_L[\log T]$ commute avec la connexion par la définition même de cette dernière (cf. §4.1). On en déduit une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ sur $S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))$. La restriction de cette action au sous-groupe $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ correspond via l'identification $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K) \cong \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$ à l'action décrite au §4.3.

Proposition 5.2. *Soient V une représentation galoisienne p-adique de G_K et L/K une extension galoisienne finie telle que la restriction de V à G_L soit semi-stable. Il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_L[\log T] \cong \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_L}) \otimes_{L_{\mathrm{a}}} \mathcal{R}_L[\log T]. \tag{1}$$

Le groupe $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ *agit sur le deux membres de* (1) *: à gauche comme décrit plus haut et à droite diagonalement, par son quotient* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *sur* $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_L})$ *et par son action naturelle sur* $\mathcal{R}_L[\log T]$*. L'isomorphisme* (1) *est équivariant pour cette action. Il est aussi horizontal où on considère à droite la connexion triviale sur* $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_L})$*. De façon équivalente, en prenant les sections horizontales, on un isomorphisme canonique* $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$*-équivariant*

$$S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) \cong \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_L}) \otimes_{L_{\mathrm{a}}} L'. \tag{2}$$

Par conséquent, l'action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ *sur* $S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))$ *se factorise par son quotient fini* $\mathrm{Gal}(L \otimes_{L_{\mathrm{a}}} L'/K)$*. Le conducteur de Swan de V est égal à* $\mathrm{sw}(I(L \otimes_{L_{\mathrm{a}}} L'/K), S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)))$.

Démonstration. Par le corollaire 4.2, on a un isomorphisme

$$\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_L}) \otimes_{L_{\mathrm{a}}} L' \cong (\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_{|\mathrm{G}_L}) \otimes_{\mathcal{R}_L} \mathcal{R}_L[\log T])^{\nabla_V}.$$

Il est équivariant par rapport à l'action de $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ car il est le composé de l'isomorphisme équivariant du théorème 3.6 avec une inclusion naturelle. Cette action se factorise évidemment par $\mathrm{Gal}(L \otimes_{L_{\mathrm{a}}} L'/K)$. Le lemme 5.1-iv) donne un isomorphisme, $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$-équivariant,

$$(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V_{|\mathrm{G}_L}) \otimes_{\mathcal{R}_L} \mathcal{R}_L[\log T])^{\nabla_V} \cong (\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_L[\log T])^{\nabla_V} = S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)).$$

Ceci montre (2). L'isomorphisme (1) suit en tensorisant (2) par $\mathcal{R}_L[\log T]$ au dessus de L' et en composant avec l'isomorphisme canonique $S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) \otimes_{L'} \mathcal{R}_L[\log T] \cong \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_L[\log T]$. ☐

Remarque 5.3. *Un résultat analogue à la proposition* 5.2 *a été démontré par N. Wach pour les représentations sur un corps absolument non-ramifié, qui sont de de Rham et de hauteur finie (cf.* [24, A5 et B1.4.2] *).*

Soit L/K une extension galoisienne finie quelconque contenue dans $\overline{K}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $G_n = \mathrm{Gal}(L_n/K_n)$ et I_n son sous-groupe d'inertie. Pour $n \in \mathbb{N}$, la restriction induit un monomorphisme de groupes $f_n : G_{n+1} \hookrightarrow G_n$. Soit $n(L)$ le plus petit entier tel que $K_{n(L)}$ contienne l'intersection de L avec K_∞. Pour $n \geq n(L)$, f_n est un isomorphisme et le groupe G_n est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$. Par abus on note encore $f_n : \mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K) \to G_n$ cet isomorphisme. Le lemme suivant est une reformulation d'un résultat classique de Sen (cf. [19, Lemma 1, pg. 40] et [25, 3.3.2]).

Lemme 5.4. *Pour n assez grand la filtration de ramification supérieure et inférieure de G_n est stationnaire et correspond via l'isomorphisme f_n à la filtration de ramification de* $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$.

