J. Noncommut. Geom. 4 (2010), 441–457
DOI 10.4171/JNCG/62

Journal of Noncommutative Geometry

Dualité de Van den Bergh et structure de Batalin–Vilkoviskiĭ sur les algèbres de Calabi–Yau

Thierry Lambre

Résumé. Nous montrons que la notion de calcul de Tamarkin–Tsygan à dualité permet de construire des structures de Batalin–Vilkoviskiĭ dans un cadre général. Nous montrons que la dualité de Van den Bergh des algèbres est un calcul de Tamarkin–Tsygan à dualité. Ceci permet notamment de retrouver la structure BV des algèbres de Calabi–Yau mise en évidence par V. Ginzburg.

Abstract. The abstract notion of Tamarkin–Tsygan calculus with duality gives Batalin–Vilkoviskiĭ structures in a general setting. We apply this technique to the case of Van den Bergh duality for algebras to prove that Calabi–Yau algebras are BV-algebras.

Mathematics Subject Classification (2010). 16E40, 20J06, 55U30.

Keywords. BV algebra, Calabi–Yau algebra, Tamarkin–Tsygan calculus with duality, cap product.

Introduction

V. Ginzburg a montré récemment que les algèbres de Calabi–Yau sont des algèbres de Batalin–Vilkoviskiĭ (en abrégé, BV-algèbres).

Théorème ([Gi], 3.4.3). *Soit A une algèbre de Calabi–Yau et soit $(H^*(A,A), \cup, [\,,\,])$ l'algèbre de cohomologie de Hochschild de A, munie de sa structure d'algèbre de Gerstenhaber. Il existe un générateur Δ du crochet de Gerstenhaber $[\,,\,]$, c'est-à-dire qu'il existe une application $\Delta\colon H^*(A,A) \to H^{*-1}(A,A)$ satisfaisant à la relation*

$$[\alpha, \beta] = \Delta(\alpha \cup \beta) - (-1)^p \alpha \cup \Delta(\beta) - \Delta(\alpha) \cup \beta$$

pour tout $\alpha \in H^p(A,A)$ et $\beta \in H^q(A,A)$.

Afin de commenter ce résultat, introduisons quelques notations.

Notons $B\colon H_*(A,A) \to H_{*+1}(A,A)$ le bord de Connes en *homologie* de Hochschild ([C], [L]). Soit d la dimension cohomologique de l'algèbre de Calabi–Yau et soit

$$\mathrm{VdB}\colon H^*(A,A) \to H_{d-*}(A,A)$$

l'isomorphisme de dualité de Van der Bergh ([VdB]).

Soient $\alpha \in H^p(A,A)$, $\beta \in H^q(A,A)$ et $z \in H_r(A,A)$. La contraction

$$\iota_\alpha\colon H_r(A,A) \to H_{r-p}(A,A)$$

est définie par $\iota_\alpha(z) = z \cap \alpha$ (le symbole $\cap$ désigne ici le *cap*-produit, voir paragraphe 2).

Les deux ingrédients essentiels de la démonstration du théorème de V. Ginzburg sont les suivants.

1) La contraction satisfait l'identité remarquable suivante de Tamarkin–Tsygan ([T-T]).

$$\iota_{[\alpha,\beta]} = [[B,\iota_\alpha]_{\mathrm{gr}},\iota_\beta]_{\mathrm{gr}}, \tag{TT}$$

où dans le membre de droite de cette expression, les crochets $[\ ,\ ]_{\mathrm{gr}}$ désignent des commutateurs gradués.

2) L'inverse $D = (\mathrm{VdB})^{-1}$ de l'isomorphisme de dualité de Van den Bergh satisfait l'identité remarquable de Ginzburg ([Gi], 3.4.3).

$$D(z \cap \alpha) = D(z) \cup \alpha. \tag{G}$$

Soit d la dimension de l'algèbre de Calabi–Yau. A partir des identités remarquables (TT) et (G), il est facile de vérifier qu'en posant

$$\Delta = (-1)^d DBD^{-1},$$

on a la relation de Batalin–Vilkoviskiĭ

$$[\alpha,\beta] = \Delta(\alpha \cup \beta) - (-1)^p \alpha \cup \Delta(\beta) - \Delta(\alpha) \cup \beta. \tag{BV}$$

Autrement dit le théorème de V. Ginzburg affirme que le conjugué du bord de Connes en homologie de Hochschild par l'inverse de l'isomorphisme de dualité de Van der Bergh est un générateur du crochet de Gerstenhaber de l'algèbre de cohomologie de Hochschild $H^*(A,A)$ de l'algèbre de Cabali–Yau A.

Nous énonçons et employons dans ce texte une généralisation de ce phénomène pour les calculs de Tamarkin–Tsygan à dualité, objets satisfaisant dans un certain cadre de généralité les relations (TT) et (G).

Théorème 1.6. *Soit (H^*, H_*, κ, c) un calcul de Tamarkin–Tsygan à dualité, de classe fondamentale $c \in H_d$ (voir définition 1.3). Notons $D = (c \cap -)^{-1}$ l'inverse de l'isomorphisme de dualité. Alors un générateur du crochet de Gerstenhaber de H^* est $\Delta = (-1)^d D\kappa D^{-1}$ et l'algèbre de Gerstenhaber H^* est une BV-algèbre.*

Pour exploiter ce résultat général dans le cadre de la dualité de Van den Bergh des algèbres, nous montrons que l'isomorphisme de dualité de Van den Bergh s'exprime comme le *cap*-produit par une certaine classe fondamentale canoniquement associée aux algèbres considérées.

Théorème 4.2. *Soit A une algèbre à dualité de Van den Bergh, de module dualisant $\mathcal{D} = H^d(A, A^e)$, de classe fondamentale $c \in H_d(A, \mathcal{D})$. Alors, pour tout A^e-module M et pour tout entier $p \geq 0$, le cap-produit*

$$c \cap -\colon H^p(A, M) \to H_{d-p}(A, \mathcal{D} \otimes_A M)$$

est un isomorphisme.

