J. Noncommut. Geom. 9 (2015), 1155–1173
DOI 10.4171/JNCG/219

Journal of Noncommutative Geometry

Action de Hopf sur les opérateurs de Hecke modulaires tordus

Abhishek Banerjee

Résumé. Soit $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$ un sous-groupe principal de congruence. Pour chaque $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$, nous introduisons l'ensemble $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ des opérateurs de Hecke modulaires tordus par σ. Alors, $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ est un $\mathcal{A}(\Gamma)$-module à droite, où $\mathcal{A}(\Gamma)$ est l'algèbre des opérateurs de Hecke modulaires introduite par Connes et Moscovici. En utilisant l'action d'une algèbre de Hopf $\mathfrak{h}_0$ sur $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, nous définissons les crochets de Rankin–Cohen réduits sur $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$. De plus, $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ est muni d'une action de $\mathcal{H}_1$, où $\mathcal{H}_1$ est l'algèbre de Hopf des feuilletages de codimension 1. Enfin, nous considérons les opérateurs entre les niveaux $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Nous montrons que l'action de ces opérateurs peut être exprimée en termes d'une algèbre de Hopf $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$.

Abstract. Let $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$ be a principal congruence subgroup. For each $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$, we introduce the collection $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ of modular Hecke operators twisted by σ. Then, $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ is a right $\mathcal{A}(\Gamma)$-module, where $\mathcal{A}(\Gamma)$ is the modular Hecke algebra introduced by Connes and Moscovici. Using the action of a Hopf algebra $\mathfrak{h}_0$ on $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, we define reduced Rankin–Cohen brackets on $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$. Moreover $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ carries an action of $\mathcal{H}_1$, where $\mathcal{H}_1$ is the Hopf algebra of foliations of codimension 1. Finally, we consider operators between the levels $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$. We show that the action of these operators can be expressed in terms of a Hopf algebra $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$.

Mathematics Subject Classification (2010). 11F03, 16T05.

Keywords. Modular Hecke algebras, Rankin–Cohen brackets, Hopf actions.

1. Introduction

Soit $\Gamma = \Gamma(N) \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$ un sous-groupe principal de congruence. Alors, en combinant la structure multiplicative sur les formes modulaires avec l'action classique des opérateurs de Hecke, Connes et Moscovici [5] ont introduit l'algèbre $\mathcal{A}(\Gamma)$ des opérateurs de Hecke modulaires. De plus, on a une algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$ agissant sur $\mathcal{A}(\Gamma)$ telle que l'action de $\mathcal{H}_1$ est déterminée par certains opérateurs classiques sur les formes modulaires. L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$ fait partie d'une famille $\{\mathcal{H}_n | n \geq 1\}$ des algèbres de Hopf introduite dans [4] pour décrire certains opérateurs apparaissant dans la théorie des feuilletages. En particulier, $\mathcal{H}_1$ est appelée comme l'algèbre de Hopf des feuilletages de codimension 1.

Dans cet article, nous introduisons l'ensemble $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ des opérateurs de Hecke modulaires tordus par un élément $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Comme dans le cas des opérateurs de Hecke modulaires, les opérateurs tordus dans $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ agissent sur les formes modulaires de niveau Γ. En particulier, quand $\sigma = 1$, on a $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma) = \mathcal{A}(\Gamma)$. En général, $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ est un $\mathcal{A}(\Gamma)$-module à droite. De plus, $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ est muni d'un appariement (voir (2.11))

$$(\_\_,\_\_) : \mathcal{A}_\sigma(\Gamma) \otimes \mathcal{A}_\sigma(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_\sigma(\Gamma) \tag{1.1}$$

Soit $\mathfrak{l}_0$ l'algèbre de Lie engendrée par $\{X, Y\}$ modulo la relation $[Y, X] = X$ et soit $\mathfrak{h}_0$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{l}_0$. Pour $h \in \mathfrak{h}_0$, posons $\Delta(h) = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$, où $\Delta : \mathfrak{h}_0 \longrightarrow \mathfrak{h}_0 \otimes \mathfrak{h}_0$ est le coproduit sur $\mathfrak{h}_0$. Alors, nous montrons que $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ est un module sur $\mathfrak{h}_0$ et on a (voir (2.25))

$$h(F, G) = \sum (h_{(1)}(F), h_{(2)}(G)) \qquad \forall\, h \in \mathfrak{h}_0,\, F, G \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma) \tag{1.2}$$

De plus, nous montrons que $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ est muni d'une action de $\mathcal{H}_1$ et on a (voir (2.45))

$$h(F * G) = \sum h_{(1)}(F) * h_{(2)}(G) \qquad \forall\, h \in \mathcal{H}_1,\, F \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma), G \in \mathcal{A}(\Gamma) \tag{1.3}$$

où le coproduit $\Delta : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{H}_1$ est donné par $\Delta(h) = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ pour chaque $h \in \mathcal{H}_1$. Dans [10], l'action de $\mathfrak{h}_0$ sur l'algèbre $\mathcal{A}(\Gamma)$ est utilisée pour définir les crochets de Rankin–Cohen réduits sur $\mathcal{A}(\Gamma)$. Donc, en combinant l'appariement dans (1.1) avec l'action de $\mathfrak{h}_0$ sur $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, on définit les crochets de Rankin–Cohen réduits $\mathcal{RC}_n : \mathcal{A}_\sigma(\Gamma) \otimes \mathcal{A}_\sigma(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, $\forall\, n \geq 0$.

Puis, nous considérons les opérateurs entre les niveaux $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Plus précisément, nous définissons un opérateur (voir (3.2))

$$X_\tau : \mathcal{A}_\sigma(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_{\tau\sigma}(\Gamma) \tag{1.4}$$

pour chaque $\tau, \sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Soit $\rho_m := \left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ pour chaque $m \in \mathbb{Z}$ et posons $\sigma(m) = \rho_m \cdot \sigma$. Alors, nous considérons le module gradué suivant :

$$\mathbb{A}_\sigma(\Gamma) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma) \tag{1.5}$$

et nous étudions les opérateurs $X_m : \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_{\sigma(m+n)}(\Gamma)$ entre les niveaux de la tour $\mathbb{A}_\sigma(\Gamma)$, où $X_m := X_{\rho_m}$, $\forall\, m \in \mathbb{Z}$ dans le sens du (1.4). Donc, nous montrons que $\mathbb{A}_\sigma(\Gamma)$ est munie d'une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_{\mathbb{Z}} \supseteq \mathfrak{l}_0$, engendrée par $\{Z, X_m | m \in \mathbb{Z}\}$ modulo les relations suivantes (voir (3.7))

$$[Z, X_m] = (m+1)X_m \qquad [X_m, X_{m'}] = 0 \qquad \forall\, m, m' \in \mathbb{Z} \tag{1.6}$$

De plus, nous généralisons l'appariement (1.1) sur $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ à un appariement (voir Proposition 3.3)

$$(\_\_,\_\_) : \mathcal{A}_{\tau_1\sigma}(\Gamma) \otimes \mathcal{A}_{\tau_2\sigma}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_{\tau_1\tau_2\sigma}(\Gamma) \tag{1.7}$$

où τ_1, $\tau_2 \in SL_2(\mathbb{Z})$ sont matrices telles que $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$.

En particulier, on a un appariement $(\_\_,\_\_) : \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma) \otimes \mathcal{A}_{\sigma(n')}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_{\sigma(n+n')}(\Gamma)$, $\forall\ n, n' \in \mathbb{Z}$ et donc un appariement induit sur $\mathbb{A}_\sigma(\Gamma)$. Soit $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{l}_{\mathbb{Z}}$. Enfin, nous montrons que l'appariement sur $\mathbb{A}_\sigma(\Gamma)$ induit par (1.7) se comporte bien vis-à-vis de l'action de $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$. Autrement dit, on a (voir (3.17))

$$h(F,G) = \sum (h_{(1)}(F), h_{(2)}(G)) \qquad \forall\ h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}, F, G \in \mathbb{A}_\sigma(\Gamma) \tag{1.8}$$

où le coproduit $\Delta : \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ est donné par $\Delta(h) := \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ pour chaque $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$.