Démonstration. On utilise ici une définition différente du corps de normes mais équivalente à celle donnée dans le paragraphe 3.1. On considère la limite projective d'ensembles $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{K_n}$, où les applications de transitions sont les normes. Cet ensemble est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K}$ muni de la multiplication composante par composante et de la somme donnée par la formule suivante. Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathcal{O}_{\mathrm{E}_K}$, alors $(x+y)_n = \lim_{m\to+\infty} N_{K_m/K_n}(x_m + y_m)$. On note $G = \mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$. Soit $\pi \in \mathrm{E}_L$ une uniformisante. Comme $(L_n/K)_{n\geq 1}$ est cofinal dans l'ensemble des sous-extension finies de L_∞/K, on peut écrire $\pi = (\pi_n)_{n\geq 1}$ avec $\pi_n \in L_n$. Soit $n' \geq n(L)$ un entier tel que $L_\infty/L_{n'}$ soit totalement ramifiée. Pour tout $n \geq n'$, π_n est une uniformisante de L_n. Pour tout $g \in G$ et $n \geq n'$, on pose $i(g) = i_G(g) = \mathrm{v}_{\mathrm{E}_L}(g(\pi)-\pi)$ et $i_n(g) = i_{G_n}(f_n(g)) = \mathrm{v}_{L_n}(f_n(g)(\pi_n) - \pi_n)$. On doit montrer que $i(g) = \lim_{n\to+\infty} i_n(g)$. En fait,

$$
\begin{aligned}
i(g) = \mathrm{v}_{\mathrm{E}_L}(g(\pi)-\pi) = \mathrm{v}_{L_{n'}}((g(\pi)-\pi)_{n'}) &= \\
&= \mathrm{v}_{L_{n'}}\left(\lim_{n'\leq n\to+\infty} N_{L_n/L_{n'}}(g(\pi_n)-\pi_n)\right) = \\
&= \lim_{n'\leq n\to+\infty} \mathrm{v}_{L_{n'}}(N_{L_n/L_{n'}}(g(\pi_n)-\pi_n)) = \\
&= \lim_{n'\leq n\to+\infty} \mathrm{v}_{L_n}((g(\pi_n)-\pi_n)) = \lim_{n\to+\infty} i_n(g).
\end{aligned}
$$

□

On rappelle qu'on a noté $V_n = V_{|\mathrm{G}_{K_n}}$.

Lemme 5.5. *Soit V une représentation potentiellement semi-stable. La suite $(\mathrm{sw}(V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.*

Démonstration. Par définition $\mathrm{sw}(V_n) = \mathrm{sw}(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V_n)_{|I_{K_n}})$. On a un monomorphisme évident $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V_n) \hookrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|\mathrm{G}_{K_n}}$, qui est un isomorphisme car $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V_n)$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ ont la même dimension. Donc $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V_n)_{|I_{K_n}} \cong \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|I_{K_n}}$ et l'action de I_{K_n} se factorise par I_n. Par le lemme 5.4, pour n assez grand, le conducteur $\mathrm{sw}(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V)_{|I_{K_n}})$ est constant. □

Soit V une représentation de G_K qui devient semi-stable sur L. Pour un entier n assez grand, on considère $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V_n) = K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}} \otimes_{L'} \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_{L_n}})$ comme $K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}$-représentation semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$ via l'isomorphisme f_n. Cette représentation ne dépend pas de n. Sa restriction à l'inertie est linéaire. Dans la suite on la considère comme une représentation de $\mathrm{G}_{\mathrm{E}_K}$ et on la note $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^{\infty}(V)$. Par le lemme 5.5,

$$\mathrm{sw}(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^{\infty}(V)) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{sw}(V_n). \tag{3}$$

Démonstration du théorème 1.1. Par le théorème de monodromie p-adique la représentation V est potentiellement semi-stable. Soit L/K une extension galoisienne finie telle que $V_{|\mathrm{G}_L}$ soit semi-stable. On choisit un entier n assez grand de façon que $G_n = \mathrm{Gal}(L_n/K_n)$ soit isomorphe à $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$ avec leurs filtrations de ramifications. Donc $\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^{\infty}(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{pst}}(V_n)$ et $\mathrm{sw}(\mathrm{D}_{\mathrm{pst}}^{\infty}(V)) = \mathrm{sw}(I(L_n/K_n), \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_{L_n}}))$. Par la proposition 5.2, on a un isomorphisme $S_{\mathrm{E}_{L_n}}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)) \cong \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_{L_n}})$, équivariant par rapport à l'action de $\mathrm{Gal}(L_n/K)$. D'où, par restriction, l'égalité de $\mathrm{sw}(I(L_n/K_n), \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_{L_n}}))$ et de $\mathrm{sw}(I(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K), S_{\mathrm{E}_{L_n}}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)))$. Comme $\mathrm{E}_L = \mathrm{E}_{L_n}$, ce dernier est égal à l'irrégularité de $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)$, par la proposition 4.7. $\square$

