

Compactification de Thurston d’espaces de réseaux marqués et de l’espace de Torelli

Thomas Haettel

Abstract. We define a compactification of symmetric spaces of noncompact type, seen as spaces of isometry classes of marked lattices, analogous to the Thurston compactification of the Teichmüller space, and we show that it is equivariantly isomorphic to a Satake compactification. We then use it to define a new compactification of the Torelli space of a hyperbolic surface with marked points, and we show that it is equivariantly isomorphic to the Satake compactification of the image of the period mapping. Finally, we describe the natural stratification of a subset of the boundary.

Mathematics Subject Classification (2010). 32J05, 53C35, 32G15.

Keywords. Thurston compactification, symmetric space, space of marked lattices, Torelli space, period mapping.

Contents

1	Introduction	332
2	Un peu d’algèbre linéaire quaternionique	334
3	Compactification de l’espace des réseaux hermitiens marqués	336
4	Comparaison à la compactification de Satake	342
5	Compactification d’espaces de réseaux autoduaux	344
6	Cas du groupe de Lie exceptionnel $E_{6(-26)}$	346
7	Compactification de Thurston de l’espace de Torelli	350
8	Stratification d’une partie du bord de l’espace de Torelli	357
	Références	366

1. Introduction

Soit S une surface lisse compacte connexe orientable, de genre $g \geq 2$. La compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller $\text{Teich}(S)$ de S est l'adhérence du plongement $\text{Teich}(S) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\Pi_1(S)})$ défini par les distances de translation. Cette compactification est homéomorphe à la boule fermée de dimension $6g - 6$, munie d'une action continue du groupe modulaire $\text{MCG}(S)$, et elle a permis à Thurston de classer à isotopie près les difféomorphismes de S (voir par exemple [14]).

Tout espace symétrique de type non compact classique peut être vu comme un espace de réseaux marqués d'un espace euclidien ou hermitien (voir par exemple [4]). Soit $m \geq 1$ un entier, on appelle réseau marqué de covolume 1 de \mathbb{R}^m tout morphisme injectif de \mathbb{Z} -modules $f : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ dont l'image est discrète et de covolume 1. L'espace des classes d'isométrie de tels réseaux marqués est naturellement homéomorphe à l'espace symétrique de type non compact $\mathcal{E}_m = \text{SL}_m(\mathbb{R})/\text{SO}_m(\mathbb{R})$. On peut définir une compactification de Thurston de cet espace, grâce aux distances de translation (où \mathbb{R}^m est muni de la norme euclidienne usuelle) :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{E}_m &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}^m}), \\ [f : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{R}^m] &\longmapsto [u \mapsto \|f(u)\|]. \end{aligned}$$

Théorème. *L'application ϕ est un plongement, dont on nomme l'adhérence $\overline{\mathcal{E}_m}^{\text{T}}$ de l'image la compactification de Thurston de l'espace symétrique \mathcal{E}_m . Cette compactification est isomorphe (de manière $\text{SL}_m(\mathbb{Z})$ -équivariante) à la compactification de Satake $\overline{\mathcal{E}_m}^{\text{S}}$ associée à la représentation tautologique de $\text{SL}_m(\mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^m .*

Ceci répond à une question posée par Frédéric Paulin lors d'un exposé Bourbaki (voir [30]). Nous démontrons en fait un résultat plus général (théorème 4.1) pour l'espace symétrique de $\text{SL}_m(\mathbb{K})$, où \mathbb{K} est le corps \mathbb{R} , \mathbb{C} ou le corps gauche \mathbb{H} des quaternions de Hamilton, ainsi que pour des sous-espaces de réseaux auto-duaux, ce qui permet de traiter le cas de tous les espaces symétriques de type non compact classiques. De plus, nous étendons ce théorème au cas du groupe de Lie exceptionnel $E_{6(-26)}$ (théorème 6.4), qui est la forme réelle non compacte de rang réel 2 du groupe de Lie complexe exceptionnel E_6 .

Puis nous appliquons cette construction pour définir une compactification à la Thurston de l'espace de Torelli. L'espace de Torelli $\text{Tor}(S)$ de la surface S est l'espace des classes d'isotopie de surfaces hyperboliques munies d'un marquage de leur cohomologie par celle de S . L'espace de Torelli $\text{Tor}(S)$ est le quotient de l'espace de Teichmüller par le groupe de Torelli $T(S)$, qui est le sous-groupe du

groupe modulaire de S constitué des classes d'isotopie de difféomorphismes de S ayant une action triviale en homologie. Un théorème de Mess (voir [28]) énonce qu'en genre 2, le groupe de Torelli est un groupe libre sur une infinité dénombrable de générateurs. En genre supérieur ou égal à 3, le groupe de Torelli est de type fini (voir [22]), mais l'une des grandes questions est de savoir s'il est de présentation finie (voir [13]).

Dans l'espoir de mieux comprendre le type d'homotopie de l'espace de Torelli, nous allons en définir une compactification naturelle. Considérons une surface hyperbolique X marquée par $h : S \rightarrow X$. Le théorème de Hodge identifie l'espace $H^1(X, \mathbb{R})$ avec l'espace des 1-formes différentielles harmoniques sur X , espace qui est muni du produit scalaire L^2 : notons $\| \cdot \|_X$ la norme euclidienne associée sur $H^1(X, \mathbb{R})$. Considérons alors l'application

$$\begin{aligned} \psi : \text{Tor}(S) &\longrightarrow \mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}, \\ [X, h] &\longmapsto \{\omega \mapsto \|h^*(\omega)\|_X\}, \end{aligned}$$

et $\bar{\psi} : \text{Tor}(S) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})})$ son application quotient. Nous démontrons dans la partie 7 que l'application $\bar{\psi}$ est un revêtement de degré 2 sur son image, ramifié sur le lieu hyperelliptique de $\text{Tor}(S)$. En considérant l'adhérence de l'image de $\bar{\psi}$ dans l'espace compact $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})})$, nous définissons une compactification de l'espace de Torelli, que nous appelons *compactification de Thurston* de $\text{Tor}(S)$.

Nous allons comparer notre compactification à une autre compactification naturelle de l'espace de Torelli. L'application période envoie l'espace de Torelli $\text{Tor}(S)$ dans l'espace symétrique $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{R})/\text{SU}(g)$. L'adhérence de l'image de l'application période dans la compactification de Satake de $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{R})/\text{SU}(g)$ associée à la représentation standard de $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^{2g} définit une compactification de l'espace de Torelli, que nous appellerons *compactification de Satake* de $\text{Tor}(S)$.

Théorème. *Les compactifications de Thurston et de Satake de l'espace de Torelli sont isomorphes de manière $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ -équivariante.*

De plus, nous décrivons une partie de bord de cette compactification : nous allons décrire l'adhérence de l'image de ψ (et il serait intéressant d'avoir une description analogue, au moins à homotopie près, pour $\bar{\psi}$).

Considérons $K^{\text{sep}}(S)$ le complexe des courbes séparantes de S : les sommets de ce complexe simplicial sont les classes d'homotopie de courbes fermées simples séparantes non triviales, et les $(k-1)$ -simplexes sont les k -uplets $\sigma = \{[\gamma_1], \dots, [\gamma_k]\}$ de classes de telles courbes deux à deux disjointes et non homotopes. Notons également $\Sigma K^{\text{sep}}(S)$ l'ensemble des simplexes de $K^{\text{sep}}(S)$.

Si σ est un tel $(k-1)$ -simplexe, considérons les $k+1$ composantes connexes de $S \setminus \cup_{j=1}^k \gamma_j$, et fixons pour chacune d'elles un homéomorphisme avec $S_j \setminus P_j$, où S_j est une surface compacte lisse sans bord de genre $g_j \geq 1$, et où $P_j \subset S_j$ est un ensemble fini de points. Notons

$$\psi_\sigma : \text{Tor}_\sigma(S) = \prod_{j=0}^k \text{Tor}(S_j) \longrightarrow \mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})},$$

$$([X_j, h_j]_{0 \leq j \leq k}) \longmapsto \left\{ \omega = \sum_{j=0}^k \kappa_j^* \omega_j \longmapsto \left(\sum_{j=0}^k \|h_j^{-1*}(\omega_j)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\},$$

où $\omega_j \in H^1(S_j, \mathbb{Z})$, et où $\kappa_j : S \rightarrow S_j$ est l'application d'écrasement des $S_{j'}$, pour $j' \neq j$ (voir partie 8.3).

Théorème. *L'adhérence de l'image de l'application ψ dans l'espace $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$ est la réunion disjointe des strates*

$$\overline{\psi(\text{Tor}(S))} = \psi(\text{Tor}(S)) \sqcup \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma K^{\text{sep}}(S)} \psi_\sigma(\text{Tor}_\sigma(S)).$$

Dans une première partie, nous rappelons quelques résultats élémentaires d'algèbre linéaire quaternionique (voir [6]). Puis nous définissons la compactification de Thurston de l'espace des réseaux marqués d'un espace euclidien, hermitien complexe ou quaternionique. Ensuite, nous établissons l'isomorphisme avec la compactification de Satake. Dans une quatrième partie, nous étendons ce résultat aux espaces de réseaux autoduaux.

Ensuite, nous montrons que ces résultats s'appliquent à l'espace de Torelli. Enfin, nous décrivons la stratification d'une partie du bord de cette compactification.

Je tiens à remercier chaleureusement Frédéric Paulin pour les nombreux conseils qu'il m'a donnés sur cet article. Je tiens également à remercier Daniel Massart, qui m'a expliqué les liens entre les normes stable et L^2 .

2. Un peu d'algèbre linéaire quaternionique

Soit \mathbb{K} le corps (commutatif) \mathbb{R} , \mathbb{C} ou le corps (gauche) des quaternions de Hamilton \mathbb{H} (de base vectorielle réelle $1, i, j, k$, où $i^2 = j^2 = -1$ et $ij = -ji = k$). Si $x \in \mathbb{K}$, notons \bar{x} son conjugué et $\text{tr}(x)$ sa trace réduite (avec $\bar{x} = x$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\bar{x} = a - ib$ si $x = a + ib \in \mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\bar{x} = a - ib - jc - kd$ si $x = a + ib + jc + kd \in \mathbb{K} = \mathbb{H}$). Nous avons des inclusions naturelles

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$. Pour la théorie générale des formes sesquilinéaires sur des espaces vectoriels de dimension finie sur des corps gauches, nous renvoyons à [6].

Fixons un entier $m \geq 1$. L'espace vectoriel \mathbb{K}^m sera toujours considéré à droite, et l'action linéaire des matrices de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ sur \mathbb{K}^m à gauche. Munissons l'espace vectoriel \mathbb{K}^m de sa structure hermitienne standard $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i y_i$.

Si $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, notons \bar{M} la matrice de coefficients les conjugués de ceux de M , et $M^* = {}^t\bar{M}$ l'adjointe de M : elle vérifie $(MN)^* = N^*M^*$. Une matrice M est dite *hermitienne* si $M^* = M$, et *unitaire* si $MM^* = I_m$ (ce qui équivaut à $M^*M = I_m$), où I_m désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$.

Rappelons une définition du déterminant de Dieudonné d'une matrice à coefficients dans \mathbb{H} (voir par exemple [2, § IV.1, p. 149]). Pour cela, considérons l'application η de $\mathcal{M}_m(\mathbb{H})$ dans $\mathcal{M}_{2m}(\mathbb{C})$ qui à une matrice $M = A + jB$, où $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ associe la matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{C}).$$

C'est un homomorphisme injectif de \mathbb{R} -algèbres à droite, équivariant pour l'adjoint. Remarquons de plus que le déterminant de $\eta(M)$ est un nombre réel positif. Ceci permet de définir $\det(M) = \sqrt{\det(\eta(M))}$, le *déterminant de Dieudonné* de M . La matrice M est alors inversible si et seulement si $\det(M) \neq 0$, et si $N \in \mathcal{M}_m(\mathbb{H})$ alors $\det(MN) = \det(M)\det(N)$. Cela permet de définir le sous-groupe $SL_m(\mathbb{H})$ de $GL_m(\mathbb{H})$. Ce sous-groupe peut également être défini intrinsèquement : c'est le sous-groupe de $GL_m(\mathbb{H})$ constitué des automorphismes linéaires de \mathbb{H}^m qui préservent une mesure de Haar de \mathbb{H}^m .

Notons $U_m(\mathbb{K})$ le groupe unitaire de \mathbb{K}^m : c'est le sous-groupe de $GL_m(\mathbb{K})$ constitué des matrices unitaires. Notons de plus $SU_m(\mathbb{K}) = U_m(\mathbb{K}) \cap SL_m(\mathbb{K})$ le groupe spécial unitaire de \mathbb{K}^m . Remarquons que lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, le groupe $SU_m(\mathbb{H})$ est égal à $U_m(\mathbb{H})$, et également à l'image réciproque par l'application η du sous-groupe $U_{2m}(\mathbb{C})$. Le groupe $SU_m(\mathbb{K})$ est un sous-groupe compact maximal du groupe de Lie $SL_m(\mathbb{K})$.

Les résultats suivants sont bien connus, ou analogues à des résultats bien connus (voir par exemple [17] pour des démonstrations complètes).

Lemme 2.1 (diagonalisation des matrices hermitiennes). *Soit $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{H})$ une matrice hermitienne positive. Alors il existe une matrice unitaire $U \in U_m(\mathbb{H})$ et une matrice diagonale positive réelle $D \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ telles que $M = UDU^{-1}$.*

Lemme 2.2 (décomposition polaire). *Soit $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$. Alors il existe une matrice unitaire $U \in U_m(\mathbb{K})$ et une unique matrice hermitienne positive $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ telles que $M = PU$.*

Nous aurons également besoin d'identités de polarisation, la première étant immédiate.

Lemme 2.3 (identité de polarisation complexe). *Soit $\tau = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Alors pour tous $u, v \in \mathbb{C}^m$, nous avons*

$$\langle u | v \rangle = \frac{1}{4} \left(\left(1 + \frac{ia}{b} \right) (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) - \frac{i}{b} (\|u + v\tau\|^2 - \|u - v\tau\|^2) \right).$$

Lemme 2.4 (identité de polarisation quaternionique). *Soit (q_1, \dots, q_4) une \mathbb{R} -base de \mathbb{H} . Alors il existe quatre quaternions $(\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{H}^8$ tels que, pour tous $u, v \in \mathbb{H}^m$, nous ayons*

$$\langle u | v \rangle = \sum_{l=1}^4 (\|u + vq_l\|^2 - \|u - vq_l\|^2) \lambda_l.$$

Nous aurons également besoin du lemme suivant.

Lemme 2.5. *Soient M et M' deux matrices de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ telles que, pour tout $u \in \mathbb{K}^m$, nous ayons $\|M(u)\| = \|M'(u)\|$. Alors il existe $K \in \mathbb{U}_m(\mathbb{K})$ tel que $KM = M'$.*

3. Compactification de l'espace des réseaux hermitiens marqués

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, notons $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, notons \mathcal{O} un ordre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres quadratique imaginaire (par exemple $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$). Enfin si $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, notons \mathcal{O} un ordre dans une algèbre de quaternions A sur \mathbb{Q} non déployée sur \mathbb{R} – et nous identifierons alors $A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ et \mathbb{H} – (par exemple $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[1, i, j, \frac{1+i+j+k}{2}]$). Ainsi \mathcal{O} est un \mathbb{Z} -réseau de l'espace vectoriel réel \mathbb{K} , et est un anneau contenant 1.