Remerciements. Je tiens à remercier sincèrement Prof. Alain Connes pour ses conseils. De plus, une grande partie de cet article a été écrit lors d'un séjour à l'Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, Royaume-Uni. Je souhaite remercier l'Institut pour son hospitalité.

2. Les opérateurs de Hecke modulaires tordus

Pour chaque entier $M \geq 1$, nous notons par $\Gamma(M)$ le sous-groupe principal de congruence de niveau M. Si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in GL_2^+(\mathbb{Q})$, on définit une fonction :

$$j_\gamma : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad j_\gamma(z) := (cz+d)^{-1}. \tag{2.1}$$

où $\mathbb{H}$ est le demi-plan de Poincaré. On dispose d'une action de $GL_2^+(\mathbb{Q})$ sur $\mathbb{H}$ comme suit :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z := \frac{az+b}{cz+d} \qquad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2^+(\mathbb{Q}), z \in \mathbb{H} \tag{2.2}$$

Une fonction holomorphe $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite une forme modulaire de niveau M et poids $k \in \mathbb{Z}$ si elle satisfait

$$f(z) = (f|_k\gamma)(z) := f(\gamma z) j_\gamma(z)^k \qquad \forall \gamma \in \Gamma(M), z \in \mathbb{H} \tag{2.3}$$

et f est « holomorphe aux pointes » (voir, par exemple, [9]). Nous notons par $\mathcal{M}_k(\Gamma(M))$ l'ensemble des formes modulaires de niveau M et poids k. Nous posons

$$\mathcal{M}(\Gamma(M)) := \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{M}_k(\Gamma(M)) \qquad \mathcal{M} := \varinjlim_{M\geq 1} \mathcal{M}(\Gamma(M)) \tag{2.4}$$

De plus, une forme modulaire f est dite cuspidale si f est nulle aux pointes (voir [9] pour les définitions). Notons par $\mathcal{M}_k^0(\Gamma(M))$ l'ensemble des formes modulaires cuspidales de niveau M et poids k et posons

$$\mathcal{M}^0(\Gamma(M)) := \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{M}_k^0(\Gamma(M)) \qquad \mathcal{M}^0 := \varinjlim_{M\geq 1} \mathcal{M}^0(\Gamma(M)). \tag{2.5}$$

Alors, $\mathcal{M}^0$ est un idéal de l'anneau $\mathcal{M}$. Nous rappelons ici la notion d'un opérateur de Hecke modulaire introduit par Connes et Moscovici [5, § 1].

Définition 2.1. *Soit Γ un sous-groupe principal de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$. Un opérateur de Hecke modulaire de niveau Γ est une fonction à support fini*

$$F : \Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathcal{M} \qquad \Gamma\alpha \mapsto F_\alpha \in \mathcal{M} \tag{2.6}$$

telle qu'elle satisfait la condition suivante :

$$F_{\alpha\gamma} = F_\alpha|\gamma \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma \tag{2.7}$$

Notons par $\mathcal{A}(\Gamma)$ l'ensemble des opérateurs de Hecke modulaires de niveau Γ.

Soit Γ un sous-groupe principal de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$. Pour chaque $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$, nous sommes prêts à introduire les opérateurs de Hecke modulaires (de niveau Γ) tordus par σ.

Définition 2.2. *Fixons $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Soit Γ un sous-groupe principal de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$. Un opérateur de Hecke modulaire (de niveau Γ) tordu par σ est une fonction à support fini*

$$F : \Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathcal{M} \qquad \Gamma\alpha \mapsto F_\alpha \in \mathcal{M} \tag{2.8}$$

telle qu'elle satisfait la condition suivante :

$$F_{\alpha\gamma} = F_\alpha|\sigma\gamma\sigma^{-1} \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma \tag{2.9}$$

Notons par $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ l'ensemble des opérateurs de Hecke modulaires tordus par σ. Si $F \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ est un opérateur tel que $F_\alpha \in \mathcal{M}^0$, $\forall\, \alpha \in G_2^+(\mathbb{Q})$, on dit que F est cuspidal. Notons par $\mathcal{A}_\sigma^0(\Gamma)$ le sous-ensemble des opérateurs cuspidals.

Proposition 2.3. *Soit Γ un sous-groupe principal de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$. Fixons $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Alors, on a un appariement*

$$(\_\_,\_\_) : \mathcal{A}_\sigma(\Gamma) \otimes \mathcal{A}_\sigma(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_\sigma(\Gamma) \tag{2.10}$$

défini comme suit :

$$(F,G)_\alpha := \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} F_{\beta\sigma} \cdot G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\sigma\beta \qquad \forall F, G \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma), \alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q}). \tag{2.11}$$

Démonstration. Prenons $\gamma \in \Gamma$. Alors, pour chaque $\beta \in SL_2(\mathbb{Z})$, on a

$$\begin{aligned} F_{\gamma\beta\sigma} &= F_{\beta\sigma} \\ G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}}|\sigma\gamma\beta &= G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\sigma\gamma^{-1}\sigma^{-1}\sigma\gamma\beta = G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\sigma\beta \end{aligned} \tag{2.12}$$

et donc la somme dans (2.11) est bien définie. De plus, puisque $G \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ est une fonction de $\Gamma\backslash G_2^+(\mathbb{Q})$ vers $\mathcal{M}$, on a $G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}} = G_{\gamma\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}$. Utilisant la définition de $(F, G)_\alpha$ dans (2.11), on voit que $(F, G)_{\gamma\alpha} = (F, G)_\alpha$. D'autre part, on a

$$(F, G)_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta \in \Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} F_{\beta\sigma} \cdot G_{\alpha\gamma\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\sigma\beta \tag{2.13}$$

Dans (2.13), nous posons $\delta = \beta\sigma\gamma^{-1}\sigma^{-1}$. Puisque $F \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, on a $F_{\delta\sigma\gamma} = F_{\delta\sigma}|\sigma\gamma\sigma^{-1}$. Alors, on peut écrire (2.13) comme

$$\begin{aligned} (F, G)_{\alpha\gamma} &= \sum_{\delta \in \Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} F_{\delta\sigma\gamma} \cdot G_{\alpha\sigma^{-1}\delta^{-1}}|\sigma\delta\sigma\gamma\sigma^{-1} \\ &= \sum_{\delta \in \Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (F_{\delta\sigma}|\sigma\gamma\sigma^{-1}) \cdot (G_{\alpha\sigma^{-1}\delta^{-1}}|\sigma\delta)|\sigma\gamma\sigma^{-1} \\ &= \left(\sum_{\delta \in \Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} F_{\delta\sigma} \cdot G_{\alpha\sigma^{-1}\delta^{-1}}|\sigma\delta \right)|\sigma\gamma\sigma^{-1} \\ &= (F, G)_\alpha|\sigma\gamma\sigma^{-1} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Donc, $(F, G) \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$. □

Ici, nous remarquons que la formule (2.11) ne définit pas la structure d'une algèbre sur $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$. En fait, pour $F, G, H \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, l'opérateur $((F, G), H) \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ n'est pas nécessairement égal à $(F, (G, H))$.

Quand $\sigma = 1$, il est clair que $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma) = \mathcal{A}(\Gamma)$, où $\mathcal{A}(\Gamma)$ est l'ensemble des opérateurs de Hecke modulaires introduit par Connes et Moscovici [5, § 1]. Nous montrons que les opérateurs de Hecke modulaires tordus agissent sur $\mathcal{M}(\Gamma)$. Quand $\sigma = 1$, cette action est la même que l'action de $\mathcal{A}(\Gamma)$ sur $\mathcal{M}(\Gamma)$ (voir [5]).