Les résultats 1.6 et 4.2 permettent de fournir une démonstration du théorème de V. Ginzburg.

Dans diverses situations analogues, une dualité en terme de *cap*-produit est bien connue. C'est le cas notamment en cohomologie des groupes ([B-E]) mais aussi dans un cadre de géométrie de Poisson (voir par exemple [H] et [X]). Dans ces différents contextes (groupes, algèbres ou géométrie de Poisson), le *cap*-produit par une certaine classe fondamentale est un isomorphisme.

En ce sens, les algèbres de Calabi–Yau apparaîssent comme l'analogue algébrique des groupes à dualité de Poincaré *orientables*. Pour se convaincre de la pertinence de cette affirmation, il peut être utile de s'aider du dictionnaire analogique suivant.

Groupes à dualité	Algèbres à dualité
$\mathbb{Z}$	A
$\mathbb{Z}[G]$	$A^e = A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$
Cohomologie des groupes	Cohomologie des algèbres
$H^p(G, M) = \mathrm{Ext}^p_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, M)$	$H^p(A, M) = \mathrm{Ext}^p_{A^e}(A, M)$
Groupe de type FP	Algèbre de type FP
Dimension cohomologique	
$d = \mathrm{pdim}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z})$	$d = \mathrm{pdim}_{A^e}(A)$
Module dualisant	
$\mathcal{D} = \mathrm{Ext}^d_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[G])$	$\mathcal{D} = \mathrm{Ext}^d_{A^e}(A, A^e)$
Classe fondamentale	
$H_d(G, \mathcal{D}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$	$H_d(A, \mathcal{D}) \cong \mathrm{Hom}_{A^e}(\mathcal{D}, \mathcal{D})$

Théorème de dualité	
Bieri–Eckmann (1973)	Van den Bergh (1998)
si G de type FP	si A de type FP
si G de dimension cohomologique d	si A de dimension cohomologique d
si $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[G]) = 0, i \neq d$	si $\mathrm{Ext}^i_{A^e}(A, A^e) = 0, i \neq 0$
si $\mathcal{D}$ est sans torsion sur $\mathbb{Z}$	si $\mathcal{D}$ est A^e-inversible

alors

le cap-produit par la classe fondamentale est un isomorphisme

Groupe à dualité de Poincaré orientable	Algèbre de Calabi–Yau
$\mathcal{D} \cong \mathbb{Z}$ comme $\mathbb{Z}[G]$-module	$\mathcal{D} \cong A$ comme A^e-module
avec action triviale de G	avec action triviale de A^e

Ce texte est organisé comme suit.

1. Structure BV pour les calculs de Tamarkin–Tsygan à dualité.
2. Rappels sur les structures multiplicatives en théorie de Hochschild.
3. Algèbres de type FP.
4. Dualité de Van den Bergh.
5. Une démonstration du théorème de V. Ginzburg.
6. Une démonstration d'un résultat de M. Kontsevich.

1. Structure BV pour les calculs de Tamarkin–Tsygan à dualité

Définition 1.1. Soit $H^* = \bigoplus_{p\geq 0} H^p$ un k-espace vectoriel gradué. On note $\mathcal{L}^*$ le k-espace vectoriel gradué décalé, $\mathcal{L}^p = H^{p+1}$. Pour $\alpha \in H^p$, on pose $|\alpha| = p$ et $\deg(\alpha) = p - 1$.

On dit que H^* est une algèbre de Gerstenhaber s'il existe des opérations $\cup$ et $[\ ,\ ]$ telles que :

1) $(H^*, \cup)$ est une algèbre graduée commutative, c'est-à-dire une algèbre dans laquelle on a la relation $\alpha \cup \beta = (-1)^{|\alpha|\cdot|\beta|}\beta \cup \alpha$.

2) $(\mathcal{L}^*, [\ ,\ ])$ est une algèbre de Lie graduée, c'est-à-dire qu'on a la relation d'antisymétrie graduée

$$[\alpha, \beta] = (-1)^{\deg(\alpha)\cdot\deg(\beta)}[\beta, \alpha]$$

et l'identité de Jacobi graduée

$$(-1)^{\deg(\alpha)\deg(\gamma)}[\alpha, [\beta, \gamma]] + (-1)^{\deg(\beta)\deg(\alpha)}[\beta, [\gamma, \alpha]] + (-1)^{\deg(\gamma)\deg(\beta)}[\gamma, [\alpha, \beta]] = 0.$$

3) Pour tout $\alpha \in \mathcal{L}^p$, $[\alpha, -]$ est une dérivation de degré $\deg(\alpha)$ de l'algèbre graduée commutative $(H^*, \cup)$, c'est-à-dire qu'on a la relation

$$[\alpha, \beta \cup \gamma] = [\alpha, \beta] \cup \gamma + (-1)^{\deg(\alpha)|\beta|}\beta \cup [\alpha, \gamma].$$

Définition 1.2. Un calcul de Tamarkin–Tsygan est la donnée d'un triplet (H^*, H_*, κ) d'espaces vectoriels gradués satisfaisant aux conditions a), b) et c) ci-dessous.

a) $(H^*, \cup, [\ ,\ ])$ est une algèbre de Gerstenhaber telle que $k \subset H^0$.

b) H_* est un $(H^*, \cup)$-module gradué, c'est-à-dire qu'il existe une application k-linéaire

$$H^p \otimes_k H_r \to H_{r-p}, \quad \alpha \otimes z \mapsto z \cap \alpha,$$

telle que pour $z \in H_r$ et $\alpha \in H^p$, en posant $\iota_\alpha(z) = (-1)^{rp}\ z\ \cap \alpha$, on a la relation $\iota_\alpha \circ \iota_\beta = \iota_{\alpha \cup \beta}$.