On appelle *réseau* (ou \mathcal{O} -réseau lorsque l'on veut préciser \mathcal{O}) de \mathbb{K}^m tout \mathcal{O} -module à droite engendré par une \mathbb{K} -base de \mathbb{K}^m . On l'appelle *réseau euclidien* si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, *hermitien complexe* si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et *hermitien quaternionien* si $\mathbb{K} = \mathbb{H}$. On appelle *covolume* d'un réseau Γ le volume du quotient \mathbb{K}^m / Γ pour la mesure localement égale à la mesure de Haar sur \mathbb{K}^m , normalisée de sorte que le covolume du réseau standard \mathcal{O}^m soit égal à 1. Un *réseau marqué* de \mathbb{K}^m est un morphisme de \mathcal{O} -modules à droite de \mathcal{O}^m dans \mathbb{K}^m dont l'image est un réseau. Le groupe $\mathrm{GL}_m(\mathcal{O})$ agit à gauche par précomposition par l'adjoint, et le groupe de Lie $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ agit à droite par postcomposition par l'adjoint sur l'ensemble des réseaux marqués de \mathbb{K}^m .

Notons \mathcal{E}_m l'espace symétrique de type non compact du groupe de Lie quasi-simple $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'espace homogène $\mathcal{E}_m = \mathrm{SL}_m(\mathbb{K})/\mathrm{SU}_m(\mathbb{K})$, où $\mathrm{SU}_m(\mathbb{K})$ désigne le groupe spécial unitaire de \mathbb{K}^m , muni de l'action à gauche par translations de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ et d'une métrique riemannienne invariante par cette action.

Puisque \mathcal{O} est un ordre, tout morphisme de \mathcal{O} -modules à droite de \mathcal{O}^m dans \mathbb{K}^m s'étend uniquement en un endomorphisme de l'espace vectoriel à droite \mathbb{K}^m , et réciproquement tout endomorphisme de \mathbb{K}^m se restreint en un morphisme de \mathcal{O} -modules à droite de \mathcal{O}^m dans \mathbb{K}^m . Ainsi nous utiliserons les mêmes notations pour ces deux points de vue, sans risque de confusion.

Notons $\mathrm{SL}_m^1(\mathbb{K})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ constitué des automorphismes de \mathbb{K}^m dont le déterminant est de module 1. L'ensemble des réseaux marqués de \mathbb{K}^m de covolume 1, muni de la topologie induite par la topologie produit sur $(\mathbb{K}^m)^{\mathcal{O}^m}$, est muni de l'action à droite continue et simplement transitive de $\mathrm{SL}_m^1(\mathbb{K})$ par postcomposition par l'adjoint, et est muni de l'action à gauche de $\mathrm{SL}_m(\mathcal{O})$ par précomposition par l'adjoint.

Notons \mathcal{E}'_m l'ensemble des classes d'isométrie (positive ou non) de réseaux marqués de \mathbb{K}^m de covolume 1, muni de la topologie quotient : deux réseaux marqués f et f' sont identifiés s'il existe $g \in U_m(\mathbb{K})$ tel que $g \circ f = f'$. L'homéomorphisme entre l'espace des réseaux marqués et $\mathrm{SL}_m^1(\mathbb{K})$ passe au quotient en un homéomorphisme entre l'espace \mathcal{E}'_m et l'espace homogène $\mathrm{SL}_m^1(\mathbb{K})/U_m(\mathbb{K}) = \mathrm{SL}_m(\mathbb{K})/\mathrm{SU}_m(\mathbb{K}) = \mathcal{E}_m$, qui est de plus $\mathrm{SL}_m(\mathcal{O})$ -équivariant. Nous noterons dorénavant \mathcal{E}_m tant l'espace des classes d'isométrie de réseaux marqués que l'espace symétrique, sans risque de confusion.

Rappelons ce qu'est une compactification d'un espace topologique X localement compact : c'est la donnée d'une paire (K, i) , où K est un espace topologique compact et $i : X \rightarrow K$ est un plongement d'image ouverte et dense. Si G est un groupe agissant continûment sur X , on dit que (K, i) est une G -compactification si l'action de G sur $i(X)$, conjuguée par i de l'action de G sur X , s'étend continûment à K . Cette extension est alors unique. On dit que deux (G) -compactifications (K, i) et (K', i') de X sont (G) -isomorphes s'il existe un homéomorphisme (G) -équivariant f de K sur K' tel que $i' = f \circ i$.

Nous allons définir une compactification de Thurston des espaces symétriques \mathcal{E}_m , analogue à la compactification de Thurston des espaces de Teichmüller. Rappelons comment celle-ci est construite (voir par exemple [14], [29]). Si E est un ensemble, notons $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^E)$ l'espace topologique quotient de l'espace $\mathbb{R}_+^E \setminus \{0\}$, muni de la topologie produit, par les homothéties de rapport strictement positif. Si S est une surface compacte connexe orientée de genre supérieur ou égal à 2

et si Γ est son groupe fondamental, l'espace de Teichmüller de S est l'ensemble des classes d'isométrie équivariante d'actions isométriques propres et libres de Γ sur le plan hyperbolique réel $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ (voir par exemple [30]). La compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller de S est alors l'adhérence de l'image du plongement dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\Gamma})$, qui à la classe d'une telle action de Γ sur $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$ associe la classe de l'application qui à un élément γ de Γ associe la distance de translation $\ell(\gamma) = \inf_{x \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2} d(x, \gamma x)$ de γ dans $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$.

Nous allons modifier cette définition en remplaçant la surface S par le tore $\mathbb{K}^m / \mathcal{O}^m$, et le groupe Γ par \mathcal{O}^m , le groupe fondamental du tore. Notons ϕ l'application de \mathcal{E}_m dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$ qui à la classe d'isométrie équivariante d'un réseau marqué associe la classe d'homothétie de sa fonction distance de translation : un réseau marqué étant un morphisme de \mathcal{O} -modules à droite f de \mathcal{O}^m dans \mathbb{K}^m , notons $\phi([f])$ la classe d'homothétie de l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^m &\longrightarrow \mathbb{R}_+, \\ u &\longmapsto \|f(u)\|, \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme hermitienne de \mathbb{K}^m .

Lemme 3.1. *L'application ϕ est bien définie et continue.*

Remarquons que puisque les espaces topologiques \mathcal{E}_m et $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$ sont métrisables, on peut utiliser les critères séquentiels pour démontrer des propriétés topologiques de ces espaces.

Démonstration. Composer un réseau marqué f au but par une isométrie de \mathbb{K}^m ne change pas $\|f(u)\|$, pour tout $u \in \mathcal{O}^m$. Donc l'application ϕ est bien définie.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réseaux marqués de covolume 1, qui converge vers un réseau marqué f de covolume 1. Alors la continuité de la norme assure que, pour tout $u \in \mathcal{O}^m$, la suite $(\|f_n(u)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\|f(u)\|$. Ainsi la suite $(\phi([f_n]))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\phi([f])$. Donc l'application ϕ est continue. \square

Lemme 3.2. *L'adhérence de l'image de ϕ est l'ensemble des classes d'homothétie d'applications*

$$\begin{aligned} \ell_f : \mathcal{O}^m &\longrightarrow \mathbb{R}_+, \\ u &\longmapsto \|f(u)\|, \end{aligned}$$

où f est un endomorphisme non nul de \mathbb{K}^m . L'image de ϕ est l'ensemble des classes d'homothétie d'applications ℓ_f pour lesquelles f est inversible.

Démonstration. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réseaux marqués de covolume 1, telle que la suite $(\phi([f_n]))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la classe d'homothétie d'une application $\ell : \mathcal{O}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Quitte à extraire, la suite $(f_n \mathbb{K})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f \mathbb{K}$ dans l'espace projectif à droite des endomorphismes de \mathbb{K}^m , où f est un endomorphisme de \mathbb{K}^m non nul. Or, pour tout $v \in \mathbb{K}^m$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, nous avons $\|v\lambda\| = \|v\|\|\lambda\|$. Alors, à homothétie réelle près, pour tout $u \in \mathcal{O}^m$, la suite $(\|f_n(u)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell(u) = \|f(u)\|$. Donc $\ell = \ell_f$ est bien du type décrit.

Réciproquement, soit f un endomorphisme de \mathbb{K}^m non nul, et soit $f_n = f + \frac{1}{n+1} \text{id}$, pour tout entier $n \geq n_0$ tel que f_n soit inversible. Alors l'endomorphisme $|\det(f_n)|^{\frac{1}{m}} f_n$ appartient à $\text{SL}_m^1(\mathbb{K})$, donc définit un morphisme de \mathcal{O} -modules de \mathcal{O}^m dans \mathbb{K}^m dont l'image est de covolume 1. De plus, la suite $(\phi([f_n]))_{n \geq n_0}$ converge vers la classe d'homothétie de l'application ℓ_f qui à $u \in \mathcal{O}^m$ associe $\|f(u)\|$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$.

Il est clair que l'image de ϕ est incluse dans l'ensemble des classes d'homothétie d'applications ℓ_f pour lesquelles f est inversible. Réciproquement, si f est un endomorphisme inversible de \mathbb{K}^m , alors à une homothétie réelle près on peut supposer que $|\det f| = 1$, et donc $\mathbb{R}_+^* \ell_f = \phi([f])$, où $f : \mathcal{O}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$ est bien un morphisme de \mathcal{O} -modules dont l'image est de covolume 1. \square

Lemme 3.3. *L'image de ϕ est ouverte dans son adhérence.*

Démonstration. Soit f un morphisme de \mathcal{O} -modules de \mathcal{O}^m dans \mathbb{K}^m dont l'image est de covolume 1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes non nuls de \mathbb{K}^m , telle que la suite $(\mathbb{R}_+^* \ell_{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\phi([f])$. À des homothéties réelles près et quitte à extraire, on peut supposer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un endomorphisme g de \mathbb{K}^m non nul. Dans ce cas, il est immédiat que la suite $(\ell_{f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ_g dans $\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m}$. Donc $\mathbb{R}_+^* \ell_g = \phi([f])$, et puisque f est inversible, la fonction ℓ_g ne s'annule qu'en $0 \in \mathcal{O}^m$, et donc l'endomorphisme g est inversible. L'ensemble des endomorphismes inversibles de \mathbb{K}^m étant ouvert, on en déduit qu'à partir d'un certain rang les endomorphismes f_n sont inversibles, et donc $\mathbb{R}_+^* \ell_{f_n} = \phi([f_n])$ appartient à l'image de ϕ : celle-ci est donc ouverte dans son adhérence. \square

Lemme 3.4. *L'adhérence de l'image de ϕ est compacte dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$.*

Démonstration. Soit $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans l'adhérence de l'image de ϕ . D'après le lemme 3.2, il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ un endomorphisme f_n de \mathbb{K}^m non nul tel que, pour tout $u \in \mathcal{O}^m$, nous ayons $\ell_n(u) = \ell_{f_n}(u) = \|f_n(u)\|$. Par compacité

de l'espace projectif à droite des endomorphismes de \mathbb{K}^m , quitte à extraire et à homothéties réelles près, on peut supposer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un endomorphisme f de \mathbb{K}^m non nul. Alors la suite $(\mathbb{R}_+^* \ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la classe d'homothétie de l'application ℓ_f , et cette limite appartient à l'adhérence de l'image de ϕ . \square

Pour démontrer l'injectivité de l'application ϕ , nous avons besoin d'un renforcement du lemme 2.5.

Lemme 3.5. *Soient f et f' des endomorphismes de \mathbb{K}^m tels que, pour tout $u \in \mathcal{O}^m$, nous ayons $\|f(u)\| = \|f'(u)\|$. Alors il existe $k \in U_m(\mathbb{K})$ tel que $kf = f'$.*

Démonstration. Soit $d \in \{1, 2, 4\}$ la dimension de \mathbb{K} sur \mathbb{R} , et soit (e_1, \dots, e_{dm}) une \mathbb{R} -base de \mathbb{K}^m formée par m copies d'une \mathbb{Z} -base de \mathcal{O} : ainsi, tous les éléments de cette base appartiennent à \mathcal{O}^m . Soit $u \in \mathbb{K}^m$, et soit $u = \sum_{j=1}^{dm} e_j u_j$ sa décomposition dans cette base : les scalaires u_j sont donc réels. Alors

$$\begin{aligned} \|f(u)\|^2 &= \left\| \sum_{j=1}^{dm} f(e_j u_j) \right\|^2 \\ &= \sum_{j,k=1}^{dm} \langle f(e_j) u_j \mid f(e_k) u_k \rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^{dm} u_j u_k \langle f(e_j) \mid f(e_k) \rangle. \end{aligned}$$

Or, par l'identité de polarisation pour le corps \mathbb{K} (voir le lemme 2.3 ou 2.4), et par l'hypothèse sur f et f' , nous savons que

$$\langle f(e_j) \mid f(e_k) \rangle = \langle f'(e_j) \mid f'(e_k) \rangle, \quad \text{pour tous } j, k \in \llbracket 1, dm \rrbracket.$$

On en déduit donc que $\|f(u)\| = \|f'(u)\|$, et ceci pour tout $u \in \mathbb{K}^m$. D'après le lemme 2.5, on en déduit qu'il existe $k \in U_m(\mathbb{K})$ tel que $kf = f'$. \square

Proposition 3.6. *L'application ϕ est un plongement.*

Démonstration. Montrons que l'application ϕ est injective : soient f et f' deux réseaux marqués de covolume 1, tels que $\phi([f]) = \phi([f'])$. Il existe donc un réel strictement positif λ tel que pour tout $u \in \mathcal{O}^m$, nous ayons $\|f(u)\| = \lambda \|f'(u)\| = \|\lambda f'(u)\|$. D'après le lemme 3.5, on en déduit qu'il existe $k \in \text{U}_m(\mathbb{K})$ tel que $kf = \lambda f'$. Or $\det(kf) = \det(k) \det(f)$ est de module 1, et $\det(\lambda f') = \lambda^m \det(f') = \lambda^m$ est un réel strictement positif, donc $\lambda = 1$. Ainsi $kf = f'$, donc $[f] = [f']$ dans \mathcal{E}_m : l'application ϕ est injective.

Montrons que l'application ϕ est propre : soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réseaux marqués de covolume 1, telle que la suite $(\phi([f_n]))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\phi([f])$, où f est un réseau marqué de covolume 1. Il existe donc une suite de réels strictement positifs $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout $u \in \mathcal{O}^m$, la suite $(\lambda_n \|f_n(u)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\|f(u)\|$. Ainsi la suite d'endomorphismes $(\lambda_n f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée : quitte à extraire, on peut supposer qu'elle converge vers un endomorphisme g de \mathbb{K}^m . Alors, pour tout $u \in \mathcal{O}^m$, la suite $(\|\lambda_n f_n(u)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\|g(u)\| = \|f(u)\|$. D'après le lemme 3.5, on en déduit qu'il existe $k \in \text{U}_m(\mathbb{K})$ tel que $kg = f$, et en particulier g a un déterminant de module 1. Puisque la suite $(|\det(\lambda_n f_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $|\det g| = 1$, on en déduit que la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1. Donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $g = k^{-1}f$, et la suite $([f_n])_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $[g] = [f]$ dans l'espace \mathcal{E}_m . L'application ϕ est ainsi propre.