Proposition 2.4. *Soit Γ un sous-groupe principal de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$. Fixons $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Alors, les opérateurs de Hecke modulaires tordus par σ agissent sur $\mathcal{M}(\Gamma)$ comme suit :*

$$F * f := \sum_{\alpha \in \Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} F_{\alpha\sigma} \cdot f|\alpha \qquad \forall\ F \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma),\ f \in \mathcal{M}(\Gamma) \tag{2.15}$$

En particulier, si $f \in \mathcal{M}^0(\Gamma) \subseteq \mathcal{M}(\Gamma)$, $F * f \in \mathcal{M}^0(\Gamma)$ pour chaque $F \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$.

Démonstration. Prenons $\gamma \in \Gamma$. Alors, on a :

$$\begin{aligned}(F * f)|\gamma &= \sum_{\alpha \in \Gamma \backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} (F_{\alpha\sigma} \cdot f|\alpha)|\gamma \\ &= \sum_{\alpha \in \Gamma \backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} (F_{\alpha\sigma}|\gamma) \cdot (f|\alpha\gamma) \\ &= \sum_{\alpha \in \Gamma \backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} F_{\alpha\sigma\sigma^{-1}\gamma\sigma} \cdot f|\alpha\gamma \\ &= \sum_{\alpha \in \Gamma \backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} F_{\alpha\gamma\sigma} \cdot f|\alpha\gamma = F * f\end{aligned} \tag{2.16}$$

Donc, $F * f \in \mathcal{M}(\Gamma)$. Enfin, supposons que $f \in \mathcal{M}^0(\Gamma)$. Alors, $\mathcal{M}^0(\Gamma)$ étant un idéal de l'anneau $\mathcal{M}(\Gamma)$, il s'ensuit que

$$(F * f) = \sum_{\alpha \in \Gamma \backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} F_{\alpha\sigma} \cdot f|\alpha \in \mathcal{M}^0(\Gamma). \qquad \square$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$. Alors, on a un opérateur différentiel (voir [5, § 3]) :

$$X : \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{M}_{k+2}, \qquad X := \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz} - \frac{1}{12\pi i}\frac{d}{dz}(\log \Delta(z)) \cdot Y \tag{2.17}$$

où $Y : \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{M}_k$ est définie comme $Y(f) := (k/2) \cdot f$, $\forall f \in \mathcal{M}_k$ et $\Delta(z)$ est la forme modulaire (de poids 12) suivante :

$$\Delta(z) := (2\pi)^{12} q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}, \quad q = e^{2\pi i z},\ z \in \mathbb{H} \tag{2.18}$$

Si $\alpha \in SL_2(\mathbb{Z})$, on peut vérifier que $X(f|_k\alpha) = X(f)|_{k+2}\alpha$. Plus généralement, pour $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$, on a (voir [5, Lemma 5])

$$X(f|_k\alpha) = X(f)_{k+2}|\alpha - (\mu_{\alpha^{-1}} \cdot Y(f))|_{k+2}\alpha \tag{2.19}$$

où

$$\mu_\delta := \frac{1}{12\pi i}\frac{d}{dz} log \frac{\Delta|\delta}{\Delta} \qquad \forall\, \delta \in GL_2^+(\mathbb{Q}) \tag{2.20}$$

En particulier, $\mu_\alpha = 0$, $\forall\, \alpha \in SL_2(\mathbb{Z})$. De plus, on peut vérifier que (voir [5, (3.12)])

$$\mu_{\alpha_1\alpha_2} = \mu_{\alpha_1}|\alpha_2 + \mu_{\alpha_2} \qquad \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in GL_2^+(\mathbb{Q}) \tag{2.21}$$

Puisque $0 = \mu_1 = \mu_{\alpha^{-1}\alpha}$, il résulte de (2.21) qu'on peut écrire (2.19) comme

$$X(f|_k\alpha) = X(f)_{k+2}|\alpha + \mu_\alpha \cdot (Y(f)|_k\alpha). \tag{2.22}$$

Enfin, notons que X, Y sont des dérivations sur $\mathcal{M}$ et $[Y, X] = X$ (voir [5, § 3]). Soit $\mathfrak{h}_0$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_0$ engendrée par $\{X, Y\}$ modulo la relation $[Y, X] = X$. Alors, le coproduit $\Delta : \mathfrak{h}_0 \longrightarrow \mathfrak{h}_0 \otimes \mathfrak{h}_0$ sur l'algèbre de Hopf $\mathfrak{h}_0$ est défini par

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X \qquad \Delta(Y) = Y \otimes 1 + 1 \otimes Y. \tag{2.23}$$

Proposition 2.5. *Soit Γ un sous-groupe principal de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$. Fixons $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Pour chaque $h \in \mathfrak{h}_0$, posons $\Delta(h) := \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$.*

(a) Alors, $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ est un module sur $\mathfrak{h}_0$: pour $F \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$, on a

$$X(F)_\alpha = X(F_\alpha) \qquad Y(F)_\alpha = Y(F_\alpha) \qquad \forall\, \alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q}) \tag{2.24}$$

(b) L'algèbre $\mathfrak{h}_0$ a « une action de Hopf » sur l'appariement $(\_\_,\_\_) : \mathcal{A}_\sigma(\Gamma) \otimes \mathcal{A}_\sigma(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$. Autrement dit, pour F, $G \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, on a :

$$\sum (h_{(1)}(F), h_{(2)}(G)) = h(F, G) \tag{2.25}$$

Démonstration. (a) Pour montrer qu'on a une action de $\mathfrak{h}_0$ sur $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, il suffit de vérifier la relation $[Y, X] = X$ entre les opérateurs dans (2.24). Soit $F \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$. Alors, pour $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$, on a :

$$[Y, X](F)_\alpha = [Y, X](F_\alpha) = X(F_\alpha) = X(F)_\alpha \tag{2.26}$$

(b) Il suffit de vérifier (2.25) pour les générateurs X, Y. Pour F, $G \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ et $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$, on a

$$\begin{aligned}
(X(F,G))_\alpha &= X((F,G)_\alpha)\\
&= \sum_{\beta \in \Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} X(F_{\beta\sigma} \cdot (G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\sigma\beta))\\
&= \sum_{\beta \in \Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} X(F_{\beta\sigma}) \cdot (G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\sigma\beta) + \sum_{\beta \in \Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} F_{\beta\sigma} \cdot X(G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\sigma\beta)\\
&= (X(F), G)_\alpha + \sum_{\beta \in \Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} F_{\beta\sigma} \cdot X(G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}})|\sigma\beta\\
&= (X(F), G)_\alpha + (F, X(G))_\alpha
\end{aligned}$$

De même, on peut vérifier que $(Y(F,G))_\alpha = (Y(F), G)_\alpha + (F, Y(G))_\alpha$. □

Soient G, $H \in \mathcal{A}(\Gamma)$. Rappelons que le produit sur l'algèbre $\mathcal{A}(\Gamma)$ est défini comme (voir [5, Proposition 2]) :

$$(G * H)_\alpha := \sum_{\beta \in \Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} G_\beta \cdot H_{\alpha\beta^{-1}}|\beta \qquad \forall\, \alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q}). \tag{2.27}$$

Pour chaque $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$, notons qu'on peut exprimer $(G * H)_\alpha$ comme suit :

$$(G * H)_\alpha := \sum_{\alpha_2\alpha_1=\alpha} G_{\alpha_1} \cdot H_{\alpha_2}|\alpha_1 \tag{2.28}$$

où la somme dans (2.28) est prise sur tous les couples (α_1, α_2) tels que $\alpha_2\alpha_1 = \alpha$ modulo la relation d'équivalence :

$$(\alpha_1, \alpha_2) \sim (\gamma\alpha_1, \alpha_2\gamma^{-1}) \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma \tag{2.29}$$

Pour chaque $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$, nous montrons que $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ est un $\mathcal{A}(\Gamma)$-module à droite.

