



Olivier Benoist

Quelques espaces de modules d'intersections complètes lisses qui sont quasi-projectifs

Received November 21, 2011 and in revised form September 17, 2012

Abstract For some values of the degrees of the equations, we show, using geometric invariant theory, that the coarse moduli space of smooth complete intersections in \mathbb{P}^N is quasi-projective.

Keywords. Moduli spaces, complete intersections, geometric invariant theory

1. Introduction

1.1. Quasi-projectivité d'espaces de modules

La question de la quasi-projectivité des espaces de modules de variétés algébriques a été révolutionnée par Mumford qui a développé pour l'étudier la théorie géométrique des invariants. Cette technique a permis à Mumford [20] de montrer la quasi-projectivité de l'espace de modules des courbes lisses, puis à Knudsen [12] et Gieseker et Mumford [19] de montrer indépendamment la projectivité de l'espace des modules des courbes stables. En dimension supérieure, les travaux de Viehweg [25] montrent la quasi-projectivité des espaces de modules de variétés lisses canoniquement polarisées en caractéristique nulle.

Une autre stratégie pour montrer la quasi-projectivité d'un espace de modules, efficace quand celui-ci est propre, a été développée par Kollár [14]. Elle devrait permettre de montrer la projectivité de compactifications modulaires des espaces de modules étudiés par Viehweg (voir [13]).

Dans ces exemples, le fibré canonique des variétés considérées vérifie des propriétés de positivité. A contrario, on ne connaît pas d'énoncé général sur la quasi-projectivité des espaces de modules de variétés de Fano. Vu les exemples de Kollár [16] d'espaces de modules non quasi-projectifs de variétés polarisées, il n'est pas clair dans quelle généralité attendre des résultats positifs.

Dans ce texte, on étudie le cas particulier des intersections complètes lisses par des méthodes de théorie géométrique des invariants. On construit ainsi de nombreux exemples d'espaces de modules quasi-projectifs de variétés de Fano.

O. Benoist: École Normale Supérieure, Département de Mathématiques et Applications, 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France; e-mail: olivier.benoist@ens.fr

Mathematics Subject Classification (2010): Primary 14D22; Secondary 14M10, 14L24

1.2. Énoncé des principaux résultats

Soient $N \geq 2$, $1 \leq c \leq N - 1$ et $2 \leq d_1 \leq \dots \leq d_c$ des entiers. Une *intersection complète* sur un corps k est un sous-schéma de codimension c de \mathbb{P}_k^N défini par c équations homogènes de degrés d_1, \dots, d_c .

Soit H l'ouvert du schéma de Hilbert de $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^N$ paramétrant les intersections complètes lisses (voir [22, 4.6.1]). Si on n'a pas $c = 1$ et $d_1 = 2$, l'action par changement de coordonnées de PGL_{N+1} sur H est propre [5, Théorème 1.7], et le théorème de Keel et Mori [11] montre l'existence d'un quotient géométrique M de H par PGL_{N+1} , unique par [15, Corollary 2.15]. C'est un espace algébrique séparé de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$: l'espace de modules (grossier) des intersections complètes lisses.

L'espace algébrique M est-il un schéma ? Un schéma quasi-projectif ? Un schéma affine ? Le résultat principal de ce texte est le suivant :

Théorème 1.1. *Soit M l'espace de modules des intersections complètes lisses.*

- (i) *Si $d_1 = \dots = d_c$ et si l'on n'a pas $c = 1$ et $d_1 = 2$, M est un schéma affine.*
- (ii) *Si $c \geq 2$, $d_1 < d_2 = \dots = d_c$ et $d_2(N - c + 2) > d_1((c - 1)(d_2 - d_1) + 1)$, M est un schéma quasi-projectif.*

En caractéristique nulle, la quasi-projectivité d'un espace de modules de variétés lisses dont le fibré canonique est ample est connue par les travaux de Viehweg [25]. Or si $c \geq 2$ et $d_1 < d_2 = \dots = d_c$, et que le fibré canonique des intersections complètes considérées n'est pas ample, les hypothèses du théorème 1.1(ii) sont vérifiées. En effet, on a $N + 1 \geq (c - 1)d_2 + d_1 \geq (c - 1)(d_2 - d_1) + (c - 1) + d_1$. Ainsi, $d_2(N - c + 2) \geq d_2(c - 1)(d_2 - d_1) + d_2d_1 > d_1((c - 1)(d_2 - d_1) + 1)$. Les résultats de Viehweg et le théorème 1.1 impliquent donc :