c) Il existe une application $\kappa\colon\ H_* \to H_{*+1}$ telle que $\kappa^2 = 0$ et telle qu'en posant

$$L_\alpha = [\kappa, \iota_\alpha]_{\mathrm{gr}} = \kappa \iota_\alpha - (-1)^{|\alpha|} \iota_\alpha \kappa,$$

la relation suivante est satisfaite :

$$[L_\alpha, \iota_\beta]_{\mathrm{gr}} = \iota_{[\alpha,\beta]}. \tag{TT}$$

Remarque. Dans un calcul de Tamarkin–Tsygan (H^*, H_*, κ), l'espace vectoriel gradué H_* est un $(\mathcal{L}^*, [\ ,\ ])$-module de Lie gradué pour l'opération

$$\mathcal{L}^{p-1} \times H_r \to H_{r-(p-1)}, \quad \alpha \otimes z \to L_\alpha(z),$$

c'est-à-dire qu'on a la relation $L_{[\alpha,\beta]} = [L_\alpha, L_\beta]_{\mathrm{gr}} = L_\alpha L_\beta - (-1)^{\deg(\alpha)\deg(\beta)} L_\beta L_\alpha$.

Définition 1.3. Soit (H^*, H_*, κ) un calcul de Tamarkin–Tsygan. On dit que ce calcul est un calcul de Tamarkin–Tsygan à dualité s'il existe $c \in H_d$ tel que $c \cap 1 = c$ et tel que pour tout entier p,

$$c \cap -\colon H^p \to H_{d-p}$$

est un isomorphisme.

Cet isomorphisme est appelé isomorphisme de dualité. L'élément c est appelé classe fondamentale du calcul de Tamarkin–Tsygan à dualité.

Proposition 1.4 (Formule de Ginzburg, [Gi], 3.4.3 (i)). *Soit (H^*, H_*, κ, c) un calcul de Tamarkin–Tsygan à dualité, de classe fondamentale $c \in H_d$. Soit $D = (c \cap -)^{-1}$ l'inverse de l'isomorphisme de dualité. Alors pour tout $\alpha \in H^p$ et tout $z \in H_r$, dans H_{r-p}, on a l'égalité*

$$D(z \cap \alpha) = D(z) \cup \alpha. \tag{G}$$

Démonstration. Soit $z \in H_r$. Par l'isomorphisme de dualité, il existe $\beta \in H^{d-r}$ tel que $z = c \cap \beta$, ce qui s'écrit encore $D(z) = \beta$. Pour tout $\alpha \in H^p$, on a donc

$$\begin{aligned} z \cap \alpha &= (c \cap \beta) \cap \alpha \\ &= (-1)^{rp} \iota_\alpha (c \cap \beta) \\ &= (-1)^{rp} (-1)^{d(d-r)} \iota_\alpha \iota_\beta (c) \\ &= (-1)^{rp+d(d-r)} \iota_{\alpha \cup \beta}(c) \\ &= (-1)^{rp+d(d-r)} (-1)^{(p+d-r)d} c \cap (\alpha \cup \beta) \\ &= (-1)^{rp+d(d-r)+(p+d-r)d} (-1)^{p(d-r)} c \cap (\beta \cup \alpha) \\ &= c \cap (D(z) \cup \alpha), \end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore $D(z \cap \alpha) = D(z) \cup \alpha$. □

Lemme 1.5. *Soit (H^*, H_*, κ, c) un calcul de Tamarkin–Tsygan à dualité, de classe fondamentale $c \in H_d$. Soit $D = (c \cap -)^{-1}$ l'inverse de l'isomorphisme de dualité. On définit $\Delta\colon H^* \to H^{*-1}$ par*

$$\Delta = (-1)^d D \kappa D^{-1}.$$

Soient $z \in H_r$, $\alpha \in H^p$ et $\beta \in H^q$. Alors on a la relation

$$\begin{aligned} &D(z) \cup [\alpha, \beta] \\ &\quad = (-1)^{(d-r)} \Delta(D(z) \cup \alpha \cup \beta) - (-1)^{p(r+d+1)+d-r} \alpha \cup \Delta(D(z) \cup \beta) \\ &\qquad - (-1)^{(d-r)} \Delta(D(z) \cup \alpha) \cup \beta - (-1)^{pq-1+d-r} \Delta(D(z)) \cup (\alpha \cup \beta). \end{aligned}$$

Démonstration. D'après la formule de Ginzburg (G), on a

$$D(z \cap [\alpha, \beta]) = D(z) \cup [\alpha, \beta].$$

Par ailleurs, $z \cap [\alpha, \beta] = (-1)^{(p+q-1)r} \iota_{[\alpha,\beta]}(z)$. On a donc

$$D(z \cap [\alpha, \beta]) = (-1)^{(p+q-1)r} D(\iota_{[\alpha,\beta]}(z)).$$

La relation (TT) de 1.2 s'écrit

$$\iota_{[\alpha,\beta]} = [[\kappa, \iota_\alpha]_{\mathrm{gr}}, \iota_\beta]_{\mathrm{gr}}$$

d'où

$$D(z \cap [\alpha, \beta]) = (-1)^{(p+q-1)r} D(\iota_{[\alpha,\beta]}(z)) = (-1)^{(p+q-1)r} (A - B - C - D)$$

avec $A = D\kappa\iota_{\alpha\cup\beta}(z)$, $B = (-1)^p D\iota_\alpha\kappa\iota_\beta(z)$, $C = (-1)^{(p-1)q} D\iota_\beta\kappa\iota_\alpha(z)$ et $D = (-1)^{(p-1)(q+1)} D\iota_{\alpha\cup\beta}\kappa(z)$.

