J. Noncommut. Geom. 4 (2010), 381–387
DOI 10.4171/JNCG/60

**Journal of Noncommutative Geometry**


# Le coût est un invariant isopérimétrique

Mikaël Pichot et Stéphane Vassout

**Résumé.** Soit $R$ une relation d'équivalence mesurée ergodique de type $\mathrm{II}_1$ sur un espace de probabilité $(X, \mu)$ sans atome. On montre que

$$C(R) = 1 + \tfrac{1}{2}h(R),$$

où $C(R)$ est le coût de $R$, supposé fini, et $h(R)$ sa constante isopérimétrique. Cela fait suite aux résultats récents de Russell Lyons et des auteurs sur le sujet.

**Abstract.** Let $R$ be an ergodic measured equivalence relation of type $\mathrm{II}_1$ on a probability space $(X, \mu)$ without atom. We show that

$$C(R) = 1 + \tfrac{1}{2}h(R)$$

where $C(R)$ is the cost of $R$, assumed to be finite, and $h(R)$ its isoperimetric constant. This is a continuation of recent work of Russell Lyons and the authors on the subject.

*Mathematics Subject Classification* (2010). 20F65.
*Keywords.* Measured equivalence relations, cost, isoperimetry.

## 1. Introduction

Soit $R$ une relation d'équivalence mesurée ergodique de type $\mathrm{II}_1$ (à classes dénombrables) sur un espace de probabilité $(X, \mu)$ sans atome. Comme pour les groupes dénombrables, on associe à tout système générateur $\Phi$ de $R$ un graphe de Cayley $\Sigma_\Phi$ sur lequel la relation $R$ agit ($\Phi$ est aussi appelé un graphage de $R$). Suivant G. Levitt (voir [1]), le *coût* de $R$ est défini par

$$C(R) = \inf_{\Phi} \frac{1}{2} \mathrm{val}_\mu(\Sigma_\Phi)$$

où l'infimum porte sur les systèmes générateurs de $R$ et $\mathrm{val}_\mu$ est la valence moyenne dans $\Sigma_\Phi$ prise relativement à $\mu$. Il s'agit a priori d'un nombre réel compris entre 1 et $\infty$ (inclus) ; D. Gaboriau a montré dans [1] que toutes les valeurs de $[1, \infty]$ étaient atteintes.

Un autre invariant de $R$, la *constante isoperimétrique* $h(R)$, peut être défini à partir des $\Sigma_\Phi$ :

$$h(R) = \inf_{\Phi} h(\Sigma_\Phi)$$

où $h(\Sigma_\Phi)$ est la constante isopérimétrique de $\Sigma_\Phi$, définie de façon appropriée (une définition précise est rappelée à la section 2). Cet invariant, à valeurs dans $[0, \infty]$, a été introduit par R. Lyons et les auteurs dans [3].

Dans [3] il est montré que

$$C(R) \leqslant 1 + \frac{1}{2} h(R),$$

si $R$ est de coût fini, et que $h(R) = 0$ dès que $C(R) = 1$. Nous renvoyons à cet article pour des détails sur ces deux énoncés ainsi que leurs preuves. Le théorème principal de cet article complète ces deux résultats :

**Théorème 1.** *Soit $R$ une relation d'équivalence mesurée ergodique de type* $\mathrm{II}_1$ *sur un espace de probabilité $(X, \mu)$ sans atome. Si $C(R) < \infty$, alors*