L'application ϕ , continue, injective et propre, est donc un plongement. □

L'adhérence de l'image de ϕ dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$ fournit une compactification de \mathcal{E}_m , donc de l'espace symétrique \mathcal{E}_m , que l'on appelle *compactification de Thurston*, et que l'on note $\overline{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{T}}$. Notons que c'est une $\text{SL}_m(\mathcal{O})$ -compactification, c'est-à-dire que l'action de $\text{SL}_m(\mathcal{O})$ s'étend continûment au bord de \mathcal{E}_m , où $\text{SL}_m(\mathcal{O})$ agit sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$ à gauche par précomposition par l'adjoint et passage au quotient $\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$.

Cette compactification est en fait munie d'une action continue à gauche de $\text{SL}_m(\mathbb{K})$: pour le voir, on pourrait remplacer dans la construction qui précède \mathcal{O}^m par \mathbb{K}^m . Nous allons expliciter directement l'action de $\text{SL}_m(\mathbb{K})$ sur $\overline{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{T}}$: soit $g \in \text{SL}_m(\mathbb{K})$, et soit $\mathbb{R}_+^* \ell \in \overline{\mathcal{E}_m}^{\mathcal{T}}$. D'après le lemme 3.2, il existe un endomorphisme f de \mathbb{K}^m non nul tel que, pour tout $u \in \mathcal{O}^m$, nous ayons $\ell(u) = \|f(u)\|$. Définissons alors $g \cdot \mathbb{R}_+^* \ell$ comme la classe d'homothétie de l'application qui à $u \in \mathcal{O}^m$ associe $\|f(g^*(u))\|$. C'est une action continue, qui étend l'action de $\text{SL}_m(\mathcal{O})$ à gauche par précomposition par l'adjoint.

4. Comparaison à la compactification de Satake

Nous voulons comparer la compactification de Thurston définie ci-dessus à l'une des compactifications de Satake. Rappelons la construction de ces compactifications [31]. Soit G un groupe de Lie réel connexe semi-simple de centre fini sans facteur compact, et soit $\rho: G \rightarrow \mathrm{SL}(V)$ une représentation linéaire irréductible et de noyau fini de G dans un \mathbb{K} -module à droite de dimension finie V . Soit K un sous-groupe compact maximal de G contenant $\mathrm{Ker} \rho$. Puisque K est compact, il existe un produit scalaire hermitien sur V tel que $\rho(K) \subset \mathrm{SU}(V)$. Si h^* désigne l'adjoint d'un élément h de $\mathrm{SL}(V)$ pour le produit scalaire hermitien de V , alors l'involution de Cartan de $\mathrm{SL}(V)$ associée à $\mathrm{SU}(V)$ est $h \mapsto (h^*)^{-1}$. Si $g \in G$ est tel que $\rho(g) = (\rho(g)^*)^{-1}$, alors $\rho(g) \in \mathrm{SU}(V)$, donc $g \in \rho^{-1}(\mathrm{SU}(V)) = K$ car K est maximal.

Notons $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}(V))$ l'espace projectif de l'espace vectoriel réel des applications linéaires hermitiennes de V dans V . Cet espace est muni d'une action naturelle de G à gauche, définie par :

$$g \cdot Rh = \mathbb{R}\rho(g)h\rho(g)^*, \quad \text{pour tous } g \in G, Rh \in \mathbb{P}(\mathrm{Sym}(V)).$$

D'après [31], l'application de G/K dans $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}(V))$ qui à gK associe $\mathbb{R}\rho(g)\rho(g)^*$ est un plongement, dont l'adhérence de l'image est appelée la *compactification de Satake* de G/K associée à la représentation ρ . L'action de G sur $\mathbb{P}(\mathrm{Sym}(V))$ préserve l'image de ce plongement, qui est de plus équivariant pour les actions de G : c'est donc une G -compactification de G/K .

Considérons ici le groupe $G = \mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$, et le sous-groupe $K = \mathrm{SU}_m(\mathbb{K})$. Soit $\rho = \mathrm{id}$ la représentation tautologique de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ pour l'action linéaire à gauche de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ sur le \mathbb{K} -module à droite $V = \mathbb{K}^m$. Le plongement de Satake associé à ρ est

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}_m(\mathbb{K}) / \mathrm{SU}_m(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Sym}(\mathbb{K}^m)), \\ \gamma \mathrm{SU}_m(\mathbb{K}) &\longmapsto \mathbb{R}\gamma\gamma^*. \end{aligned}$$

Notons $\overline{\mathcal{E}}_m^{\mathcal{S}}$ l'adhérence de son image, c'est-à-dire la compactification de Satake de \mathcal{E}_m associée à la représentation ρ .

Théorème 4.1. *Les deux compactifications $\overline{\mathcal{E}}_m^{\mathcal{J}}$ et $\overline{\mathcal{E}}_m^{\mathcal{S}}$ sont $\mathrm{SL}_m(\mathbb{K})$ -isomorphes.*

Démonstration. La compactification de Satake $\overline{\mathcal{E}}_m^{\mathcal{S}}$, adhérence des classes d'homothétie des matrices hermitiennes définies positives, est l'ensemble des classes d'homothétie des matrices hermitiennes positives non nulles : en effet,

soit a une matrice hermitienne positive non nulle. Alors, pour $n \geq n_0$, la matrice $a + \frac{1}{n+1}I_m$ est hermitienne, positive et inversible, donc définie positive. Ainsi $(a + \frac{1}{n+1}I_m)_{n \geq n_0}$ est une suite de matrices hermitiennes définies positives convergeant vers a . Par ailleurs, l'ensemble des matrices hermitiennes positives est fermé. Nous identifierons donc $\overline{\mathcal{E}_m^S}$ avec l'espace des classes d'homothétie de matrices hermitiennes positives non nulles.

Définissons une application $\xi : \overline{\mathcal{E}_m^S} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$. Soit a une matrice hermitienne positive non nulle. Par diagonalisation (voir le lemme 2.1 si $\mathbb{K} = \mathbb{H}$), la matrice a admet une unique racine carrée hermitienne positive que l'on notera \sqrt{a} , c'est-à-dire telle que $\sqrt{a}^2 = a$. Remarquons que si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors $\sqrt{\lambda a} = \sqrt{\lambda} \sqrt{a}$. Définissons l'application

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(a) : \mathcal{O}^m &\longrightarrow \mathbb{R}_+, \\ u &\longmapsto \|\sqrt{a}(u)\|, \end{aligned}$$

ce qui permet de poser

$$\begin{aligned} \xi : \overline{\mathcal{E}_m^S} &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m}), \\ \mathbb{R}a &\longmapsto \mathbb{R}_+^* \hat{\xi}(a), \end{aligned}$$

application qui est bien définie.

Montrons que l'image de ξ est égale à $\overline{\mathcal{E}_m^J}$. D'après la définition de ξ et le lemme 3.2, elle est incluse dedans. Maintenant, soit f un endomorphisme non nul de \mathbb{K}^m , et soit $\ell_f : u \mapsto \|fu\|$. Montrons alors que $\hat{\xi}(f^*f) = \ell_f$, ce qui conclura par le lemme 3.2. Soit $u \in \mathcal{O}^m$, et soit $f = kp$ une décomposition polaire de $f : k \in U_m(\mathbb{K})$ et p est un endomorphisme hermitien positif non nul. Alors $\sqrt{f^*f} = \sqrt{p^*k^*kp} = \sqrt{p^2} = p$, donc $\hat{\xi}(f^*f)(u) = \|\sqrt{f^*f}u\| = \|pu\| = \|kpu\| = \|fu\| = \ell_f(u)$.

Cette application est $SL_m(\mathbb{K})$ -équivariante : soit a une matrice hermitienne positive non nulle, et soit $g \in SL_m(\mathbb{K})$. D'après la décomposition polaire (voir le lemme 2.2 si $\mathbb{K} = \mathbb{H}$), il existe une matrice unitaire k et une matrice hermitienne positive p non nulle telles que $g\sqrt{a} = pk$. Soit $u \in \mathcal{O}^m$, alors

$$\hat{\xi}(g \cdot a)(u) = \hat{\xi}(gag^*)(u) = \|\sqrt{gag^*}(u)\|.$$

Or $gag^* = g\sqrt{a}(g\sqrt{a})^* = (pk)(pk)^* = pp^* = p^2$, donc $\sqrt{gag^*} = p$. Ainsi

$$\hat{\xi}(g \cdot a)(u) = \|pu\| = \|p^*u\| = \|k\sqrt{a}g^*u\| = \|\sqrt{a}g^*u\| = (g \cdot \hat{\xi}(a))(u),$$

où nous renvoyons à la fin de la partie 3 pour la définition de l'action de $SL_m(\mathbb{K})$ sur $\overline{\mathcal{E}_m^J}$. Nous avons ainsi $\xi(g \cdot \mathbb{R}a) = g \cdot \xi(\mathbb{R}a)$.

L'application qui à une matrice hermitienne positive a associe sa racine carrée hermitienne positive \sqrt{a} est continue, et par continuité de la norme on en déduit que, à $u \in \mathcal{O}^m$ fixé, l'application qui à a associe $\hat{\xi}(a)(u)$ est continue. Puisque l'espace $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m})$ est muni de la topologie quotient de la topologie produit sur $\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^m}$, il s'ensuit que l'application $\hat{\xi}$ est continue. On en déduit que l'application quotient ξ est continue.

Montrons enfin que l'application ξ est injective : soient a et a' des matrices hermitiennes positives non nulles telle que $\xi(\mathbb{R}a) = \xi(\mathbb{R}a')$. À une homothétie de rapport strictement positif près, on peut supposer que $\hat{\xi}(a) = \hat{\xi}(a')$. Ainsi, pour tout $u \in \mathcal{O}^m$, nous avons $\|\sqrt{a}u\| = \|\sqrt{a'}u\|$. D'après le lemme 3.5, on en déduit qu'il existe $k \in U_m(\mathbb{K})$ tel que $k\sqrt{a} = \sqrt{a'}$. Par unicité dans la décomposition polaire, on conclut que $\sqrt{a} = \sqrt{a'}$, d'où $a = a'$. Ainsi l'application ξ est injective.

Ainsi l'application ξ est une bijection continue et $SL_m(\mathbb{K})$ -équivariante de l'espace compact $\overline{\mathcal{E}_m^S}$ sur l'espace séparé $\overline{\mathcal{E}_m^T}$, donc est un homéomorphisme $SL_m(\mathbb{K})$ -équivariant. \square

5. Compactification d'espaces de réseaux autoduaux

Pour les prérequis de cette partie, on renvoie à [4]. Fixons $\tau = \text{id}_{\mathbb{R}}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\tau = \text{id}_{\mathbb{C}}$ ou la conjugaison si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et τ la conjugaison si $\mathbb{K} = \mathbb{H}$. Fixons b une forme τ -sesquilinéaire à gauche sur \mathbb{K}^m non dégénérée, hermitienne ou anti-hermitienne. Dans une base adaptée, la forme b est définie par

$$b(x, y) = {}^t x^\tau J y, \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{K}^m,$$

où $J \in U_m(\mathbb{K}) \cap GL_m(\mathcal{O})$.

Notons $SU(b)$ le sous-groupe de $GL_m(\mathbb{K})$ constitué des automorphismes de \mathbb{K}^m qui préservent b : puisque J est unitaire, le groupe $SU(b)$ est autoadjoint. Si Λ est un \mathcal{O} -réseau de \mathbb{K}^m , on définit son dual par rapport à b par :

$$\Lambda^{*b} = \{y \in \mathbb{K}^m : \text{pour tout } x \in \Lambda, b(x, y) \in \mathcal{O}\}.$$

On dit que le réseau Λ est *autodual* (pour b) si $\Lambda^{*b} = \Lambda$. Par exemple, le réseau \mathcal{O}^m est autodual.

Soit $\Lambda_0 = \mathcal{O}^m$ le \mathcal{O} -réseau standard autodual de covolume 1, marqué par l'identité $f_0: \mathcal{O}^m \rightarrow \Lambda_0$.

Pour l'action à droite de $SL_m(\mathbb{K})$ sur l'espace des réseaux marqués par post-composition par l'adjoint, l'orbite du réseau marqué f_0 par $SU(b)$ est constituée de réseaux autoduaux. En effet, soit $g \in SU(b)$, et considérons $y \in (g^* \Lambda_0)^{*b}$.

Nous savons donc que pour tout $x \in g^* \Lambda_0, b(x, y) \in \mathcal{O}$. Pour tout $x \in \Lambda_0$, nous avons $b(g^* x, y) = b(x, g^{*-1} y) \in \mathcal{O}$. Donc $g^{*-1} y \in \Lambda_0^{*b} = \Lambda_0$. Ainsi $(g^* \Lambda_0)^{*b} = g^* \Lambda_0$.

Dans l'identification entre l'espace \mathcal{E}_m des classes d'isométrie de réseaux marqués de covolume 1 et l'espace symétrique $SL_m(\mathbb{K})/SU_m(\mathbb{K})$, l'ensemble des classes d'isométrie de réseaux marqués dans l'orbite de f_0 sous $SU(b)$ s'identifie alors à l'espace homogène $SU(b) SU_m(\mathbb{K})/SU_m(\mathbb{K}) = SU(b)/(SU(b) \cap SU_m(\mathbb{K}))$. Notons \mathcal{E}_m^b ce sous-espace de \mathcal{E}_m .

On supposera que le groupe $SU(b)$ n'est pas compact, de sorte que l'espace homogène \mathcal{E}_m^b n'est pas compact. Lorsque l'on restreint le plongement ϕ de \mathcal{E}_m dans $\mathcal{E}_m^{\mathcal{J}}$ au sous-espace \mathcal{E}_m^b , l'adhérence de son image définit la *compactification de Thurston* $\overline{\mathcal{E}_m^b}^{\mathcal{J}}$ de l'espace \mathcal{E}_m^b .

Lorsque l'on restreint le plongement \mathcal{E}_m dans $\mathcal{E}_m^{\mathcal{S}}$ au sous-espace \mathcal{E}_m^b , l'adhérence de son image définit la *compactification de Satake* $\overline{\mathcal{E}_m^b}^{\mathcal{S}}$ de l'espace \mathcal{E}_m^b .

Le groupe $SU(b)$ est un groupe de Lie réel simple non compact. Alors la compactification de Satake définie ci-dessus est naturellement isomorphe à la compactification de Satake associée à la représentation ρ de $SU(b)$ dans $SL_m(\mathbb{K})$, restriction de l'identité de $SL_m(\mathbb{K})$.

Proposition 5.1. *La compactification de Thurston $\overline{\mathcal{E}_m^b}^{\mathcal{J}}$ de l'espace des réseaux marqués autoduaux est $SU(b)$ -isomorphe à la compactification de Satake $\overline{\mathcal{E}_m^b}^{\mathcal{S}}$.*

Démonstration. L'homéomorphisme $SL_m(\mathbb{K})$ -équivariant (voir le théorème 4.1) entre $\overline{\mathcal{E}_m^b}^{\mathcal{J}}$ et $\overline{\mathcal{E}_m^b}^{\mathcal{S}}$ induit un homéomorphisme $SU(b)$ -équivariant entre $\overline{\mathcal{E}_m^b}^{\mathcal{J}}$ et $\overline{\mathcal{E}_m^b}^{\mathcal{S}}$. □

Dans la suite, nous aurons besoin de savoir que dans le cas de l'espace vectoriel réel \mathbb{R}^{2g} muni de la forme symplectique standard

$$b(x, x') = \sum_{j=1}^g x_j x'_{g+j} - x_{g+j} x'_j,$$

tout réseau autodual pour b est dans l'orbite du réseau \mathbb{Z}^{2g} .