Corollaire 1.2. *En caractéristique nulle, si $d_1 \leq d_2 = \dots = d_c$ et si l'on n'a pas $c = 1$ et $d_1 = 2$, M est un schéma quasi-projectif.*

1.3. Le cas $d_1 = \dots = d_c$

La preuve du théorème 1.1(ii) occupe la majeure partie de ce texte. En revanche, le théorème 1.1(i) est facile : le cas des hypersurfaces ($c = 1$) est dû à Mumford [20, Prop. 4.2], et la preuve se généralise facilement.

Preuve du théorème 1.1(i). Soit \bar{H} la grassmannienne (relative sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$) des sous-espaces vectoriels de dimension c de $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(d_1))$. Le schéma de Hilbert H s'identifie à un ouvert de \bar{H} : le complémentaire du diviseur discriminant. Comme la grassmannienne est lisse de groupe de Picard engendré par le fibré de Plücker, tout diviseur effectif non trivial sur celle-ci est ample. Ainsi, le discriminant est ample, et son complémentaire H est affine. On pose $H = \mathrm{Spec}(A)$.

Par [5, Théorème 1.7], PGL_{N+1} agit proprement sur H . Comme de plus PGL_{N+1} est réductif, on peut appliquer un théorème de Seshadri ([23, Theorem 3], [15, Theorem 7.3]) pour montrer que le quotient géométrique de H par PGL_{N+1} est $M = \mathrm{Spec}(A^{\mathrm{PGL}_{N+1}})$, et est donc affine. \square

1.4. Plan du texte

L'argument de Mumford décrit ci-dessus fonctionne car H admet une compactification très simple. Quand $d_1 < d_2 = \dots = d_c$, H a encore une compactification explicite \bar{H} : un fibré en grassmanniennes sur un espace projectif. Les paragraphes 2.1 et 2.2 sont consacrés à la construction et à l'étude de cette compactification. Le résultat principal est le théorème 2.7 qui calcule son cône ample.

On pourrait alors espérer que l'argument de Mumford fonctionne encore : il faudrait que le diviseur discriminant soit ample sur \bar{H} . Malheureusement, ce n'est jamais le cas si $c = 2$ (voir la remarque 2.9). On doit donc appliquer la théorie géométrique des invariants de manière moins naïve : on fixe un fibré ample sur \bar{H} et on calcule à l'aide du critère de Hilbert–Mumford quand toutes les intersections complètes lisses sont stables. C'est l'objet du paragraphe 2.3.

La preuve de l'inégalité (12) qui permet de vérifier le critère de Hilbert–Mumford est reportée à la troisième partie : c'est le théorème 3.1. Celui-ci est énoncé et démontré sans hypothèses restrictives sur les degrés des intersections complètes.

On peut maintenant expliquer le rôle des hypothèses du théorème 1.1. Si l'on n'a pas $d_1 \leq d_2 = \dots = d_c$, je ne connais pas de compactification explicite de H analogue à celles évoquées ci-dessus. Si $d_1 < d_2 = \dots = d_c$, mais qu'on n'a pas $d_2(N - c + 2) > d_1((c - 1)(d_2 - d_1) + 1)$, aucun fibré en droites ample sur \bar{H} ne rend toutes les intersections complètes lisses stables (proposition 2.16), et on ne peut pas appliquer la théorie géométrique des invariants sur \bar{H} .

Pour montrer la quasi-projectivité de M pour d'autres valeurs des degrés à l'aide de théorie géométrique des invariants, il faut donc considérer une autre compactification de H . On peut choisir (suivant Mumford [19]) le schéma de Hilbert de \mathbb{P}^N . Cette possibilité est discutée dans la quatrième partie. On y explique en particulier pourquoi l'inégalité (12) est plus faible que celle qui serait nécessaire à la preuve de la Hilbert-stabilité des intersections complètes lisses.

