

Représentation par des transvections des groupes d’Artin–Tits

Eddy Godelle

Abstract. In a recent article, C. Kassel and C. Reutenauer studied the connection between the 4 strand braid group and Sturmian morphisms in word combinatorics. The aim of the current work is to extend this approach into a general connection between braid groups (of any index) and episturmian morphisms, a natural generalization of sturmian morphisms. Our key tool consists in associating with every graph a certain finite family of automorphisms of a free group. In the case of a complete graph, we recover some well-known family of episturmian morphisms. Now, considering the path of length n , we deduce a seemingly new representation of the braid group B_{n+1} in $\text{Aut}(F_n)$. By considering some other graphs, we similarly obtain representations of various Artin–Tits groups, in particular some affine braid groups. Our representation is faithful for B_3 and B_4 ; for other cases, the question of faithfulness remains open.

Mathematics Subject Classification (2000). 20F36, 68R15, 20E05.

Keywords. Representation of braid groups, automorphisms of free groups, episturmian morphisms.

1. Motivations et résultats

L’étude des représentations des groupes des tresses est le thème de nombreuses publications (voir, par exemple [1], [3], [6], [15]). Nous allons définir dans cet article une représentation des tresses, comme automorphismes de groupe libre, qui nous semble nouvelle. Soit A un groupe d’Artin–Tits dont S est l’ensemble des générateurs, et F_S le groupe libre sur des variables x_s indexées par $s \in S$; nous allons définir pour chaque s de S des automorphismes L_s et R_s de F_S en utilisant le graphe de Coxeter du groupe A . La question centrale posée dans cet article est de savoir si le groupe d’Artin–Tits A peut être représenté (de façon fidèle) à travers un homomorphisme de groupes $\varphi: A \rightarrow \text{Aut}(F_S)$ tel que pour tout s dans S , l’automorphisme $\varphi(s)$ est égal à L_s , R_s ou leurs inverses. Dans ce cas, nous dirons que le groupe d’Artin–Tits A est *représentable par des transvections* et que φ est une *représentation par des transvections* du groupe A . Le résultat principal de cet article est le suivant :

Théorème 1.1. (i) *Pour tout entier $n \geq 2$, il existe une représentation par des transvections φ_n du groupe des tresses à $n + 1$ brins B_{n+1} dans le groupe des automorphismes du groupe libre F_n .*

(ii) *La représentation par des transvections φ_3 du groupe des tresses à 4 brins B_4 dans $\text{Aut}(F_3)$ est fidèle.*

(iii) *Pour tout entier $n \geq 2$, le groupe des tresses affines à $4n$ brins \tilde{B}_{4n} est représentable par des transvections.*

La représentations φ_n du groupe B_{n+1} des tresses à $n + 1$ brins semble nouvelle. Nous ne savons pas si elle est fidèle pour $n \geq 4$, mais nous conjecturons que oui.

L'une des motivations pour ce travail provient de la théorie des nœuds. Tout entrelac peut être réalisé comme la tresse fermée $L(b)$ associée à une tresse b à n brins. Dans ce cas, le groupe fondamental $\pi_1(S^3 - L(b))$ a pour présentation de groupe $\langle x_1, \dots, x_n \mid \alpha(b)(x_i) = x_i; i = 1, \dots, n \rangle$ où α est un certain homomorphisme de B_n (la représentation de Hurwitz) dans le groupe des automorphismes du groupe libre F_n à n générateurs x_1, \dots, x_n . Une question naturelle est alors de se demander quelles sont les représentations du groupe des tresses, et plus généralement des groupes d'Artin–Tits, dans le groupe des automorphismes d'un groupe libre de rang fini. Masaaki Wada dans [15] s'est intéressé à cette question en recherchant par ordinateur les automorphismes d'un certain type, qu'il appelle automorphismes de décalage. Notre travail peut être vu comme une contribution à la résolution de cette question. Dans le cas du groupe des tresses à $n + 1$ brins, les représentations que nous obtenons sont distinctes de celles décrites par Wada. Dans [14], Vladimir Shpilrain montre que les représentations de Wada sont fidèles. Nous remarquons que la méthode qu'il utilise ne permet pas de montrer que la représentation φ_n , construite dans notre article, est fidèle pour $n \geq 4$.

Notre travail a démarré à la suite de la lecture de l'article [5] de Christian Kassel et Christophe Reutenauer. Dans cet article, les auteurs jettent un pont entre le monde des tresses (plus précisément, le groupe B_4 des tresses à 4 brins) et le monde des mots et morphismes sturmiens. Ils montrent en particulier que B_4 quotienté par son centre se plonge dans le groupe $\text{Aut}(F_2)$, c'est-à-dire dans le groupe des automorphismes du groupe libre F_2 . L'image dans $\text{Aut}(F_2)$ des générateurs standards du groupe B_4 sont certains morphismes sturmiens (ou leur inverse) bien connus. Les tresses, d'une part, et les morphismes sturmiens, d'autre part, sont les objets de recherches actives. L'existence d'un tel lien amène à se poser la question de l'existence d'une connexion plus générale entre les groupes des tresses et les morphismes sturmiens (ou les morphismes épisturmiens, qui sont leur généralisation). L'étude de cette question est la motivation à l'origine de ce travail.

Nous allons associer à tout graphe Γ (sans boucle ni arête multiple) à n sommets, un ensemble Λ_Γ de $2n$ automorphismes du groupe libre F_n , deux pour chaque sommet du graphe. Parmi les graphes connexes, il y a deux graphes singuliers, le graphe linéaire et le graphe complet. Nous allons voir que dans le premier cas, notre construction

nous permet d'obtenir les représentations par transvections φ_n . Dans le second cas, les automorphismes obtenus sont des morphismes épisturmiens (cf. Proposition 2.6). Ceci expliquera en particulier le lien entre le groupe B_4 et les morphismes sturmiens. De plus, la représentation par des transvections φ_3 de B_4 peut être vue comme le redressement de celle obtenue dans [5].

Notre article s'organise comme suit : la partie 2 concerne les automorphismes des groupes libres et des monoïdes libres. En particulier, nous construisons la famille Λ_Γ . Dans la partie 3, nous introduisons la notion de représentations par des transvections. Nous étudions ensuite la fidélité des représentations φ_n obtenues pour les groupes des tresses, et prouvons le théorème 1.1. La partie 4 est consacrée à une application aux groupes d'Artin–Tits.

2. Automorphismes de transvection

Dans cette partie, nous introduisons la notion d'automorphisme de transvection associé à un graphe. Nous prouvons quelques résultats généraux (voir proposition 2.7) sur ces automorphismes, ainsi que des résultats qui nous serviront dans les parties suivantes (voir théorème 2.11). Nous obtenons aussi, comme cas particulier de notre construction, le monoïde des morphismes épisturmiens comme un produit semi-direct (voir proposition 2.6).

2.1. Automorphismes du groupe libre. L'étude des automorphismes du groupe libre est un sujet d'étude à lui seul et de nombreuses questions restent ouvertes. Néanmoins, on connaît depuis des travaux de Nielsen ([9]) et de Neumann ([8]) des présentations du groupe des automorphismes du groupe libre à n générateurs (voir [7] chapitre 3 paragraphe 5). On peut en particulier définir quatre familles $E_{i,j}$, $L_{i,j}$, $R_{i,j}$ et τ_i d'automorphismes élémentaires (voir définition 2.1).

Commençons par poser quelques notations. Si (a, b, \dots) est un ensemble fini de lettres, on note $F(a, b, \dots)$ le groupe libre de base a, b, \dots . Par F_n on désignera le groupe libre de base x_1, x_2, \dots, x_n . De même, on notera respectivement $F^+(a, b, \dots)$ et F_n^+ les monoïdes libres de base a, b, \dots et x_1, x_2, \dots, x_n . On identifie dans la suite $F^+(a, b, \dots)$ à son image dans $F(a, b, \dots)$. Les éléments de $F(a, b, \dots)$ sont appelés les *mots* sur l'*alphabet* a, b, \dots . Les mots de $F^+(a, b, \dots)$ sont dit *positifs*. Chaque mot de $F(a, b, \dots)$ possède un unique *représentant réduit*, c'est-à-dire une unique représentant de longueur minimal. La *longueur* d'un mot de $F(a, b, \dots)$ est par définition la longueur de son représentant réduit. Enfin, on note $\Phi(a, b, \dots)$ et Φ_n les groupes d'automorphismes respectifs des groupes $F(a, b, \dots)$ et F_n .

Définition 2.1. (i) Pour i dans $\{1, \dots, n\}$, on définit un élément τ_i de Φ_n en posant

$$\tau_i(x_i) = x_i^{-1} \quad \text{et} \quad \tau_i(x_k) = x_k$$

pour k différent de i dans $\{1, \dots, n\}$.

(ii) Pour i, j dans $\{1, \dots, n\}$ et distincts, on définit un élément $E_{i,j}$ de Φ_n en posant

$$E_{i,j}(x_i) = x_j, \quad E_{i,j}(x_j) = x_i \quad \text{et} \quad E_{i,j}(x_k) = x_k$$

pour k distinct de i et j dans $\{1, \dots, n\}$.

(iii) Pour i, j dans $\{1, \dots, n\}$ et distincts, on définit un élément $L_{i,j}$ de Φ_n en posant

$$L_{i,j}(x_i) = x_i, \quad L_{i,j}(x_j) = x_i x_j \quad \text{et} \quad L_{i,j}(x_k) = x_k$$

pour k distinct de i et j dans $\{1, \dots, n\}$.

(iv) Pour i, j dans $\{1, \dots, n\}$ et distincts, on définit un élément $R_{i,j}$ de Φ_n en posant

$$R_{i,j}(x_i) = x_i, \quad R_{i,j}(x_j) = x_j x_i \quad \text{et} \quad R_{i,j}(x_k) = x_k$$

pour k distinct de i et j dans $\{1, \dots, n\}$.

Nielsen a montré dans [9] que l'ensemble des $E_{i,j}$, $L_{i,j}$, $R_{i,j}$ et τ_i forme une famille génératrice de Φ_n à partir de laquelle on peut obtenir une présentation finie de Φ_n . Ces générateurs sont appelés les générateurs de Nielsen de Φ_n .