Proposition 2.6. *Soit Γ un sous-groupe principal de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$. Fixons $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Alors, $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ est muni de la structure d'un $\mathcal{A}(\Gamma)$-module à droite :*

$$(F * G)_\alpha := \sum_{\beta\in\Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} F_{\beta\sigma} \cdot G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\beta \qquad \forall F \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma), G \in \mathcal{A}(\Gamma), \alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q}) \tag{2.30}$$

De plus, $\mathcal{A}^0_\sigma(\Gamma)$ est un $\mathcal{A}(\Gamma)$ sous-module de $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$.

Démonstration. Prenons $\gamma \in \Gamma$. Alors, on a

$$\begin{aligned} F_{\gamma\beta\sigma} &= F_{\beta\sigma} \\ G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}}|\gamma\beta &= G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\gamma^{-1}\gamma\beta = G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\beta \end{aligned} \tag{2.31}$$

et donc la somme dans (2.30) est bien définie. De plus, comme dans la démonstration de Proposition 2.3, on peut vérifier que $(F * G)_{\gamma\alpha} = (F * G)_\alpha$. Par définition, on a

$$(F * G)_{\alpha\gamma} = \sum_{\beta\in\Gamma\backslash G_2^+(\mathbb{Q})} F_{\beta\sigma} \cdot G_{\alpha\gamma\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\beta \tag{2.32}$$

En posant $\delta = \beta\sigma\gamma^{-1}\sigma^{-1}$ et utilisant le fait que $F_{\delta\sigma\gamma} = F_{\delta\sigma}|\sigma\gamma\sigma^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} (F * G)_{\alpha\gamma} &= \sum_{\delta\in\Gamma\backslash G_2^+(\mathbb{Q})} F_{\delta\sigma\gamma} \cdot G_{\alpha\sigma^{-1}\delta^{-1}}|\delta\sigma\gamma\sigma^{-1} \\ &= \sum_{\delta\in\Gamma\backslash G_2^+(\mathbb{Q})} (F_{\delta\sigma}|\sigma\gamma\sigma^{-1}) \cdot (G_{\alpha\sigma^{-1}\delta^{-1}}|\delta)|\sigma\gamma\sigma^{-1} \\ &= \left(\sum_{\delta\in\Gamma\backslash G_2^+(\mathbb{Q})} F_{\delta\sigma} \cdot G_{\alpha\sigma^{-1}\delta^{-1}}|\delta \right)|\sigma\gamma\sigma^{-1} \\ &= (F * G)_\alpha|\sigma\gamma\sigma^{-1} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Il reste à montrer que $(F * G) * H = F * (G * H)$, $\forall\, F \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma), G, H \in \mathcal{A}(\Gamma)$.

Notons que

$$(F * G)_\alpha = \sum_{\alpha_2\alpha_1=\alpha} F_{\alpha_1} \cdot G_{\alpha_2}|\alpha_1\sigma^{-1} \tag{2.34}$$

où la somme dans (2.34) est prise sur tous les couples (α_1, α_2) tels que $\alpha_2\alpha_1 = \alpha$ modulo la relation d'équivalence :

$$(\alpha_1, \alpha_2) \sim (\gamma\alpha_1, \alpha_2\gamma^{-1}) \qquad \forall\, \gamma \in \Gamma \tag{2.35}$$

Donc, on peut écrire :

$$((F * G) * H)_\alpha = \sum_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1=\alpha} F_{\alpha_1} \cdot (G_{\alpha_2}|\alpha_1\sigma^{-1}) \cdot (H_{\alpha_3}|\alpha_2\alpha_1\sigma^{-1}) \tag{2.36}$$

où la somme dans (2.36) est prise sur tous les triplets $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ tels que $\alpha_3\alpha_2\alpha_1 = \alpha$ modulo la relation d'équivalence :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \sim (\gamma\alpha_1, \gamma'\alpha_2\gamma^{-1}, \alpha_3\gamma'^{-1}) \qquad \forall\, \gamma, \gamma' \in \Gamma \tag{2.37}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}(F * (G * H))_\alpha &= \sum_{\alpha'_2\alpha_1=\alpha} F_{\alpha_1} \cdot (G * H)_{\alpha'_2}|\alpha_1\sigma^{-1} \\ &= \sum_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1=\alpha} F_{\alpha_1} \cdot (G_{\alpha_2} \cdot (H_{\alpha_3}|\alpha_2))|\alpha_1\sigma^{-1} \\ &= \sum_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1=\alpha} F_{\alpha_1} \cdot (G_{\alpha_2}|\alpha_1\sigma^{-1}) \cdot (H_{\alpha_3}|\alpha_2\alpha_1\sigma^{-1})\end{aligned} \tag{2.38}$$

où la somme dans (2.38) est prise sur tous les triplets $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ tels que $\alpha_3\alpha_2\alpha_1 = \alpha$, modulo la relation d'équivalence dans (2.37). Combinant (2.36) et (2.38), on voit que $((F * G) * H)_\alpha = (F * (G * H))_\alpha$.

Enfin, supposons que $F \in \mathcal{A}^0_\sigma(\Gamma)$. Donc, $F_{\beta\sigma} \in \mathcal{M}^0$ pour chaque $\beta \in GL_2^+(\mathbb{Q})$. Alors, il s'ensuit de (2.30) que $(F * G) \in \mathcal{A}^0_\sigma(\Gamma)$ pour chaque $G \in \mathcal{A}(\Gamma)$. □

Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf agissant sur une algèbre $\mathcal{A}$. On dit que l'action de $\mathcal{H}$ est plate si elle satisfait (voir, par exemple, [7, § 2.1]) :

$$h(ab) = \sum h_{(1)}(a)h_{(2)}(b) \qquad \forall\, h \in \mathcal{H}, a, b \in \mathcal{A} \tag{2.39}$$

où $\Delta(h) = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ est le coproduit sur $\mathcal{H}$. Plus généralement, supposons que $\mathcal{H}$ agit sur $\mathcal{P}$ et $\mathcal{A}$, où $\mathcal{A}$ est une algèbre et $\mathcal{P}$ est un $\mathcal{A}$-module à droite. Alors, on dit que l'action de $\mathcal{H}$ sur $(\mathcal{P}, \mathcal{A})$ est plate si elle satisfait (voir [1, Definition 3.11])

$$h(pa) = \sum h_{(1)}(p)h_{(2)}(a) \qquad \forall\, h \in \mathcal{H}, p \in \mathcal{P}, a \in \mathcal{A}. \tag{2.40}$$

Dans [5], Connes et Moscovici ont introduit une action de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{A}(\Gamma)$. Alors, $\mathcal{H}_1$ fait partie d'une famille $\{\mathcal{H}_n | n \geq 1\}$ des algèbres de Hopf définie dans [4] et $\mathcal{H}_1$ est appelée comme l'algèbre de Hopf des feuilletages de codimension 1. Nous rappelons ici la définition de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_1$. Soit $\mathcal{L}_1$ l'algèbre de Lie engendrée par les opérateurs $\{X, Y, \delta_n | n \geq 1\}$ modulo les relations suivantes :

$$[Y, X] = X, \quad [X, \delta_n] = \delta_{n+1}, \quad [Y, \delta_n] = n\delta_n, \quad [\delta_k, \delta_l] = 0, \quad \forall\, n, k, l \geq 1 \tag{2.41}$$

Alors, $\mathcal{H}_1$ est définie comme l'algèbre enveloppante de $\mathcal{L}_1$. De plus, le coproduit $\Delta : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{H}_1$ est défini comme :

$$\begin{gathered} \Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X + \delta_1 \otimes Y \\ \Delta(Y) = Y \otimes 1 + 1 \otimes Y \qquad \Delta(\delta_1) = \delta_1 \otimes 1 + 1 \otimes \delta_1. \end{gathered} \tag{2.42}$$

L'antipode $S : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ est donné par :

$$S(X) = -X + \delta_1 Y \qquad S(Y) = -Y \qquad S(\delta_1) = -\delta_1. \tag{2.43}$$

Alors, $\mathcal{H}_1$ est une algèbre de Hopf (voir [5, § 2]). Pour savoir plus sur les algèbres de Hopf $\mathcal{H}_n$, $n \geq 1$, voir [4]. Nous allons montrer que $\mathcal{H}_1$ agit sur $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$. De plus, l'action de $\mathcal{H}_1$ sur $(\mathcal{A}_\sigma(\Gamma), \mathcal{A}(\Gamma))$ est plate dans le sens du (2.40).