Lemme 5.2. *Tout réseau autodual pour b de \mathbb{R}^{2g} est l'image par un élément de $Sp_{2g}(\mathbb{R})$ du réseau standard \mathbb{Z}^{2g} .*

Démonstration. Soit Λ un réseau autodual de \mathbb{R}^{2g} de covolume 1. Soit $A \in \mathrm{SL}_{2g}(\mathbb{R})$ une matrice telle que $\Lambda = A \cdot \mathbb{Z}^{2g}$. Le réseau Λ étant autodual pour la forme symplectique b qui a pour matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix},$$

on en déduit que le réseau ${}^tAJA \cdot \mathbb{Z}^{2g}$ est dual du réseau \mathbb{Z}^{2g} pour le produit scalaire standard sur \mathbb{R}^{2g} . Or on sait que le réseau \mathbb{Z}^{2g} est autodual pour le produit scalaire standard, donc ${}^tAJA \cdot \mathbb{Z}^{2g} = \mathbb{Z}^{2g}$: en particulier ${}^tAJA \in \mathrm{SL}_{2g}(\mathbb{Z})$. C'est la matrice d'une forme symplectique à coefficients entiers, donc par réduction il existe une matrice $B \in \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Q})$ telle que ${}^tB{}^tAJAB = J$. Ainsi la matrice AB appartient à $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$.

Quitte à prendre l'image du réseau Λ par $(AB)^{-1} \in \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$, on suppose que le réseau $\Lambda = (AB)^{-1}A \cdot \mathbb{Z}^{2g} = B^{-1} \cdot \mathbb{Z}^{2g}$ est commensurable à \mathbb{Z}^{2g} . Le fait que Λ soit autodual impose alors qu'il s'écrive

$$\Lambda = \bigoplus_{j=1}^g \left(\mathbb{Z}r_j e_j \oplus \mathbb{Z}\frac{1}{r_j} e_{g+j} \right),$$

où r_1, \dots, r_g sont des rationnels non nuls. Puisque la matrice

$$C = \mathrm{Diag}(r_1^{-1}, \dots, r_g^{-1}, r_1, \dots, r_g)$$

appartient à $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$ et que $C \cdot \Lambda = \mathbb{Z}^{2g}$, ceci conclut le lemme. \square

6. Cas du groupe de Lie exceptionnel $E_{6(-26)}$

Notons \mathbb{O} désigne l'algèbre non associative des octonions de Cayley (voir [3, 1, 24, 10]). Le groupe $\mathrm{SL}_3(\mathbb{O})$ (dont nous rappelons la définition ci-dessous) est une forme réelle non compacte de rang réel 2 du groupe de Lie complexe exceptionnel E_6 , notée $E_{6(-26)}$. Montrons comment les résultats précédents s'étendent à ce groupe. Considérons la base orthonormée canonique ($e_0 = 1, e_1, \dots, e_7$) de la \mathbb{R} -algèbre \mathbb{O} (voir [3, Table 1, p. 6] pour la table de multiplication).

C'est une algèbre non associative à division, munie de la conjugaison

$$\mathbb{O} \longrightarrow \mathbb{O},$$

$$x = x_0 e_0 + \sum_{i=1}^7 x_i e_i \longmapsto \bar{x} = x_0 e_0 - \sum_{i=1}^7 x_i e_i.$$

La norme euclidienne de \mathbb{O} vérifie $\|x\| = \sqrt{\bar{x}x} = \sqrt{x\bar{x}}$ et $\|xy\| = \|x\|\|y\|$. Pour tout octonion $x \in \mathbb{O}$, on définit de plus sa partie réelle $\operatorname{Re} x = \frac{x+\bar{x}}{2}$ et sa partie imaginaire $\operatorname{Im} x = \frac{x-\bar{x}}{2}$.

Soit m un entier au moins égal à 2. L'espace vectoriel réel \mathbb{O}^m est naturellement muni d'une structure euclidienne, pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\bar{u}_i v_i), \quad \text{où } u, v \in \mathbb{O}^m.$$

Considérons $\mathcal{M}_m(\mathbb{O})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées de taille m à coefficients dans \mathbb{O} . En tant qu'ensemble d'endomorphismes \mathbb{R} -linéaires de \mathbb{O}^m , muni de la composition des endomorphismes, c'est une algèbre associative. Par contre, la multiplication n'est pas obtenue avec la formule usuelle du produit matriciel. Considérons le groupe $\operatorname{GL}_m(\mathbb{O})$ des matrices de $\mathcal{M}_m(\mathbb{O})$ qui induisent un isomorphisme de \mathbb{O}^m .

L'adjoint M^* d'une matrice $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{O})$ pour le produit scalaire de \mathbb{O}^m est alors la matrice transposée et conjuguée de M . On dit que la matrice M est hermitienne si $M = M^*$, et on note $\mathfrak{h}_m(\mathbb{O})$ l'espace vectoriel réel des matrices hermitiennes. Une matrice hermitienne M est dite positive (resp. définie positive) si pour tout $x \in \mathbb{O}^m \setminus \{0\}$, nous avons $\langle x, Mx \rangle \geq 0$ (resp. $\langle x, Mx \rangle > 0$).

Une matrice $M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{O})$ est dite unitaire si $MM^* = I_m$. Le sous-groupe $U_m(\mathbb{O})$ de $\operatorname{GL}_m(\mathbb{O})$ constitué des matrices unitaires est un sous-groupe compact maximal de $\operatorname{GL}_m(\mathbb{O})$.

Les résultats d'algèbre linéaire de la partie 2 se généralisent dans ce cadre, montrons comment.

Le sous-espace vectoriel de \mathbb{O} engendré par $1, e_1, e_2$ et e_4 est une algèbre associative isomorphe au corps gauche \mathbb{H} : nous identifierons ainsi i avec e_1, j avec e_2 et k avec e_4 . Une base réelle de \mathbb{O} est alors donnée par $(1, i, j, k, e_3, ie_3, je_3, ke_3)$. Le sous-espace vectoriel de \mathbb{O} engendré par 1 et e_3 est une algèbre commutative isomorphe à \mathbb{C} , et nous identifierons les deux : une \mathbb{C} -base de \mathbb{O} est alors donnée par $(1, i, j, k)$. Considérons l'isomorphisme \mathbb{C} -linéaire à droite

$$\begin{aligned} \beta: \mathbb{O}^m &\longrightarrow \mathbb{C}^{4m} = (\mathbb{C}^4)^m, \\ (x_l + iy_l + jz_l + kw_l)_{l \in [1, m]} &\longmapsto (x_l, y_l, z_l, w_l)_{l \in [1, m]}. \end{aligned}$$

Considérons alors l'application

$$\begin{aligned} \eta: \mathcal{M}_m(\mathbb{O}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{4m}(\mathbb{C}), \\ M &\longmapsto (u \in \mathbb{C}^{4m} \longmapsto \beta(M\beta^{-1}(u))) \in \mathbb{C}^{4m}, \end{aligned}$$

c'est un plongement de \mathbb{C} -algèbres à droite associatives, équivariant pour l'adjoint. L'application η réalise le sous-groupe $\operatorname{GL}_m(\mathbb{O})$ comme un sous-groupe algébrique

autoadjoint de $GL_{4m}(\mathbb{C})$: d'après [21, Theorem 7.1, p. 224], l'orbite de ce sous-groupe dans l'espace symétrique de $GL_{4m}(\mathbb{C})$ est un sous-espace symétrique, donc la décomposition polaire et la décomposition de Cartan y sont internes. En particulier, la diagonalisation des matrices hermitiennes inversibles y est interne, donc par densité on en déduit la diagonalisation des matrices hermitiennes quelconques. Nous pouvons donc énoncer les deux résultats suivants.

Lemme 6.1 (diagonalisation des matrices hermitiennes octonioniques). *Pour toute matrice hermitienne $M \in \mathfrak{h}_m(\mathbb{O})$, il existe une matrice unitaire $U \in U_m(\mathbb{O})$ et une matrice diagonale réelle $D \in M_m(\mathbb{R})$ telles que $M = UDU^{-1}$.*

Lemme 6.2 (décomposition polaire octonionique). *Soit $M \in \mathfrak{M}_m(\mathbb{O})$. Alors il existe une matrice unitaire $U \in U_m(\mathbb{O})$ et une unique matrice hermitienne positive $P \in \mathfrak{h}_m(\mathbb{O})$ telles que $M = PU$.*

On dispose également d'une identité de polarisation (voir par exemple [17] pour une démonstration).

Lemme 6.3 (identité de polarisation octonionique). *Soit (q_1, \dots, q_8) une \mathbb{R} -base de \mathbb{O} . Alors il existe huit réels $(\lambda_1, \dots, \lambda_8) \in \mathbb{R}^8$ tels que, pour tous $u, v \in \mathbb{O}^m$, nous ayons*

$$\langle u|v \rangle = \sum_{l=1}^8 (\|u + vq_l\|^2 - \|u - vq_l\|^2) \lambda_l.$$

Définissons $SL_m(\mathbb{O})$ le sous-groupe de $GL_m(\mathbb{O})$ constitué des matrices qui préservent une mesure de Haar sur \mathbb{O}^m . On peut également définir le déterminant d'une matrice hermitienne, auquel cas c'est aussi le sous-groupe qui préserve le déterminant, pour l'action suivante :

$$g \cdot M = gM + Mg^* \quad \text{pour tous } g \in GL_m(\mathbb{O}), M \in \mathfrak{h}_m(\mathbb{O}).$$

Voici les formules définissant le déterminant des matrices hermitiennes dans les cas $m = 2$ et $m = 3$.

- Lorsque $m = 2$, les matrices hermitiennes s'écrivent

$$\mathfrak{h}_2(\mathbb{O}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & x \\ \bar{x} & \beta \end{pmatrix}, x \in \mathbb{O}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

On définit alors le déterminant par la formule

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & x \\ \bar{x} & \beta \end{pmatrix} = \alpha\beta - |x|^2.$$

- Lorsque $m = 3$, les matrices hermitiennes s'écrivent

$$\mathfrak{h}_3(\mathbb{O}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \bar{z} & \bar{y} \\ z & \beta & x \\ y & \bar{x} & \gamma \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{O}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

On définit alors le déterminant par la formule

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \bar{z} & \bar{y} \\ z & \beta & x \\ y & \bar{x} & \gamma \end{pmatrix} = \alpha\beta\gamma - (\alpha|x|^2 + \beta|y|^2 + \gamma|z|^2) + 2\operatorname{Re}(xyz).$$

Lorsque $m = 2$, le groupe de Lie réel $\mathrm{SL}_2(\mathbb{O})$ est isomorphe au groupe simple $\mathrm{Spin}(9, 1)$, revêtement universel du groupe $\mathrm{SO}_0(9, 1)$. C'est un groupe classique, dont l'espace symétrique est l'espace des classes d'isométrie de réseaux orthogonaux de \mathbb{R}^{10} pour une forme quadratique de signature $(9, 1)$, donc son cas est traité dans la partie 5.

Dorénavant nous nous placerons dans le cas $m = 3$. Alors le groupe de Lie simple $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{O})$ est une forme réelle non compacte de rang réel 2 du groupe de Lie complexe exceptionnel E_6 , notée $E_{6(-26)}$. Le sous-groupe $K = \mathrm{SU}_3(\mathbb{O}) = \mathrm{SL}_3(\mathbb{O}) \cap \mathrm{U}_3(\mathbb{O})$ est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{O})$, isomorphe au groupe $F_{4(-52)}$, la forme réelle compacte du groupe de Lie complexe exceptionnel F_4 .

Notons \mathcal{O} un ordre (non associatif) de \mathbb{O} , c'est-à-dire le sous-groupe additif engendré par une base réelle de \mathbb{O} et stable par multiplication, contenant l'anneau des entiers $\mathbb{Z}[e_0, \dots, e_7]$ (il existe 16 tels ordres, voir par exemple [10, Theorem 1, p. 100]). Appelons \mathcal{O} -réseau marqué de \mathbb{O}^3 toute application \mathcal{O} -équivariante à droite $f : \mathbb{O}^3 \rightarrow \mathbb{O}^3$ telle que le \mathbb{R} -espace vectoriel engendré par l'image soit égal à \mathbb{O}^3 . Le covolume d'un réseau marqué est le covolume de son image dans \mathbb{O}^3 , pour une mesure de Haar sur \mathbb{O}^3 normalisée de sorte que le covolume de \mathbb{O}^3 soit égal à 1.

À toute matrice hermitienne M de $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ définie positive de déterminant 1, on associe la classe d'isométrie du \mathcal{O} -réseau marqué $f : \mathbb{O}^3 \rightarrow \mathbb{O}^3$ de covolume 1 qui à $u \in \mathbb{O}^3$ associe $\|M^* f(u)\|$. À toute classe d'isométrie d'un \mathcal{O} -réseau marqué $f : \mathbb{O}^3 \rightarrow \mathbb{O}^3$ de covolume 1, on associe la classe à droite modulo $\mathrm{SU}_3(\mathbb{O})$ d'une matrice $M \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{O})$ telle que pour tout $u \in \mathbb{O}^3$ nous ayons $f(u) = M^*(u)$, donc d'après la décomposition polaire de G on associe une unique matrice hermitienne de $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ définie positive de déterminant 1. Ainsi l'espace X des classes d'isométrie de \mathcal{O} -réseaux marqués de covolume 1 de \mathbb{O}^3 s'identifie au sous-espace de $\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})$ constitué des matrices hermitiennes définies positives de déterminant 1, et ce sont deux modèles de l'espace symétrique du groupe G .

Considérons l'application

$$\begin{aligned}\phi: X &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{\mathcal{O}^3}), \\ [f: \mathcal{O}^3 \longmapsto \mathcal{O}^3] &\longmapsto [u \longmapsto \|f(u)\|].\end{aligned}$$

Appliquons alors la même preuve que celle de la proposition 3.6, en remplaçant « endomorphisme » par « endomorphisme \mathbb{R} -linéaire \mathcal{O}^3 -équivariant à droite ». On en déduit que l'application ϕ est un plongement, et on appelle l'adhérence de son image la compactification de Thurston \bar{X}^T de X .

Par ailleurs, la compactification de Satake de X associée à la représentation $\rho: G \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{h}_3(\mathcal{O}))$ définie par $g \cdot M = gM + Mg^*$ est l'adhérence \bar{X}^S de l'image de X dans l'espace projectif réel $\mathbb{P}(\mathfrak{h}_3(\mathcal{O}))$ de $\mathfrak{h}_3(\mathcal{O})$.

La preuve du théorème 4.1 est vraie dans ce cadre, et permet d'énoncer le résultat suivant.

Théorème 6.4. *Les deux compactifications \bar{X}^T et \bar{X}^S de l'espace symétrique X du groupe de Lie exceptionnel $E_{6(-26)}$ sont $\text{SL}_3(\mathcal{O})$ -isomorphes.*

7. Compactification de Thurston de l'espace de Torelli

Le but de cette partie est de construire une compactification de l'espace de Torelli d'une surface S analogue à la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller de S . Pour les définitions de base, nous renvoyons à [13], [5] et [32].

Soient $g > 0$ et $q \geq 0$ des entiers tels que $2 - 2g - q < 0$. Fixons S une surface lisse compacte connexe orientée de genre g , munie d'une partie fixée P de cardinal q , dont les éléments sont appelés les points marqués de S . Dans le cas où $q = 0$, on omettra la notation P dans ce qui suit.

Notons $\text{Diff}^+(S, P)$ le groupe des difféomorphismes de S préservant l'orientation, fixant P point par point, muni de la topologie compacte-ouverte.