Dans le cas $n = 2$, le monoïde St des morphismes sturmiens est le sous-monoïde de Φ_2 engendré par $E_{1,2}$, $R_{1,2}$ et $L_{1,2}$ ([5]). Il est facile de voir que ce sous-monoïde est aussi engendré par $E_{1,2}$, $L_{1,2}$ et $R_{2,1}$. Dans [5], les auteurs ont montré que le quotient du groupe des tresses B_4 par son centre est isomorphe au sous-groupe de Φ_2 engendré par $R_{1,2}$, $R_{2,1}$, $L_{1,2}$ et $L_{2,1}$. Si on note σ_1 , σ_2 et σ_3 les générateurs standards du groupe B_4 , un isomorphisme envoie σ_1 , σ_2 et σ_3 sur $L_{1,2}$, $L_{2,1}^{-1}$ et $R_{1,2}$ respectivement.

2.2. Automorphismes associés à un graphe. Nous allons maintenant associer à tout graphe fini sans boucle ni arête multiple, de sommets x_1, \dots, x_n , une famille de $2n$ éléments de Φ_n .

Pour nous, un *graphe fini* est un triplet (S, V, t) où S et V sont deux ensembles finis, avec S non vide, et t est une application de V dans l'ensemble des parties non vides de S à au plus deux éléments. Les éléments de S s'appellent *les sommets* du graphe et les éléments de V sont *les arêtes*. On dira que deux sommets x et y sont *reliés par une arête* si $t^{-1}(\{x, y\})$ est non vide. On dira que le graphe (S, V, t) est *sans boucle* si aucun sommet n'est relié à lui-même par une arête. On dira que (S, V, t) est *sans arête multiple* si deux sommets quelconques sont reliés par au plus une arête ; dans ce cas, on peut identifier V à $t(V)$. Si Γ est un graphe sans boucle ni arête multiple de sommets x_1, \dots, x_n , on note $J_\Gamma(x_i)$, l'ensemble des sommets de Γ reliés à x_i par une arête. Par définition, x_j est dans $J_\Gamma(x_i)$ si et seulement si x_i est dans $J_\Gamma(x_j)$. Nous dirons que le sommet x_i est *isolé* si $J_\Gamma(x_i)$ est vide. Le graphe sera dit connexe si pour tout couple de sommets (x, y) , il existe une suite finie $x_0 = x, \dots, x_k = y$ de sommets tels que x_i et x_{i+1} sont reliés par une arête.

Définition 2.2. Soit Γ un graphe sans boucle ni arête multiple de sommets x_1, \dots, x_n . Pour i dans $\{1, \dots, n\}$, on appelle *ième automorphisme de transvection à gauche de F_n* associé à Γ , l'automorphisme $L_{i,\Gamma}$ défini comme le produit des $L_{i,j}$ tels que x_j est dans $J_\Gamma(x_i)$. Autrement dit

$$L_{i,\Gamma}(x_i) = x_i, \quad L_{i,\Gamma}(x_j) = x_i x_j \quad \text{et} \quad L_{i,\Gamma}(x_k) = x_k$$

pour j, k dans $\{1, \dots, n\}$ tels que x_j est dans $J_\Gamma(x_i)$ et x_k n'y est pas.

On définit de façon similaire le *ième automorphisme de transvection à droite de F_n* associé à Γ comme l'automorphisme $R_{i,\Gamma}$ obtenu comme le produit des $R_{i,j}$ tels que x_j est dans $J_\Gamma(x_i)$.

Le terme de transvection est inspiré par [11]. Lorsque le contexte sera clair, nous écrirons $J(x_i)$, L_i et R_i à la place de $J_\Gamma(x_i)$, $L_{i,\Gamma}$ et $R_{i,\Gamma}$ afin de ne pas alourdir les notations.

Dans la suite de l'article, l'ensemble $\{L_1, \dots, L_n\} \cup \{R_1, \dots, R_n\}$ est noté Λ_Γ ; on note $\mathcal{F}(\Lambda_\Gamma)$ et $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ respectivement le sous-groupe et le sous-monoïde de Φ_n engendrés par l'ensemble Λ_Γ .

Si on se donne un ensemble fini de sommets S et que l'on considère le graphe complet de sommets S , les automorphismes L_i et R_i qu'on obtient coïncident avec les morphismes épisturmiens Ψ_i et $\bar{\Psi}_i$ définis dans [4].

Lemme 2.3. Soit Γ un graphe sans boucle ni arête multiple, de sommets x_1, \dots, x_n . Soit i et j dans $\{1, \dots, n\}$ et distincts.

- (i) Si x_i n'est pas dans $J(x_j)$, on a $L_i R_j = R_j L_i$.
- (ii) Si x_i n'est pas dans $J(x_j)$ et $J(x_i) \cap J(x_j) = \emptyset$, alors

$$L_i L_j = L_j L_i \quad \text{et} \quad R_i R_j = R_j R_i.$$

- (iii) Si x_i est dans $J(x_j)$ alors

$$\begin{aligned} L_i L_j^{-1} L_i &= L_j^{-1} L_i L_j^{-1}, \\ R_i R_j^{-1} R_i &= R_j^{-1} R_i R_j^{-1}, \\ L_i R_j^{-1} L_i &= R_j^{-1} L_i R_j^{-1}. \end{aligned}$$

Démonstration. Si x_i n'est pas dans $J(x_j)$:

	$L_i(x)$	$R_j(x)$	$L_i R_j(x)$	$R_j L_i(x)$
$x \in J(x_i) \cap J(x_j)$	$x_i x$	$x x_j$	$x_i x x_j$	$x_i x x_j$
$x \notin J(x_j) \cup J(x_i)$	x	x	x	x
$x \in J(x_i); x \notin J(x_j)$	$x_i x$	x	$x_i x$	$x_i x$
$x \in J(x_j); x \notin J(x_i)$	x	$x x_j$	$x x_j$	$x x_j$

Si x_i n'est pas dans $J(x_j)$ et $J(x_i) \cap J(x_j) = \emptyset$:

	$L_i(x)$	$L_j(x)$	$L_j L_i(x)$	$L_i L_j(x)$
$x \notin J(x_j) \cup J(x_i)$	x	x	x	x
$x \in J(x_i); x \notin J(x_j)$	$x_i x$	x	$x_i x$	$x_i x$
$x \in J(x_j); x \notin J(x_i)$	x	$x_j x$	$x_j x$	$x_j x$

Si x_i est dans $J(x_j)$:

	$L_i(x)$	$L_j^{-1}(x)$	$L_i L_j^{-1} L_i(x)$	$L_j^{-1} L_i L_j^{-1}(x)$
$x \in J(x_i) \cap J(x_j)$	$x_i x$	$x_j^{-1} x$	$x_j^{-2} x$	$x_j^{-2} x$
$x \notin J(x_j) \cup J(x_i)$	x	x	x	x
$x \in J(x_i); x \notin J(x_j)$	$x_i x$	x	$x_j^{-1} x_i x$	$x_j^{-1} x_i x$
$x \in J(x_j); x \notin J(x_i)$	x	$x_j^{-1} x$	$x_j^{-1} x_i^{-1} x$	$x_j^{-1} x_i^{-1} x$

	$L_i(x)$	$R_j^{-1}(x)$	$L_i R_j^{-1} L_i(x)$	$R_j^{-1} L_i R_j^{-1}(x)$
$x \in J(x_i) \cap J(x_j)$	$x_i x$	$x x_j^{-1}$	$x_i x_j^{-1} x x_j^{-1} x_i^{-1}$	$x_i x_j^{-1} x x_j^{-1} x_i^{-1}$
$x \notin J(x_j) \cup J(x_i)$	x	x	x	x
$x \in J(x_i); x \notin J(x_j)$	$x_i x$	x	$x_i x_j^{-1} x$	$x_i x_j^{-1} x$
$x \in J(x_j); x \notin J(x_i)$	x	$x x_j^{-1}$	$x x_j^{-1} x_i^{-1}$	$x x_j^{-1} x_i^{-1}$

Les deux derniers cas se déduisent de la symétrie entre L et R et des cas traités. \square

Proposition 2.4. Soit Γ un graphe sans boucle ni arête multiple, et de sommets x_1, \dots, x_n . Soit X une partie des sommets de Γ . On suppose que l'ensemble $\bigcap_{x \in X} J(x)$ est non vide, c'est-à-dire qu'il existe un sommet y de Γ qui est relié par une arête à chaque élément de l'ensemble X .

(i) Le sous-monoïde de Φ_n engendré par l'ensemble $\{R_i \mid x_i \in X\}$ est libre, de rang le cardinal de X . De même, le sous-monoïde de Φ_n engendré par l'ensemble $\{L_i \mid x_i \in X\}$ est libre.

(ii) Supposons qu'aucune paire de sommets du graphe Γ n'est reliée par une arête. Alors, le sous-groupe de Φ_n engendré par l'ensemble $\{R_i \mid x_i \in X\}$ est un groupe libre de rang le cardinal de X ; de même, le sous-groupe du groupe Φ_n engendré par l'ensemble $\{L_i \mid x_i \in X\}$ est un groupe libre de rang le cardinal de X . Si y est dans $\bigcap_{x \in X} J(x)$ et $w = x_{i_1}^{\epsilon_1} x_{i_2}^{\epsilon_2} \dots x_{i_k}^{\epsilon_k}$ est un mot de $F(X)$, alors $R_{i_1}^{\epsilon_1} \circ R_{i_2}^{\epsilon_2} \circ \dots \circ R_{i_k}^{\epsilon_k}(y) = yw$.

Démonstration. (i) Soit $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_\ell}$ dans X tels que $R_{i_1} \circ R_{i_2} \circ \dots \circ R_{i_k} = R_{j_1} \circ R_{j_2} \circ \dots \circ R_{j_\ell}$. Choisissons y dans $\bigcap_{x \in X} J(x)$. On montre par récurrence sur k que $k = \ell$ et que pour tout m , on a $i_m = j_m$. On remarque que dans

le mot $R_{i_1} \circ R_{i_2} \circ \dots \circ R_{i_k}(y)$, toute lettre y est immédiatement suivie de la lettre x_{i_1} . On en déduit, par symétrie, que si $k = 0$ alors $\ell = 0$ et que sinon, on a $x_{i_1} = x_{j_1}$. On a alors $R_{i_2} \circ R_{i_3} \circ \dots \circ R_{i_k} = R_{j_2} \circ R_{j_3} \circ \dots \circ R_{j_\ell}$ dans Φ_n , et on conclut par hypothèse de récurrence.