Proposition 2.7. *Soit Γ un sous-groupe principal de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$. Fixons $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$.*

(a) Alors, $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ est un module sur $\mathcal{H}_1$; pour $F \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$, on a

$$X(F)_\alpha = X(F_\alpha) \qquad Y(F)_\alpha = Y(F_\alpha) \qquad \delta_n(F)_\alpha = X^{n-1}(\mu_{\alpha\sigma^{-1}}) \cdot F_\alpha \quad \forall\, n \geq 1. \tag{2.44}$$

En particulier, quand $\sigma = 1$, l'action de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma) = \mathcal{A}(\Gamma)$ est la même que l'action de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{A}(\Gamma)$ définie par Connes et Moscovici.

(b) Pour chaque $h \in \mathcal{H}_1$, posons $\Delta(h) := \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$. Alors, l'action de $\mathcal{H}_1$ sur $(\mathcal{A}_\sigma(\Gamma), \mathcal{A}(\Gamma))$ est plate dans le sens du (2.40). Autrement dit, pour $F \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, $G \in \mathcal{A}(\Gamma)$, on a :

$$\sum h_{(1)}(F) * h_{(2)}(G) = h(F * G). \tag{2.45}$$

Démonstration. (a) Soit $\gamma \in \Gamma$. Utilisant (2.21), on a

$$\mu_{\alpha\gamma\sigma^{-1}} = \mu_{\alpha\sigma^{-1}} | \sigma\gamma\sigma^{-1} + \mu_{\sigma\gamma\sigma^{-1}} = \mu_{\alpha\sigma^{-1}} | \sigma\gamma\sigma^{-1}. \tag{2.46}$$

Alors, pour $F \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, il résulte que

$$\begin{aligned}\delta_n(F)_{\alpha\gamma} = X^{n-1}(\mu_{\alpha\gamma\sigma^{-1}})F_{\alpha\gamma} &= X^{n-1}(\mu_{\alpha\sigma^{-1}}|\sigma\gamma\sigma^{-1})(F_\alpha|\sigma\gamma\sigma^{-1}) \\ &= \delta_n(F)_\alpha|\sigma\gamma\sigma^{-1}\end{aligned} \tag{2.47}$$

et donc $\delta_n(F) \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ pour chaque $n \geq 1$. De plus, il est clair que $X(F), Y(F) \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$.

Pour montrer qu'on a une action de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ il suffit de vérifier les relations (2.41) entre les opérateurs dans (2.44). Comme dans la démonstration de Proposition 2.5, on peut vérifier que $[Y, X](F)_\alpha = X(F)_\alpha$. De plus, puisque X est une dérivation sur $\mathcal{M}$ et $\delta_n(F)_\alpha = X^{n-1}(\mu_{\alpha\sigma^{-1}}) \cdot F_\alpha$, on a

$$\begin{aligned}[X, \delta_n](F)_\alpha &= X(X^{n-1}(\mu_{\alpha\sigma^{-1}}) \cdot F_\alpha) - X^{n-1}(\mu_{\alpha\sigma^{-1}}) \cdot X(F_\alpha) \\ &= X(X^{n-1}(\mu_{\alpha\sigma^{-1}})) \cdot F_\alpha = X^n(\mu_{\alpha\sigma^{-1}}) \cdot F_\alpha = \delta_{n+1}(F)_\alpha\end{aligned} \tag{2.48}$$

De même, pusique $\mu_{\alpha\sigma^{-1}} \in \mathcal{M}_2$ (voir [5, § 3]) et Y est une dérivation sur $\mathcal{M}$, on a

$$\begin{aligned}[Y, \delta_n](F)_\alpha &= Y(X^{n-1}(\mu_{\alpha\sigma^{-1}}) \cdot F_\alpha) - X^{n-1}(\mu_{\alpha\sigma^{-1}}) \cdot Y(F_\alpha) \\ &= Y(X^{n-1}(\mu_{\alpha\sigma^{-1}})) \cdot F_\alpha = nX^{n-1}(\mu_{\alpha\sigma^{-1}}) \cdot F_\alpha = n\delta_n(F)_\alpha.\end{aligned} \tag{2.49}$$

Enfin, on peut vérifier aisément que $[\delta_k, \delta_l](F)_\alpha = 0$, $\forall, k, l \geq 1$.

(b) Il suffit de vérifier (2.45) pour les générateurs X, Y et δ_1. Pour $F \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, $G \in \mathcal{A}(\Gamma)$ et $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$, on a

$$\begin{aligned}(X(F * G))_\alpha &= X((F * G)_\alpha) \\ &= \sum_{\beta \in \Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} X(F_{\beta\sigma} \cdot (G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\beta)) \\ &= \sum_{\beta \in \Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} X(F_{\beta\sigma}) \cdot (G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\beta) + \sum_{\beta \in \Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} F_{\beta\sigma} \cdot X(G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\beta) \\ &= (X(F), G)_\alpha + \sum_{\beta \in \Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} F_{\beta\sigma} \cdot X(G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}})|\beta \\ &\qquad + \sum_{\beta \in \Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} F_{\beta\sigma} \cdot \mu_\beta \cdot Y(G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}})|\beta \\ &= (X(F), G)_\alpha + (F, X(G))_\alpha + \sum_{\beta \in \Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} \delta_1(F)_{\beta\sigma} \cdot Y(G)_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\beta \\ &= (X(F), G)_\alpha + (F, X(G))_\alpha + (\delta_1(F), Y(G))_\alpha.\end{aligned}$$

Pour $\alpha, \beta \in GL_2^+(\mathbb{Q})$, il résulte de (2.21) que

$$\mu_{\alpha\sigma^{-1}} = \mu_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}\beta} = \mu_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\beta + \mu_\beta. \tag{2.50}$$

Puisque $G \in \mathcal{A}(\Gamma)$, notons que $\delta_1(G)_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}} = \mu_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}} \cdot G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}$. Appliquant (2.50), on a :

$$\begin{aligned}
\delta_1((F*G))_\alpha &= \mu_{\alpha\sigma^{-1}} \cdot (F*G)_\alpha \\
&= \sum_{\beta\in\Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} \mu_{\alpha\sigma^{-1}} \cdot (F_{\beta\sigma} \cdot (G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\beta)) \\
&= \sum_{\beta\in\Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} (\mu_\beta \cdot F_{\beta\sigma}) \cdot (G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\beta) \\
&\qquad\qquad + \sum_{\beta\in\Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q})} F_{\beta\sigma} \cdot (\mu_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}} \cdot G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}})|\beta \\
&= (\delta_1(F)*G)_\alpha + (F*\delta_1(G))_\alpha
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Enfin, on peut vérifier aisément que $(Y(F*G))_\alpha = (Y(F)*G)_\alpha + (F*Y(G))_\alpha$. □

Soit Γ un sous-groupe principal de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$. Choisissons $f(z) \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$ et $g(z) \in \mathcal{M}_l(\Gamma)$. D'après Zagier [11], on peut exprimer les crochets de Rankin–Cohen sur les formes modulaires comme ($\forall\ n \geq 0$) :

$$RC_n(f,g) := \sum_{r+s=n} (-1)^r \binom{n+k-1}{s}\binom{n+l-1}{r} D^r f(z) D^s g(z) \tag{2.52}$$

où D est l'opérateur différentiel défini comme $D := \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz}$. Dans [6], les crochets de Rankin–Cohen sur l'algèbre $\mathcal{A}(\Gamma)$ ont été exprimés en termes de l'action de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathcal{A}(\Gamma)$. De plus, les crochets de Rankin–Cohen réduits sur $\mathcal{A}(\Gamma)$ ont été définis par Yao [10, (II.6)] en utilisant l'action de $\mathfrak{h}_0$ sur $\mathcal{A}(\Gamma)$. Donc, on va utiliser l'action de $\mathfrak{h}_0$ sur $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ pour définir les crochets de Rankin–Cohen réduits sur les opérateurs tordus. Pour en savoir plus sur les liens entre les déformations de Rankin–Cohen et les algèbres de Hopf, voir [2], [8], [10].