Notons $\text{Diff}_{H^1}(S, P)$ le sous-groupe des difféomorphismes de S préservant l'orientation, fixant P point par point, induisant l'identité sur $H^1(S \setminus P, \mathbb{R})$.

Notons $\text{Diff}_0(S, P)$ le sous-groupe des difféomorphismes de S préservant l'orientation, isotopes à l'identité par une isotopie fixant P .

Nous avons les inclusions $\text{Diff}_0(S, P) \subset \text{Diff}_{H^1}(S, P) \subset \text{Diff}^+(S, P)$.

Notons $\text{Teich}(S, P)$ l'espace de Teichmüller de S : c'est l'ensemble des classes d'équivalence de couples (X, h) , où X est une surface hyperbolique orientée complète d'aire finie et $h: S \setminus P \rightarrow X$ est un difféomorphisme préservant l'orientation (appelé un marquage). Deux couples (X, h) et (X', h') sont équivalents s'il existe une isométrie préservant l'orientation $s: X \rightarrow X'$ telle que h' soit égal à $s \circ h$

modulo $\text{Diff}_0(S, P)$, c'est-à-dire que telle que h' soit isotope à $s \circ h$. Le groupe $\text{Diff}^+(S, P)$ agit sur $\text{Teich}(S, P)$ par précomposition du marquage, de noyau d'action $\text{Diff}_0(S, P)$. Le groupe modulaire $\text{MCG}(S, P)$, qui est égal au quotient $\text{Diff}^+(S, P)/\text{Diff}_0(S, P)$, agit ainsi fidèlement sur $\text{Teich}(S, P)$.

Notons $\text{Tor}(S, P)$ l'espace de Torelli de S : c'est l'ensemble des classes d'équivalence de couples (X, h) , où X est une surface hyperbolique orientée complète d'aire finie et $h: S \setminus P \rightarrow X$ est un difféomorphisme préservant l'orientation. Deux couples (X, h) et (X', h') sont équivalents s'il existe une isométrie préservant l'orientation $s: X \rightarrow X'$ telle que h' soit égal à $s \circ h$ modulo $\text{Diff}_{H^1}(S, P)$. Ceci revient à demander l'égalité $h'^* = h^* \circ s^*: H^1(X', \mathbb{R}) \rightarrow H^1(S \setminus P, \mathbb{R})$.

Notons $\text{Mod}(S, P)$ l'espace des modules de S : c'est l'ensemble des classes d'équivalence de couples (X, h) , où X est une surface hyperbolique orientée complète d'aire finie et $h: S \setminus P \rightarrow X$ est un difféomorphisme préservant l'orientation. Deux couples (X, h) et (X', h') sont équivalents si X et X' sont isométriques.

Munissons l'espace de Teichmüller $\text{Teich}(S, P)$ de la topologie quotient de la topologie induite par celle de $\Gamma(\otimes^2 TS)$, où à chaque couple (X, h) on associe $h^* \sigma_X$, en notant σ_X la métrique riemannienne hyperbolique de X . L'espace de Teichmüller admet alors une structure naturelle de variété complexe difféomorphe à $\mathbb{R}^{6g-6+2q}$ [14, Proposition 3, p. 133].

L'espace de Torelli $\text{Tor}(S, P)$ est le quotient de $\text{Teich}(S, P)$ par le groupe de Torelli $T(S, P) = \text{Diff}_*^+(S, P)/\text{Diff}_0^+(S, P)$. Le groupe de Torelli étant sans torsion [18], on munit $\text{Tor}(S, P)$ de la structure de variété quotient induite par celle de $\text{Teich}(S, P)$.

L'espace des modules $\text{Mod}(S, P)$ est le quotient de $\text{Teich}(S, P)$ par le groupe modulaire $\text{MCG}(S, P)$. On munit $\text{Mod}(S, P)$ de la topologie d'orbifold complexe quotient de celle de $\text{Teich}(S, P)$. C'est aussi le quotient de l'espace de Torelli par le groupe $\text{MCG}(S, P)/T(S, P) = \text{Diff}^+(S, P)/\text{Diff}_*^+(S, P)$.

La forme d'intersection algébrique est une forme symplectique non dégénérée sur $H^1(S, \mathbb{Z})$, ce qui permet de définir un morphisme du groupe modulaire $\text{MCG}(S, P)$ à valeurs dans le groupe symplectique $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$. Le noyau de ce morphisme est le sous-groupe de Torelli $T(S, P)$, et ce morphisme est surjectif donc le groupe quotient $\text{MCG}(S, P)/T(S, P)$ est isomorphe à $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$, voire [13].

Soit X une surface hyperbolique connexe, orientée, d'aire finie, de genre g , avec q pointes, marquée par un difféomorphisme préservant l'orientation $h: S \setminus P \rightarrow X$. Le premier groupe de cohomologie $H^1(X, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel, considérons le sous-espace vectoriel $H_c^1(X, \mathbb{R})$ de $H^1(X, \mathbb{R})$ constitué des classes de cohomologie de 1-formes différentielles fermées à support compact. Considérons l'inclusion $\iota: S \setminus P \rightarrow S$, elle induit un isomorphisme ι^* entre

$H^1(S, \mathbb{R})$ et $H_c^1(S \setminus P, \mathbb{R})$. Ainsi $h^{-1*} \circ \iota^*$ est un isomorphisme entre $H^1(S, \mathbb{R})$ et $H_c^1(X, \mathbb{R})$, donc ce dernier est de dimension réelle $2g$.

Cet espace vectoriel est également isomorphe au premier groupe de cohomologie L^2 réduite de X , ainsi qu'à l'espace vectoriel des 1-formes différentielles harmoniques sur X (dans le cas compact c'est le théorème de Hodge, dans le cas général voir [27] et [9, Corollary 1.6, p. 7 et Theorem 2.16, p. 27]). Nous utiliserons ici ces trois points de vue, et lorsqu'il faudra choisir un représentant d'une classe de cohomologie à support compact, nous choisirons l'unique représentant harmonique.

Sur l'espace $H_c^1(X, \mathbb{R})$ vu comme premier groupe de cohomologie L^2 réduite, nous disposons du produit scalaire L^2 , noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$. On peut également voir ce produit scalaire grâce à l'étoile de Hodge $*_X$. L'étoile de Hodge est une anti-involution de l'espace vectoriel des 1-formes différentielles réelles sur X , définie comme la précomposition, sur chaque plan tangent, par la rotation d'un quart de tour dans le sens positif (c'est-à-dire la multiplication par i , pour la structure complexe sur X correspondante). L'étoile de Hodge définit par restriction une involution sur l'espace des 1-formes différentielles harmoniques $H_c^1(X, \mathbb{R})$. Le produit scalaire sur $H_c^1(X, \mathbb{R})$ s'exprime alors ainsi :

$$\langle \omega, \omega' \rangle_X = \int_X \omega \wedge *_X \omega', \quad \text{pour tous } \omega, \omega' \in H_c^1(X, \mathbb{R}).$$

On notera $\| \cdot \|_X$ la norme euclidienne (L^2) associée sur $H_c^1(X, \mathbb{R})$.

Par ailleurs, la forme d'intersection algébrique Int sur $H_c^1(X, \mathbb{R})$ (image de la forme d'intersection algébrique sur $H^1(S, \mathbb{R})$) est alternée et non dégénérée, et est donnée par

$$\text{Int}(\omega, \omega') = \int_X \omega \wedge \omega' = \langle \omega, - *_X \omega' \rangle_X, \quad \text{pour tous } \omega, \omega' \in H_c^1(X, \mathbb{R}).$$

Remarquons que l'espace vectoriel $H_c^1(X, \mathbb{R})$, muni de ce produit scalaire et de la forme d'intersection, est isomorphe isométriquement symplectiquement à l'espace euclidien \mathbb{R}^{2g} , muni de la forme symplectique standard

$$b(x, x') = \sum_{j=1}^g x_j x'_{g+j} - x_{g+j} x'_j.$$

Choisissons un tel isomorphisme linéaire isométrique symplectique

$$\varphi_X : H_c^1(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{2g}.$$

Le sous-groupe de $\text{GL}_{2g}(\mathbb{R})$ préservant la forme b est $\text{U}(b) = \text{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$.

Considérons \mathcal{E}_{2g}^b l'espace des réseaux de covolume 1 de l'espace euclidien \mathbb{R}^{2g} , autoduals pour la forme symplectique b , marqués par \mathbb{Z}^{2g} , à isométrie près. Il s'identifie à l'espace symétrique hermitien $\mathcal{E}_{2g}^b = \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})/\mathrm{SU}(g)$, d'après le lemme 5.2. Fixons une base symplectique de $H^1(S, \mathbb{Z})$, ce qui nous permettra d'identifier $H^1(S, \mathbb{Z})$ avec \mathbb{Z}^{2g} .

L'application période de l'espace de Torelli à valeurs dans l'espace symétrique $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})/\mathrm{SU}(g)$, ou son application induite de l'espace des modules dans l'espace localement symétrique $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})/\mathrm{SU}(g)$, est un objet très classique (voir par exemple [15], [11], [28], [13]). La nouvelle formulation ci-dessous facilitera notre compactification de l'espace de Torelli, et nous ferons le lien avec la définition classique très prochainement. Cette formulation a de plus l'avantage d'inclure le cas non compact (i.e. $P \neq \emptyset$).

Si $[X, h] \in \mathrm{Tor}(S, P)$, alors $\varphi_X \circ h^{-1*} \circ \iota^* : H^1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^{2g}$ est un morphisme de groupes. Définissons l'application période

$$p : \mathrm{Tor}(S, P) \longrightarrow \mathcal{E}_{2g}^b, \\ [X, h] \longmapsto [\varphi_X \circ h^{-1*} \circ \iota^*|_{H^1(S, \mathbb{Z})}].$$

Lemme 7.1. *L'application période est bien définie et continue.*

Démonstration. Puisque les applications linéaires $\iota^* : H^1(S, \mathbb{R}) \rightarrow H_c^1(S \setminus P, \mathbb{R})$, $h^{-1*} : H_c^1(S \setminus P, \mathbb{R}) \rightarrow H_c^1(X, \mathbb{R})$ et $\varphi_X : H_c^1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{2g}$ sont des isomorphismes linéaires, l'image $\varphi_X \circ h^{-1*} \circ \iota^*(H^1(S, \mathbb{Z}))$ est un réseau de \mathbb{R}^{2g} .

Vérifions que ce réseau $\varphi_X \circ h^{-1*} \circ \iota^*(H_1(S, \mathbb{Z}))$ de \mathbb{R}^{2g} est bien autodual par rapport à b . Soit $c \in H^1(S, \mathbb{R})$ tel que, pour tout $d \in H^1(S, \mathbb{Z})$, nous ayons $b(\varphi_X \circ h^{-1*} \circ \iota^*(c), \varphi_X \circ h^{-1*} \circ \iota^*(d)) \in \mathbb{Z}$. Fixons $d \in H^1(S, \mathbb{Z})$. Puisque $\varphi_X : H_c^1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{2g}$ préserve les formes symplectiques, on sait que $\mathrm{Int}(h^{-1*} \circ \iota^*(c), h^{-1*} \circ \iota^*(d)) \in \mathbb{Z}$. L'isomorphisme h^{-1*} entre $H_c^1(S \setminus P, \mathbb{R})$ et $H_c^1(X, \mathbb{R})$ provient d'un difféomorphisme préservant l'orientation h^{-1} entre X et $S \setminus P$, donc préserve les formes d'intersection; ainsi $\mathrm{Int}(\iota^*(c), \iota^*(d)) \in \mathbb{Z}$. Enfin, pour les formes différentielles $\iota^*(c)$ et $\iota^*(d)$ à support compact, leur nombre d'intersection sur $S \setminus P$ et sur S est le même, donc $\mathrm{Int}(c, d) \in \mathbb{Z}$. Or on sait que le réseau standard $\mathbb{Z}^{2g} = H^1(S, \mathbb{Z})$ de \mathbb{R}^{2g} est autodual pour la forme symplectique, donc $c \in H^1(S, \mathbb{Z})$. Ainsi le réseau $\varphi_X \circ h^{-1*} \circ \iota^*(H_1(S, \mathbb{Z}))$ de \mathbb{R}^{2g} est autodual par rapport à b .

De plus, d'après le lemme 5.2, il est dans l'orbite de \mathbb{Z}^{2g} sous $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$, donc il est de covolume 1.

Supposons que $[X', h']$ soit égal à $[X, h]$ dans l'espace de Torelli, alors il existe une isométrie préservant l'orientation $s: X \rightarrow X'$ telle que $h^{-1*} = s^* \circ h'^{-1*}: H^1(S \setminus P, \mathbb{R}) \rightarrow H_c^1(X, \mathbb{R})$. Or l'application $s^*: H_c^1(X', \mathbb{R}) \rightarrow H_c^1(X, \mathbb{R})$ est une isométrie linéaire préservant la forme d'intersection, donc les deux réseaux marqués $\varphi_X \circ h^{-1*} \circ \iota^*|_{H^1(S, \mathbb{Z})}$ et $\varphi_{X'} \circ h'^{-1*} \circ \iota^*|_{H^1(S, \mathbb{Z})}$ sont isométriques symplectiquement, et égaux dans \mathcal{E}_{2g}^b .

Remarquons également que l'application p ne dépend pas du choix de l'isomorphisme isométrique symplectique $\varphi_X: H_c^1(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{2g}$: deux tels isomorphismes diffèrent par composition au but d'une isométrie symplectique de \mathbb{R}^{2g} , ce qui donne une même image dans l'espace \mathcal{E}_{2g}^b .

Montrons que l'application p est continue. Soit $([X_n, h_n])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente vers $[X, h]$ dans $\mathrm{Tor}(S, P)$. Dans le fibré localement trivial donné par $H_c^1(\cdot, \mathbb{R})$ au-dessus de l'espace de Torelli $\mathrm{Tor}(S, P)$, la suite $(H_c^1(X_n, \mathbb{R}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $H_c^1(X, \mathbb{R})$. Ceci nous permet donc d'identifier chaque $H_c^1(X_n, \mathbb{R})$ avec $H_c^1(X, \mathbb{R})$.

La forme d'intersection sur $h_n^{-1*} \circ \iota^*(H^1(S, \mathbb{Z})) \subset H_c^1(X_n, \mathbb{R})$ est donnée par l'image de la forme d'intersection sur $H^1(S, \mathbb{Z})$. Puisque la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers X dans l'espace des modules $\mathrm{Mod}(S, P)$, la suite des involutions de Hodge $(*_X)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'involution de Hodge $*_X$ sur $H_c^1(X, \mathbb{R})$. Ainsi la suite des produits scalaires $(\langle \cdot, \cdot \rangle_{X_n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$.

Il reste à prouver que la suite des marquages converge: on sait que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers h modulo $\mathrm{Diff}_{H^1}^+(S, P)$, donc la suite $(h_n^{-1*})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers h^{-1*} pour la topologie des applications linéaires de $H_c^1(S \setminus P, \mathbb{R})$ dans $H_c^1(X_n, \mathbb{R})$ identifié à $H_c^1(X, \mathbb{R})$.