(ii) On montre, de nouveau par récurrence sur k , que l'image de y par l'automorphisme $R_{i_1}^{\epsilon_1} \circ R_{i_2}^{\epsilon_2} \circ \dots \circ R_{i_k}^{\epsilon_k}(y)$ est yw . Ceci prouve que le sous-groupe engendré par l'ensemble $\{R_i \mid x_i \in X\}$ est libre. Le reste de l'énoncé se déduit par symétrie : $L_{i_1}^{\epsilon_1} \circ L_{i_2}^{\epsilon_2} \circ \dots \circ L_{i_k}^{\epsilon_k}(y) = x_{i_k}^{\epsilon_k} \dots x_{i_2}^{\epsilon_2} x_{i_1}^{\epsilon_1} y$. \square

On rappelle que si (S, V, t) est un graphe fini, alors un automorphisme de (S, V, t) est une bijection simpliciale $f : V \cup S \rightarrow V \cup S$; c'est-à-dire une bijection telle que : $f(V) = V$, $f(S) = S$ et pour toute arête v , on a $t(f(v)) = f(t(v))$. On note $\text{Aut}(\Gamma)$ le groupe des automorphismes du graphe Γ .

Proposition 2.5. *Soit Γ un graphe sans boucle ni arête multiple, et de sommets x_1, \dots, x_n .*

(i) *Tout élément f de $\text{Aut}(\Gamma)$ induit un automorphisme \bar{f} du groupe $\mathcal{F}(\Lambda_\Gamma)$, défini de façon unique par $\bar{f}(L_i) = L_{f(i)}$ et $\bar{f}(R_i) = R_{f(i)}$.*

(ii) *Il existe un morphisme de groupes de $\text{Aut}(\Gamma) \times \mathcal{F}(\Lambda_\Gamma)$ dans Φ_n , injectif sur $\text{Aut}(\Gamma)$, et dont la restriction à $\mathcal{F}(\Lambda_\Gamma)$ est l'identité.*

Démonstration. Le groupe $\text{Aut}(\Gamma)$ s'identifie naturellement à un sous-groupe de permutations des sommets de Γ , et le sous-groupe de Φ_n engendré par les éléments $E_{i,j}$ de la définition 2.1 est naturellement isomorphe au groupe des permutations S_n . On peut donc plonger le groupe $\text{Aut}(\Gamma)$ dans le sous-groupe de Φ_n engendré par les $E_{i,j}$. On peut alors faire agir les éléments de $\text{Aut}(\Gamma)$ sur $\mathcal{F}(\Lambda_\Gamma)$ via ce plongement. En effet, si f est une permutation $\text{Aut}(\Gamma)$ vue comme un élément de Φ_n , alors par simplicialité, on a $f \circ L_i \circ f^{-1}(x_j) = L_{f(i)}(x_j)$ et $f \circ R_i \circ f^{-1}(x_j) = R_{f(i)}(x_j)$. \square

2.3. Automorphismes positifs associés à un graphe. Dans cette partie, on fixe un graphe Γ sans boucle ni arête multiple et de sommets x_1, \dots, x_n , avec $n \geq 2$.

Nous allons étudier maintenant le monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$. Au passage, nous prouverons le théorème 2.11 qui permettra de démontrer la proposition 4.3 dans la partie 4.

Bien que les automorphismes L_i et R_j soient relativement naturels, on peut s'interroger sur l'intérêt d'étudier le monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$. En fait, ce monoïde apparaît naturellement dans deux domaines mathématiques : les groupes de tresses et les morphismes épisturmiens. En effet,

Proposition 2.6. *Notons Γ le graphe complet à n sommets, alors :*

(i) *le monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ est le monoïde des morphismes épisturmiens sur n lettres qui préservent l'ordre lexicographique sur les mots infinis.*

(ii) *Le monoïde des morphismes épisturmiens sur n lettres est isomorphe au monoïde $\text{Aut}(\Gamma) \ltimes \mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$.*

Démonstration. Le (i) est une simple réécriture de la Proposition 6.2 de [13] dans le contexte des automorphismes de transvections.

(ii) On a vu dans la partie précédente qu'on a un morphisme naturel de $\text{Aut}(\Gamma) \ltimes \mathcal{F}(\Lambda_\Gamma)$ dans Φ_n . Lorsque le graphe Γ est complet avec n sommets, le groupe $\text{Aut}(\Gamma)$ est simplement le groupe des permutations S_n . Par définition (cf. [4]), le monoïde des morphismes épisturmiens sur n lettres est engendré par S_n et $\Lambda(\Gamma)$ lorsque l'on prend pour Γ le graphe complet. Il reste à voir que si σ est dans $\text{Aut}(\Gamma)$ et Z_1, Z_2 dans $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ tels que $\sigma Z_1 = Z_2$, alors σ est l'identité, et $Z_1 = Z_2$. Tout automorphisme non trivial de $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ augmente strictement la longueur du mot $x_1 \dots x_n$, donc si M_1 ou M_2 sont égaux à 1, alors le résultat est immédiat (en particulier l'intersection du monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ avec le groupe S_n , vu comme sous-groupe de Φ_n , est triviale). On traite le cas général par récurrence sur la longueur de Z_1 sur l'alphabet Λ_Γ . Supposons que $Z_1 = M_{i_1} \dots M_{i_r}$ et $Z_2 = M'_{j_1} \dots M'_{j_s}$, avec M_i et M'_i dans $\{L_i, R_i\}$, et où r est la longueur de Z_1 . Par symétrie, on peut supposer $M_{i_1} = L_{i_1}$. On a $\sigma Z_1 = L_{\sigma(i_1)} \sigma M_{i_2} \dots M_{i_r}$. Puisque Γ est le graphe fermé, il s'en suit que pour tout mot w de F_n^+ , toute lettre de $\sigma(Z_1(w))$ distincte de $x_{\sigma(i_1)}$ est précédée par la lettre $x_{\sigma(i_1)}$. Puisque $\sigma Z_1(w) = Z_2(w)$, ceci implique facilement qu'il existe j_t tel que $M'_{j_t} = L_{\sigma(i_1)}$. Cela implique, tout aussi facilement, que si $t \neq 1$ alors $j_1 = \sigma(i_1)$ et pour tous $1 \leq u < t$, $M'_{j_u} = R_{j_u}$. Mais, si k_1, \dots, k_v sont différents de $\sigma(i_1)$ alors $R_{\sigma(i_1)} R_{k_1} \dots R_{k_v} L_{\sigma(i_1)} = L_{\sigma(i_1)} L_{k_1} \dots L_{k_v} R_{\sigma(i_1)}$ (cf. la preuve du corollaire 2.12). Donc $Z_2 = L_{\sigma(i_1)} M''_{j_2} \dots M''_{j_r}$. Par simplifiabilité dans Φ_n , on trouve que $\sigma M_{i_2} \dots M_{i_r} = M''_{j_2} \dots M''_{j_r}$ et par hypothèse de récurrence, σ est l'identité. \square

Nous verrons dans la partie 4 que le monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ associé au graphe linéaire à n sommets est isomorphe à un sous-monoïde singulier du groupe des tresses B_{n+1} .

On suppose dans la suite de cette partie qu'aucun sommet du graphe Γ n'est isolé (i.e., $J_\Gamma(x_i)$ n'est jamais vide); dans le cas contraire, on a les égalités $R_i = L_i = \text{Id}_{F_n}$ et $R_j(x_i) = L_j(x_i) = x_i$ pour tout j ; on peut donc oublier le sommet x_i .

Proposition 2.7. *Soit $M_{i_1} \dots M_{i_r}$ et $M'_{j_1} \dots M'_{j_s}$ deux mots du groupe libre $F(\Lambda_\Gamma)$ avec M_i et M'_i dans $\{L_i, R_i\}$. Si $M_{i_1} \dots M_{i_r} = M'_{j_1} \dots M'_{j_s}$ dans $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ alors :*

- (i) *on a $\{i_1, \dots, i_r\} = \{j_1, \dots, j_s\}$;*
- (ii) *il existe $j \in \{j_1, \dots, j_s\}$ tel que $M'_j = M_{i_1}$;*
- (iii) *soit $k = \inf\{\ell \mid M'_{j_\ell} = M_{i_1}\}$. Si k est différent de 1, alors pour tout ℓ dans $\{1, \dots, k-1\}$ on a l'un des cas suivants :*
 - (a) $x_{i_1} \notin J(x_{j_\ell})$ et $M_{i_1} M'_{j_\ell} = M'_{j_\ell} M_{i_1}$;
 - (b) $x_{i_1} \in J(x_{j_\ell})$, $M_{i_1} = L_{i_1}$ et $M'_{j_\ell} = R_{j_\ell}$;

(c) $x_{i_1} \in J(x_{j_\ell}), M_{i_1} = R_{i_1}$ et $M'_{j_\ell} = L_{j_\ell}$.

De plus, dans le cas (b), il existe $m \in \{1, \dots, \ell-1\}$ tel que $M'_{j_m} = R_{i_1}$; en particulier $\ell \neq 1$. De même, dans le cas (c), il existe $m \in \{1, \dots, \ell-1\}$ tel que $M'_{j_m} = L_{i_1}$; en particulier $\ell \neq 1$.

Pour prouver cette proposition, nous allons avoir besoin de quelques lemmes techniques, dont les démonstrations sont immédiates et laissées au lecteur. Rappelons que si w est un mot du groupe $F(a, b, \dots)$, on appelle *support* de w l'ensemble des lettres de l'alphabet a, b, \dots qui apparaissent dans l'écriture réduite de w . On note $\text{Supp}(w)$ cet ensemble.

Lemme 2.8. Soit w un mot positif dans F_n^+ et i dans $\{1, \dots, n\}$.

(i) Les mots $L_i(w)$ et $R_i(w)$ sont positifs.

(ii) Si $x_j \in \text{Supp}(w)$, alors $x_j \in \text{Supp}(L_i(w))$ et $x_j \in \text{Supp}(R_i(w))$.

(iii) Si $x_j \notin \text{Supp}(w)$, alors

$x_j \in \text{Supp}(L_i(w)) \Leftrightarrow i = j$ et $J(x_i) \cap \text{Supp}(w) \neq \emptyset \Leftrightarrow x_j \in \text{Supp}(R_i(w))$.

(iv) Si $\text{Supp}(w) \cap J(x_i)$ est non vide, alors toute lettre de l'écriture réduite de $L_i(w)$ (resp. de $R_i(w)$) appartenant à $J(x_i)$ est immédiatement précédée (resp. suivie) de la lettre x_i dans l'écriture réduite de $L_i(w)$ (resp. de $R_i(w)$).

Lemme 2.9. Soit w un mot positif dans l'ensemble F_n^+ et i dans $\{1, \dots, n\}$. On suppose que $w = w_1 x_p w_2$ avec x_p dans $J(x_i)$ et w_1, w_2 dans F_n^+ tels que $\text{Supp}(w_1)$ ne contient pas x_i

(i) Pour tout j dans $\{1, \dots, n\}$ distinct de i , on a $L_j(w) = w'_1 x_q w'_2$ avec x_q dans $J(x_i)$ et w'_1, w'_2 dans F_n^+ tels que $x_i \notin \text{Supp}(w'_1)$.