Calculons successivement ces quatre termes en utilisant sans cesse la relation $\Delta D = (-1)^d\ D\kappa$ ainsi que la formule de Ginzburg. Les calculs conduisent à

$$\begin{aligned} A = D\kappa\iota_{\alpha\cup\beta}(z) &= (-1)^d\ (-1)^{(p+q)r}\Delta(D(z\cap(\alpha\cup\beta))) \\ &= (-1)^{d+(p+q)r}\Delta(D(z)\cup\alpha\cup\beta). \end{aligned}$$

De manière analogue

$$\begin{aligned} B &= (-1)^p D(\iota_\alpha(\kappa\iota_\beta(z))) \\ &= (-1)^p(-1)^{(r-q+1)p} D(\kappa\iota_\beta(z)\cap\alpha) \\ &= (-1)^{p+(r-q+1)p}(D\ \kappa\iota_\beta(z))\cap\alpha \\ &= (-1)^{p+(r-q+1)p}(-1)^d\Delta D(\iota_\beta(z))\cup\alpha \\ &= (-1)^{p+(r-q+1)p+d}(-1)^{rq}\Delta D(z\cap\beta)\cup\alpha \\ &= (-1)^{p+(r-q+1)p+d+rq}\Delta(D(z)\cup\beta)\cup\alpha \\ &= (-1)^{p+(r-q+1)p+d+rq}(-1)^{(d-r+q-1)p}\alpha\cup\Delta(D(z)\cup\beta) \\ &= (-1)^{p+dp+rq+d}\alpha\cup\Delta(D(z)\cup\beta). \end{aligned}$$

De manière analogue, on obtient

$$C = (-1)^{r(p-q)+d}\Delta(D(z)\cup\alpha)\cup\beta.$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{(p-1)(q+1)} D\iota_{\alpha\cup_\beta}\kappa(z) \\ &= (-1)^{(p-1)(q+1)}(-1)^{(r+1)(p+q)} D(\kappa(z)\cap(\alpha\cup\beta)) \\ &= (-1)^{(p-1)(q+1)+(r+1)(p+q)} D(\kappa(z))\cup(\alpha\cup\beta) \\ &= (-1)^{(p-1)(q+1)+(r+1)(p+q)}(-1)^d\Delta(D(z))\cup(\alpha\cup\beta). \end{aligned}$$

Ces quatre calculs achèvent la démonstration du lemme 1.5. □

Corollaire 1.6. *Soit (H^*, H_*, κ, c) un calcul de Tamarkin–Tsygan à dualité. Alors H^* est une BV-algèbre. Plus précisément, en supposant $c \in H_d$ et en notant $D = (c\cap -)^{-1}$ l'inverse de l'isomorphisme de dualité, un générateur du crochet de Gerstenhaber de H^* est*

$$\Delta = (-1)^d D\kappa D^{-1}$$

et la relation

$$[\alpha,\beta] = \Delta(\alpha\cup\beta) - (-1)^p\alpha\cup\Delta(\beta) - \Delta(\alpha)\cup\beta$$

est satisfaite.

Démonstration. On applique la formule 1.5 à $z = c$, classe fondamentale du calcul de Tamarkin–Tsygan. Grâce à $c \in H_d$, $D(c) = 1$ et $\Delta(1) = 0$, on aboutit à

$$[\alpha, \beta] = \Delta(\alpha \cup \beta) - (-1)^p \alpha \cup \Delta(\beta) - \Delta(\alpha) \cup \beta,$$

ce qui montre que Δ est un générateur du crochet de Gerstenhaber de H^*. $\square$

2. Rappels sur les structures multiplicatives en théorie de Hochschild

Soient k un corps et A une k-algèbre. On pose $A^e = A \otimes_k A^{\mathrm{op}}$. Soit M un A^e-module à gauche. La cohomologie et l'homologie de Hochschild de A à valeur dans M sont respectivement données par $H^*(A, M) = \mathrm{Ext}^*_{A^e}(A, M)$ et $H_*(A, M) = \mathrm{Tor}^{A^e}_*(A, M)$. On sait qu'en posant $C^p(A, M) = \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes p}, M)$, on obtient $H^p(A, M) = H^p(C^*(A, M), b)$ où $b\colon C^p(A, M) \to C^{p+1}(A, M)$ est le bord de Hochschild défini pour $f \in C^*(A, M)$ par

$$\begin{aligned} bf(a_1, \ldots, a_{p+1}) = a_1 f(a_2, \ldots, a_{p+1}) - f(a_1 a_2, a_3, \ldots, a_{p+1}) + \cdots \\ \cdots + (-1)^p f(a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p a_{p+1}) \\ + (-1)^{p+1} f(a_1, \ldots, a_p) a_{p+1}. \end{aligned}$$

De manière analogue, en posant $C_r(A, M) = M \otimes_k A^{\otimes r}$, on a $H_r(A, M) = H_r(C_*(A, M), b)$ où $b\colon C_r(A, M) \to C_{r-1}(A, M)$ est donné par la formule

$$\begin{aligned} b(m, a_1, \ldots, a_r) = (m a_1, a_2, \ldots, a_r) - (m, a_1 a_2, a_3, \ldots, a_r) + \cdots \\ \cdots + (-1)^{r-1} f(m, a_1, \ldots, a_{r-2}, a_{r-1} a_r) \\ + (-1)^r (a_r m, a_1, \ldots, a_{r-1}). \end{aligned}$$

Rappelons les définitions des différents produits présents.

Le cup-produit. Il s'agit d'une application k-linéaire

$$\cup\colon H^p(A, M) \otimes_k H^q(A, N) \to H^{p+q}(A, M \otimes_A N).$$

Écrivons $\alpha \in H^p(A, M)$ sous la forme $\alpha = \mathrm{cl}(f)$ et de même $\beta \in H^q(A, N)$ sous la forme $\beta = \mathrm{cl}(g)$ où $f \in C^p(A, M)$ et $g \in C^q(A, N)$ sont des b-cocycles. On définit l'élément $f \cup g$ de $C^{p+q}(A, M \otimes_A N)$ par la formule

$$f \cup g(a_1, \ldots, a_{p+q}) = (-1)^{pq} f(a_1, \ldots, a_p) \otimes_A g(a_{p+1}, \ldots a_{p+q}).$$

La formule $b(f \cup g) = bf \cup g + (-1)^p f \cup bg$ montre que $f \cup g$ est un b-cocycle dès que f et g le sont, ce qui permet définir $\alpha \cup \beta$ comme la classe de cohomologie du b-cocycle $f \cup g$.