Pour $k, l \in \mathbb{Z}$, posons $(2Y+k)_l := (2Y+k)(2Y+k+1)\ldots.(2Y+k+l-1)$. Pour $F, G \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ on définit les crochets de Rankin–Cohen réduits d'ordre $n \geq 0$ comme :

$$\mathcal{RC}_n(F,G) := \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k \frac{X^k}{k!}(2Y+k)_{n-k}(F), \frac{X^{n-k}}{(n-k)!}(2Y+n-k)_k(G)\right). \tag{2.53}$$

Proposition 2.8. *Soient $F, G \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$. Alors, pour chaque $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$ on a :*

$$\mathcal{RC}_n(F,G)_\alpha = \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} RC_n(F_{\beta\sigma}, G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\sigma\beta) \qquad \forall\ n \geq 0. \tag{2.54}$$

Démonstration. Par définition, on sait que F, G sont des fonctions à supports finis. Alors, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{RC}_n(F,G)_\alpha &= \sum_{k=0}^{n}\left((-1)^k\frac{X^k}{k!}(2Y+k)_{n-k}(F),\frac{X^{n-k}}{(n-k)!}(2Y+n-k)_k(G)\right)_\alpha \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})}\left(\left((-1)^k\frac{X^k}{k!}(2Y+k)_{n-k}(F)_{\beta\sigma}\right)\right. \\
&\qquad\left.\cdot\left(\frac{X^{n-k}}{(n-k)!}(2Y+n-k)_k(G)_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\sigma\beta\right)\right) \\
&= \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})}\sum_{k=0}^{n}\left(\left((-1)^k\frac{X^k}{k!}(2Y+k)_{n-k}(F_{\beta\sigma})\right)\right. \\
&\qquad\left.\cdot\left(\frac{X^{n-k}}{(n-k)!}(2Y+n-k)_k(G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\sigma\beta)\right)\right)
\end{aligned} \tag{2.55}$$

D'après Connes et Moscovici [6], la formule (2.52) de Zagier [11, § 1] pour les crochets de Rankin–Cohen sur les formes modulaires peut être écrite comme $(\forall n \geq 0)$:

$$\begin{aligned}
RC_n(f,g) = \sum_{k=0}^{n}&\left(\left((-1)^k\frac{X^k}{k!}(2Y+k)_{n-k}(f)\right)\right. \\
&\left.\cdot\left(\frac{X^{n-k}}{(n-k)!}(2Y+n-k)_k(g)\right)\right) \quad \forall f,g\in\mathcal{M}
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Combinant (2.55) et (2.56), on a

$$\mathcal{RC}_n(F,G)_\alpha = \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} RC_n(F_{\beta\sigma},G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\sigma\beta) \tag{2.57}$$

□

3. Les opérateurs X_τ

Dans la section précédente, nous avons étudié les opérateurs de Hecke modulaires tordus par σ pour chaque $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Alors, à chaque niveau $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$, on a une action de $\mathfrak{h}_0$ sur $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$. Dans cette section, nous allons introduire des opérateurs entre les niveaux $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$. Plus précisément, nous considérons la tour $\mathbb{A}_\sigma(\Gamma) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma)$, où $\sigma(n) := \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \sigma$. Nous montrons que l'action de ces opérateurs entre les niveaux de la tour $\mathbb{A}_\sigma(\Gamma)$ peut être exprimée en termes d'une algèbre de Hopf $\mathfrak{h}_\mathbb{Z} \supseteq \mathfrak{h}_0$ (voir (3.7)). Enfin, nous généralisons l'appariement sur $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$ à un appariement sur $\mathbb{A}_\sigma(\Gamma)$ qui se comporte bien vis-à-vis de l'action de $\mathfrak{h}_\mathbb{Z}$.

Soit $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$ un sous-groupe principal de congruence et soit $\tau \in SL_2(\mathbb{Z})$. Pour chaque $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $F \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, nous définissons :

$$\begin{aligned} X_\tau(F) : \Gamma\backslash GL_2^+(\mathbb{Q}) &\longrightarrow \mathcal{M} \\ X_\tau(F)_\alpha := X(F_\alpha)|\tau^{-1} &\qquad \forall\, \alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Proposition 3.1. *Soit $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$ un sous-groupe principal de congruence.*

(a) Fixons $\tau \in SL_2(\mathbb{Z})$. Alors, pour chaque $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$, X_τ induit un morphisme

$$X_\tau : \mathcal{A}_\sigma(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_{\tau\sigma}(\Gamma). \tag{3.2}$$

(b) Soient τ_1, $\tau_2 \in SL_2(\mathbb{Z})$ deux matrices telles que $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$. Alors, on a $[X_{\tau_1}, X_{\tau_2}] = 0$.

Démonstration. (a) Pour chaque $\gamma \in \Gamma$, on a

$$\begin{aligned} X_\tau(F)_{\alpha\gamma} &= X(F_{\alpha\gamma})|\tau^{-1} \\ &= X(F_\alpha|\sigma\gamma\sigma^{-1})|\tau^{-1} \\ &= X(F_\alpha|\tau^{-1}\tau\sigma\gamma\sigma^{-1})|\tau^{-1} \\ &= (X(F_\alpha)|\tau^{-1}))|\tau\sigma\gamma\sigma^{-1}\tau^{-1} \\ &= X_\tau(F)_\alpha|\tau\sigma\gamma\sigma^{-1}\tau^{-1} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Donc, on voit que $X_\tau(F) \in \mathcal{A}_{\tau\sigma}$.

(b) Soit $F \in \mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$. Alors, pour chaque $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$, on a

$$\begin{aligned} (X_{\tau_1}X_{\tau_2}(F))_\alpha &= X(X_{\tau_2}(F)_\alpha)|\tau_1^{-1} \\ &= X^2(F_\alpha)|\tau_2^{-1}\tau_1^{-1} \\ &= X^2(F_\alpha)|\tau_1^{-1}\tau_2^{-1} \\ &= (X_{\tau_2}X_{\tau_1}(F))_\alpha \end{aligned} \tag{3.4}$$

Donc, $[X_{\tau_1}, X_{\tau_2}] = 0$. $\square$

Pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, posons $\rho_m := \left(\begin{smallmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $X_m := X_{\rho_m}$. De plus, pour chaque $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$ et $n \in \mathbb{Z}$, posons $\sigma(n) := \rho_n \cdot \sigma$. Nous considérons la tour suivante :

$$\mathbb{A}_\sigma(\Gamma) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma). \tag{3.5}$$

Alors, $\mathbb{A}_\sigma(\Gamma)$ est un espace vectoriel gradué. Rappelons qu'un morphisme

$$f : E = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} E_n \longrightarrow E' = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} E'_n$$

des espaces gradués est dit homogène de degré m si $f(E_n) \subseteq E'_{n+m}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (voir par exemple [3, Chapitre 2]). Pour $m, n \in \mathbb{Z}$, notons que $\rho_m \cdot \rho_n = \rho_{n+m}$ et donc on a un morphisme $X_m = X_{\rho_m} : \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_{\sigma(n+m)}(\Gamma)$. Alors, pour chaque m, les morphismes $X_m : \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_{\sigma(n+m)}(\Gamma)$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ induisent un opérateur $X_m : \mathbb{A}_\sigma(\Gamma) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{A}_\sigma(\Gamma) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma)$ de degré m. De plus, soit $Z : \mathbb{A}_\sigma(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{A}_\sigma(\Gamma)$ l'opérateur de degré 0 défini comme suit : pour $F \in \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma)$, on pose :

$$Z(F)_\alpha := nF_\alpha + Y(F_\alpha) \qquad \forall\ \alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q}) \tag{3.6}$$

Nous considérons maintenant l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_\mathbb{Z}$ engendrée par les générateurs $\{Z, X_m | m \in \mathbb{Z}\}$ modulo les relations suivantes :

$$[Z, X_m] = (m+1)X_m \qquad [X_m, X_{m'}] = 0 \qquad \forall\ m, m' \in \mathbb{Z} \tag{3.7}$$

En particulier, $[Z, X_0] = X_0$. Donc, l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_0$, qui agit sur $\mathcal{A}_\sigma(\Gamma)$, est contenue dans $\mathfrak{l}_\mathbb{Z}$. Nous allons montrer que $\mathbb{A}_\sigma(\Gamma)$ est munie d'une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_\mathbb{Z}$.