(ii) Pour tout j dans $\{1, \dots, n\}$, on a $R_j(w) = w'_1 x_q w'_2$ avec x_q dans $J(x_i)$ et w'_1, w'_2 dans F_n^+ tels que $x_i \notin \text{Supp}(w'_1)$.

Lemme 2.10. Soit w un mot positif dans l'ensemble F_n^+ et i dans $\{1, \dots, n\}$. On suppose que $w = w_1 x_p z x_q w_2$ avec w_1, w_2, z des mots positifs tels que la lettre x_i n'est pas dans le support de z , et avec x_p, x_q tels que $x_p \notin J(x_i) \cup \{x_i\}$ et $x_q \in J(x_i)$.

(i) Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ distinct de i , on a $L_j(w) = w'_1 x_{p'} x_{q'} w'_2$ tel que w'_1, w'_2 sont des mots positifs avec $x_{p'} \notin J(x_i) \cup \{x_i\}$ et $x_{q'} \in J(x_i)$.

(ii) Pour tout j dans $\{1, \dots, n\}$, on a $R_j(w) = w'_1 x_{p'} x_{q'} w'_2$ tel que w'_1, w'_2 sont des mots positifs avec $x_{p'} \notin J(x_i) \cup \{x_i\}$ et $x_{q'} \in J(x_i)$.

Démonstration. On remarque qu'on peut supposer sans restriction que $z = 1$. Le résultat est alors immédiat. \square

Démonstration de la proposition 2.7. Supposons $M_{i_1} \dots M_{i_r} = M'_{j_1} \dots M'_{j_s}$.

(i) Soit i_ℓ dans i_1, \dots, i_r . Nous montrons grâce au lemme 2.8 (ii), (iii), que $i_\ell \in \{j_1, \dots, j_s\}$. Soit x_k dans $J_\Gamma(x_{i_\ell})$; la lettre x_k est dans le support de $M_{i_{\ell+1}} \dots M_{i_r}(x_k)$ et la lettre x_{i_ℓ} est dans le support de $M_{i_\ell} \dots M_{i_r}(x_k)$. Donc la lettre x_{i_ℓ} est dans le support de $M_{i_1} \dots M_{i_r}(x_k)$. Puisque $k \neq i_\ell$ et $M_{i_1} \dots M_{i_r} = M'_{j_1} \dots M'_{j_s}$, il existe $j_{\ell'}$ tel que la lettre x_{i_ℓ} est dans le support de $M'_{j_{\ell'}} \dots M'_{j_s}(x_k)$ mais n'est pas dans le support de $M'_{j_{\ell'+1}} \dots M'_{j_s}(x_k)$. Ceci implique que $j_{\ell'}$ est égal à i_ℓ et que i_ℓ est dans $\{j_1, \dots, j_s\}$. On en déduit l'inclusion $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{j_1, \dots, j_s\}$, et par symétrie l'égalité voulue.

(ii) Supposons que $M'_j \neq M_{i_1}$ pour tout j . Par symétrie, on peut supposer sans restriction que $M_{i_1} = L_{i_1}$. Soit $x_k \in J_\Gamma(x_{i_1})$. Par récurrence sur l'entier s et en appliquant le lemme 2.9 (i), (ii), le mot $M'_{j_1} \dots M'_{j_s}(x_k)$ est de la forme $w_1 x_{k'} w_2$ avec $x_{k'} \in J_\Gamma(x_{i_1})$ et $w'_1, w'_2 \in F_n^+$ tels que $x_{i_1} \notin \text{Supp}(w'_1)$. Mais ceci est impossible, car dans l'écriture réduite de $L_{i_1}(M_{i_2} \dots M_{i_r}(x_k))$ toute lettre dans $J_\Gamma(x_{i_1})$ est immédiatement précédée par la lettre x_{i_1} d'après le lemme 2.8 (ii), (iv).

(iii) Par symétrie, on peut supposer sans restriction que $M_{i_1} = L_{i_1}$. Soit un indice j_ℓ dans $\{j_1, \dots, j_{k-1}\}$. On doit montrer qu'on est dans le cas (a) ou le cas (b). Supposons que cela n'est pas le cas. On est alors dans l'un des deux cas suivants : $x_{i_1} \notin J(x_{j_\ell})$, $M'_{j_\ell} = L_{j_\ell}$ et $J(x_{i_1}) \cap J(x_{j_\ell}) \neq \emptyset$; ou bien $x_{i_1} \in J(x_{j_\ell})$ et $M'_{j_\ell} = L_{j_\ell}$ (cf. lemme 2.3 (i), (ii)).

Supposons $x_{i_1} \notin J(x_{j_\ell})$ et $J(x_{i_1}) \cap J(x_{j_\ell}) \neq \emptyset$. Soit $x_k \in J(x_{i_1}) \cap J(x_{j_\ell})$. Par le lemme 2.8 (i), (iv), le mot $M'_{j_\ell} \dots M'_{j_s}(x_k)$ est de la forme $w_1 x_{j_\ell} x_k w_2$ avec w_1 et w_2 dans F_n^+ . Par le lemme 2.10 (i), (ii), le mot $M'_{j_1} \dots M'_{j_s}(x_k)$ est de la forme $w_1 x_j x_{k'} w_2$ avec w_1 et w_2 dans F_n^+ , $x_j \neq x_{i_1}$ et $x_{k'} \in J(x_{i_1})$. Ce qui est impossible (cf. la conclusion de (ii)).

Supposons $x_{i_1} \in J(x_{j_\ell})$ et $M'_{j_\ell} = L_{j_\ell}$. Par le lemme 2.8 (ii), (iii) la lettre x_{i_1} est dans le support de $M'_{j_k} \dots M'_{j_s}(x_{j_\ell})$, et en conséquence aussi dans le support de $M'_{j_{\ell-1}} \dots M'_{j_s}(x_{j_\ell})$. Par le lemme 2.8 (iv), on sait que toute lettre x_{i_1} de l'écriture réduite de $M'_{j_\ell} \dots M'_{j_s}(x_{j_\ell})$ est immédiatement précédée de la lettre x_{j_ℓ} . Puisque $M'_j \neq L_{i_1}$ pour $j \in \{j_1, \dots, j_{\ell-1}\}$, dans l'écriture réduite de $M'_{j_1} \dots M'_{j_s}(x_{j_\ell})$ toute lettre x_{i_1} est précédée (pas forcément immédiatement) par la lettre x_ℓ . Ce qui est impossible (cf. la conclusion de (ii)).

D'où, si $M_{i_1} = L_{i_1}$, alors on a bien le cas (a) ou le cas (b) pour tout ℓ dans $\{1, \dots, k-1\}$. Supposons toujours que $M_{i_1} = L_{i_1} = M'_{j_k}$, et maintenant qu'on est dans le cas (b), c'est-à-dire que $M'_{j_\ell} = R_{j_\ell}$ avec $x_{i_1} \in J(x_{j_\ell})$ pour un ℓ dans $\{1, \dots, k-1\}$. Par les mêmes arguments que ci-dessus, la lettre x_{j_ℓ} est dans le support de $M'_{j_k} \dots M'_{j_s}(x_{j_\ell})$, et toute lettre x_{j_ℓ} dans l'écriture réduite de $M'_{j_k} \dots M'_{j_s}(x_{j_\ell})$ est immédiatement précédée par la lettre x_{i_1} . Mais, dans l'écriture réduite de $M'_{j_\ell} \dots M'_{j_s}(x_{j_\ell})$ toute lettre x_{i_1} est immédiatement suivie par la lettre x_{j_ℓ} ; plus précisément, on a $M'_{j_\ell} \dots M'_{j_s}(x_{j_\ell}) = \dots x_{i_1} x_{j_\ell} \omega x_{j_\ell} \dots$ où ω désigne un mots positif, éventuellement trivial, ne contenant pas la lettre x_{i_1} dans son support. Puisque, dans

le mot $M'_{j_1} \dots M'_{j_s}(x_{j_\ell})$ toute lettre x_{j_ℓ} est précédée de la lettre x_{i_1} , et que la lettre x_{i_1} n'est pas dans le support du mot ω , on déduit du lemme 2.9 (iii) qu'il existe m dans $\{1, \dots, \ell - 1\}$ tel que $j_m = i_1$. Par définition de j_k , on a alors $M'_{j_m} = R_{i_1}$. \square

On note $\mathcal{F}^+(X)$ le sous-monoïde Φ_n engendré par X , pour X dans Λ_Γ .

Théorème 2.11. *Soit X une partie non vide de Λ_Γ ne contenant aucune paire L_i, R_i . Le sous-monoïde $\mathcal{F}^+(X)$ des automorphismes du groupe libre F_n engendré par X possède la présentation de monoïde suivante :*

$$\left\langle X \left| \begin{array}{l} L_i R_j = R_j L_i, L_i, R_j \in X, x_i \notin J(x_j) \\ L_i L_j = L_j L_i, L_i, L_j \in X, x_i \notin J(x_j), J(x_i) \cap J(x_j) = \emptyset \\ R_i R_j = R_j R_i, R_i, R_j \in X, x_i \notin J(x_j), J(x_i) \cap J(x_j) = \emptyset \end{array} \right. \right\rangle^+ . \quad (*)$$

En particulier, ce monoïde est un monoïde partiellement commutatif, et donc un monoïde d'Artin–Tits.