1.5. Liens avec d'autres travaux

La théorie géométrique des invariants d'hypersurfaces ou d'intersections complètes dans \mathbb{P}^N a été étudiée dans de nombreux cas particuliers : surfaces quartiques [24], solides cubiques [1], cubiques dans \mathbb{P}^5 [17], pinceaux de quadriques dans \mathbb{P}^4 [3], intersections d'une quadrique et d'une cubique dans \mathbb{P}^3 [6], [7], ...

Chacun de ces travaux étudie un espace de modules précis et mène une analyse complète : le lieu semi-stable est calculé et on obtient une compactification de l'espace de modules. Dans ce texte, on obtient des résultats pour beaucoup de valeurs des degrés, mais le résultat est moins fort : on se contente de montrer que les intersections complètes lisses sont stables.

Signalons particulièrement [6] et [7] où est menée une étude très précise du cas particulier $N = 3$, $c = 2$, $d_1 = 2$ et $d_2 = 3$, en utilisant la compactification \bar{H} étudiée dans la suite de cet article.

2. Géométrie du schéma \tilde{H}

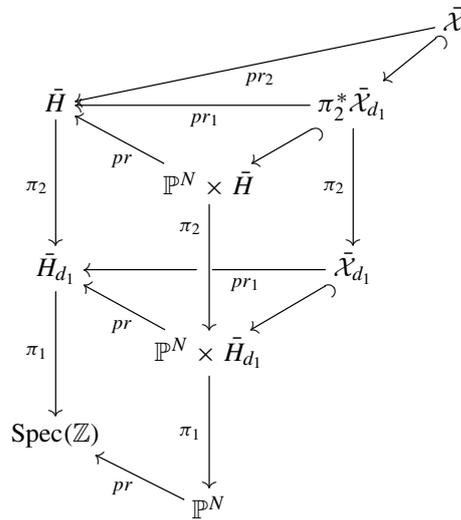
Conventions 2.1. Dans cette partie, on fixe $2 \leq c \leq N - 1$ et $2 \leq d_1 < d_2 = \dots = d_c$ des entiers. Une intersection complète sur un corps K est toujours de codimension c dans \mathbb{P}_K^N et de degrés d_1, \dots, d_c .

Sauf mention du contraire, les schémas que nous considérerons seront définis sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. En particulier, $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^N$. Quand on manipulera un point géométrique, on notera toujours K le corps algébriquement clos sur lequel il est défini.

Si \mathcal{F} est un faisceau localement libre sur un schéma, le fibré vectoriel géométrique associé à \mathcal{F} est celui dont le faisceau des sections est \mathcal{F}^\vee . Par $\mathbb{G}(r, \mathcal{F})$, on désignera la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de rang r de ce fibré vectoriel géométrique. Quand $r = 1$, on notera aussi ce schéma $\mathbb{P}(\mathcal{F})$.

2.1. Constructions

On construit tout d'abord les schémas H et \tilde{H} , les familles de sous-schémas de \mathbb{P}^N qu'ils paramètrent, ainsi que divers faisceaux localement libres sur ces espaces. On utilisera notamment les notations du diagramme ci-dessous.



Hypersurfaces. Soit $d \geq 1$. Notons $pr : \mathbb{P}^N \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ le morphisme structurel. Le faisceau $pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)$ sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ est localement libre, et ses fibres géométriques s'identifient à $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d))$. On note $\tilde{H}_d = \mathbb{P}((pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d))^\vee)$ et $\pi_1 : \tilde{H} \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{Z})$ la projection. Un point géométrique de \tilde{H}_d est une droite vectorielle $\langle F \rangle$ de $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d))$.