$$C(R) = 1 + \frac{1}{2} h(R),$$

*où $C(R)$ est le coût de $R$ et $h(R)$ la constante isopérimétrique.*

Le théorème 1 établit l'égalité entre deux invariants de $R$ de nature très différente : le coût de $R$ est un invariant *local* des graphes de Cayley de $R$ (par définition), alors que la constante isopérimétrique en est un invariant *asymptotique*. L'énoncé correspondant en théorie des groupes n'est bien sûr pas correct. Si $\Gamma$ est un groupe dénombrable infini de type fini, l'analogue du coût est le nombre minimal $g(\Gamma)$ de générateurs de $\Gamma$ (i.e. la valence minimale des graphes de Cayley divisée par 2), et la constante isopérimétrique de $\Gamma$ est l'infimum $h(\Gamma)$, sur les graphes de Cayley $Y$ de type fini de $\Gamma$, de la constante de isopérimétrique habituelle de $Y$. En général, les deux constantes $g(\Gamma)$ et $h(\Gamma)$ ne coïncident pas modulo renormalisations. Par exemple pour les groupes abéliens libres $\mathbb{Z}^n$, $n \geqslant 2$, ou plus généralement pour les groupes moyennables non cycliques, on a $h(\Gamma) = 0$ et $g(\Gamma) > 1$. Une égalité analogue à celle du théorème 1 a lieu cependant pour le groupe libre $\Gamma = F_k$ à $k$ générateurs ; dans ce cas $g(F_k) = k$ et $h(F_k) = 2k - 2$. En fait, il est facile de voir que pour un groupe de type fini $\Gamma$, l'égalité $g(\Gamma) = 1 + \frac{1}{2} h(\Gamma)$ n'a lieu que si $\Gamma$ est un groupe libre. En effet, $g(\Gamma)$ est atteint pour un certain système générateur (fini) $S$, et pour ce $S$ on a donc $2(|S| - 1) = h(\Gamma) \leqslant h(Y)$, où $h(Y)$ est la constante isopérimétrique du graphe de Cayley $Y$ de $\Gamma$ relativement à $S$. En appliquant cette inégalité aux boules $B_n$ de $Y$, on obtient par un calcul immédiat que $|B_n| \geqslant 2|S|(2|S| - 1)^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$, et donc que $\Gamma$ est un groupe libre. Au contraire, le coût $C(R)$ de $R$ n'est jamais atteint, sauf si $R$ est arborable (cf. [1]).

**Remerciements.** Nous remercions George Skandalis qui a suggéré que l'inégalité de [3] était une égalité. Le premier auteur est financé par JSPS et l'Université de Tokyo (IPMU).

## 2. Rappels et notations

Faisons quelques brefs rappels pour fixer les notations. Pour plus de détails sur les graphages et le coût des relations d'équivalences, nous renvoyons aux articles [1], [2] de D. Gaboriau.

Soit $\Phi$ une famille dénombrable d'isomorphismes partiels de $R$, i.e. d'isomorphismes partiels $\varphi$ de $X$ tels que $x \sim \varphi(x) \mod (R)$. Le *coût* de $\Phi$ est le nombre positif (éventuellement infini)

$$C(\Phi) = \sum_{\varphi \in \Phi} \mu(\operatorname{dom} \varphi) = \sum_{\varphi \in \Phi} \mu(\operatorname{Im} \varphi)$$

où $\operatorname{dom} \varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$ sont respectivement le domaine et l'image de $\varphi$. On dit que $\Phi$ est un *système générateurs* de $R$ si, presque sûrement, étant donnés deux points $x, y \in X$ équivalents modulo $R$, il existe une composée $\psi = \varphi_n^{\varepsilon_n} \dots \varphi_1^{\varepsilon_1}$ telle que $\psi(x) = y$, où $\varphi_i \in \Phi$ et $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$. Le *coût* de $R$ est l'infimum

$$C(R) = \inf_{\Phi} C(\Phi)$$

pris sur tous les systèmes générateurs $\Phi$ de $R$ (voir [1]). À un système générateur $\Phi$ de $R$ est naturellement associé un *graphe de Cayley* $\Sigma_\Phi$ de $R$. Rappelons simplement que $\Sigma_\Phi$ est fibré au-dessus de $X$, et que la fibre $\Sigma_\Phi^x$ en $x \in X$ est un graphe connexe dont les sommets sont les éléments de $R^x$ et les arêtes l'ensemble des couples $\big((x, y), (x, \varphi(y)\big) \in R^x \times R^x$ pour $\varphi \in \Phi$ tel que $y \in \operatorname{dom} \varphi$. Il est clair que la définition du coût de $R$ donné ci-dessus coïncide avec celle donnée en introduction.

Dans [3] nous définissons une constante isopérimétrique $h(\Sigma_\Phi)$ de $\Sigma_\Phi$ comme suit :

$$h(\Sigma_\Phi) = \inf_A \frac{\nu^{(1)}(\partial_{\Sigma_\Phi} A)}{|A|}$$

où $\nu^{(1)}$ est la mesure de décompte sur le 1-squelette de $\Sigma_\Phi$, et $A$ un ensemble fini de sommets symétriques de $\Sigma_\Phi$ deux à deux disjoints. Par définition, on appelle sommet symétrique de $\Sigma_\Phi$ (le graphe d') un automorphisme du groupe plein de $R$ (i.e. un automorphisme de $X$ dont le graphe est inclus dans $R$), et on dit que deux sommets symétriques sont disjoints si l'intersection de leurs graphes est négligeable pour la mesure sur $R$ (voir [3], Definition 4.1). Le bord $\partial_{\Sigma_\Phi} A$ de l'ensemble $A$ est l'ensemble des arêtes de $\Sigma_\Phi$ avec exactement un sommet dans $A$ (i.e. dans le graphe d'un automorphisme de $A$). Notons que cette définition de $h(\Sigma_\Phi)$ ne revient pas à « moyenner la constante isopérimétrique des fibres ».