Démonstration. Notons \sim la relation d'équivalence, sur les mots sur l'alphabet X , induite par les relations de la présentation (*). Pour M dans l'ensemble Λ_Γ , on note M^* l'unique élément de Λ_Γ tel qu'on a $\{M, M^*\} = \{L_i, R_i\}$ pour un certain i . Soit W et Z deux mots sur l'alphabet X . Il est clair que si $W \sim Z$ alors ils ont même image dans $\mathcal{F}^+(X)$ (cf. lemme 2.3 (i), (ii)). Réciproquement, supposons que W et Z ont la même image dans $\mathcal{F}^+(X)$. On montre par récurrence sur la longueur de W que $W \sim Z$. Si W est le mot vide, alors il en est de même de Z par la proposition 2.7 (ii). Supposons que W n'est pas le mot vide et écrivons $W = M W_1$ avec M dans X . D'après la proposition 2.7 (ii), on a $Z = M'_1 \dots M'_{k-1} M M'_{k+1} \dots M'_s$ avec les M'_i dans X . Par hypothèse, on a X ne contient aucune paire L_i, R_i , et en particulier tous les M'_i sont différents de M^* . on déduit alors de la proposition 2.7 (iii), que $M'_i M = M M'_i$ pour tout i dans $\{1, \dots, k-1\}$. D'où $Z \sim M M'_1 \dots M'_{k-1} M'_{k+1} \dots M'_s$ (cf. lemme 2.3 (i), (ii) et proposition 2.4 (i)). Mais, $\mathcal{F}^+(X)$ est évidemment simplifiable puisque c'est un sous-monoïde d'un groupe. Donc W' et $M'_1 \dots M'_{k-1} M'_{k+1} \dots M'_s$ ont même image dans $\mathcal{F}^+(X)$. Par hypothèse de récurrence, on a alors $W' \sim M'_{k-1} M'_{k+1} \dots M'_s$ et finalement $W \sim Z$. \square

Corollaire 2.12. *Si Γ est le graphe complet, alors le monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ a pour présentation*

$$\langle \Lambda_\Gamma \mid L_i L_{i_1} \dots L_{i_k} R_i = R_i R_{i_1} \dots R_{i_k} L_i, k \in \mathbb{N}, i_j \neq i \rangle^+.$$

Démonstration. Commençons par vérifier les relations de la présentation. On a bien $R_i L_i = L_i R_i$. D'autre part, il est facile de voir que si j est distinct de i alors $R_i R_j L_i = L_i L_j R_i$ dans le monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$. En effet, on a les égalités $R_i R_j L_i(x_i) = L_i L_j R_i(x_i) = x_i x_j x_i$, $R_i R_j L_i(x_j) = L_i L_j R_i(x_j) = x_i x_j x_i x_j x_i$,

et pour ℓ distinct de i et j , on a $R_i R_j L_i(x_\ell) = L_i L_j R_i(x_\ell) = x_i x_j x_i x_\ell x_i x_j x_i$. On en déduit par récurrence sur k que les relations $L_i L_{i_1} \dots L_{i_k} R_i = R_i R_{i_1} \dots R_{i_k} L_i$, avec k dans \mathbb{N} , sont vraies dans le groupe Φ_n , et donc aussi dans le monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$: par exemple pour $k = 2$, on a la suite d'égalité $L_i L_{i_1} L_{i_2} R_i = L_i L_{i_1} R_i R_{i_1}^{-1} L_{i_2} R_i = R_i R_{i_1} L_i R_i^{-1} L_{i_2} R_i = R_i R_{i_1} R_i^{-1} L_i L_{i_2} R_i = R_i R_{i_1} R_i^{-1} R_i R_{i_2} L_i = R_i R_{i_1} R_{i_2} L_i$. Notons \sim la relation d'équivalence induite sur $F^+(\Lambda_\Gamma)$ par les relations de la présentation de l'énoncé. Considérons deux mots W et Z du monoïde libre $F^+(\Lambda_\Gamma)$ et supposons qu'ils ont même image dans $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$. On doit montrer qu'on a $W \sim Z$. On le fait par récurrence sur la longueur de W . Si $W = 1$, alors il en est de même de Z par la proposition 2.7 (i). Supposons que L_i divise W dans $F^+(\Lambda_\Gamma)$. Si L_i divise aussi Z dans $F^+(\Lambda_\Gamma)$ alors on conclut par hypothèse de récurrence, car le monoïde $\mathcal{F}^+(\Lambda_\Gamma)$ est simplifiable en tant que sous-monoïde d'un groupe. Sinon, d'après la proposition 2.7 (i), on a, puisque le graphe est complet,

$$Z = R_i R_{i_1} \dots R_{i_{k_1}} R_i R_{i_{k_1+1}} \dots R_{i_{k_2}} R_i R_{i_{k_2+1}} \dots R_i R_{i_{k_{s-1}+1}} \dots R_{i_{k_s}} L_i \dots$$

où les i_j sont tous distincts de i . On est alors ramené au premier cas, car on a $Z \sim L_i L_{i_1} \dots L_{i_{k_1}} R_i L_{i_{k_1+1}} \dots L_{i_{k_2}} R_i L_{i_{k_2+1}} \dots R_i L_{i_{k_{s-1}+1}} \dots L_{i_{k_s}} R_i \dots$ \square

Ce corollaire et la proposition 2.6 permettent de retrouver le résultat de la proposition 6.5 de [12], qui donne une présentation du monoïde des morphismes épisturmiens.

3. Représentation du groupe des tresses

Nous allons construire dans cette section une nouvelle représentation des groupes des tresses. Commençons par rappeler les définitions et notations relatives aux groupes d'Artin–Tits dont nous aurons besoin. Si u et v sont deux mots et m désigne en entier positif, la notation $[u, v]^m$ désignera le mot $\underbrace{uvu \dots}_{m \text{ termes}}$ obtenu par concaténation.

3.1. Groupes d'Artin–Tits. Soit S un ensemble fini et $M = (m_{s,t})_{s,t \in S}$ une matrice symétrique telle que $m_{s,s} = 1$ pour s dans S et $m_{s,t}$ est dans $\{2, 3, 4, \dots\} \cup \{\infty\}$ pour s et t dans S et distincts. Le système d'Artin–Tits associé à M est la paire (A, S) où A est le groupe défini par la présentation suivante :

$$A = \langle S \mid [s, t]^{m_{s,t}} = [t, s]^{m_{s,t}}, s, t \in S, s \neq t, m_{s,t} \neq \infty \rangle. \quad (\dagger)$$

Les relations $[s, t]^{m_{s,t}} = [t, s]^{m_{s,t}}$ sont appelées les *relations de tresse* et le groupe A est appelé le *groupe d'Artin–Tits associé à la matrice M* . Par exemple, si $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ avec $m_{s_i, s_j} = 3$ pour $|i - j| = 1$ et $m_{s_i, s_j} = 2$ pour $|i - j| > 1$, alors le groupe d'Artin–Tits associé est le groupe B_{n+1} des tresses à $n + 1$ brins. Si on ajoute les relations $s^2 = 1$ à la présentation de groupe (\dagger) , on obtient le groupe de

Coxeter W associé à A . On dit que A est de *type sphérique* lorsque W est fini. Par exemple, le groupe de Coxeter de B_{n+1} est le groupe symétrique S_{n+1} , qui est fini.

La matrice M peut être codée par un graphe étiqueté Γ_S , appelé *graphe de Coxeter associé*. Ses sommets sont les éléments de S , et deux sommets sont reliés par une arête lorsque $m_{s,t} \geq 3$. Dans ce cas on indexe l'arête par $m_{s,t}$. Lorsque $m_{s,t} = 3$ on omet l'indexation, pour alléger les notations. Ainsi le graphe de Coxeter du groupe des tresses à $n + 1$ brins est



Figure 1. Graphe de Coxeter de B_{n+1} .

On dit que le groupe A (ou simplement S) est *indécomposable* lorsque le graphe de Coxeter associé est connexe.

Le groupe A possède une famille de sous-groupes remarquables, les *sous-groupes paraboliques standards*. Il s'agit des sous-groupes qui sont engendrés par une partie de S . Un tel sous-groupe est canoniquement un groupe d'Artin–Tits ; son graphe de Coxeter est le sous-graphe plein de Γ_S dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des éléments de S qui engendre le sous-groupe.

Le groupe B_{n+1} des tresses à $n + 1$ brins possède un élément particulier, appelé élément de Garside, qu'on notera Δ_n . Avec les notations de la figure 1, on a $\Delta_n = (\sigma_1 \dots \sigma_{n-1} \sigma_n) \dots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$. Le quasi-centre $QZ(B_{n+1})$ de B_{n+1} , qui est le sous-groupe $\{b \in B_{n+1} \mid bSb^{-1} = S\}$, est engendré par Δ_n et le centre $Z(B_{n+1})$ de B_{n+1} est engendré par Δ_n^2 . En d'autres termes, et avec les notations de la figure 1, on a $QZ(B_{n+1}) = \{\Delta_n^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ et $Z(B_{n+1}) = \{\Delta_n^{2k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Dans la suite de l'article, lorsqu'on parlera du groupe B_{n+1} , on adoptera les notations de la figure 1.

3.2. Représentation des groupes d'Artin–Tits.

Définition 3.1. Soit (A, S) un système d'Artin–Tits. Notons s_1, \dots, s_n les éléments de S .

(i) On appelle *3-graphe* de A le graphe Γ (sans étiquette) obtenu à partir du graphe de Coxeter de A en ne conservant que ses sommets et les arêtes dont l'étiquette est 3.

(ii) Si Γ désigne le 3-graphe de A , nous dirons que le groupe A est *représentable par des transvections* s'il existe une représentation φ de A dans $\text{Aut}(F_n)$ telle que $\varphi(s_i)$ est égal à $L_{i,\Gamma}$, $R_{i,\Gamma}$, $L_{i,\Gamma}^{-1}$, ou $R_{i,\Gamma}^{-1}$. Dans ce cas, nous dirons que φ est *une représentation de A obtenue par transvections*.

Avec les notations de la définition 3.1, le sommet de Γ correspondant au générateur s_i sera noté x_i .

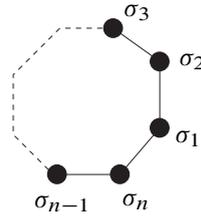


Figure 2. Graphe de Coxeter de \tilde{B}_n .

Démonstration du théorème 1.1 (i), (iii). (i) Avec les notations des figures 1 et 2, on pose $\varphi(\sigma_1) = L_1$, $\varphi(\sigma_2) = L_2^{-1}$, $\varphi(\sigma_3) = R_3$, $\varphi(\sigma_4) = R_4^{-1}$, $\varphi(\sigma_5) = L_5, \dots$. D'après le lemme 2.3, on obtient bien une représentation de B_{n+1} .

(iii) Si n est un multiple de 4 et $\sigma_1\sigma_n\sigma_1 = \sigma_n\sigma_1\sigma_n$, on obtient encore une représentation de \tilde{B}_n . □

Dans la suite, nous notons φ_n la représentation de B_{n+1} définie dans la preuve du théorème 1.1 (i).

Dans [2], Crisp et Paris considèrent la famille des *groupes d'Artin–Tits de type petit*. Il s'agit des groupes d'Artin–Tits dont la matrice associée n'a que des coefficients 2 ou 3 en dehors de la diagonale. Dans ce qui suit, nous nous intéressons à des groupes d'Artin–Tits dont la matrice associée n'a que des coefficients 2, 3 ou ∞ hors de la diagonale. Dans ce cas, nous dirons que le système (A, S) (ou simplement que le groupe A) est *de type* $(2, 3, \infty)$. En considérant le lemme 2.3 et la proposition 2.4, on voit facilement que ce sont les seuls groupes d'Artin–Tits pouvant être représentés fidèlement par des transvections.