Le cap-produit. Il s'agit d'une application k-linéaire

$$\cap\colon H_r(A,N)\otimes_k H^p(A,M)\to H_{r-p}(A,N\otimes_A M).$$

Écrivons $z\in H_r(A,N)$ sous la forme $z=\mathrm{cl}(\bar z)$ où $\bar z=(n,a_1,\dots,a_r)$ est un b-cycle de $C_r(A,N)$. Écrivons $\alpha\in H^p(A,M)$ sous la forme $\alpha=\mathrm{cl}(f)$ où f est un b-cocycle de $C^p(A,M)$. Définissons l'élément $\bar z\cap f$ de $C_{r-p}(A,N\otimes_A M)$ par la relation

$$\bar z\cap f=(-1)^{rp}(n\otimes_A f(a_1,\dots,a_p),a_{p+1},\dots,a_r).$$

La relation $b(\bar z)\cap f=\bar z\cap bf+(-1)^p b(\bar z\cap f)$ montre que $\bar z\cap f$ est un b-cycle de $C_{r-p}(A,N\otimes_A M)$. Ceci permet de définir $z\cap\alpha=\mathrm{cl}(\bar z\cap f)$ comme la classe d'homologie de ce cycle.

Le *cup*-produit et le *cap*-produit sont reliés par la formule suivante, de démonstration immédiate à partir des définitions ci-dessus.

Dans $H_{r-(p+q)}(A,\ N\otimes_A M\otimes_A M')$ on a l'égalité

$$(z\cap\alpha)\cap\beta=z\cap(\alpha\cup\beta).$$

pour $z\in H_r(A,N)$, $\alpha\in H^p(A,M)$ et $\beta\in H^q(A,M')$.

Le crochet de Gerstenhaber. Soient $\alpha\in H^p(A,A)$ et $\beta\in H^q(A,A)$. Écrivons $\alpha=\mathrm{cl}(f)$ et $\beta=\mathrm{cl}(g)$ avec f et g cocycles respectifs de $C^p(A,A)$ et de $C^q(A,A)$. Pour définir le crochet de Gerstenhaber $[\alpha,\beta]\in H^{p+q-1}(A,A)$ de α et β, on introduit les applications k-linéaires $f\circ_i g\colon A^{\otimes p+q-1}\to A$, définies pour $1\le i\le p$ par

$$f\circ_i g(a_1,\dots,a_{p+q-1})=f(a_1,\dots,a_{i-1},g(a_i,\dots,a_{i+q-1}),a_{i+q},\dots a_{p-1+q}).$$

On pose ensuite

$$f\circ g=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{(i-1)(q-1)}f\circ_i g$$

et enfin

$$[f,g]=f\circ g-(-1)^{(p-1)(q-1)}g\circ f.$$

Gerstenhaber a montré la formule

$$b(f\circ g)=f\circ b(g)+(-1)^{q-1}b(f)\circ g+(-1)^{q-1}(g\cup f-(-1)^{pq}f\cup g).$$

Ceci montre que le crochet $[f,g]\in C^{p+q-1}(A,A)$ de deux cocycles f et g est également un cocycle. La classe de cohomologie du cocycle $[f,g]$ est par définition le crochet $[\alpha,\beta]$ des classes α et β.

M. Gerstenhaber a montré

Théorème 2.1 ([Ge]). *L'algèbre de cohomologie de Hochschild $H^*(A,A)$ est une algèbre de Gerstenhaber.*

Le bord de Connes ([C], [L]). Le bord $B\colon C_r(A,A) \to C_{r-1}(A,A)$ est donné par la formule

$$B(a_0, a_1 \ldots, a_r) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{jr}(1, a_j, \ldots, a_r, a_0, \ldots, a_{j-1}).$$

Compte tenu de la relation $Bb + bB = 0$, le bord de Connes induit un morphisme de k-espaces vectoriels, qu'on note également B par abus de language :

$$B\colon H_r(A,A) \to H_{r+1}(A,A).$$

D'après un résultat de D. Tamarkin et B. Tsygan, on a

Théorème 2.2 ([T-T]). *Le triplet $(H^*(A,A), H_*(A,A), B)$ est un calcul de Tamarkin–Tsygan.*

3. Algèbres de type FP

Définition 3.1. Soient k un corps et A un k-algèbre associative. On dit que A est une algèbre de type FP si l'algèbre A admet une résolution projective de longueur finie par des A^e-modules projectifs de type fini.

Pour une algèbre A de type FP, la dimension cohomologique de A est

$$d = \operatorname{pdim}_{A^e}(A).$$

On pose

$$\mathcal{D} = H^d(A, A^e).$$

Rappelons ([B-T]) que le k-espace vectoriel $\mathcal{D} = H^d(A, A^e)$ est un A^e-module à gauche.

On vérifie sans difficulté la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Le cap-produit*

$$H_d(A, \mathcal{D}) \otimes_k \ H^d(A, A^e) \to H_0(A, \mathcal{D} \otimes_A A^e), \quad z \otimes \alpha \mapsto z \cap \alpha,$$

fournit un morphisme k-linéaire

$$H_d(A, \mathcal{D}) \to \operatorname{Hom}_{A^e}(\mathcal{D}, \mathcal{D}), \quad z \mapsto z \cap -.$$

Proposition 3.3. *Soit A une algèbre de type FP de dimension cohomologique d. Pour tout A^e-module M, l'application*

$$H_d(A, M) \to \operatorname{Hom}_{A^e}(\mathcal{D}, M), \quad z \mapsto (z \cap -)|_{\mathcal{D}},$$

est un isomorphisme de k-espace vectoriels.

Démonstration. Le *cap*-produit

$$H_d(A, M) \otimes_k H^d(A, A^e) \to H_0(A, M \otimes_A A^e) \cong M$$

fournit un morphisme

$$H_d(A, M) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{D}, M), \quad z \mapsto (z \cap -)|_{\mathcal{D}},$$

et on vérifie facilement que l'application $z \cap -$ est A^e-linéaire.