On note encore $pr : \mathbb{P}^N \times \tilde{H}_d \rightarrow \tilde{H}_d$ et $\pi_1 : \mathbb{P}^N \times \tilde{H}_d \rightarrow \mathbb{P}^N$ les changements de base. La construction de \tilde{H}_d fournit une injection du fibré en droites tautologique $\mathcal{O}_{\tilde{H}_d}(-1) \rightarrow \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d)$. Par changement de base par le morphisme plat π_1 , cette injection se réécrit $\mathcal{O}_{\tilde{H}_d}(-1) \rightarrow pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \tilde{H}_d}(d; 0)$. Tirant en arrière sur $\mathbb{P}^N \times \tilde{H}_d$, et

utilisant l'adjonction, on obtient un morphisme de fibrés en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d}(0; -1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d}(d; 0)$. Le lieu où ce morphisme est nul est un diviseur de Cartier $\bar{\mathcal{X}}_d$ sur $\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d$. Par construction, la fibre en $\langle F \rangle$ de $pr_1 : \bar{\mathcal{X}}_d \rightarrow \bar{H}_d$ est le sous-schéma $\{F = 0\}$ de \mathbb{P}_K^N . L'équation de $\bar{\mathcal{X}}_d$ fournit sur $\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d$ la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d}(-d; -1) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_d} \rightarrow 0.$$

Tensorisons par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d}(l; 0)$, et appliquons pr_* en remarquant par calcul du H^1 des fibres que $R^1 pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N \times \bar{H}_d}(-d; -1) = 0$. Utilisons la formule de projection et le changement de base par le morphisme plat π_1 pour obtenir sur \bar{H}_d la suite exacte courte de faisceaux suivante :

$$0 \rightarrow \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(l-d) \otimes \mathcal{O}_{\bar{H}_d}(-1) \rightarrow \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(l) \rightarrow pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_d}(l) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Par exactitude à droite du produit tensoriel, on voit que la fibre géométrique $(pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_d}(l))_{\langle F \rangle}$ est $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l)) / \langle F \rangle$, où l'on a noté $\langle F \rangle = H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l-d)) \cdot F$. Ainsi, $pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_d}(l)$ est localement libre par constance de la dimension de ses fibres, et la fibre géométrique en $\langle F \rangle$ de la suite exacte courte de faisceaux localement libres (1) est

$$0 \rightarrow \langle F \rangle \rightarrow H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l)) / \langle F \rangle \rightarrow 0. \quad (2)$$

Intersections complètes. On a vu ci-dessus que $pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_{d_1}}(d_2)$ est un faisceau localement libre sur \bar{H}_{d_1} . On notera $\bar{H} = \mathbb{G}_{\bar{H}_{d_1}}(c-1, (pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_{d_1}}(d_2)^\vee))$ et $\pi_2 : \bar{H} \rightarrow \bar{H}_{d_1}$ la projection. Par (2), les points géométriques de \bar{H} sont en bijection avec la donnée d'une droite $\langle F_1 \rangle$ de $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_1))$ et d'un sous-espace vectoriel de dimension $c-1$ de $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2)) / \langle F_1 \rangle$. Si $F_2, \dots, F_c \in H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2))$ engendrent ce sous-espace vectoriel, on notera $[F_1, F_2, \dots, F_c]$ ce point géométrique de \bar{H} . La description de \bar{H} comme grassmannienne relative sur un espace projectif montre que son groupe de Picard est de rang 2, engendré par $\mathcal{O}(1, 0) = \pi_2^* \mathcal{O}(1)$ et par le fibré de Plücker relatif $\mathcal{O}(0, 1)$.

La construction de \bar{H} fournit une injection du fibré tautologique $\mathcal{F} \rightarrow \pi_2^* pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_{d_1}}(d_2)$. Par changement de base par le morphisme plat π_2 , cette injection se réécrit $\mathcal{F} \rightarrow pr_{1*} \mathcal{O}_{\pi_2^* \bar{\mathcal{X}}_{d_1}}(d_2; 0, 0)$. Tirant en arrière sur $\pi_2^* \bar{\mathcal{X}}_{d_1}$, et utilisant l'adjonction, on obtient un morphisme de fibrés vectoriels $pr_1^* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{O}_{\pi_2^* \bar{\mathcal{X}}_{d_1}}(d_2; 0, 0)$. Le lieu des zéros de ce morphisme est un sous-schéma $\bar{\mathcal{X}}$ de $\pi_2^* \bar{\mathcal{X}}_{d_1}$. Par construction, la fibre en $[F_1, F_2, \dots, F_c]$ de la projection $pr_2 : \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{H}$ est le sous-schéma $\{F_1 = F_2 = \dots = F_c = 0\}$ de \mathbb{P}_K^N .