Nous avons démontré que la suite $(p([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait vers $p([X, h])$: l'application période est donc continue. \square

Théorème 7.2 (Griffiths). *Dans le cas compact ($P = \emptyset$), l'application p est holomorphe. L'adhérence de son image $\overline{p(\mathrm{Tor}(S))}$ est une sous-variété analytique complexe fermée de \mathcal{E}_{2g}^b , et l'image $p(\mathrm{Tor}(S))$ est le complémentaire dans son adhérence d'une sous-variété analytique complexe fermée.*

Démonstration. Rappelons la définition classique de l'application période (voir [13, Chapter 3, §2.1]). Nommons $(\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g)$ la base de $H^1(S, \mathbb{Z})$ qui s'envoie sur la base canonique de \mathbb{Z}^{2g} par l'isomorphisme fixé entre $H^1(S, \mathbb{Z})$ et \mathbb{Z}^{2g} . Considérons la base symplectique $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$ de $H_1(S, \mathbb{Z})$ obtenue par dualité de Poincaré. Fixons $[X, h] \in \mathrm{Tor}(S)$. Soit $(\omega_1, \dots, \omega_g, \omega'_1, \dots, \omega'_g)$

une base de $H_c^1(X, \mathbb{R})$, image de la base canonique de \mathbb{R}^{2g} par un isomorphisme isométrique respectant la forme symplectique, et choisissons pour φ_X cet isomorphisme.

Comme nous sommes ici dans le cas compact ($P = \emptyset$), l'application h_* est définie de $H_1(S, \mathbb{R})$ dans $H_1(X, \mathbb{R})$. La matrice période de $[X, h]$ est alors définie comme la matrice par blocs

$$\Omega = \begin{pmatrix} \left(\int_{h_*(a_j)} \omega_k \right)_{j,k \in \llbracket 1, g \rrbracket} & \left(\int_{h_*(a_j)} \omega'_k \right)_{j,k \in \llbracket 1, g \rrbracket} \\ \left(\int_{h_*(b_j)} \omega_k \right)_{j,k \in \llbracket 1, g \rrbracket} & \left(\int_{h_*(b_j)} \omega'_k \right)_{j,k \in \llbracket 1, g \rrbracket} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2g}(\mathbb{R}).$$

Puisque $(\omega_1, \dots, \omega_g, \omega'_1, \dots, \omega'_g)$ est une base symplectique de $H_c^1(X, \mathbb{R})$, on en déduit que $\Omega \in \text{Sp}_{2g}(\mathbb{R})$. Cette matrice ne dépend que du choix de la base $(\omega_1, \dots, \omega_g, \omega'_1, \dots, \omega'_g)$, et deux choix de telles bases diffèrent par l'action d'une isométrie de $H_c^1(X, \mathbb{R})$ préservant la forme d'intersection, c'est-à-dire par l'action de $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{R}) \cap \text{SO}_{2g}(\mathbb{R}) = \text{SU}(g)$. Ainsi la matrice période appartient à l'espace symétrique $\mathcal{E}_{2g}^b = \text{Sp}_{2g}(\mathbb{R}) / \text{SU}(g)$: cela définit l'application période classique $\text{Tor}(S) \rightarrow \mathcal{E}_{2g}^b$.

Explicitons l'identification entre l'espace \mathcal{E}_{2g}^b des réseaux marqués autoduaux de \mathbb{R}^{2g} de covolume 1 et l'espace symétrique $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{R}) / \text{SU}(g)$, décrite au début de la partie 3, dans notre cas particulier. La classe d'isométrie d'un réseau marqué $f : \mathbb{Z}^{2g} \rightarrow \mathbb{R}^{2g}$ autodual pour b et de covolume 1, s'identifie à la transposée de la matrice de l'isomorphisme linéaire f de \mathbb{R}^{2g} , modulo multiplication par $\text{SU}(g)$ à droite. Dans le cas de la classe du réseau marqué $p([X, h])$, la matrice ainsi obtenue est

$$\Omega' = \begin{pmatrix} (\langle h^{-1*}(\alpha_j), \omega_k \rangle)_{j,k \in \llbracket 1, g \rrbracket} & (\langle h^{-1*}(\alpha_j), \omega'_k \rangle)_{j,k \in \llbracket 1, g \rrbracket} \\ (\langle h^{-1*}(\beta_j), \omega_k \rangle)_{j,k \in \llbracket 1, g \rrbracket} & (\langle h^{-1*}(\beta_j), \omega'_k \rangle)_{j,k \in \llbracket 1, g \rrbracket} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2g}(\mathbb{R}).$$

Or chaque produit scalaire est égal à une intégrale intervenant dans la matrice Ω : par exemple, pour tous $j, k \in \llbracket 1, g \rrbracket$, nous avons

$$\langle h^{-1*}(\alpha_j), \omega_k \rangle = \text{Int}(h^{-1*}(\alpha_j), *_X \omega_k) = \int_{h_*(a_j)} *_X \omega_k = \int_{h_*(a_j)} \omega'_k,$$

par dualité de Poincaré. Dans les autres cas il faut utiliser la relation $*_X \omega'_k = -\omega_k$, et on remarque alors que $\Omega' = \Omega J'$, où J' est la matrice par blocs

$$J' = \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix} \in \text{SU}(g).$$

Ainsi les deux définitions de l'application période sont les mêmes.

D'après [15, Proposition 9.3, p. 156], l'application période est holomorphe. De plus, d'après [15, Theorem 9.6], l'adhérence de l'image de l'application période est une sous-variété analytique complexe fermée, qui contient $\text{Im } p$ comme complémentaire d'une sous-variété analytique complexe fermée. \square

Théorème 7.3 (Torelli). *Dans le cas compact ($P = \emptyset$), l'application p est un revêtement ramifié de degré 2 sur son image, ramifié sur le lieu hyperelliptique de $\text{Tor}(S)$.*

Démonstration. La forme forte du théorème de Torelli, formulée dans [28, Theorem 1, p. 783], énonce que l'application période est un revêtement ramifié de degré 2 sur son image, ramifié sur le lieu hyperelliptique de $\text{Tor}(S)$. \square

Considérons l'application (introduite en introduction dans le cas $P = \emptyset$)

$$\begin{aligned} \psi : \text{Tor}(S, P) &\longrightarrow \mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}, \\ [X, h] &\longmapsto (c \mapsto \|h^{-1*} \circ \iota^*(c)\|_X), \end{aligned}$$

et son image après composition par l'application canonique

$$\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \bar{\psi} : \text{Tor}(S, P) &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}), \\ [X, h] &\longmapsto [c \mapsto \|h^{-1*} \circ \iota^*(c)\|_X]. \end{aligned}$$

Les applications ψ et $\bar{\psi}$ sont $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ -équivariantes pour les actions de $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ (s'identifiant à $\text{MCG}(S, P)/T(S, P)$) sur $\text{Tor}(S, P)$ et de $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{Z}^{2g} = H^1(S, \mathbb{Z})$.

L'application $\bar{\psi}$ est égale à la composition $\phi \circ p$, où $\phi : \mathcal{E}_{2g}^b \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})})$ est le plongement de la proposition 3.6.

Dans le cas compact ($P = \emptyset$), d'après le théorème 7.3, l'application $\bar{\psi}$ est un revêtement ramifié d'ordre deux sur son image. Dans le cas non compact, d'après le lemme 7.1, l'application $\bar{\psi}$ est continue.

Notons $\text{Tor}(S, P) \cup \{\infty\}$ la compactification d'Alexandrov de $\text{Tor}(S, P)$, et considérons le plongement diagonal de $\text{Tor}(S, P)$ dans

$$\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}) \times (\text{Tor}(S, P) \cup \{\infty\})$$

donné par le produit de $\bar{\psi}$ et de l'inclusion. Appelons *compactification de Thurston* de l'espace de Torelli, notée $\overline{\text{Tor}(S, P)}^T$, l'adhérence de l'image de ce plongement. C'est une $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ -compactification.

D'autre part, considérons le plongement diagonal de $\text{Tor}(S)$ dans le produit $\overline{\mathcal{E}_{2g}^b}^S \times (\text{Tor}(S) \cup \{\infty\})$ donné par le produit de p et de l'inclusion. Appelons *compactification de Satake* de l'espace de Torelli, notée $\overline{\text{Tor}(S)}^S$, l'adhérence de l'image de ce plongement. C'est une $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ -compactification.

Théorème 7.4. *Les compactifications de Thurston et de Satake (notées $\overline{\text{Tor}(S, P)}^J$ et $\overline{\text{Tor}(S, P)}^S$) de l'espace de Torelli sont $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ -isomorphes.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que les deux compactifications du sous-espace $p(\text{Tor}(S, P)) \subset \mathcal{E}_{2g}^b$, où $p(\text{Tor}(S, P))$ est plongé dans les deux compactifications $\overline{\mathcal{E}_{2g}^b}^J$ et $\overline{\mathcal{E}_{2g}^b}^S$, sont $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ -isomorphes : c'est une conséquence du théorème 4.1. \square

8. Stratification d'une partie du bord de l'espace de Torelli

Une stratification naturelle du bord d'une compactification permet de mieux en comprendre la structure, comme dans les travaux de Harvey sur l'espace des modules (voir [19] et [20]). Nous allons décrire une stratification naturelle d'une partie du bord de la compactification de Thurston de l'espace de Torelli.

Dans toute cette partie, nous fixerons comme au début la partie 7 une surface S lisse compacte connexe orientée de genre g , et P une partie finie fixée de S de cardinal q , telle que $2g - 2 + q > 0$.

8.1. Comparaison entre norme stable et norme euclidienne. Fixons une surface hyperbolique X d'aire finie connexe orientée. Appelons *systole séparante* (resp. *non séparante*) de X la borne inférieure (qui est atteinte) des longueurs des courbes fermées simples de X non homotopes à zéro, qui ne bordent pas une unique pointe, et séparantes (resp. non séparantes). Notons $\text{sns}(X)$ la systole non séparante de X .

Pour les rappels qui suivent, nous renvoyons à la thèse de Daniel Massart [25].

Définissons une norme naturelle sur $H_1(X, \mathbb{R})$, la *norme stable* (voir [16] et [26]). Si γ est une courbe fermée simple non homotope à zéro sur X , notons $\text{lg}(\gamma)$ la longueur hyperbolique de l'unique géodésique dans la classe d'homotopie libre de γ . Soit $c \in H_1(X, \mathbb{R})$. Alors on peut représenter c par un 1-cycle singulier de la forme $\sum_{i \in I} x_i \alpha_i$, où I est fini, $x_i \in \mathbb{R}$ (et $x_i \in \mathbb{Z}$ si $c \in H_1(X, \mathbb{Z})$) et α_i est une courbe fermée simple non homologue à zéro sur X , qu'on appelle *multicourbe*.

On appelle *support* d'une telle multicourbe la réunion des courbes α_i pour lesquelles $x_i \neq 0$. Définissons alors la *norme stable* de c par

$$\|c\|_s = \inf_{c=[\sum_{i \in I} x_i \gamma_i]} \sum |x_i| \lg(\gamma_i),$$

où $\sum_{i \in I} x_i \gamma_i$ parcourt toutes les multicourbes dans la classe d'homologie de c .

Notons $\theta_X: H_1(X, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{R})$ l'isomorphisme de dualité de Poincaré. Définissons la norme stable sur $H^1(X, \mathbb{R})$ par $\|\omega\|_{X,1} = \|\theta_X^{-1}(\omega)\|_s$, où $\omega \in H^1(X, \mathbb{R})$. Nous avons par ailleurs défini une norme euclidienne sur $H_c^1(X, \mathbb{R})$, notons-la $\|\cdot\|_{X,2}$.

Dans sa thèse [25], Daniel Massart compare les deux normes précédemment introduites.

Théorème 8.1 (Massart). *Il existe deux constantes strictement positives a et b , ne dépendant que du genre de X , telles que pour tout $\omega \in H_c^1(X, \mathbb{R})$ nous avons*

$$a \|\omega\|_{X,1} \leq \|\omega\|_{X,2} \leq \frac{b}{\text{sns}(X)^2} \|\omega\|_{X,1}.$$

Démonstration. Dans la partie 4.2 de [25], ce théorème est énoncé pour une surface hyperbolique compacte sans bord. Pour la première inégalité, D. Massart utilise la densité des formes de Strebel dans l'ensemble des 1-formes différentielles harmoniques, et ce résultat est encore vrai pour une surface de volume fini (voir [12]). Par ailleurs, la deuxième inégalité n'utilise même pas l'hypothèse de courbure, et elle reste vraie pour une surface de volume fini. \square

Nous allons nous servir de ce théorème pour étudier l'image de $\text{Tor}(S, P)$ par l'application ψ .

Lemme 8.2. *Soit $([X_n, h_n])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\text{Tor}(S, P)$ telle que la suite $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée dans $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$. Alors la systole non séparante $(\text{sns}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par une constante strictement positive.*

Démonstration. Par contraposée, supposons que la systole non séparante de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers 0: pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit donc γ_n une géodésique fermée simple de X_n non séparante et non cuspidale, dont la longueur $\lg(\gamma_n) = \text{sns}(X_n)$ tend vers zéro. La courbe γ_n est non triviale et non cuspidale, donc a un nombre d'intersection non nul avec l'un des générateurs de

$$\theta_{X_n}^{-1}(H_c^1(X_n, \mathbb{Z})) = h_{n*} \circ \theta_{S \setminus P}^{-1} \circ l^*(H^1(S, \mathbb{Z})),$$

images des éléments de la base choisie de $H^1(S, \mathbb{Z})$. Quitte à extraire, on peut supposer qu'il existe $\omega \in H^1(S, \mathbb{Z})$ tel que le nombre d'intersection algébrique de γ_n avec $h_{n*} \circ \theta_{S \setminus P}^{-1} \circ \iota^*(\omega)$ soit non nul pour tout n . D'après [7, Corollary 4.1.2, p. 95], on en déduit que la longueur d'un représentant minimal de $h_{n*} \circ \theta_{S \setminus P}^{-1} \circ \iota^*(\omega)$ est minorée par $2 \operatorname{argsh} \left(\left(\operatorname{sh} \left(\frac{\lg(\gamma_n)}{2} \right) \right)^{-1} \right)$, ce qui tend vers l'infini lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi la norme stable $\|h_{n*} \circ \theta_{S \setminus P}^{-1} \circ \iota^*(\omega)\|_s$ tend vers l'infini lorsque n tend vers $+\infty$.

Or, d'après le théorème 8.1, on sait que

$$\begin{aligned} \|h_n^{-1*} \circ \iota^*(\omega)\|_{X_n,2} &\geq a \|h_n^{-1*} \circ \iota^*(\omega)\|_{X_n,1} \\ &\geq a \|h_n^{-1*} \circ \iota^*(\omega)\|_{X_n,1} \\ &\geq a \|h_{n*} \circ \theta_{S \setminus P}^{-1} \circ \iota^*(\omega)\|_s \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \end{aligned}$$

donc la suite de fonctions de longueur $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée. □

Lemme 8.3. *Soit $([X_n, h_n])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\operatorname{Tor}(S, P)$ telle que la suite $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$. Alors la suite $(p([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathcal{E}_{2g}^b , et en particulier la fonction de longueur ℓ est propre.*

Démonstration. D'après le lemme 8.2, on sait que la systole non séparante $\operatorname{sns}(X_n)$ est minorée par une constante $d > 0$. Ainsi d'après le théorème 8.1, pour tout $\omega \in H^1(S, \mathbb{Z})$ non nul et tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\psi([X_n, h_n])(\omega) = \|h_n^{-1*} \circ \iota^*(\omega)\|_{X_n,2} \geq a \|h_n^{-1*} \circ \iota^*(\omega)\| \geq ad > 0.$$

Ainsi la systole du réseau $\varphi_{X_n} \circ h_n^{-1*} (H^1(S, \mathbb{Z}))$ de \mathbb{R}^{2g} de covolume 1 est minorée par ad , donc d'après le critère de Mahler (voir [23]) on peut supposer quitte à extraire que cette suite de réseaux de \mathbb{R}^{2g} non marqués converge vers un réseau $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2g}$ de covolume 1 et de systole minorée par ad . Ce réseau Λ est autodual pour la forme symplectique b standard de \mathbb{R}^{2g} . Puisque la suite de fonctions de longueur $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on en déduit quitte à extraire que la suite de réseaux marqués $(\varphi_{X_n} \circ h_n^{-1*} |_{H^1(S, \mathbb{Z})})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réseau marqué (Λ, h) , où $h: H^1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \Lambda$ est un marquage. Ainsi la suite $(p([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $[\Lambda, h]$ dans \mathcal{E}_{2g}^b .