LEMME 5.6. *Soient V une représentation galoisienne p-adique de G_K, L/K une extension galoisienne finie telle que $V_{|\mathrm{G}_L}$ soit semi-stable et n' le plus petit entier tel que $K_{n'} \supseteq (L \otimes_{L_{\mathrm{a}}} L') \cap K_\infty$. Alors :*

i) Pour tout $n \geq n'$, $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_n) = \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{n'}) \cong (\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_K[\log T])^{\nabla_V}$.

ii) Pour tout $n \geq n'$, $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V_n) = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V_{n'}) \cong (\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))^{\nabla_V}$.

Démonstration. On pose $D = \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{|\mathrm{G}_L})$. i) On considère l'isomorphisme (1) (prop. 5.2), $D \otimes_{L_{\mathrm{a}}} \mathcal{R}_L[\log T] \cong \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_L[\log T]$. En prenant les sections horizontales et les points fixès par $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$, on obtient $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{n'}) = (D \otimes_{L_{\mathrm{a}}} L')^{\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)} = (\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_K[\log T])^{\nabla_V}$. Pour $m \geq n'$, de façon analogue, on obtient $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_m) = (\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_{K_m}[\log T])^{\nabla_V}$. Comme $\mathrm{H}_{K_m} = \mathrm{H}_K$, on a $\mathcal{R}_K = \mathcal{R}_{K_m}$ en tant qu'anneaux. D'où $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_m) = \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V_{n'})$.
ii) Par la proposition 5.2,

$$\begin{aligned}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V))^{\nabla_V} &\cong (M_{\mathrm{E}_L}(D \otimes_{L_{\mathrm{a}}} L'))^{\nabla} \\ &= \left\{ x \in D \otimes_{L_{\mathrm{a}}} \mathcal{R}_L[\log T] \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall g \in \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty),\, g(x) = x, \\ (N_D \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes N)(x) = 0, \\ (\mathrm{Id} \otimes d)(x) = 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ x \in D \otimes_{L_{\mathrm{a}}} L' \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall g \in \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty),\, g(x) = x, \\ (N_D \otimes \mathrm{Id})(x) = 0 \end{array} \right\} = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V_{n'}).\end{aligned}$$

On conclut comme dans i). $\square$

Corollaire 5.7. *Soit V une représentation de de Rham de* G_K*. Alors :*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{ar}(V_n)$$
$$= \mathrm{irr}(\mathrm{N_{dR}}(V)) + \mathrm{rg}(\mathrm{N_{dR}}(V)) - \dim_{K'} \left(\mathrm{N_{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_K[\log T]\right)^{\nabla_V}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{ar_{cris}}(V_n) = \mathrm{irr}(\mathrm{N_{dR}}(V)) + \mathrm{rg}(\mathrm{N_{dR}}(V)) - \dim_{K'} \left(\mathrm{N_{dR}}(V)\right)^{\nabla_V}.$$

Démonstration. Soit L/K une extension galoisienne finie telle que $V_{|\mathrm{G}_L}$ soit semi-stable. On pose $D = \mathrm{D_{st}}(V_{|\mathrm{G}_L})$. On rappelle que $\dim_{L_{\mathrm{a}}} D^{I(L/K)} = \dim_{K_{\mathrm{a}}} D^{\mathrm{Gal}(L/K)}$ car $H^1(\mathrm{Gal}(k_L/k), \mathrm{GL}_n(L_{\mathrm{a}}))$ est triviale (cf. [20, Ch.X, Prop.3]). On a $\mathrm{ar}(V) - \mathrm{sw}(V) = \dim_{L_{\mathrm{a}}} D - \dim_{L_{\mathrm{a}}} D^{I(L/K)} = \dim_{L_{\mathrm{a}}} D - \dim_{K_{\mathrm{a}}} D^{\mathrm{Gal}(L/K)} = \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{D_{st}}(V) = \mathrm{rg}(\mathrm{N_{dR}}(V)) - \dim_{K_{\mathrm{a}}} \mathrm{D_{st}}(V)$. Par le théorème 1.1 et le lemme 5.6-i) on obtient la première formule. On en déduit facilement la deuxième en utilisant la définition de $\mathrm{ar_{cris}}(V)$ et 5.6-ii). □