Donner une caractérisation à partir de leurs graphes des groupes d'Artin–Tits de type $(2, 3, \infty)$ et représentables par des transvections est certainement possible mais très technique et peu parlant. Nous préférons donc énoncer des conditions nécessaires et donner des exemples afin que le lecteur se fasse une idée de ce qu'est un groupe de type $(2, 3, \infty)$ représentable par des transvections.

Nous rappelons qu'un graphe Γ est dit *biparti* lorsqu'il existe une partition $S_0 \cup S_1$ de ses sommets telle que aucune paire d'éléments de S_0 , d'une part, et aucune paire d'éléments de S_1 , d'autre part, n'est reliée par une arête. Nous rappelons aussi qu'un graphe est dit de type D_4 , s'il est de la forme



Proposition 3.2. *Soit (A, S) un système d'Artin–Tits indécomposable de type $(2, 3, \infty)$. Si A est représentable par des transvections, alors :*

(i) *Le graphe de Coxeter Γ_S du groupe A ne contient pas de sous-graphe plein de type D_4 .*

(ii) *Le 3-graphe du groupe A est biparti.*

(iii) *Tout sous-groupe parabolique standard du groupe A est aussi (de type $(2, 3, \infty)$ et) représentable par des transvections.*

Démonstration. Le point (iii) est immédiat. Prouvons les points (i) et (ii). Supposons que φ est une représentation de A par des transvections et notons Γ le 3-graphe du groupe A . Soit s_i et s_j dans S . En utilisant le lemme 2.3 (iii), on constate que si $\varphi(s_i)$ est le (resp. est l'inverse du) i ème automorphisme de transvection à gauche, ou à droite, de F_n associé à Γ et si les sommets x_i et x_j sont reliés par une arête dans Γ alors, l'automorphisme $\varphi(s_j)$ est l'inverse du (resp. est le) j ème automorphisme de transvection à gauche, ou à droite, de F_n associé à Γ . On en déduit que si $\varphi(s_i)$ est le (resp. est l'inverse du) i ème automorphisme de transvection à gauche, ou à droite, de F_n associé à Γ , alors pour tout sommet x_k situé à un nombre impair (resp. pair) d'arêtes de x_i , l'automorphisme $\varphi(s_k)$ est l'inverse du (resp. est le) k ème automorphisme de transvection à gauche, ou à droite, de F_n associé à Γ . Par conséquent, Γ est bi-partite. Maintenant, supposons que x_j, x_k et x_ℓ sont reliés à x_i dans le graphe Γ . Si $\varphi(s_i)$ est le (resp. est l'inverse du) i ème automorphisme de transvection à gauche, ou à droite, de F_n associé à Γ alors, les automorphismes $\varphi(s_j)$, $\varphi(s_k)$ et $\varphi(s_\ell)$ sont les inverses respectifs des (resp. sont respectivement les) j ème, k ème et ℓ ème automorphismes de transvections à gauche, ou à droite, de F_n associé à Γ . Mais alors $\varphi(s_j)$, $\varphi(s_k)$ et $\varphi(s_\ell)$ ne peuvent tous commuter deux à deux d'après la proposition 2.4 (ii), puisque le 3-graphe est bi-partite. Par conséquent, les générateurs s_j, s_k et s_ℓ ne peuvent pas tous commuter deux à deux. \square

De l'énoncé précédent et de sa preuve nous déduisons le résultat suivant :

Corollaire 3.3. *Soit (A, S) un système d'Artin–Tits indécomposable de type $(2, 3, \infty)$ et représentable par des transvections.*

(i) *Si la matrice de Coxeter de A ne possède pas de coefficient infini alors A est un groupe des tresses à n brins ou un groupe des tresses affine à $4n$ brins.*

(ii) *Les seuls sous-groupes paraboliques standards indécomposables du groupe A sans relation ∞ sont des groupes des tresses et des groupes des tresses affines à $4n$ brins.*

Terminons cette section par deux exemples de graphes de groupes d'Artin–Tits $(2, 3, \infty)$ représentable par des transvections.

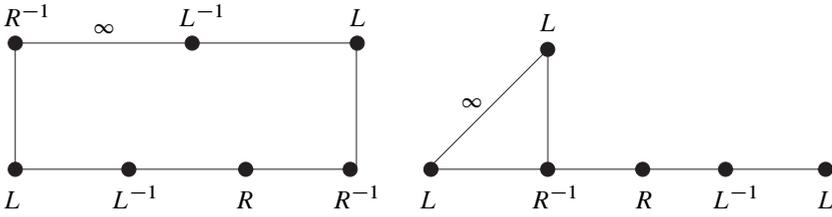


Figure 3. Deux graphes de groupes représentables par des transvections.

3.3. Fidélité de la représentation φ_n . Il est immédiat que certaines représentations obtenues par des transvections ne sont pas fidèles. Par exemple, la représentation du groupe libre obtenue par des transvections est triviale (notons qu'on peut obtenir une représentation par des transvections de F_2 qui est fidèle, en utilisant le résultat de la proposition 2.4 et en regardant F_2 comme un sous-groupe parabolique standard du groupe $\langle s, t, u \mid sts = tst, tut = utu \rangle$). Plus généralement si le 3-graphe possède des sommets isolés, la représentation ne peut être fidèle. Le cas le plus intéressant est sans doute celui des représentations du groupe B_{n+1} . Dans cette partie, nous nous concentrons sur ce cas particulier.

Théorème 3.4. *Pour tout entier n avec $n \geq 2$, la restriction de φ_n au quasi-centre $QZ(B_{n+1})$ de B_{n+1} est fidèle.*

Pour prouver ce résultat, nous allons tout d'abord établir un certain nombre de résultats techniques. Dans la suite de cette partie, pour b dans le groupe B_{n+1} et x dans le groupe libre F_n , on écrit $b(x)$ pour $\varphi_n(b)(x)$. Pour k dans \mathbb{N} avec $k \geq 1$, on pose $\delta_k = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k$.

Lemme 3.5. *Soit n dans \mathbb{N} avec $n \geq 3$.*

- (i) *Pour tout i dans $\{1, \dots, n - 1\}$, on a $\delta_n(x_i) = x_{i+1}^{(-1)^i}$.*
- (ii) *De plus*

$$\begin{aligned} \delta_n(x_n) &= (x_n x_{n-2}^{-1} \dots x_4 x_2^{-1})(x_1^{-1} x_3 \dots x_{n-3}^{-1} x_{n-1}) & \text{si } n \equiv 0[4], \\ \delta_n(x_n) &= (x_n x_{n-2}^{-1} \dots x_5 x_3^{-1})x_1(x_2 x_4^{-1} \dots x_{n-3} x_{n-1}^{-1}) & \text{si } n \equiv 1[4], \\ \delta_n(x_n) &= (x_{n-1} x_{n-3}^{-1} \dots x_5 x_3^{-1})x_1 x_2(x_4^{-1} x_6 \dots x_{n-2}^{-1} x_n) & \text{si } n \equiv 2[4], \\ \delta_n(x_n) &= (x_{n-1}^{-1} x_{n-3} \dots x_6^{-1} x_4)x_2^{-1} x_1^{-1} x_3(x_5^{-1} x_7 \dots x_{n-2}^{-1} x_n) & \text{si } n \equiv 3[4]. \end{aligned}$$

Démonstration. Le point (i) est un calcul que nous laissons au lecteur. Pour montrer

(ii), nous remarquons $\delta_n(x_n) = \delta_{n-1}(x_n)$ et que

$$\begin{aligned}\delta_{n-1}(x_n) &= x_n \delta_{n-2}(x_{n-1}) & \text{si } n \equiv 0[4], \\ \delta_{n-1}(x_n) &= x_n \delta_{n-2}(x_{n-1}^{-1}) & \text{si } n \equiv 1[4], \\ \delta_{n-1}(x_n) &= \delta_{n-2}(x_{n-1}) x_n & \text{si } n \equiv 2[4], \\ \delta_{n-1}(x_n) &= \delta_{n-2}(x_{n-1}^{-1}) x_n & \text{si } n \equiv 3[4].\end{aligned}$$

Le résultat en découle par récurrence sur n . □

Proposition 3.6. *Soit n dans \mathbb{N} avec $n \geq 2$. Alors*

(i) on a

$$\begin{aligned}\Delta_n(x_n) &= (x_n x_{n-2}^{-1} \dots x_4 x_2^{-1}) x_1^{-1} (x_n x_{n-2}^{-1} \dots x_4 x_2^{-1})^{-1} & \text{si } n \equiv 0[4], \\ \Delta_n(x_n) &= (x_n x_{n-2}^{-1} \dots x_5 x_3^{-1}) x_1 (x_n x_{n-2}^{-1} \dots x_5 x_3^{-1})^{-1} & \text{si } n \equiv 1[4], \\ \Delta_n(x_n) &= (x_2 x_4^{-1} x_6 \dots x_{n-2}^{-1} x_n)^{-1} x_1 (x_2 x_4^{-1} x_6 \dots x_{n-2}^{-1} x_n) & \text{si } n \equiv 2[4], \\ \Delta_n(x_n) &= (x_3 x_5^{-1} x_7 \dots x_{n-2}^{-1} x_n)^{-1} x_1^{-1} (x_3 x_5^{-1} x_7 \dots x_{n-2}^{-1} x_n) & \text{si } n \equiv 3[4].\end{aligned}$$

(ii) $\Delta_n(x_1) = x_n^{(-1)^k}$ où k est la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Démonstration. (i) Rappelons qu'on a $\Delta_n = (\sigma_1 \dots \sigma_n)(\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1 = \delta_n \delta_{n-1} \dots \delta_2 \delta_1$. Par conséquence, on a $\Delta_n(x_n) = \delta_n \delta_{n-1}(x_n)$. Puisque $\delta_{n-1}(x_n) = \delta_n(x_n)$, le résultat découle du lemme 3.5 (i), (ii) : nous traitons le cas $n \equiv 0[4]$ et laissons les autres cas au lecteur. On a alors,

$$\begin{aligned}\Delta_n(x_n) &= \delta_n \delta_{n-1}(x_n) \\ &= \delta_n((x_n x_{n-2}^{-1} \dots x_4 x_2^{-1})(x_1^{-1} x_3 \dots x_{n-3}^{-1} x_{n-1})) \\ &= \delta_n(x_n) \delta_n((x_{n-2}^{-1} \dots x_4 x_2^{-1})(x_1^{-1} x_3 \dots x_{n-3}^{-1} x_{n-1})) \\ &= (x_n x_{n-2}^{-1} \dots x_4 x_2^{-1})(x_1^{-1} x_3 \dots x_{n-3}^{-1} x_{n-1}) \\ &\quad \cdot (x_{n-1}^{-1} \dots x_5 x_3^{-1})(x_2 x_4^{-1} \dots x_{n-2} x_n^{-1}) \\ &= (x_n x_{n-2}^{-1} \dots x_4 x_2^{-1}) x^{-1} (x_n x_{n-2}^{-1} \dots x_4 x_2^{-1})^{-1}.\end{aligned}$$