La *constante isopérimétrique de* $R$ est l'infimum

$$h(R) = \inf_\Phi h(\Sigma_\Phi)$$

pris sur tous les systèmes générateurs $\Phi$ de $R$.

## 3. Démonstration du théorème 1

Soit $R$ une relation d'équivalence ergodique de type $\mathrm{II}_1$ sur un espace de probabilité $(X, \mu)$ sans atome. Nous montrons ici que

$$C(R) \geqslant 1 + \frac{1}{2} h(R),$$

l'inégalité inverse faisant l'objet de [3], Theorem 12. On suppose $C(R) < \infty$.

Soit $\varphi$ un automorphisme ergodique du groupe plein de $R$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut compléter $\varphi$ par une famille $\Phi'_\varepsilon$ d'isomorphismes partiels de $R$ de sorte que

$$\Phi_\varepsilon = \Phi'_\varepsilon \cup \{\varphi\}$$

soit un graphage de $R$, satisfaisant

$$C(\Phi_\varepsilon) < C(R) + \varepsilon/4$$

(voir [1], Lemme III.5).

Soit $f$ la fonction définie pour $x \in X$ par

$$f(x) = \sum_{\psi \in \Phi'_\varepsilon} \chi_{\mathrm{dom}\,\psi}(x) + \chi_{\mathrm{Im}\psi}(x).$$

Elle a pour intégrale

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = 2C(\Phi'_\varepsilon).$$

Comme la mesure $\mu$ est invariante, il en résulte que

$$\frac{1}{n+1} \int_X \sum_{i=0}^{n} f(\varphi^i(x)) \mathrm{d}\mu(x) = 2C(\Phi'_\varepsilon)$$

pour tout nombre entier $n \geqslant 0$.

Fixons $n > 4/\varepsilon$ et considérons l'ensemble $A_n$ défini par

$$A_n = \{\varphi^i\}_{i=0}^{n}.$$

Clairement $A_n$ est un ensemble de points symétriques deux à deux disjoints de $\Sigma_\varepsilon$, au sens de [3, Definition 8]. De plus pour $x \in X$ le bord de $A_n^x$ dans $\Sigma_\varepsilon^x$ vérifie

$$|\partial_{\Sigma_\varepsilon^x} A_n^x| \leqslant \sum_{i=0}^{n} f(\varphi^i(x)) + 2,$$

où $|\cdot|$ est le cardinal. Notons qu'on a égalité si $x \not\sim \psi(x) \mod (R_\varphi)$ pour tout $\psi \in \Phi'_\varepsilon$ et tout $x \in \operatorname{dom}\psi$ – ce qu'on peut supposer a priori quitte à réduire les domaines des éléments de $\Phi'_\varepsilon$, mais ce n'est pas nécessaire.

Par suite on a :

$$\frac{1}{n+1}\nu^{(1)}(\partial_{\Sigma_\varepsilon} A_n) \leqslant 2C(\Phi'_\varepsilon) + \frac{2}{n+1} < 2(C(R)-1) + \varepsilon,$$

où $\nu^{(1)}$ est la mesure naturelle sur le 1-squelette de $\Sigma_\varepsilon$ (associée à la mesure de Haar sur $R$). Comme

$$h(R) \leqslant \inf_A \frac{\nu^{(1)}(\partial_{\Sigma_\varepsilon} A)}{|A|} \leqslant \frac{1}{n+1}\nu^{(1)}(\partial_{\Sigma_\varepsilon} A_n),$$

on obtient

$$h(R) < 2(C(R)-1) + \varepsilon,$$

et lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$C(R) \geqslant 1 + \frac{1}{2}h(R),$$

ce qu'il fallait démontrer.

## 4. Commentaires

**4.1. Formule de compression.** Dans [3] on montre que le groupe fondamental d'une relation uniformément non moyennable ergodique $R$ est trivial, en établissant l'inégalité

$$h(R) \leqslant \mu(D)h(R|_D)$$

où $D$ est une partie borélienne non négligeable de $X$ et $R|_D$ est la restriction de $R$ à $D$. En fait cette inégalité est une égalité :

**Corollaire 2.** *Soit $R$ comme dans le théorème 1 et $D$ une partie borélienne non négligeable de $X$. On a*

$$h(R) = \mu(D)h(R|_D).$$

Ceci résulte immédiatement du théorème 1 et la proposition II.6 de [1] concernant le coût.