Soit P_* une A^e-résolution projective de type fini de A, de longueur d. On a

$$H_i(A, M) = H_i(P_* \otimes_{A^e} M).$$

En particulier on a la suite exacte courte

$$0 \to H_d(A, M) \to P_d \otimes_{A^e} M \to P_{d-1} \otimes_{A^e} M. \tag{1}$$

Posons $\bar{P}^* = \operatorname{Hom}_{A^e}(P_*, A^e)$. On a $H^i(\bar{P}^*) = H^i(A, A^e)$. En particulier, on a la suite exacte courte

$$\bar{P}^{d-1} \to \bar{P}^d \to H^d(A, A^e) = \mathcal{D} \to 0. \tag{2}$$

Par application du foncteur $\operatorname{Hom}_{A^e}(-, M)$ à la suite exacte courte (2), on obtient la suite exacte

$$0 \to \operatorname{Hom}_{A^e}(\mathcal{D}, M) \to \operatorname{Hom}_{A^e}(\bar{P}^d, M) \to \operatorname{Hom}_{A^e}(\bar{P}^{d-1}, M). \tag{3}$$

Puisque les P_i sont projectifs de type fini, on a des isomorphismes

$$\operatorname{Hom}_{A^e}(\bar{P}^i, M) \cong P_i \otimes_{A^e} M$$

et la suite exacte (3) s'écrit donc

$$0 \to \operatorname{Hom}_{A^e}(\mathcal{D}, M) \to P_d \otimes_{A^e} M \to P_{d-1} \otimes_{A^e} M. \tag{4}$$

Les suites exactes (1) et (4) fournissent l'isomorphisme

$$H_d(A, M) \cong \operatorname{Hom}_{A^e}(\mathcal{D}, M). \qquad \square$$

Remarque. Pour $M = \mathcal{D}$, la proposition 3.3 montre que

$$H_d(A, \mathcal{D}) \to \operatorname{Hom}_{A^e}(\mathcal{D}, \mathcal{D}), \quad z \mapsto z \cap -,$$

est un isomorphisme. Ceci conduit à la définition suivante.

Définition 3.4. Soit A une algèbre de type FP, de dimension cohomologique d. L'unique élément c de $H_d(A, \mathcal{D})$ tel que

$$(c \cap -)|_{\mathcal{D}} = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$$

s'appelle la classe fondamentale de l'algèbre A.

Proposition 3.5. *Soit A une algèbre de type FP, de dimension cohomologique d, de classe fondamentale $c \in H_d(A, \mathcal{D})$. Pour tout A^e-module M, le cap-produit*

$$c \cap -\colon H^d(A; M) \to H_0(A, \mathcal{D} \otimes_A M)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Si $M = A^e$ est libre de rang 1, par définition de la classe fondamentale le *cap*-produit $c \cap -$ est l'application $\mathrm{id}\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$.

Pour traiter le cas des modules libres, on regarde $c \cap -$ comme une transformation naturelle du foncteur $H^d(A, -)$ vers le foncteur $H_0(A, \mathcal{D} \otimes_A -)$. Ces deux foncteurs sont additifs. En outre, comme tout foncteur Tor, le foncteur $H_0(A, \mathcal{D} \otimes_A -)$ commute aux limites directes. Puisque A est de type FP, le foncteur $\mathrm{Ext}^d_{A^e}(A, -)$ commute également aux limites directes ([Br], VIII, 4.8, p. 196). Ceci montre que si M est un A^e-module libre, le *cap*-produit $c \cap -\colon H^d(A, M) \to H_0(A, \mathcal{D} \otimes_A M)$ est un isomorphisme.

Enfin, si M est un A^e-module quelconque, on obtient le résultat grâce à une suite exacte $F' \to F \to M \to 0$, où F et F' sont libres. □

4. Dualité de Van den Bergh

Définition 4.1. Soit A une algèbre de type FP de dimension cohomologique d. On dit que A est une algèbre à dualité de Van den Bergh si $H^i(A, A^e) = 0$ pour $i \neq d$ et si $\mathcal{D} = H^d(A, A^e)$ est un A^e-module inversible.

Dans ce cas, $\mathcal{D}$ est appelé le module dualisant de l'algèbre à dualité de Van den Bergh A.

Théorème 4.2. *Soit A une algèbre à dualité de Van den Bergh, de module dualisant $\mathcal{D} = H^d(A, A^e)$, de classe fondamentale $c \in H_d(A, \mathcal{D})$. Alors, pour tout A^e-module M et pour tout entier $p \geq 0$, le cap-produit*

$$c \cap -\colon H^p(A, M) \to H_{d-p}(A, \mathcal{D} \otimes_A M)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Introduisons les foncteurs $H_i = H_i(A, \mathcal{D} \otimes_A -)$ et $T_i = H^{d-i}(A, -)$. De manière évidente, le foncteur T_i est un foncteur homologique.

Première étape : Grâce à $H^i(A, A^e) = 0$ pour $i \neq d$, montrons que le foncteur T_i est effaçable pour $i > 0$ ([Br], III, 6, p. 72). Par hypothèse, on a $T_i(A^e) = 0$ pour $i > 0$. Par additivité du foncteur T_i, on en déduit $T_i(L) = 0$ pour $i > 0$ et L libre de rang fini, donc $T_i(P) = 0$, pour $i > 0$ et P projectif de type fini. D'après [Br], VIII, 4.6, p. 195, T_i commute aux limites directes. On en déduit $T_i(L) = 0$, pour $i > 0$ et L libre et donc aussi $T_i(P) = 0$ pour $i > 0$ et P projectif.