Proposition 3.2. *Soit Γ un sous-groupe principal de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$. Fixons $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Alors, $\mathbb{A}_\sigma(\Gamma)$ est munie d'une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_\mathbb{Z}$ comme suit :*

$$(X_m(F))_\alpha = X(F_\alpha)|\rho_m^{-1} \quad Z(F)_\alpha := nF_\alpha + Y(F_\alpha)$$
$$\forall F \in \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma), \alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q}), m, n \in \mathbb{Z} \tag{3.8}$$

Démonstration. Il suffit de vérifier les relations (3.7) pour les opérateurs Z, X_m, $m \in \mathbb{Z}$. Comme une conséquence de Proposition 3.1(b), on sait que les opérateurs $X_m := X_{\rho_m}$, $m \in \mathbb{Z}$ se commutent entre eux. De plus, pour $F \in \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma)$ et $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$, on a

$$\begin{aligned}(ZX_m(F))_\alpha &= (n+m)X_m(F)_\alpha + YX_m(F)_\alpha \\ &= (n+m)X(F_\alpha)|\rho_m^{-1} + YX(F_\alpha)|\rho_m^{-1} \\ (X_m Z(F))_\alpha &= X(Z(F)_\alpha)|\rho_m^{-1} \\ &= nX(F_\alpha)|\rho_m^{-1} + XY(F_\alpha)|\rho_m^{-1}\end{aligned} \tag{3.9}$$

Puisque $[Y, X] = X$, il résulte de (3.9) que $[Z, X_m](F)_\alpha = mX_m(F)_\alpha + X_m(F)_\alpha = (m+1)X_m(F)_\alpha$. □

Soit $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{l}_{\mathbb{Z}}$. Donc, le coproduit Δ sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ est défini comme suit :

$$\Delta(Z) = Z \otimes 1 + 1 \otimes Z \qquad \Delta(X_m) = X_m \otimes 1 + 1 \otimes X_m \quad \forall\, m \in \mathbb{Z} \tag{3.10}$$

Alors, on a une action induite de $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{A}_\sigma(\Gamma) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma)$. On veut construire un appariement sur $\mathbb{A}_\sigma(\Gamma)$ qui se comporte bien vis-à-vis de l'action de $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$. Nous généralisons maintenant l'appariement défini dans (2.11).

Proposition 3.3. *Soit Γ un sous-groupe principal de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$. Fixons $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Soient $\tau_1, \tau_2 \in SL_2(\mathbb{Z})$ deux matrices telles que $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$. Alors, on a un appariement $(\_\_, \_\_) : \mathcal{A}_{\tau_1\sigma}(\Gamma) \otimes \mathcal{A}_{\tau_2\sigma}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_{\tau_1\tau_2\sigma}(\Gamma)$ défini comme suit ($\forall F \in \mathcal{A}_{\tau_1\sigma}(\Gamma), G \in \mathcal{A}_{\tau_2\sigma}(\Gamma), \alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$) :*

$$(F, G)_\alpha := \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (F_{\beta\sigma}|\tau_2^{-1}) \cdot (G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\tau_2\sigma\beta\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}) \tag{3.11}$$

Démonstration. Prenons $\gamma \in \Gamma$. Alors, pour chaque $\beta \in SL_2(\mathbb{Z})$, on a

$$\begin{aligned}(G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}}|\tau_2\sigma\gamma\beta\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}) &= (G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\tau_2\sigma\gamma^{-1}\sigma^{-1}\tau_2^{-1}\tau_2\sigma\gamma\beta\tau_1^{-1}\tau_2^{-1})\\ &= (G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\tau_2\sigma\beta\tau_1^{-1}\tau_2^{-1})\end{aligned}$$

et donc la somme dans (3.11) est bien définie. De plus, on a

$$(F, G)_{\alpha\gamma} := \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (F_{\beta\sigma}|\tau_2^{-1}) \cdot (G_{\alpha\gamma\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\tau_2\sigma\beta\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}) \tag{3.12}$$

Dans (3.12), nous posons $\delta = \beta\sigma\gamma^{-1}\sigma^{-1}$. Puisque $F \in \mathcal{A}_{\tau_1\sigma}(\Gamma)$, on a $F_{\delta\sigma\gamma} = F_{\delta\sigma}|\tau_1\sigma\gamma\sigma^{-1}\tau_1^{-1}$. Alors, on peut écrire (3.12) comme

$$\begin{aligned}(F, G)_{\alpha\gamma} &= \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (F_{\delta\sigma\gamma}|\tau_2^{-1}) \cdot (G_{\alpha\sigma^{-1}\delta^{-1}}|\tau_2\sigma\delta\sigma\gamma\sigma^{-1}\tau_1^{-1}\tau_2^{-1})\\ &= \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (F_{\delta\sigma}|\tau_1\sigma\gamma\sigma^{-1}\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}) \cdot (G_{\alpha\sigma^{-1}\delta^{-1}}|\tau_2\sigma\delta\sigma\gamma\sigma^{-1}\tau_1^{-1}\tau_2^{-1})\\ &= \left(\sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (F_{\delta\sigma}|\tau_2^{-1}) \cdot (G_{\alpha\sigma^{-1}\delta^{-1}}|\tau_2\sigma\delta\tau_1^{-1}\tau_2^{-1})\right)\Big|\tau_1\tau_2\sigma\gamma\sigma^{-1}\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\\ &= (F, G)_\alpha|\tau_1\tau_2\sigma\gamma\sigma^{-1}\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\end{aligned} \tag{3.13}$$

Donc, $(F, G) \in \mathcal{A}_{\tau_1\tau_2\sigma}(\Gamma)$. □

En particulier, pour $n, n' \in \mathbb{Z}$, on a un appariement $(\_\_, \_\_) : \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma) \otimes \mathcal{A}_{\sigma(n')}(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{A}_{\sigma(n+n')}(\Gamma)$. Puisque $\mathbb{A}_\sigma(\Gamma) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma)$, il est clair qu'on peut étendre l'appariement défini dans Proposition 3.3 à un appariement $(\_\_, \_\_)$: $\mathbb{A}_\sigma(\Gamma) \otimes \mathbb{A}_\sigma(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{A}_\sigma(\Gamma)$.