Remarque 5.8. *Le corollaire* 5.7 *généralise un résultat de Berger (cf. Th.* 4.1 *et* [3, Th. 5.20] *) : l'équation* $\mathrm{N_{dR}}(V)$ *est unipotente (resp. triviale) si et seulement si V est semi-stable (resp. cristalline) sur K_n, pour n assez grand. En effet V est semi-stable (resp. cristalline) sur K_n si et seulement si* $\mathrm{ar}(V_n) = 0$ *(resp.* $\mathrm{ar_{cris}}(V_n) = 0$*). L'équation* $\mathrm{N_{dR}}(V)$ *est unipotente (resp. triviale) si et seulement si* $\mathrm{rg}(\mathrm{N_{dR}}(V)) = \dim_{K'} \left(\mathrm{N_{dR}}(V) \otimes_{\mathcal{R}_K} \mathcal{R}_K[\log T]\right)^{\nabla_V}$ *(resp.* $\mathrm{rg}(\mathrm{N_{dR}}(V)) = \dim_{K'} \left(\mathrm{N_{dR}}(V)\right)^{\nabla_V}$*) et dans ce cas on a aussi* $\mathrm{irr}(\mathrm{N_{dR}}(V)) = 0$.

Soit M une équation différentielle p-adique ayant une structure de Frobenius. Dans [7], Christol et Mebkhout associent à M une décomposition en somme directe indexée par les rationnels, la décomposition par les pentes p-adiques. C'est un théorème profond de la théorie que la hauteur du polygone de Newton associé à cette décomposition est égale à l'indice $\widetilde{\chi}(M, \mathcal{A})$.

Corollaire 5.9. *Soient V une représentation galoisienne p-adique de* G_K *et L/K une extension galoisienne finie telle que la restriction de V à* G_L *soit semi-stable.*

i) On a un isomorphisme $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$*-équivariant,*

$$\mathrm{D}^{\infty}_{\mathrm{pst}}(V) \cong K^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{a}} \otimes_{L'} S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N_{dR}}(V)).$$

ii) Sous l'isomorphisme du i), la décomposition de $K^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{a}} \otimes_{L'} S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N_{dR}}(V))$ *induite par les pentes p-adiques de* $\mathrm{N_{dR}}(V)$*, correspond à la décomposition par les pentes de Swan de* $\mathrm{D}^{\infty}_{\mathrm{pst}}(V)$ *(cf.* [14, Ch. 1] *). Par conséquent, on a l'égalité des polygones de Newton associés.*

Démonstration. On déduit l'assertion i) par restriction de l'isomorphisme (2) (prop.5.2) à $\mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$. Pour ii), soit $\mathrm{N_{dR}}(V) = \oplus_{q\in\mathbb{Q}} \mathrm{N_{dR}}(V)_q$ la décomposition par les pentes p-adiques. On pose $D_q = K^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{a}} \otimes_{L'} S_{\mathrm{E}_L}(\mathrm{N_{dR}}(V)_q)$.

C'est un facteur directe de $\mathrm{D}^{\infty}_{\mathrm{pst}}(V)$ de dimension égal au rang de $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)_q$. C'est stable par φ et N. Par la proposition 4.7, on a $\mathrm{sw}(D_q) = \mathrm{irr}(\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)_q) = q \,\mathrm{rg}\, \mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)_q = q \dim_{K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}} D_q$. Pour conclure il suffit de montrer que toute pente de Swan de D_q est égale à q. Soient s une pente de Swan de D_q et $D_{q,s} \neq 0$ sa partie isopentique de pente s. Par [14, Lemma 1.8] , $D_{q,s}$ est stable par $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$. Comme φ et N commutent avec $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_L/\mathrm{E}_K)$, l'unique pente possible pour $\varphi(D_{q,s})$ et $N(D_{q,s})$ est s. Comme $D_{q,s}$ est maximal de pente s, on a $\varphi(D_{q,s}) \subseteq D_{q,s}$ et $N(D_{q,s}) \subseteq D_{q,s}$. On en déduit que $M_{\mathrm{E}_L}(D_{q,s})$ est un sous-module différentiel de $\mathrm{N}_{\mathrm{dR}}(V)_q$ muni d'un Frobenius. Donc $M_{\mathrm{E}_L}(D_{q,s})$ a comme seule pente q. Par 4.7,

$$s \dim_{K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}} D_{q,s} = \mathrm{sw}(D_{q,s}) = \mathrm{irr}(M_{\mathrm{E}_L}(D_{q,s})) = q \,\mathrm{rg}\, M_{\mathrm{E}_L}(D_{q,s}) = q \dim_{K_{\mathrm{a}}^{\mathrm{nr}}} D_{q,s}.$$

D'où $s = q$. □

Références

[1] André, Y. : Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, *Invent. Math.* 148 (2002), 285–317.