Deuxième étape : Grâce à $\mathcal{D}$ inversible, montrons à présent que H_i est un foncteur homologique. Soit

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

une suite exacte courte de A^e-modules. Puisque $\mathcal{D}$ est inversible, $\mathcal{D}$ est un A-module projectif à droite, donc plat. On a par conséquent la suite exacte courte de A^e-modules

$$0 \to \mathcal{D} \otimes_A M' \to \mathcal{D} \otimes_A M \to \mathcal{D} \otimes_A M'' \to 0.$$

Cette suite exacte courte fournit la suite exacte longue

$$\begin{aligned}\cdots \to H_{i+1}(A, \mathcal{D} \otimes_A M'') \to H_i(A, \mathcal{D} \otimes_A M') \to H_i(A, \mathcal{D} \otimes_A M) \\ \to H_i(A, \mathcal{D} \otimes_A M'') \to H_{i-1}(A, \mathcal{D} \otimes_A M') \to \cdots\end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on a la suite exacte longue

$$\cdots \to H_{i+1}(M'') \to H_i(M') \to H_i(M) \to H_i(M'') \to H_{i-1}(M') \to \cdots$$

ce qui montre que H_i est un foncteur homologique.

Troisième étape : Montrons à présent que H_i est un foncteur effaçable pour $i > 0$. Puisque $\mathcal{D}$ est A^e-inversible, il est A-projectif à gauche. Donc si P est un A^e-module projectif, $\mathcal{D} \otimes_A P$ est encore projectif et par conséquent $H_i(P) = H_i(A, \mathcal{D} \otimes_A P)$ est nul pour $i > 0$.

Quatrième étape : D'après la proposition 3.5, $c \cap -\colon T_0 \to H_0$ est un isomorphisme.

Cinquième étape : Par décalage d'indice (cf. [Br], III, 7.3, p. 75), on déduit de tout ce qui précède que pour tout $i > 0$, $c \cap -\colon T_i \to H_i$ est un isomorphisme. □

5. Une démonstration du théorème de V. Ginzburg

Définition 5.1. On dit que l'algèbre A est une algèbre de Calabi–Yau de dimension d si A est une algèbre à dualité de Van den Bergh de dimension cohomologique d dont le module dualisant $\mathcal{D} = H^d(A, A^e)$ est un A^e-module isomorphe à A.

Soit A une algèbre de Calabi–Yau de dimension d. Posons $H^* = H^*(A, A)$ et $H_* = H_*(A, A)$. Soit B le bord de Connes. D'après le résultat de Tamarkin et Tsygan rappelé en 2.2, (H^*, H_*, B) est un calcul de Tamarkin–Tsygan. Soit $c \in H_d(A, \mathcal{D})$ la classe fondamentale de l'algèbre A. Du théorème 4.2, nous déduisons que (H^*, H_*, B, c) est un calcul de Tamarkin–Tsygan à dualité. Compte tenu du théorème 1.6, on a donc montré

Théorème 5.2 (V. Ginzburg). *Une algèbre de Calabi–Yau est une BV-algèbre. Plus précisément, soit A une algèbre de Calabi–Yau de dimension d, de classe fondamentale c. Soit $D = c \cap -$ l'isomorphisme de dualité de Van den Bergh. Alors $\Delta := (-1)^d\ DBD^{-1}$ est un générateur du crochet de Gerstenhaber de $H^*(A, A)$, c'est-à-dire que pour tout $\alpha \in H^p(A, A)$ et tout $\beta \in H^q(A, A)$, on a l'égalité*

$$[\alpha, \beta] = \Delta(\alpha \cup \beta) - (-1)^p \alpha \cup \Delta(\beta) - \Delta(\alpha) \cup \beta.$$

6. Une démonstration d'un résultat de M. Kontsevich

V. Ginzburg attribue le résultat suivant à M. Kontsevich.

Théorème 6.1 ([Gi], 6.1.1). *Soit X une variété orientée asphérique de dimension* 3. *Alors $\mathbb{C}[\pi_1(X)]$, algèbre du groupe fondamental de X est une algèbre de Calabi–Yau de dimension* 3.

Nous proposons une démonstration de ce résultat sous la forme suivante.

Lemme 6.2. *Soit G un groupe à dualité de Poincaré. On suppose G orientable de dimension cohomologique d. Soit k un corps de caractéristique zéro ou première à l'ordre du groupe G. Alors l'algèbre du groupe $A = k[G]$ est une algèbre de Calabi–Yau de dimension d.*

Pour démontrer ce lemme, rappelons le vocabulaire des groupes à dualité de Poincaré ([B-E], [Br], VIII, § 10).

On dit qu'un groupe G est de type FP si $\mathbb{Z}$ admet une $\mathbb{Z}[G]$-résolution de longueur finie par des $\mathbb{Z}[G]$-modules projectifs de type fini. Dans ce cas, la dimension cohomologique d du groupe G est $d = \mathrm{pdim}_{\mathbb{Z}[G]}\, \mathbb{Z}$.

Le groupe G de type FP, de dimension cohomologique d est à dualité de Poincaré si $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[G]) = 0$ pour $i \neq 0$ et si $\mathcal{D}_G := \mathrm{Ext}^d_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[G])$ est un $\mathbb{Z}$-module isomorphe à $\mathbb{Z}$. Le $\mathbb{Z}[G]$-module $\mathcal{D}_G$ s'appelle le module dualisant du groupe G.

Le groupe G est à dualité de Poincaré orientable s'il est à dualité de Poincaré et si son module dualisant $\mathcal{D}_G$ est un $\mathbb{Z}[G]$-module isomorphe au $\mathbb{Z}[G]$-module trivial $\mathbb{Z}$.

Proposition 6.3. *Soient G un groupe, k un corps de caractéristique zéro ou première à l'ordre de G, et soit A l'algèbre du groupe $k[G]$. On suppose que G est un groupe de type FP de dimension cohomologique d. Alors l'algèbre A est une algèbre de type FP de dimension cohomologique d et pour tout i on a des isomorphismes de A^e-modules*

$$\operatorname{Ext}^i_{A^e}(A, A^e) \cong \operatorname{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[G]) \otimes_{\mathbb{Z}} A.$$

En particulier, si G est à dualité de Poincaré de module dualisant $\mathcal{D}_G$, alors A est une algèbre à dualité de Van den Bergh dont le module dualisant $\mathcal{D}_A$ est A^e-isomorphe à $\mathcal{D}_G \otimes_{\mathbb{Z}} A$.