Notons H l'ouvert de \bar{H} constitué des points géométriques $[F_1, F_2, \dots, F_c]$ tels que $\{F_1 = F_2 = \dots = F_c = 0\}$ soit lisse de codimension c dans \mathbb{P}_K^N . On note $\mathcal{X} \rightarrow H$ la restriction de $\bar{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{H}$ à H . On montre aisément que $\mathcal{X} \rightarrow H$ s'identifie au schéma de Hilbert des intersections complètes lisses et à sa famille universelle.

Par construction de \bar{H} , on dispose d'une suite exacte courte de faisceaux localement libres sur \bar{H} :

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \pi_2^* pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_{d_1}}(d_2) \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0, \quad (3)$$

dont la fibre géométrique en $[F_1, \dots, F_c]$ s'identifie à

$$0 \rightarrow \langle F_2, \dots, F_c \rangle \rightarrow H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2))/\langle F_1 \rangle \rightarrow H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2))/\langle F_1, \dots, F_c \rangle \rightarrow 0. \tag{4}$$

Par ailleurs, par (1) pour $d = d_1$ et $l = d_2$, on dispose d'une suite exacte courtes de faisceaux localement libres sur \bar{H} :

$$0 \rightarrow \pi_2^* \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_2 - d_1) \otimes \mathcal{O}(-1, 0) \rightarrow \pi_2^* \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_2) \rightarrow \pi_2^* pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_{d_1}}(d_2) \rightarrow 0. \tag{5}$$

Par (2), la fibre géométrique de (5) en $[F_1, \dots, F_c]$ s'identifie à

$$0 \rightarrow \langle F_1 \rangle \rightarrow H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2)) \rightarrow H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2))/\langle F_1 \rangle \rightarrow 0. \tag{6}$$

Notons \mathcal{E} le faisceau localement libre noyau de la composée des surjections $\pi_2^* \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_2) \rightarrow \pi_2^* pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_{d_1}}(d_2) \rightarrow \mathcal{Q}$. Les suites exactes (3)–(6) permettent d'écrire le diagramme exact (7) de faisceaux localement libres sur \bar{H} ci-dessous et de calculer sa fibre géométrique (8) en $[F_1, \dots, F_c]$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \pi_2^* \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_2 - d_1) \otimes \mathcal{O}(-1, 0) & = & \pi_2^* \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_2 - d_1) \otimes \mathcal{O}(-1, 0) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \pi_2^* \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_2) & \longrightarrow & \mathcal{Q} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \pi_2^* pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_{d_1}}(d_2) & \longrightarrow & \mathcal{Q} \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{7}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \langle F_1 \rangle & \xlongequal{\quad} & \langle F_1 \rangle & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \langle F_1, \dots, F_c \rangle & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2)) & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2))/\langle F_1, \dots, F_c \rangle \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \langle F_1, \dots, F_c \rangle / \langle F_1 \rangle & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2))/\langle F_1 \rangle & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2))/\langle F_1, \dots, F_c \rangle \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array} \tag{8}$$

Action de SL_{N+1} . L'action de SL_{N+1} sur \mathbb{A}^{N+1} induit des actions de SL_{N+1} par changement de coordonnées sur tous les espaces et faisceaux décrits ci-dessus. En particulier, SL_{N+1} agit sur le faisceau localement libre $pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_1)$, induisant une linéarisation de $\mathcal{O}(1)$ sur \bar{H}_{d_1} . Par functorialité, on en déduit une linéarisation de $\mathcal{O}(1, 0)$ sur \bar{H} . De même, SL_{N+1} agit sur le faisceau localement libre $pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_{d_1}}(d_2)$, donc sur $\bigwedge^{c-1}(pr_{1*} \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}_{d_1}}(d_2))$, induisant une linéarisation du fibré de Plücker relatif $\mathcal{O}(0, 1)$ sur \bar{H} . Par combinaisons linéaires, on construit alors une linéarisation naturelle de tous les fibrés en droites $\mathcal{O}(l_1, l_2)$ sur \bar{H} . Ces linéarisations sont uniques par [20, Prop. 1.4].