En particulier, la suite de fonctions de longueur $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell = \phi([\Lambda, h])$, qui est une application propre. □

8.2. Le complexe des courbes séparantes. Pour plus de détails sur cette partie, on pourra consulter [13, Chapter 3, § 2.4]. Comme au début la partie 7, on considère une surface S lisse compacte connexe orientée de genre g , et P une partie

finie fixée de S de cardinal q . On dit qu'une courbe fermée simple γ dans $S \setminus P$ est *séparante* si $S \setminus (P \cup \gamma)$ n'est pas connexe. On dit que γ est *cuspidale* si elle borde un disque épointé dans $S \setminus P$, et *triviale* si elle borde un disque dans $S \setminus P$.

Définissons le *complexe des courbes séparantes* $K^{\text{sep}}(S, P)$ de S . Les sommets de $K^{\text{sep}}(S, P)$ sont les classes d'isotopie de courbes fermées simples séparantes de $S \setminus P$ non cuspidales et non triviales. Les classes d'isotopie de telles courbes $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ forment un $(k-1)$ -simplexe de $K^{\text{sep}}(S, P)$ si ces courbes sont disjointes et si leurs classes d'isotopie sont distinctes.

Notons $\Sigma K^{\text{sep}}(S, P)$ l'ensemble des simplexes de $K^{\text{sep}}(S, P)$.

8.3. Description des strates. Soit $\sigma = \{[\gamma_1], \dots, [\gamma_k]\}$ un $(k-1)$ -simplexe de $K^{\text{sep}}(S, P)$. Alors $S \setminus (P \cup \bigcup_{j=1}^k \gamma_j)$ a $k + 1$ composantes connexes. À difféomorphisme préservant l'orientation près (fixé), ces composantes s'écrivent $(S_j \setminus P_j)_{j \in \llbracket 0, k \rrbracket}$, où S_j est une surface lisse compacte connexe orientée de genre g_j et $P_j \subset S_j$ est un ensemble de cardinal q_j fini, tels que $2 - 2g_j - q_j - j < 0$. De plus, on a les égalités $\sum_{j=0}^k g_j = g$ et $\sum_{j=0}^k q_j = 2k + q$. Pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, notons l'inclusion $\iota_j : S_j \setminus P_j \rightarrow S_j$. Voir la figure 1.

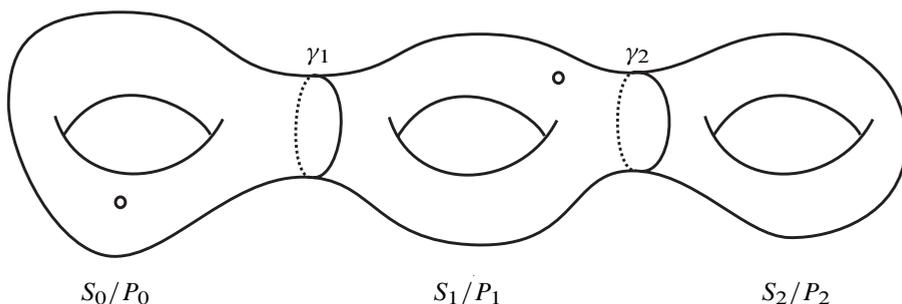


Figure 1. Découpage de la surface S .

Considérons, pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, l'application $\kappa_j : S \rightarrow S_j$ qui écrase chaque $S_{j'}$, pour $j' \neq j$. Considérons alors l'application

$$\xi_\sigma : \bigoplus_{j=0}^k H^1(S_j, \mathbb{R}) \longrightarrow H^1(S, \mathbb{R}),$$

$$(\omega_j)_{j \in \llbracket 0, k \rrbracket} \longmapsto \sum_{j=0}^k \kappa_j^*(\omega_j),$$

elle s'appelle le *scindement symplectique* de $H^1(S, \mathbb{R})$ associé à σ . Remarquons qu'elle définit aussi un scindement symplectique de $\bigoplus_{j=0}^k H^1(S_j, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(S, \mathbb{Z})$,

encore noté ξ_σ . Il est dit symplectique car cette décomposition est orthogonale pour la forme d'intersection.

Considérons, pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, l'application ψ_j de $\text{Tor}(S_j, P_j)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^{H^1(S_j, \mathbb{Z})}$, définie pour le théorème 7.4.

Appelons *strate* au bord de l'espace de Torelli de S associée au simplexe σ la variété différentielle produit $\text{Tor}_\sigma(S, P) = \prod_{j=0}^k \text{Tor}(S_j, P_j)$. Nous allons la relier à l'espace de Torelli total $\text{Tor}(S, P)$ grâce à l'application

$$\begin{aligned} \psi_\sigma : \text{Tor}_\sigma(S, P) &\longrightarrow \mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}, \\ ([X_j, h_j])_{j \in \llbracket 0, k \rrbracket} &\longmapsto \left\{ \omega \longmapsto \left(\sum_{j=0}^k \psi_j([X_j, h_j]) \circ (\xi_\sigma^{-1})_j(\omega)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Théorème 8.4. *L'adhérence de l'image de l'application ψ dans l'espace $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$ est la réunion disjointe*

$$\overline{\psi(\text{Tor}(S, P))} = \psi(\text{Tor}(S, P)) \sqcup \bigsqcup_{\sigma \in \Sigma K^{\text{sep}}(S, P)} \psi_\sigma(\text{Tor}_\sigma(S, P)).$$

Démonstration. Soit $([X_n, h_n])_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\text{Tor}(S, P)$ telle que la suite $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \partial \psi(\text{Tor}(S, P))$. D'après le lemme 8.2, on sait que la systole non séparante $(\text{sns}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par une constante strictement positive.

Supposons que la systole de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit minorée par une constante strictement positive, alors d'après par exemple [8, Corollary I.3.1.7, p. 63], on sait que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace des modules $\text{Mod}(S)$. Quitte à extraire, on peut donc supposer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une surface hyperbolique X dans $\text{Mod}(S)$. Puisque la suite $([X_n, h_n])_{n \in \mathbb{N}}$ part à l'infini dans $\text{Tor}(S, P)$, on en déduit que c'est la suite de marquages $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui part à l'infini : il existe donc $\omega \in H_1(S, \mathbb{Z})$ tel que la suite $(h_n^{-1*} \circ \iota^*(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ parte à l'infini, donc telle que la norme stable $(\|h_n^{-1*} \circ \iota^*(\omega)\|_{X_n, 1})_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers l'infini (en effet, la surface hyperbolique X a un nombre fini de géodésiques fermées simples de longueur majorée). En conséquence, d'après le théorème 8.1, on en déduit que la norme euclidienne $(\|h_n^{-1*} \circ \iota^*(\omega)\|_{X_n, 2})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers l'infini, et donc la suite de fonctions de longueur $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger.

On en déduit donc que la systole séparante de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro. Fixons $\delta > 0$ suffisamment petit, inférieur à la constante de Margulis du plan hyperbolique (voir par exemple [8, Theorem I.2.2.2, p. 50]), et inférieur aux systoles non séparantes des surfaces $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Considérons $h_{n*}(\sigma_n)$ l'ensemble des classes d'homologie de géodésiques fermées simples séparantes de X_n de longueur au

plus δ . Ces géodésiques sont disjointes, donc σ_n est un simplexe du complexe $K^{\text{sep}}(S, P)$ des courbes séparantes. Quitte à extraire et quitte à diminuer δ , on peut supposer que σ_n est un $(k - 1)$ -simplexe dont la longueur de chacune des courbes tend vers zéro.

Quitte à précomposer les marquages $h_n: S \setminus P \rightarrow X_n$ par des éléments de $\text{Diff}_{H^1}^+(S, P)$, comme il n'y a qu'un nombre fini d'orbites de simplexes de $K^{\text{sep}}(S, P)$ sous l'action de $\text{Diff}_{H^1}^+(S, P)$, on peut supposer que le simplexe $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constant, égal à σ . Choisissons un représentant $\tilde{\sigma}$ de σ .

Notons $(S_0 \setminus P_0), \dots, (S_k \setminus P_k)$ les composantes connexes de $S \setminus \tilde{\sigma}$. Fixons un indice $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, et notons $X_{n,j}$ la j ème composante connexe de $X_n \setminus h_n(\sigma)$, où l'on a choisi les représentants géodésiques des courbes de $h_n(\sigma)$: c'est une surface hyperbolique non complète d'aire finie. Quitte à changer le marquage $h_n: S \setminus P \rightarrow X$ par un difféomorphisme isotope à l'identité, on peut supposer que h_n envoie les courbes de $\tilde{\sigma}$ sur les représentants géodésiques de $h_n(\sigma)$. Ainsi, l'application $h_{n,j} = h_n|_{S_j \setminus P_j}: S_j \setminus P_j \rightarrow X_{n,j}$ est un difféomorphisme. Alors, pour n'importe quel pointage de $X_{n,j}$ dans sa partie épaisse, la suite de surfaces hyperboliques ouvertes pointées $(X_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une surface hyperbolique $X_{\infty,j}$ pour la topologie de Gromov-Hausdorff, quitte à extraire. En effet, la systole de $X_{n,j}$ est minorée par δ . Puisque la longueur des courbes au bord de $X_{n,j}$ tend vers 0, la surface $X_{\infty,j}$ est complète. De plus, quitte à changer les marquages $h_{n,j}: S_j \setminus P_j \rightarrow X_{n,j}$ par des difféomorphismes isotopes à l'identité, on peut supposer que la suite de marquages $(h_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un difféomorphisme $h_{\infty,j}: S_j \setminus P_j \rightarrow X_{\infty,j}$.

Fixons $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, et $\omega_j \in H^1(S_j, \mathbb{Z})$. Montrons que

$$\|h_n^{-1*} \circ \iota^* \circ \kappa_j^*(\omega_j)\|_{X_{n,2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|h_{\infty,j}^{-1*} \circ \iota^* \circ \kappa_j^*(\omega_j)\|_{X_{\infty,j,2}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\eta_n = h_n^{-1*} \circ \iota^* \circ \kappa_j^*(\omega_j) \in H_c^1(X_n, \mathbb{R})$. Rappelons-nous que par convention η_n désigne également l'unique 1-forme différentielle harmonique dans cette classe de cohomologie. Puisque $\theta_{X_n}(\eta_n)$ peut être représenté par l'image par h_n d'une multicourbe c incluse dans $S_j \setminus P_j$, et que la systole de la surface $X_{n,j} = h_n(S_j \setminus P_j)$ est minorée par δ , d'après le théorème 8.1, on sait que la norme euclidienne de η_n est majorée par $\|\eta_n\|_{X_{n,2}} \leq \frac{b}{\delta \log(\delta)} \|\eta_n\|_{X_{n,1}}$. Or la multicourbe c est la somme formelle d'un nombre fini de courbes fermées simples c_i de $S_j \setminus P_j$, or puisque la suite de marquages $(h_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $h_{\infty,j}: S_j \setminus P_j \rightarrow X_{\infty,j}$, la suite des longueurs $(\text{lg}(h_{n,j}(c_i)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\text{lg}(h_{\infty,j}(c_i))$, donc est bornée. Ainsi la norme stable $\|\eta_n\|_{X_{n,1}}$ de η_n est bornée, donc la norme euclidienne $\|\eta_n\|_{X_{n,2}}$ également.

Ainsi, pour tout $j' \in \llbracket 0, k \rrbracket$, la restriction $\eta_{n,j'}$ de η_n à $X_{n,j'}$ converge quitte à extraire vers une 1-forme différentielle harmonique $\eta_{\infty,j'}$ sur $X_{\infty,j'}$. Si $j' \neq j$, alors $\eta_{n,j'}$ est cohomologue à zéro pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\eta_{\infty,j'}$ est cohomologue à zéro. Puisque la surface est complète, on en déduit que $\eta_{\infty,j'} = 0$. Si $j' = j$, alors $\eta_{n,j}$ est cohomologue à $h_{n,j}^{-1*} \circ \iota^* \circ \kappa_j^*(\omega_j)$, donc on en déduit que $\eta_{\infty,j}$ est cohomologue à $h_{\infty,j}^{-1*} \circ \iota^* \circ \kappa_j^*(\omega_j)$. Par conséquent, pour les normes L^2 , nous avons

$$\begin{aligned} \|\eta_n\|_{X_{n,2}}^2 &= \sum_{j'=0}^k \|\eta_{n,j'}\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{j'=0}^k \|\eta_{\infty,j'}\|^2 = \|\eta_{\infty,j}\|^2 \\ &= \|h_{\infty,j}^{-1*} \circ \iota^* \circ \kappa_j^*(\omega_j)\|_{X_{\infty,j,2}}^2. \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que

$$\psi([X_n, h_n])(\kappa_j^*(\omega_j)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \psi_j([X_{\infty,j}, h_{\infty,j}](\omega_j)).$$

Ceci prouve donc que la suite $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$ vers

$$\psi_\sigma([X_{\infty,j}, h_{\infty,j}]_{j \in \llbracket 0, k \rrbracket}) \in \psi_\sigma(\text{Tor}_\sigma(S, P)).$$

Réciproquement, prouvons que $\psi_\sigma(\text{Tor}_\sigma(S)) \subset \overline{\psi(\text{Tor}(S))}$ pour tout $(k-1)$ -simplexe σ de $K^{\text{sep}}(S)$: soit $([X_j, h_j])_{j \in \llbracket 0, k \rrbracket} \in \text{Tor}_\sigma(S)$. Fixons un entier $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, les points marqués P_j de S_j sont de deux types : ceux qui correspondent à un point marqué de $P \subset S$ (nous les noterons P_j^1), et ceux qui correspondent à une courbe fermée simple de $\tilde{\sigma}$ (nous les noterons P_j^2).

Il existe une suite de surfaces hyperboliques $(X_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ complètes d'aire finie avec $\text{Card } P_j^2$ pointes, et avec $\text{Card } P_j^1$ composantes de bord totalement géodésique, chacune ayant pour longueur $\frac{1}{n+1}$, marquées par $h_{n,j} : S_j \setminus P_j \rightarrow X_{n,j} \setminus \partial X_{n,j}$, telle que la suite de surfaces marquées $([X_{n,j}, h_{n,j}])_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la surface marquée $[X_j, h_j]$ au sens suivant : pour tout compact K de $S_j \setminus P_j$, la suite d'espaces métriques compacts $(h_{n,j}(K))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $h_j(K)$ au sens de Gromov–Hausdorff.

Pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, la courbe γ_j de $\tilde{\sigma}$ borde les surfaces $S_{j-1} \setminus P_{j-1}$ et $S_j \setminus P_j$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une composante de bord de $X_{n,j-1}$ et une de $X_{n,j}$ qui correspondent à γ_j : puisque ces deux composantes ont la même longueur $\frac{1}{n+1}$, on peut recoller ces deux composantes ensemble. Notons X_n le résultat du recollement des $k+1$ surfaces $X_{n,0}, \dots, X_{n,k}$, et $h_n : S \setminus P \rightarrow X_n$ un marquage qui coïncide avec chacun des $h_{n,j} : S_j \setminus P_j \rightarrow X_{n,j} \setminus \partial X_{n,j}$ hors d'un petit voisinage de $\tilde{\sigma}$.

Alors d'après l'étude qui précède, la suite $(\psi([X_n, h_n]))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\psi_\sigma([X_j, h_j]_{j \in [0, k]})$ dans $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$.

Enfin, prouvons que les strates $\psi_\sigma(\text{Tor}_\sigma(S, P))$ sont disjointes. Si on se donne $\ell \in \mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$ et $\sigma \in \Sigma K^{\text{sep}}(S, P)$, on dit que ℓ se scinde selon ξ_σ si :

$$\ell(\xi_\sigma(\omega_0, \dots, \omega_k))^2 = \sum_{j=0}^k \ell(\xi_\sigma(0, \dots, \omega_j, \dots, 0))^2,$$

pour tous $(\omega_0, \dots, \omega_k) \in \prod_{j=0}^k H^1(S_j, \mathbb{Z})$. On dit que ℓ se scinde s'il existe un simplexe $\sigma \in \Sigma K^{\text{sep}}(S, P)$ tel que ℓ se scinde selon ξ_σ .

Si $\ell \in \psi_\sigma(\text{Tor}_\sigma(S))$, alors il est immédiat que ℓ se scinde selon ξ_σ . Montrons que ℓ ne se scinde pas plus finement que ξ_σ , c'est-à-dire qu'il n'existe aucun simplexe $\sigma' \in \Sigma K^{\text{sep}}(S, P)$ contenant strictement σ tel que ℓ se scinde selon $\xi_{\sigma'}$. Cela revient à prouver que, pour tout simplexe $\sigma \in \Sigma K^{\text{sep}}(S, P)$, aucune fonction de longueur $\ell \in \psi(\text{Tor}(S, P))$ ne se scinde selon ξ_σ : c'est le contenu du lemme 8.5 qui suit. \square

Lemme 8.5. *Aucune fonction de longueur de $\psi(\text{Tor}(S, P))$ ne se scinde.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $[X, h] \in \text{Tor}(S, P)$ tel que la fonction de longueur $\ell = \psi([X, h])$ se scinde selon ξ_σ , où $\sigma = \{\{\gamma\}\}$ et γ est une courbe fermée simple séparante et non cuspidale de $S \setminus P$ telle que $h(\gamma)$ soit géodésique.

Notons $S_1 \setminus P_1$ et $S_2 \setminus P_2$ les deux composantes connexes de $S \setminus (P \cup \gamma)$.

Montrons que $h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_1, \mathbb{R}))$ et $h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_2, \mathbb{R}))$ sont orthogonaux pour le produit scalaire de $H_c^1(X, \mathbb{R})$: soient $\omega_1 \in H^1(S_1, \mathbb{R})$ et $\omega_2 \in H^1(S_2, \mathbb{R})$. Alors $\ell(\xi_\sigma^{-1}(\omega_1 + \omega_2))^2 = \|h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1 + \omega_2)\|_X^2$ est égal à

$$\|h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1)\|_X^2 + 2\langle h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1), h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_2) \rangle_X + \|h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_2)\|_X^2,$$

mais aussi à

$$\ell(h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1))^2 + \ell(h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_2))^2 = \|h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1)\|_X^2 + \|h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_2)\|_X^2,$$

ainsi $\langle h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1), h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_2) \rangle_X = 0$.

On en déduit que l'étoile de Hodge $*_X$ préserve $h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_1, \mathbb{R}))$ et $h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_2, \mathbb{R}))$: en effet, soient $\omega_1 \in H^1(S_1, \mathbb{R})$ et $\omega_2 \in H^1(S_2, \mathbb{R})$. Alors

$$\langle *_X h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1), h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_2) \rangle = \text{Int}(h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1), h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_2)) = 0,$$

donc $*_X h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega_1)$ appartient à l'orthogonal de $h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_2, \mathbb{R}))$, qui est égal à $h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_1, \mathbb{R}))$.

La surface X est conformément équivalente à une surface hyperbolique compacte connexe orientée X' (marquée par $h': S \rightarrow X'$), privée de q points (marqués par P). D'après l'invariance conforme (voir par exemple [9, Proposition 2.15, p. 27]), l'application qui à une 1-forme différentielle harmonique sur X' associe sa restriction à X est un isomorphisme de $H^1(X', \mathbb{R})$ dans $H_c^1(X, \mathbb{R})$. Par ailleurs, l'étoile de Hodge ne dépend que de la structure complexe, donc l'isomorphisme entre $H^1(X', \mathbb{R})$ et $H_c^1(X, \mathbb{R})$ préserve les étoiles de Hodge. Ainsi nous savons que l'étoile de Hodge $*_{X'}$ préserve les sous-espaces $h'^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_1, \mathbb{R}))$ et $h'^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_2, \mathbb{R}))$ de $H^1(X', \mathbb{R})$. Montrons que la fonction de longueur $\ell' = \psi'([X', h'])$ se scinde selon ξ_σ , avec $\psi': \text{Tor}(S, \emptyset) \rightarrow \mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$.

Soient $\omega_1 \in H^1(S_1, \mathbb{Z})$ et $\omega_2 \in H^1(S_2, \mathbb{Z})$. Alors $\ell'(\xi_\sigma(\omega_1, \omega_2))^2$ est égal à $\|h'^{-1*} \circ \xi_\sigma(\omega_1, 0)\|^2 + 2\langle h'^{-1*} \circ \xi_\sigma(\omega_1, 0), h'^{-1*} \circ \xi_\sigma(0, \omega_2) \rangle + \|h'^{-1*} \circ \xi_\sigma(0, \omega_2)\|^2$.

Or

$$\begin{aligned} & \langle h'^{-1*} \circ \xi_\sigma(\omega_1, 0), h'^{-1*} \circ \xi_\sigma(0, \omega_2) \rangle \\ &= \text{Int}(h'^{-1*} \circ \xi_\sigma(\omega_1, 0), *_X h'^{-1*} \circ \xi_\sigma(0, \omega_2)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_1, \mathbb{R}))$ et $h^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_2, \mathbb{R}))$ sont stables par $*_{X'}$ et sont orthogonaux pour la forme d'intersection. Ainsi

$$\ell'(\xi_\sigma(\omega_1, \omega_2))^2 = \ell'(\xi_\sigma(\omega_1, 0))^2 + \ell'(\xi_\sigma(0, \omega_2))^2,$$

donc ℓ' se scinde selon ξ_σ .

Définissons alors l'élément t de $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}) = \text{Aut}(H^1(S, \mathbb{Z}))$ par

$$\begin{aligned} t: H^1(S, \mathbb{Z}) &\longrightarrow H^1(S, \mathbb{Z}), \\ \omega &\longmapsto \xi_\sigma \circ ((\text{Id}_{H^1(S_1, \mathbb{Z})}) \oplus (-\text{Id}_{H^1(S_2, \mathbb{Z})})) \circ \xi_\sigma^{-1}(\omega). \\ &= \xi_\sigma((\xi_\sigma^{-1})_1(\omega), -(\xi_\sigma^{-1})_2(\omega)). \end{aligned}$$

Puisque la fonction de longueur ℓ' se scinde selon ξ_σ , il est immédiat que pour tout $\omega \in H^1(S, \mathbb{Z})$ nous avons $\ell'(t(\omega)) = \ell'(\omega)$.

L'action de $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$ est définie par précomposition par l'adjoint, donc $t^* \cdot \ell' = \ell' \circ t = \ell'$. Ainsi $\psi(t^* \cdot [X', h']) = \psi([X', h'])$ dans $\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})}$, donc $p'(t^* \cdot [X', h']) = p'([X', h'])$ dans \mathcal{E}_{2g}^b par injectivité de l'application ϕ de \mathcal{E}_{2g}^b dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+^{H^1(S, \mathbb{Z})})$. Par compacité de X' on peut appliquer le théorème 7.3,

donc on déduit que $t^* \cdot [X', h']$ est égal soit à $[X', h']$, soit à l'image de $[X', h']$ par l'involution hyperelliptique de l'espace de Torelli. Puisque l'involution hyperelliptique de $\text{Tor}(S, \emptyset)$ est induite par l'élément $-\text{Id} \in \text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$, quitte à échanger les indices de S_1 et S_2 , on peut supposer que $t^* \cdot [X', h'] = [X', h']$ dans $\text{Tor}(S, \emptyset)$.

Considérons un difféomorphisme τ de S préservant l'orientation tel que l'image de τ dans $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ soit égale à t^* , et tel que de plus $\tau \cdot [X', h'] = [X', h']$ dans l'espace de Teichmüller. À isotopie près, on peut supposer que le difféomorphisme $h \circ \tau \circ h^{-1}$ est une isométrie de X . Puisque τ^* préserve $h'^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_1, \mathbb{R}))$ et $h'^{-1*} \circ \xi_\sigma^{-1}(H^1(S_2, \mathbb{R}))$, on en déduit que τ préserve la classe d'homotopie de la courbe γ , or $h \circ \tau \circ h^{-1}$ est une isométrie donc stabilise la géodésique $h(\gamma)$.

Le difféomorphisme τ stabilise les deux composantes connexes $S_1 \setminus P'_1$ et $S_2 \setminus P'_2$ de $S \setminus \gamma$, notons τ_1 et τ_2 les difféomorphismes de $S_1 \setminus P'_1$ et $S_2 \setminus P'_2$ induits. Puisque P'_1 et P'_2 sont des singletons, à isotopie près on peut supposer que τ_1 et τ_2 s'étendent en des difféomorphismes de S_1 et S_2 respectivement. Le difféomorphisme τ_1 induit l'identité sur $H^1(S_1, \mathbb{Z})$, donc sa classe d'isotopie appartient au groupe de Torelli $T(S_1, P_1)$. Or ce groupe est sans torsion, et comme τ est une involution nous avons $\tau_1^2 = \tau_1$, donc τ_1 appartient à $\text{Diff}_0(S_1, P_1)$. Ainsi l'isométrie $h \circ \tau \circ h^{-1}$ restreinte à X_1 est isotope à l'identité, donc est égale à l'identité de X_1 . Ainsi l'isométrie $h \circ \tau \circ h^{-1}$ est égale à l'identité de X . Or cette isométrie induit $-\text{Id}$ sur $H_c^1(X_2, \mathbb{Z})$: c'est une contradiction. \square

Références

- [1] D. Allcock, Reflection groups on the octave hyperbolic plane. *J. Algebra* **213** (1999), no. 2, 467–498. [Zbl 0932.51002](#) [MR 1673465](#)
- [2] E. Artin, Algèbre géométrique. Gauthier-Villars, 1972. Les Grands Classiques Gauthier-Villars, Éditions Jacques Gabay, Paris, 1996.
- [3] J. C. Baez. The octonions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 60 :145–205, 2001.
- [4] C. Bavard. Théorie de Voronoï géométrique. Propriétés de finitude pour les familles de réseaux et analogues. *Bull. Soc. Math. France*, 133 :205–257, 2005.
- [5] J.-B. Bost. *Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobians, and abelian varieties*. dans « From number theory to physics (Les Houches, 1989) ». Springer, 1992.
- [6] N. Bourbaki. *Algèbre. Chapitre IX*. Hermann, 1959.
- [7] P. Buser. *Geometry and spectra of compact Riemann surfaces* n. 106 dans Progr. in Math. 1992.
- [8] R. Canary, D. Epstein, and P. Green. *Notes on notes of Thurston*. dans « Analytical and geometric aspects of hyperbolic space », Lond. Math. Soc., Lect. Notes Series **328**, 1987.

- [9] G. Carron. L^2 harmonic forms on non compact manifolds. Lectures given at CIMPA's summer school « Recent Topics in Geometric analysis », <http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~carron/cours.pdf>, 2007.
- [10] J. H. Conway and D. A. Smith. *On quaternions and octonions : Their geometry, arithmetic, and symmetry*. A K Peters, 2003.
- [11] O. Debarre. *Periods and moduli*. dans « Current Developments in Algebraic Geometry ». MSRI Publications, 2010.
- [12] A. Douady and J. Hubbard. On the density of Strebel differentials. *Inventiones Math.*, 30 :175–179, 1975.
- [13] B. Farb, editor. *Problems on mapping class groups and related topics* n 74 dans Proc. of Symp. in Pure Math. Amer. Math. Soc., 2006.
- [14] A. Fathi, F. Laudenbach, and V. Poenaru. *Travaux de Thurston sur les surfaces* n 66-67 dans Astérisque. Soc. Math. France, 1979.
- [15] P. A. Griffiths. Periods of integrals on algebraic manifolds. III. Some global differential-geometric properties of the period mapping. *Publ. Math. IHÉS*, 38 :125–180, 170.
- [16] M. Gromov. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*. CEDIC, 1981.
- [17] T. Haettel. Compactification géométriques dans les groupes, les espaces symétriques et les immeubles. *Thèse, Univ. Orsay*, 2011.
- [18] R. Hain. *Torelli groups and geometry of moduli spaces of curves* dans « Current topics in complex algebraic geometry », Math. Sci. Res. Inst. Publ., 28, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [19] W. J. Harvey. *Geometric structure of surface mapping class groups* n 36 dans « Homological group theory », Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 1979.
- [20] W. J. Harvey. *Boundary structure of the modular group* n 97 dans dans « Riemann surfaces and related topics », Stony Brook, 1978, Ann. of Math. Stud. 1981.
- [21] S. Helgason. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces* Grad. Stud. Math. **34**, Amer. Math. Soc. 1978.
- [22] D. Johnson. The structure of the Torelli group / I : A finite set of generators for *J. Ann. of Math.*, 118 :423–442, 1983.
- [23] K. Mahler. On lattice points in n -dimensional star bodies. I. Existence theorems. *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.*, 187 :151–187, 1946.
- [24] A.-L. Mare and M. Willems. Topology of the octonionic flag manifold. arXiv :0809.4318v2, 2009.
- [25] D. Massart. *Normes stables des surfaces*. PhD thesis, ENS Lyon, 1996. HAL : tel-00589624, version 1.
- [26] D. Massart. Normes stables des surfaces. *CRAS*, 324 :221–224, 1997.
- [27] R. Mazzeo and R. S. Phillips. Hodge theory on hyperbolic manifolds. *Duke Math J.*, 60 :509–559, 1990.

- [28] G. Mess. The Torelli groups for genus 2 and 3 surfaces. *Topology*, 31:775–790, 1992.
- [29] F. Paulin. *Sur la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller*. dans « Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités », L. Bessières, A. Parreau, B. Remy éd., p. 421-443, Séminaires et Congrès **18**, Soc. Math. France. 2004.
- [30] F. Paulin. Sur les automorphismes de groupes libres et de groupes de surface. *Sém. Bourbaki*, 2010. vol. 2009-2010, exp n. **1023**, à paraître dans Astérisque, Soc. Math. France.
- [31] I. Satake. On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces. *Ann. of Math.*, 71:77–110, 1960.
- [32] F. W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups* n 94 dans Grad. Texts Math. Springer, 1983.

Received September 17, 2012

Thomas Haettel, Bureau 222, Case courrier 051,
Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, Université de Montpellier,
Place Eugène Bataillon, 34095, Montpellier cedex 5, France

e-mail: thomas.haettel@univ-montp2.fr