(ii) s'obtient par récurrence sur n en utilisant le lemme 3.5 (i) et les égalités $\Delta_n = \delta_n \delta_{n-1} \dots \delta_2 \delta_1 = \delta_n \Delta_{n-1}$. □

Remarque 3.7. *Des résultats précédents, nous pouvons déduire facilement $\Delta_n(x_i)$ pour $i \in \{2, \dots, n-1\}$. Par exemple, pour $i \equiv 0[4]$, on a*

$$\begin{aligned}\Delta_n(x_i) &= (x_n^{(-1)^k} x_{n-2}^{-(-1)^k} \dots x_{n-i+4}^{(-1)^k} x_{n-i+2}^{-(-1)^k}) x_{n-i+1}^{(-1)^\ell} \\ &\quad \cdot (x_n^{(-1)^k} x_{n-2}^{-(-1)^k} \dots x_{n-i+4}^{(-1)^k} x_{n-i+2}^{-(-1)^k})^{-1}\end{aligned}$$

avec $\ell = E\left(\frac{n-i+1}{2}\right)$ et $k = E\left(\frac{n-i}{2}\right)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

Lemme 3.8. Soit ϵ, η et ν dans $\{-1, 1\}$ et $\psi_{(\epsilon, \eta, \nu)}: F_2 \rightarrow F_2$ définie par $x \mapsto y^\epsilon$ et $y \mapsto y^\nu x^\eta y^{-\nu}$. Pour tout entier positif k on a $\ell(\psi_{(\epsilon, \eta, \nu)}^k(y)) = 2k + 1$ où ℓ désigne la longueur sur l'alphabet $\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$.

Démonstration. Nous montrons pour tout entier k , et par récurrence sur k , que : $\psi_{(\epsilon, \eta, \nu)}^k(y) = z_1^{\mu_1} z_2^{\mu_2} \dots z_{2k+1}^{\mu_{2k+1}}$ avec μ_i dans $\{-1, 1\}$ pour tout i , et tel que $z_{2i} = x$ et $z_{2i+1} = y$. Ceci prouve le lemme. Pour $k = 0$ et $k = 1$, l'hypothèse de récurrence est vraie. Supposons $k \geq 2$ et l'affirmation vraie au rang $k - 1$. Alors $\psi_{(\epsilon, \eta, \nu)}^{k-1}(y) = y_1^{\xi_1} x^{\xi_2} y^{\xi_3} \dots x_{2k-2}^{\xi_{2k-1}}$ avec ξ_i dans $\{-1, 1\}$ pour tout i dans $\{1, \dots, 2k - 1\}$. On a alors

$$\begin{aligned} \psi_{(\epsilon, \eta, \nu)}^k(y) &= \psi_{(\epsilon, \eta, \nu)}(\psi_{(\epsilon, \eta, \nu)}^{k-1}(y)) \\ &= \psi(y_1^{\xi_1} x^{\xi_2} y^{\xi_3} \dots x^{\xi_{2k-2}} y^{\xi_{2k-1}}) \\ &= y^\nu x^{\eta \times \xi_1} y^{-\nu} y^{\xi_2} y^\nu x^{\eta \times \xi_3} y^{-\nu} \dots y^{\xi_{2k-2}} y^\nu x^{\eta \times \xi_{2k-1}} y^{-\nu} \\ &= y^\nu x^{\eta \times \xi_1} y^{\xi_2} x^{\eta \times \xi_3} \dots y^{\xi_{2k-2}} x^{\eta \times \xi_{2k-1}} y^{-\nu}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'hypothèse de récurrence au rang k et le lemme. \square

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.4 :

Le sous-groupe $QZ(B_n)$ est engendré par Δ_n . Donc, pour prouver le théorème 3.4, il suffit de montrer que pour tout entier positif non nul k , les éléments $\Delta_n^k(x_n)$ et x_n sont différents. Soit $\psi: F_n \rightarrow F(x, y)$ le morphisme de groupes défini par $\psi(x_1) = x$, $\psi(x_n) = y$ et pour i dans $\{2, \dots, n - 1\}$, $\psi(x_i) = 1$. Supposons $n \equiv 0[4]$. D'après la proposition 3.6, on a $\psi \circ \varphi_n(\Delta_n) = \psi_{(1, -1, 1)} \circ \psi$ où $\psi_{(1, -1, 1)}$ est défini comme dans le lemme 3.8. Donc, pour tout entier positif non nul k , on a $\psi(\Delta_n^k(x_n)) = \psi_{(1, -1, 1)}^k(y)$. Mais $\psi_{(1, -1, 1)}^k(y)$ est différent de y d'après le lemme 3.8. Donc $\Delta_n^k(x_n)$ ne peut pas être égal à x_n . Les cas $n \equiv 1, 2, 3[4]$ sont similaires et nous laissons la vérification au lecteur. \square

Du théorème 2.11 nous déduisons maintenant le théorème 1.1 (ii) ; c'est-à-dire que la représentation φ_3 de B_4 , obtenue en envoyant σ_1, σ_2 et σ_3 respectivement sur L_1, L_2^{-1} et R_3 , est fidèle (Il découle facilement de ce résultat que la représentation par des transvections φ_2 de B_3 est aussi fidèle).

Démonstration du théorème 1.1 (ii). Considérons $F(y_1, y_2)$, le groupe libre de rang 2 de base y_1, y_2 . Soit Γ la graphe constitué d'une seule arête reliant les sommets y_1 et y_2 . Dans le lemme 2.6 de [5], Kassel et Reutenauer remarquent qu'on définit un morphisme φ de B_4 dans $\text{Aut}(F_2)$ en posant $\varphi(\sigma_1) = L_{1, \Gamma}$, $\varphi(\sigma_2) = L_{2, \Gamma}^{-1}$ et $\varphi(\sigma_3) = R_{1, \Gamma}$. De plus, ils prouvent que le noyau de φ est le centre de B_4 (cf. [5] corollaire 2.9). Posons $\psi: F_3 \rightarrow F(y_1, y_2)$ défini par $\psi(x_1) = \psi(x_3) = y_1$ et $\psi(x_2) = y_2$. On vérifie facilement, sur σ_1, σ_2 et σ_3 , que ψ est un opérateur d'entrelacement (surjectif)

entre φ_3 et φ , c'est-à-dire que pour toute tresse b dans B_4 , on a $\psi \circ \varphi_3(b) = \varphi(b) \circ \psi$. Il en découle que $\text{Ker } \varphi_3$ est inclus dans $\text{Ker } \varphi$, c'est-à-dire le centre de B_4 . Maintenant, il est clair que le centre de B_4 est inclus dans son quasi-centre. D'où, $\text{Ker } \varphi = \{1\}$ d'après le théorème 3.4. \square

Motivé par le théorème 1.1 (ii) et la preuve de la proposition 4.2 ci-après, nous conjecturons que

Conjecture 3.9. *Pour tout entier n au moins égal à 2, le groupe B_{n+1} possède une représentation par des transvections qui est fidèle.*

La représentation candidate est, bien entendu, la représentation φ_n . Nous remarquons que la méthode utilisée par Vladimir Shpilrain dans [14] pour montrer que les représentations de Wada sont fidèles ne semble pas pouvoir être utilisée pour montrer que la représentation φ_n est fidèle.

Dans le cas général, on peut se demander quelles sont les groupes d'Artin–Tits qui possède une représentation par des transvections fidèle. En nous inspirant de la construction de la représentation φ_n de B_{n+1} , nous pouvons donner une condition nécessaire :

Définition 3.10. Soit (A, S) un système d'Artin–Tits de type $(2, 3, \infty)$. On dira que le groupe A est *bien représentable par des transvections* si son 3-graphe est sans point isolé et qu'il possède une représentation par des transvections φ telle que pour tous s, t dans S avec $m_{s,t} = \infty$, le sous-groupe de Φ_n engendré par $\varphi(s)$ et $\varphi(t)$ est un groupe libre de rang 2 de base $(\varphi(s), \varphi(t))$. Dans ce cas, on dira que φ est une *bonne représentation par des transvections* du groupe A .

La définition 3.10 doit être rapprochée du lemme 2.3 et de la proposition 2.4. D'après ces lemmes, on voit que si le groupe A est de type $(2, 3, \infty)$ et bien représentable par des transvections, alors pour tous éléments s_i, s_j de S tels que $m_{i,j} = \infty$, il existe un élément s_k de S tel que $m_{i,k} = m_{j,k} = 3$. D'autre part, si φ est une bonne représentation et $m_{i,j} = \infty$, alors on a l'un des cas suivants : $(\varphi(s_i), \varphi(s_j)) = (L_i^\epsilon, L_j^\epsilon)$ avec $\epsilon = \pm 1$, ou $(\varphi(s_i), \varphi(s_j)) = (R_i^\epsilon, R_j^\epsilon)$ avec $\epsilon = \pm 1$.

Les groupes des tresses, les groupes des tresses affines à $4n$ brins sont de type $(2, 3, \infty)$ et bien représentables par des transvections. Il existe cependant des groupes d'Artin–Tits de type $(2, 3, \infty)$, représentable par des transvections, sans point isolé dans leur 3-graphe et qui ne sont pas bien représentables par des transvections. Le premier graphe de la figure 3 donne un exemple du graphe de Coxeter d'un tel groupe.

Le résultat suivant découle des définitions :

Proposition 3.11. *Soit (A, S) un système d'Artin–Tits de type $(2, 3, \infty)$. On suppose que le groupe A est représentable par des transvections. Si le groupe A possède une*

représentation par des transvections fidèle, alors le groupe A est bien représentable par des transvections.

Démonstration. Supposons que φ est une représentation, par des transvections, fidèle du groupe A . Alors par définition, φ est une bonne représentation du groupe A . \square

4. Application

On rappelle que la notation $[u, v]^m$ désigne le mot $uvuvuv \dots$ de longueur m obtenu par concaténation des lettres (ou plus généralement, des mots) u et v a été définie au début de la partie 3.

Dans cette dernière partie nous nous intéressons à la question suivante :

Que peut on dire du sous-monoïde d'un groupe d'Artin–Tits engendré par une partie des générateurs standards et par l'inverse des autres générateurs standards ? Plus précisément, peut on donner une présentation finie de ce monoïde ?