2.2. Fibrés amples sur \bar{H}

Avant de pouvoir prouver le théorème 2.7 qui décrit les fibrés en droites amples sur \bar{H} , on a besoin de résultats préliminaires sur la géométrie de \bar{H} .

Lien entre \bar{H} et $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$. L'injection de faisceaux localement libres $\mathcal{E} \rightarrow \pi_2^* \pi_1^* pr_* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(d_2)$ dans le diagramme (7) induit une immersion fermée $\mathbb{P}\mathcal{E}^\vee \hookrightarrow \bar{H} \times \bar{H}_{d_2}$ entre fibrés projectifs sur \bar{H} . En prenant le produit fibré au-dessus de \bar{H} de $c - 1$ copies de ces fibrés projectifs, on obtient une immersion fermée $i : \Sigma \hookrightarrow \bar{H} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$.

Remarquons que, par le diagramme (8), les points géométriques de Σ sont les $(\langle F_1, \dots, F_c \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle) \in (\bar{H} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1})(K)$ tels que $G_i \in \langle F_1, \dots, F_c \rangle$ pour $2 \leq i \leq c$. Le diagramme ci-dessous résume les notations que nous utiliserons.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \bar{H} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1} & & \\
 & & \uparrow i & & \\
 & \pi_2 \times \text{id} & \Sigma & p_1 & \\
 & \swarrow e & & \searrow q & \\
 \bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1} & & & & \bar{H} \\
 & \searrow p_1 & & \swarrow \pi_2 & \\
 & & \bar{H}_{d_1} & &
 \end{array}$$

Notre objectif est de comparer les espaces \bar{H} et $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$ via Σ . On commence par étudier l'application $e := (\pi_2 \times \text{id}) \circ i$. La description des points géométriques de Σ et de $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$ montre que le fermé de $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$ où e a des fibres de dimension > 0 a pour points géométriques les $(\langle F_1 \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$ tels que $\langle F_1 \rangle \cap \langle G_2, \dots, G_c \rangle \neq \{0\}$. On note ce fermé W , et on le munit de sa structure réduite. Notons E le fermé $e^{-1}(W)$ de Σ , et munissons-le de sa structure réduite ($E = e^{-1}(W)$ vaut ensemblistement mais pas nécessairement schématiquement). Les points géométriques de E sont les points géométriques $(\langle F_1, \dots, F_c \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$ de Σ tels que $\langle F_1, G_2, \dots, G_c \rangle \subsetneq \langle F_1, \dots, F_c \rangle$.

Lemme 2.2. *Les schémas E et W sont irréductibles.*

Preuve. Comme $W = e(E)$, il suffit de montrer que E est irréductible. Pour cela, il suffit de montrer que les fibres géométriques de $q|_E : E \rightarrow \bar{H}$ le sont. Soit $[F_1, \dots, F_c]$ un point géométrique de \bar{H} . La fibre géométrique de $q|_E : E \rightarrow \bar{H}$ correspondante est constituée des $(\langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$ n'induisant pas une base de $\langle F_1, \dots, F_c \rangle / \langle F_1 \rangle$. Elle est donc ensemblistement définie par l'annulation d'un déterminant, et irréductible par irréductibilité du déterminant. \square

Lemme 2.3. *Le morphisme $e|_{\Sigma \setminus E} : \Sigma \setminus E \rightarrow (\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}) \setminus W$ est un isomorphisme.*

Preuve. Le morphisme $e = (\pi_2 \times \text{id}) \circ i$ est propre comme composée, donc, par changement de base, $e|_{\Sigma \setminus E}$ est propre. De plus, la description des points géométriques de Σ et $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$ montre que $e|_{\Sigma \setminus E}$ réalise une bijection entre points géométriques. Ainsi, $e|_{\Sigma \setminus E}$ est propre et quasifini, donc fini. Finalement, par lissité générique ($\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$ est de caractéristique générique 0), $e^{-1}(\langle F_1 \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$ est un point réduit pour $(\langle F_1 \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$ générique, de sorte que $e|_{\Sigma \setminus E}$ est birationnel. Comme $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$ est régulier donc normal, par le Main Theorem de Zariski, $e|_{\Sigma \setminus E}$ est un isomorphisme. \square