Lemme 3.4. *Soit Γ un sous-groupe principal de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$. Fixons $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Soient τ_1, τ_2, $\tau_3 \in SL_2(\mathbb{Z})$ trois matrices telles que $\tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i$, $\forall\, i$, $j \in \{1,2,3\}$. Alors, pour chaque $F \in \mathcal{A}_{\tau_1\sigma}(\Gamma)$, $G \in \mathcal{A}_{\tau_2\sigma}(\Gamma)$, on a :*

$$X_{\tau_3}(F,G) = (X_{\tau_3}(F),G) + (F, X_{\tau_3}(G)) \tag{3.14}$$

Démonstration. Par définition, pour chaque $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$, on a :

$$\begin{aligned} X_{\tau_3}(F,G)_\alpha &= \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} X((F_{\beta\sigma}|\tau_2^{-1})\cdot(G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\tau_2\sigma\beta\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}))|\tau_3^{-1} \\ &= \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (X(F_{\beta\sigma})|\tau_2^{-1}\tau_3^{-1})\cdot(G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\tau_2\sigma\beta\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_3^{-1}) \\ &\qquad + \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (F_{\beta\sigma}|\tau_2^{-1}\tau_3^{-1})\cdot(X(G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}})|\tau_2\sigma\beta\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_3^{-1}) \end{aligned} \tag{3.15}$$

Notons que $X_{\tau_3}(F) \in \mathcal{A}_{\tau_1\tau_3\sigma}(\Gamma)$ et $X_{\tau_3}(G) \in \mathcal{A}_{\tau_2\tau_3\sigma}(\Gamma)$. Appliquant l'appariement défini dans Proposition 3.3, on a

$$\begin{aligned} (X_{\tau_3}(F),G)_\alpha &= \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (X_{\tau_3}(F)_{\beta\sigma}|\tau_2^{-1})\cdot(G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\tau_2\sigma\beta\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_3^{-1}) \\ &= \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (X(F_{\beta\sigma})|\tau_2^{-1}\tau_3^{-1})\cdot(G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\tau_2\sigma\beta\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_3^{-1}) \\ (F,X_{\tau_3}(G))_\alpha &= \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (F_{\beta\sigma}|\tau_2^{-1}\tau_3^{-1})\cdot(X_{\tau_3}(G)_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\tau_2\tau_3\sigma\beta\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_3^{-1}) \\ &= \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (F_{\beta\sigma}|\tau_2^{-1}\tau_3^{-1})\cdot(X(G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}})|\tau_3^{-1}\tau_2\tau_3\sigma\beta\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_3^{-1}) \\ &= \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (F_{\beta\sigma}|\tau_2^{-1}\tau_3^{-1})\cdot(X(G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}})|\tau_2\sigma\beta\tau_1^{-1}\tau_2^{-1}\tau_3^{-1}) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ceci montre le résultat. $\square$

Enfin, nous montrons que l'appariement $(\_\_,\_\_) : \mathbb{A}_\sigma(\Gamma)\otimes\mathbb{A}_\sigma(\Gamma) \longrightarrow \mathbb{A}_\sigma(\Gamma)$ se comporte bien vis-à-vis de l'action de $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$ sur $\mathbb{A}_\sigma(\Gamma)$.

Proposition 3.5. *Soit Γ un sous-groupe principal de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$ et soit $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Pour chaque $h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$, posons $\Delta(h) = \sum h_{(1)}\otimes h_{(2)}$. Alors, pour chaque F, $G \in \mathbb{A}_\sigma(\Gamma)$, on a*

$$h(F,G) = \sum (h_{(1)}(F), h_{(2)}(G)). \tag{3.17}$$

Démonstration. Choisissons n, $n' \in \mathbb{Z}$. On peut supposer que $F \in \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma)$ et $G \in \mathcal{A}_{\sigma(n')}(\Gamma)$. Il suffit de vérifier (3.17) pour les générateurs $\{Z, X_m | m \in \mathbb{Z}\}$ de l'algèbre de Hopf $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}$. Pour les générateurs X_m, $m \in \mathbb{Z}$, ceci est une conséquence du Lemme 3.4. Puisque $\Delta(Z) = Z \otimes 1 + 1 \otimes Z$, il reste à montrer que

$$Z(F,G) = (Z(F),G) + (F,Z(G)) \qquad \forall\ F \in \mathcal{A}_{\sigma(n)}(\Gamma), G \in \mathcal{A}_{\sigma(n')}(\Gamma) \tag{3.18}$$

Appliquant Proposition 3.3, il est clair que $(F,G) \in \mathcal{A}_{\sigma(n+n')}(\Gamma)$. Alors, pour chaque $\alpha \in GL_2^+(\mathbb{Q})$, on a

$$\begin{aligned}
Z(F,G)_\alpha &= (n+n')(F,G)_\alpha + Y(F,G)_\alpha \\
&= (n+n') \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} ((F_{\beta\sigma}|\rho_{n'}^{-1}) \cdot (G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\rho_{n'}\sigma\beta\rho_n^{-1}\rho_{n'}^{-1})) \\
&\qquad\qquad + \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} Y((F_{\beta\sigma}|\rho_{n'}^{-1}) \cdot (G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\rho_{n'}\sigma\beta\rho_n^{-1}\rho_{n'}^{-1})) \\
&= \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} ((nF_{\beta\sigma} + Y(F_{\beta\sigma}))|\rho_{n'}^{-1}) \cdot (G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\rho_{n'}\sigma\beta\rho_n^{-1}\rho_{n'}^{-1}) \\
&\quad + \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (F_{\beta\sigma}|\rho_{n'}^{-1}) \cdot ((n'G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}} + Y(G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}))|\rho_{n'}\sigma\beta\rho_n^{-1}\rho_{n'}^{-1}) \\
&= \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (Z(F)_{\beta\sigma}|\rho_{n'}^{-1}) \cdot (G_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\rho_{n'}\sigma\beta\rho_n^{-1}\rho_{n'}^{-1}) \\
&\qquad\qquad + \sum_{\beta\in\Gamma\backslash SL_2(\mathbb{Z})} (F_{\beta\sigma}|\rho_{n'}^{-1}) \cdot (Z(G)_{\alpha\sigma^{-1}\beta^{-1}}|\rho_{n'}\sigma\beta\rho_n^{-1}\rho_{n'}^{-1}) \\
&= (Z(F),G)_\alpha + (F,Z(G))_\alpha
\end{aligned} \tag{3.19}$$

□

Références

[1] A. Banerjee, Hopf Action and Rankin–Cohen Brackets on an Archimedean Complex, *J. Noncommut. Geom.* **5** (2011), no. 3, 401–421. Zbl 1263.11051 MR 2817645

[2] P. Bieliavsky, X. Tang and Y.-J. Yao, Rankin–Cohen brackets and formal quantization, *Adv. Math.* **212** (2007). no. 1, 293–314. Zbl 1123.53049 MR 2319770

[3] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*. Algèbre. Chapitres 1 à 3, Hermann, Paris, 1970. Zbl 0211.02401 MR 274237

[4] A. Connes and H. Moscovici, Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem, *Comm. Math. Phys.*, **198** (1998),199–246. Zbl 0940.58005 MR 1657389

[5] A. Connes and H. Moscovici, Modular Hecke algebras and their Hopf symmetry, *Moscow Math Journal*, **4** (2004), 67–109. Zbl 1122.11023 MR 2074984

[6] A. Connes and H. Moscovici, Rankin–Cohen brackets and the Hopf algebra of transverse geometry. *Moscow Math. Journal.* **4** (2004), 111–130. Zbl 1122.11024 MR 2074985

[7] M. Crainic, Cyclic cohomology of Hopf algebras, and a non-commutative Chern-Weil theory, *Preprint*, 1999. arXiv:math/9812113v3

[8] R. Rochberg, X. Tang abd Y.-J. Yao, A survey on Rankin–Cohen deformations in *Perspectives on noncommutative geometry*, 133–151, Fields Inst. Commun., 61, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011. Zbl 1287.46054 MR 2838685

[9] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publ. Math. Soc. Japan, 11, Iwanami Shoten/Princeton Univ. Press, Tokyo/Princeton, NJ, 1971. Zbl 0221.10029 MR 314766

[10] Y.-J. Yao, *Autour des Déformations de Rankin–Cohen*, Thèse de Doctorat, École Polytechnique, 2007.

[11] D. Zagier, Modular forms and differential operators, K.G. Ramanathan memorial issue, *Proc. Indian Acad. Sci. Math* **104** (1994), no. 1, 57–75. Zbl 0806.11022 MR 1280058

Received 12 April, 2014

A. Banerjee, Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore 560 012, India

E-mail: abhishekbanerjee1313@gmail.com