Il est assez facile de voir que si on note σ_1 et σ_2 les générateurs standards du groupe des tresses à trois brins B_3 , alors le sous-monoïde de B_3 engendré par σ_1 et σ_2^{-1} est un monoïde libre de base σ_1 et σ_2^{-1} . Nous pensons que dans la cas général on a :

Conjecture 4.1. *Soit (A, S) un système d'Artin–Tits associé à la matrice de Coxeter $(m_{s,t})_{s,t \in S}$ et $S_0 \cup S_1$ une partition de S .*

Le sous-monoïde de A engendré par $S_0 \cup S_1^{-1}$ possède la présentation (de monoïde) suivante :

$$\left\langle S_0 \cup S_1^{-1} \left| \begin{array}{ll} st^{-1} = t^{-1}s & s \in S_0, t \in S_1, m_{s,t} = 2 \\ [s, t]^{m_{s,t}} = [t, s]^{m_{s,t}} & s, t \in S_0, s \neq t, m_{s,t} \neq \infty \\ [s^{-1}, t^{-1}]^{m_{s,t}} = [t^{-1}, s^{-1}]^{m_{s,t}} & s, t \in S_1, s \neq t, m_{s,t} \neq \infty \end{array} \right. \right\rangle^+ .$$

La vérification par des méthodes combinatoires classiques de la validité de la présentation donnée dans la conjecture 4.1 semble assez difficile, même dans le cas du groupe des tresses à quatre brins ! Dans cette partie, nous allons déduire la proposition 4.2 du théorème 2.11. Cette proposition va dans le sens de la conjecture 4.1. Ainsi, notre représentation se révèle un outil efficace pour prouver des résultats dont la preuve semble difficile par les méthodes combinatoires classiques de l'étude des groupes et monoïdes d'Artin–Tits.

L'intérêt de la question posée réside dans sa similitude avec deux conjectures énoncées, il y aura bientôt quarante ans, par Jacques Tits. La première conjecture, prouvée depuis par John Crisp et Luis Paris ([2]), donne une présentation du sous-groupe d'un

groupe d'Artin–Tits engendré par les carrés des générateurs de la présentation standard du groupe. En fait, Crisp et Paris ont déterminé la présentation d'un sous-groupe engendré par un ensemble quelconque de puissances strictes (ou leurs inverses) des générateurs standards du groupe des tresses. La seconde conjecture, prouvée par Luis Paris dans [10], donne une présentation du sous-monoïde d'un groupe d'Artin–Tits engendré par les générateurs standards.

Proposition 4.2. *Soit (A, S) un système d'Artin–Tits de type $(2, 3, \infty)$ qui est bien représentable par des transvections, et $S_0 \cup S_1$ une partition bi-partite, relativement au 3-graphe, de S . Alors le sous-monoïde de A engendré par $S_0 \cup S_1^{-1}$ possède la présentation suivante :*

$$\langle S_0 \cup S_1^{-1} \mid s^\epsilon t^\nu = t^\nu s^\epsilon, s^\epsilon, t^\nu \in S_0 \cup S_1^{-1} \text{ et } m_{s,t} = 2 \rangle^+. \quad (\ddagger)$$

Démonstration. On peut sans restriction, supposer le graphe de Coxeter de A connexe. Puisque A est bien représentable, ceci implique que le 3-graphe de A est aussi connexe (cf. le commentaire qui suit la définition 3.10). Notons G^+ le sous-monoïde de A engendré par $S_0 \cup S_1^{-1}$ et Γ le 3-graphe de A . Les relations de la présentation (\ddagger) sont vraies dans A et donc dans G^+ . Soit φ une bonne représentation par des transvections de A . Soit s_i dans S_0 , et $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $\varphi(s_i) = L_i^\epsilon$ ou $\varphi(s_i) = R_i^\epsilon$. Puisque pour tout x_k dans l'ensemble $J_\Gamma(x_i)$ on a $m_{i,k} = 3$, on a $\varphi(s_k) = L_k^{-\epsilon}$ ou $\varphi(s_k) = R_k^{-\epsilon}$. Puisque le graphe Γ est connexe et bi-partite, de proche en proche, on trouve que pour tout s_j de S_0 , on a $\varphi(s_j) = L_j^\epsilon$ ou $\varphi(s_j) = R_j^\epsilon$, et que pour tout s_k de S_1 on a $\varphi(s_k) = L_k^{-\epsilon}$ ou $\varphi(s_k) = R_k^{-\epsilon}$. Quitte à remplacer φ par $s_i \mapsto (\varphi(s_i))^{-1}$, on peut supposer que $\epsilon = 1$. Posons $X = \varphi(S_0) \cup \varphi(S_1)^{-1}$. Par construction X ne contient aucune paire L_i, R_i , et d'après le théorème 2.11, le monoïde $\mathcal{F}^+(X)$ a pour présentation la présentation $(*)$ de ce théorème. Mais, puisque φ est une bonne représentation, si $m_{i,j} = \infty$, on a $J_\Gamma(x_i) \cap J_\Gamma(x_j) \neq \emptyset$ et on ne peut avoir $(\varphi(s_i), \varphi(s_j)) = (R_i^\epsilon, L_j^\nu)$ avec $\epsilon, \nu = \pm 1$ (cf. le commentaire suivant la définition 3.10). On en déduit que le monoïde $\mathcal{F}^+(X)$ a pour présentation

$$\left\langle X \mid \begin{array}{ll} R_i L_j = L_j R_i & \text{pour } R_i, L_j \in X \text{ et } m_{i,j} = 2 \\ R_i R_j = R_j R_i & \text{pour } R_i, R_j \in X \text{ et } m_{i,j} = 2 \\ L_i L_j = L_j L_i & \text{pour } L_i, L_j \in X \text{ et } m_{i,j} = 2 \end{array} \right\rangle^+.$$

On en déduit un morphisme de monoïdes ψ de $\mathcal{F}^+(X)$ dans A qui envoie $\varphi(s_i)$ sur s_i , pour s_i dans S_0 , et qui envoie $\varphi(s_j)^{-1}$ sur s_j^{-1} pour s_j dans S_1 . L'image de ψ est G^+ et $\varphi \circ \psi$ est l'identité. Donc le monoïde G^+ est isomorphe à $\mathcal{F}^+(X)$. \square

Dans le cas particulier du groupe des tresses, nous obtenons :

Corollaire 4.3. *Soit B_{n+1} le groupe des tresses à $n + 1$ brins muni de la présentation donnée par la figure 1. Considérons les deux ensembles $S_0 = \{\sigma_{2i} \mid 1 \leq 2i \leq n\}$*

et $S_1 = \{\sigma_{2i+1} \mid 1 \leq 2i + 1 \leq n\}$. Alors le sous-monoïde de B_{n+1} engendré par $S_0 \cup S_1^{-1}$ possède la présentation suivante :

$$\left\langle S_0 \cup S_1^{-1} \mid \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j^{-1} = \sigma_j^{-1} \sigma_i & \text{pour } \sigma_i \in S_0, \sigma_j \in S_1 \text{ et } |i - j| > 1 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & \text{pour } \sigma_i \in S_0, \sigma_j \in S_0 \\ \sigma_i^{-1} \sigma_j^{-1} = \sigma_j^{-1} \sigma_i^{-1} & \text{pour } \sigma_i \in S_1, \sigma_j \in S_1 \end{array} \right\rangle^+.$$

Le résultat de la proposition 4.2 s'applique aussi au groupe des tresses affines \tilde{B}_{4n} et au second exemple de la figure 3.

Références

- [1] S. Bigelow, The Burau representation is not faithful for $n = 5$. *Geom. Topol.* 3 (1999), 397–404. [Zbl 0942.20017](#) [MR 1725480](#)
- [2] J. Crisp et L. Paris, The solution to a conjecture of Tits on the subgroup generated by the squares of the generators of an Artin group. *Invent. Math.* 145 (2001), 19–36. [Zbl 1002.20021](#) [MR 1839284](#)
- [3] J. Crisp et L. Paris, Representations of the braid group by automorphisms of groups, invariants of links, and Garside groups. *Pacific J. Math.* 221 (2005), 1–27. [Zbl 05039939](#) [MR 2194143](#)
- [4] X. Droubay, J. Justin, et G. Pirillo, Episturmian words and some constructions of de Luca and Rauzy. *Theoret. Comput. Sci.* 255 (2001), 539–553. [Zbl 0981.68126](#) [MR 1819089](#)
- [5] C. Kassel et C. Reutenauer, Sturmian morphisms, the braid group B_4 , Christoffel words and bases of F_2 . À paraître dans *Ann. Mat. Pura Appl.*
- [6] D. Kramer, Braid groups are linear. *Ann. of Math.* (2) 155 (2002), 131–156. [Zbl 1020.20025](#) [MR 1888796](#)
- [7] W. Magnus, A. Karrass, et D. Solitar, *Combinatorial group theory*. Reprint of the 1976 second edition, Dover Publications, Mineola, NY, 2004. [Zbl 02146477](#) [MR 2109550](#)
- [8] B. H. Neumann, Die Automorphismengruppe der freien Gruppen. *Math. Ann.* 107 (1933), 367–386. [Zbl 0005.24402](#) [MR 1512806](#)
- [9] J. Nielsen, Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen. *Math. Ann.* 91 (1924), 169–209. [JFM 50.0078.04](#) [MR 1512188](#)
- [10] L. Paris, Artin monoids inject in their groups. *Comment. Math. Helv.* 77 (2002), 609–637. [Zbl 1020.20026](#) [MR 1933791](#)
- [11] D. Piollet, Sur le groupe d'automorphismes du groupe libre. I. Transvections. *J. Algebra* 222 (1999), 621–677. [Zbl 0946.20018](#) [MR 1734226](#)
- [12] G. Richomme, Lyndon morphisms. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* 10 (2003), Suppl., 761–785. [Zbl 02174594](#) [MR 2073025](#)
- [13] G. Richomme, On morphisms preserving infinite Lyndon words. *J. Autom. Lang. Comb.*, à paraître.

- [14] V. Shpilrain, Representing braids by automorphisms. *Internat. J. Algebra Comput.* 11 (2001), 773–777. [Zbl 1024.20036](#) [MR 1880377](#)
- [15] M. Wada, Group invariants of links. *Topology* 31 (1992), 399–406. [Zbl 0758.57008](#) [MR 1167178](#)

Received June 2, 2006; revised October 10, 2006

Université de Caen, UFR des Sciences, Département de Mathématiques, Laboratoire LMNO, Campus II, 14032 Caen cedex, France
E-mail: eddy.godelle@math.unicaen.fr