Des équations pour E et W

Proposition 2.4. *Le sous-schéma E est un diviseur de Cartier dans Σ et $\mathcal{O}(E) = i^*\mathcal{O}(0, -1, 1, \dots, 1)$.*

Preuve. La construction de Σ comme produit de fibrés projectifs sur \bar{H} fournit $c-1$ sous-faisceaux tautologiques $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{c-1}$ de $q^*\mathcal{E}$. On a donc un morphisme $\bigoplus_{k=1}^{c-1} \mathcal{L}_k \rightarrow q^*\mathcal{E}$ dont la fibre géométrique en $([F_1, \dots, F_c], \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$ est $\langle G_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle G_c \rangle \rightarrow \langle F_1, \dots, F_c \rangle$. Remarquons que, par compatibilité entre les faisceaux tautologiques des fibrés projectifs $\mathbb{P}\mathcal{E}^\vee$ et $\bar{H} \times \bar{H}_{d_2}$ sur \bar{H} , on a $\mathcal{L}_1 = i^*\mathcal{O}(0, 0, -1, 0, \dots, 0), \dots, \mathcal{L}_{c-1} = i^*\mathcal{O}(0, 0, \dots, 0, -1)$.

D'autre part, en tirant en arrière sur Σ le morphisme $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ du diagramme (7), on obtient un morphisme $q^*\mathcal{E} \rightarrow q^*\mathcal{F}$ dont la fibre géométrique en $([F_1, \dots, F_c], \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$ est $\langle F_1, \dots, F_c \rangle \rightarrow \langle F_1, \dots, F_c \rangle / \langle F_1 \rangle$ par le diagramme (8). Notons $\beta : \bigoplus_{k=1}^{c-1} \mathcal{L}_k \rightarrow q^*\mathcal{F}$ la composée de ces deux morphismes de faisceaux.

Les fibres $\beta_{([F_1, \dots, F_c], \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)} : \langle G_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle G_c \rangle \rightarrow \langle F_1, \dots, F_c \rangle / \langle F_1 \rangle$ de β sont des isomorphismes exactement si $([F_1, \dots, F_c], \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle) \notin E(K)$. On en déduit que $\det(\beta)$ est une injection, et que son conoyau \mathcal{K} a pour support un sous-schéma fermé de Σ dont la réduction est E .

On remarque alors que $\det(\bigoplus_{k=1}^{c-1} \mathcal{L}_k) = i^*\mathcal{O}(0, 0, -1, \dots, -1)$ et que, par définition du fibré de Plücker, on a $\det(q^*\mathcal{F}) = i^*\mathcal{O}(0, -1, 0, \dots, 0)$. Tensorisant par $i^*\mathcal{O}(0, 1, 0, \dots, 0)$, on obtient

$$0 \rightarrow i^*\mathcal{O}(0, 1, -1, \dots, -1) \rightarrow \mathcal{O}_\Sigma \rightarrow \mathcal{K} \otimes i^*\mathcal{O}(0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow 0.$$

Le fibré en droites $i^*\mathcal{O}(0, 1, -1, \dots, -1)$ s'identifie ainsi au faisceau d'idéaux d'un diviseur de Cartier D de Σ qui coïncide ensemblistement avec E .

Le sous-schéma E est donc le diviseur de Cartier réduit associé à D sur le schéma régulier Σ . Comme, par le lemme 2.2, E est irréductible, il existe $k \geq 1$ tel que $i^*\mathcal{O}(0, 1, -1, \dots, -1) = \mathcal{O}(-kE)$. Or la description de Σ comme produit de fibrés projectifs montre que $i^*\mathcal{O}(0, 1, -1, \dots, -1)$ n'est pas divisible dans $\text{Pic}(\Sigma)$. On a donc nécessairement $k = 1$, et $\mathcal{O}(E) = i^*\mathcal{O}(0, -1, 1, \dots, 1)$. \square

Les calculs que nous mènerons par la suite nécessitent d'avoir des équations au moins ensemblistes pour W . C'est l'objet de la proposition 2.5.