**4.2. Une autre définition du bord.** Conservant les notations introduites ci-dessus, on peut aussi définir le bord $\partial_\Sigma A$ comme l'ensemble des *points de* $R$ dans le bord de $A$ relativement à $\Sigma$ (plutôt que les *arêtes de* $\Sigma$ dans le bord de $A$ relativement à $\Sigma$). On obtient alors une constante $h'(R)$, a priori plus petite que $h(R)$, et les résultats de [3] établissent l'inégalité (voir la note p. 598)

$$C(R) \leqslant 1 + \frac{h'(R)}{2}.$$

On a donc en fait, d'après le théorème 1 :

$$C(R) = 1 + \frac{h(R)}{2} = 1 + \frac{h'(R)}{2}.$$

Comme noté dans [3], p. 598, la version $h'$ de la constante isopérimétrique est évidemment majorée par le taux de croissance uniforme $\omega(\Gamma)$ de $\Gamma$ moins 1, et on a donc

$$\omega(\Gamma) \geqslant 2\beta_1(\Gamma) + 1$$

(voir [3]), Cor. 3.2, où $\beta_1(\Gamma)$ est le premier nombre de Betti $\ell^2$ de $\Gamma$.

**4.3. Taux de cycles.** Rappelons qu'à une relation d'équivalence $R$ ergodique de type $\mathrm{II}_1$ est associée une suite de nombres positifs $\beta_0(R), \beta_1(R), \beta_2(R), \ldots$, appelés nombres de Betti $\ell^2$ de $R$ (voir [2]). On a toujours

$$C(R) \geqslant \beta_1(R) + 1$$

et on se sait pas si l'inégalité peut être stricte (voir la section 3.6 de [2]). Le *taux de cycle* de $R$ (voir [4]) est défini comme suit :

$$\tau(R) = \inf_{\Phi} \dim_{LR} \overline{Z_1(\Sigma_\Phi)},$$

où l'infimum est pris sur les systèmes générateurs $\Phi$ de $R$, $\Sigma_\Phi$ est le graphe de Cayley de $\Phi$, $Z_1(\Sigma_\Phi)$ est l'espace des cycles de $\Sigma_\Phi$. La dimension $\dim_{LR}$ est la dimension de l'adhérence Hilbertienne $\overline{Z_1(\Sigma_\Phi)}$ prise au sens de Murray et von Neumann (comme pour les nombres de Betti $\ell^2$), où $LR$ désigne l'algèbre de von Neumann de $R$. On a alors

$$C(R) = \tau(R) + \beta_1(R) + 1$$

pour toute relation ergodique $\mathrm{II}_1$ de coût fini (voir [4], [5]), et il n'y a pas d'exemples connus pour lesquels $\tau(R) > 0$. Le taux de cycles a été introduit dans [4] conjointement avec une technique *d'effaçage de cycles*, qui permet de faire diminuer la dimension $\dim_{LR} \overline{Z_1(\Sigma_\Phi)}$. En fait (cf. [4]) il est possible *d'effacer récursivement tous les cycles* d'un graphage donné – mais ceci ne suffit pas a priori à entraîner $\tau(R) = 0$. Le théorème 1 pourrait fournir une nouvelle approche à ces questions.

**Nota Bene.** Nous corrigeons ici une erreur typographique qui apparaît deux fois dans la preuve du théorème 4.5 de [3]. Dans la formule centrée $2C(F) \leq 2 + h(R)$, il faut remplacer $h(R)$ par $h_K(R)$, et faire de même à la dernière ligne de la preuve.

## Références

[1] D. Gaboriau, Coût des relations d'équivalence et des groupes. *Invent. Math.* **139** (2000), 41–98. Zbl 0939.28012 MR 1728876

[2] D. Gaboriau, Invariants $l^2$ de relations d'équivalence et de groupes. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **95** (2002), 93–150. Zbl 1022.37002 MR 1953191

[3] R. Lyons, M. Pichot, and S. Vassout, Uniform non-amenability, cost, and the first $l^2$-Betti number. *Groups Geom. Dyn.* **2** (2008), 595–617. Zbl 05368765 MR 2442947

[4] M. Pichot, Quasi-périodicité et théorie de la mesure. Ph.D. Thesis, École Normale Supérieure de Lyon, Lyon 2005.
http ://www.umpa.ens-lyon.fr/~gaboriau/Theses/Mikael-Pichot.pdf

[5] M. Pichot, Semi-continuity of the first $l^2$-Betti number on the space of finitely generated groups. *Comment. Math. Helv.* **81** (2006), 643–652. Zbl 1147.20038 MR 2250857

Received February 9, 2009

M. Pichot, IPMU, University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Tokyo, 153-8914, Japan
E-mail: pichot@ms.u-tokyo.ac.jp

S. Vassout, Institut de Mathématiques de Jussieu and Université Paris 7,
175, rue du Chevaleret, 75013 Paris Cedex, France
E-mail: vassout@math.jussieu.fr