[2] André, Y. : Représentations galoisiennes et operateurs de Bessel p-adiques, *Ann. Inst. Fourier* 52(3) (2002), 779–808.

[3] Berger, L. : Représentations p-adiques et équations différentielles, *Invent. Math.* 148 (2002), 219–284.

[4] Berger, L. : An introduction to the theory of p-adic representations, *Geometric Aspects of Dwork's Theory*, Volume I, de Gruyter Proc. in Math., Berlin (2004), 255-292.

[5] Cherbonnier, F. et Colmez, P. : Représentations p-adiques surconvergentes, *Invent. Math.* 133 (1998), 581–611.

[6] Colmez, P. : Conducteur d'Artin d'une représentation de de Rham, Prépublication (2003), 1–25.

[7] Christol, G. et Mebkhout, Z. : Sur le théorème de l'indice des équations différentielles p-adiques IV, *Invent. Math.* 143 (2001), 629–672.

[8] Christol, G. et Mebkhout, Z. : Équations différentielles p-adiqueset coefficients p-adiques sur les courbes, *Astérisque* 279 (2002), 125–183.

[9] Dieudonné, J. et Grothendieck, A. : EGA, *Publ. Math. IHES.*

[10] Fontaine, J.-M. : Modules galoisiens, modules filtré et anneaux de Barsotti-Tate, Dans : *Journées de Géométrie algébriques de Rennes (III),* Astérisque 65 (1979), 3–80.

[11] Fontaine, J.-M. : Représentations p-adiques des corps locaux, Dans : *The Grothendieck Festschrift*, Volume II, Prog. Math., Birkhäuser, Basel (1990), 249–309.

[12] Fontaine, J.-M. : Le corps de périodes p-adiques, avec une appendice par Pierre Colmez, Dans : *Périodes p-adiques,* Astérisque 223 (1994), 59–111.

[13] Fontaine, J.-M. : Représentations p-adiques semi-stables, Dans : *Périodes p-adiques,* Astérisque 223 (1994), 113–184.

[14] Katz, N. : Gauss sums, Kloosterman sums and monodromy groups, *Annals of mathematics studies* 116, Priceton Univerity press, Princeton, New Jersey (1988).

[15] Kedlaya, S.K. : A p-adic local monodromy theorem, *arXiv* : math.AG/0110124, Apparaîtra dans *Ann. of Math.*.

[16] Matsuda, S. : Local indeces of p-adic differential operators corresponding to Artin-Schreier-Witt coverings, *Duke Mathematical Journal* 77(3) (1995), 607–625.

[17] Matsuda, S. : Katz Correspondence for quasi-Unipotent Overconvergent Isocrystals, *Compositio Math.* 134 (2002), 1–34.

[18] Mebkhout, Z. : Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique, *Invent. Math.* 148 (2002), 319–351.

[19] Sen, S. : On automorphisms of local fields, *Ann. of Math.* 90 (1969), 33–46.

[20] Serre, J.-P. : *Corps Locaux,* deuxième édition, Hermann, Paris (1968).

[21] Serre, J.-P. : *Représentations linéaires de groupes finis,* Hermann, Paris (1967).

[22] Tsuzuki, N. : Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-isocrystals on a curve, *Amer. J. Math.* 120 (1998), 1165–1190.

[23] Tsuzuki, N. : The local index and Swan conductor, *Compositio Math.* 111 (1998), 245–288.

[24] Wach, N. : Représentations p-adiques potentiellement cristallines, *Bull. Soc. Math. France* 124 (1996), 375–400.

[25] Wintenberger, J.-P. : Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16 (1983), 59–89.

Adriano Marmora
LAGA, Institut Galilée
Université Paris 13
93430 Villetaneuse (France)
marmora@math.univ-paris13.fr