Démonstration. Puisque k est de caractéristique zéro ou première à l'ordre de G, A est un $\mathbb{Z}[G]$-module plat. Le foncteur

$$- \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A\colon \mathbb{Z}[G]\text{-Mod} \to A\text{-Mod}$$

est donc exact. Puisque A est un k-module projectif, il est plat. Le foncteur

$$- \otimes_k A\colon A\text{-Mod} \to A^{\otimes 2}\text{-Mod}$$

est également exact. Le foncteur composé $- \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A^{\otimes 2}$ est donc exact. Puisque G est de type FP, de dimension d, il existe une $\mathbb{Z}[G]$-résolution de longueur d

$$0 \to P_d \to \cdots \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

du $\mathbb{Z}[G]$-module trivial $\mathbb{Z}$ par des $\mathbb{Z}$-modules projectifs de type fini. Par application du foncteur exact $- \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A^{\otimes 2}$ et compte tenu de l'isomorphisme de k-algèbres $A^e \cong A^{\otimes 2}$, on obtient une A^e-résolution de longueur d de A par des A^e-modules projectifs de type fini. Ceci montre que A est de type FP, de dimension cohomologique d.

Les isomorphismes

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}^i_{A^e}(A, A^e) &\cong \operatorname{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[G]) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A^e \\ &\cong \operatorname{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[G]) \otimes_{\mathbb{Z}[G]} A^{\otimes 2} \\ &\cong \operatorname{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[G]) \otimes_{\mathbb{Z}} A \end{aligned}$$

achèvent la démonstration de la proposition 6.3. □

Démonstration du lemme 6.2. D'après 6.3, puisque G est à dualité de Poincaré, $A = k[G]$ est à dualité de Van den Bergh et

$$\mathcal{D}_A \cong \mathcal{D}_G \otimes_{\mathbb{Z}} A.$$

Puisque G est orientable, l'action de G sur $\mathcal{D}_G = \mathbb{Z}$ est triviale et on a donc un isomorphime de A^e-modules $\mathcal{D}_A \cong A$, ce qui montre que A est Calabi–Yau.

Remarques. De 6.2 et 5.1, on déduit que sous les hypothèses 6.2, l'algèbre de cohomologie de Hochschild de $A = k[G]$ est une BV-algèbre. Dans le cas des variétés orientées asphériques de dimension d, D. Vaintrob [V] a montré le lien entre cette structure BV sur $H^*(A, A)$ et la structure BV de Chas–Sullivan sur l'homologie singulière $H_*(\mathcal{L}(X))$ de l'espace des lacets libres sur X.

Si G est à dualité de Poincaré *non orientable*, l'algèbre $A = k[G]$ est toujours une algèbre à dualité de Van den Bergh mais puisque l'opération de G sur $\mathcal{D}_G = \mathbb{Z}$ *n'est pas* triviale, le module dualisant $\mathcal{D}_A$ de l'algèbre A est un A^e-module isomorphe au module tordu ${}_{\varphi}A$ (c'est-à-dire $g \cdot x \cdot h = \varphi(g)xh$), où φ est l'isomorphime $\varphi\colon A \to A$ défini par $\varphi(g) = n_g g$ avec $n_g = g \cdot 1$.

Références

[B-T] R. Berger and R. Taillefer, Poincaré–Birkhoff–Witt deformations of Calabi–Yau algebras. *J. Noncommut. Geom.* **1** (2007), 241–270. Zbl 1161.16022 MR 2308306

[B-E] R. Bieri and B. Eckmann, Groups with homological duality generalizing Poincaré duality. *Invent. Math.* **20** (1973), 103–124. Zbl 0274.20066 MR 0340449

[Bi] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*. Algèbre. Chapitre 10 : Algèbre homologique. Masson, Paris 1980. Zbl 0455.18010 MR 0610795

[Br] K. S. Brown, *Cohomology of groups*. Graduate Texts in Math. 87, Springer-Verlag, New York 1982. Zbl 0584.20036 MR 0672956

[C] Non-commutative differential geometry. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **62** (1985), 41–144. Zbl 0592.46056 MR 0823176

[Ge] M. Gerstenhaber, The cohomology structure of an associative ring. *Ann. of Math.* (2) **78** (1963), 267–288. Zbl 0131.27302 MR 0161898

[Gi] V. Ginzburg, Calabi-Yau algebras. Preprint 2006. arXiv:math/0612139

[H] J. Huebschmann, Duality for Lie-Rinehart algebras and the modular class. *J. Reine Angew. Math.* **510** (1999), 103–159. Zbl 1034.53083 MR 1696093

[L] J.-L. Loday, *Cyclic homology*. 2nd ed., Grundl. Math. Wiss. 301, Springer-Verlag, Berlin 1998. Zbl 0885.18007 MR 1600246

[T-T] D. Tamarkin and B. Tsygan, The ring of differential operators on forms in noncommutative calculus. In *Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics*, Proc. Sympos. Pure Math. 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI 2005, 105–131. Zbl 1150.16011 MR 2131013

[V] D. Vaintrob, The string topology BV algebra, Hochschild cohomology and the Goldmann bracket on surfaces. Preprint 2007. arXiv:math/0702859

[VdB] M. Van den Bergh, A relation between Hochschild homology and cohomology for Gorenstein rings. *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), 1345–1348 ; erratum *ibid.* **130** (2002), 2809–2810. Zbl 0894.16005 MR 1443171 MR 1900889

[X] P. Xu, Gerstenhaber algebras and BV-algebras in Poisson geometry. *Comm. Math. Phys.* **200** (1999), 545–560. Zbl 0941.17016 MR 1675117

Received February 27, 2009; revised March 20, 2009

T. Lambre, UMR 6620 du CNRS, Université Blaise Pascal, Les Cézeaux, BP 80026,
24, avenue des Landais, 63177 Aubière Cedex, France
E-mail: thierry.lambre@math.univ-bpclermont.fr