Proposition 2.5. Soit $(\langle F_1 \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$ un point géométrique de $\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$ n'appartenant pas à W . Alors il existe un diviseur

$$D \in |\mathcal{O}_{\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}}((c-1)(d_2-d_1)+1, 1, \dots, 1)|$$

contenant W mais pas $(\langle F_1 \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$.

Preuve. Soit (X_0, \dots, X_N) un système de coordonnées sur \mathbb{P}^N , c'est-à-dire une base de $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1))$. On note \mathfrak{M}_d l'ensemble des monômes de degré d en les X_i : c'est une base de $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(d))$. On obtient des coordonnées sur les espaces projectifs \bar{H}_{d_1} et \bar{H}_{d_2} en considérant les bases duales $(a_L)_{L \in \mathfrak{M}_{d_1}}$ et $(b_M^{(i)})_{M \in \mathfrak{M}_{d_2}}$ de $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(d_1))^\vee = H^0(\bar{H}_{d_1}, \mathcal{O}(1))$ et $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(d_2))^\vee = H^0(\bar{H}_{d_2}, \mathcal{O}(1))$, où l'exposant i ($2 \leq i \leq c$) permet de distinguer les coordonnées sur les $c-1$ copies de \bar{H}_{d_2} . On choisit notre système de coordonnées de sorte que F_1 ait un coefficient non nul en $X_0^{d_1}$, qu'on peut alors supposer égal à 1.

Soit $2 \leq i \leq c$. Considérons l'identité

$$a_{X_0^{d_2-d_1+1}}^{d_2-d_1+1} g^{(i)} = q_{d_2-d_1+1}^{(i)} f + r_{d_2-d_1+1}^{(i)} \quad (9)$$

obtenue en substituant la variable $b_M^{(i)}$ à la variable b_M dans l'identité fournie par le lemme 2.6 ci-dessous. Substituant alors les coefficients de F_1 dans les a_L et les coefficients de G_i dans les $b_M^{(i)}$, on obtient une égalité de la forme $G_i = Q_i F_1 + R_i$ dans $K[X_0, \dots, X_N]$. Comme $(\langle F_1 \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle) \notin W$, les R_i forment une famille libre. On peut donc trouver $(M_j)_{2 \leq j \leq c}$ des monômes de \mathfrak{M}_{d_2} tels que la matrice $(c-1) \times (c-1)$ dont le coefficient (i, j) est le coefficient de M_j dans R_i soit inversible.

On note $C_j^{(i)} \in \mathbb{Z}[a_L, b_M^{(i)}]_{L \in \mathfrak{M}_{d_1}, M \in \mathfrak{M}_{d_2}}$ le coefficient de M_j dans $r_{d_2-d_1+1}^{(i)}$. Alors $P = \det(C_j^{(i)})$ est un polynôme homogène de degré $(c-1)(d_2-d_1+1)$ en les a_L et, pour tout $i \in \{2, \dots, c-1\}$, de degré 1 en les $b_M^{(i)}$. On voit P comme une section de $\mathcal{O}_{\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}}((c-1)(d_2-d_1+1), 1, \dots, 1)$. Par choix des M_j , P est non nul en $(\langle F_1 \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$.

Montrons que $\{P = 0\}$ contient W . Comme, par le lemme 2.2, W est intègre, il suffit de voir que $\{P = 0\}$ contient les points géométriques de l'ouvert dense de W défini par l'équation $a_{X_0^{d_1}} \neq 0$. Soit donc $(\langle F'_1 \rangle, \langle G'_2 \rangle, \dots, \langle G'_c \rangle)$ un point géométrique de W tel que le coefficient en $X_0^{d_1}$ de F'_1 vaille 1. Comme $(\langle F'_1 \rangle, \langle G'_2 \rangle, \dots, \langle G'_c \rangle) \in W$, il existe une équation de la forme $\sum_{i=2}^c \lambda_i G'_i = Q F'_1$ avec $Q \in K[X_0, \dots, X_N]$ et $\lambda_i \in K$ non tous nuls. Pour $2 \leq i \leq c$, en substituant dans l'égalité (9) les coefficients de F'_1 dans les a_L et les coefficients de G'_i dans les $b_M^{(i)}$, on obtient des égalités de la forme $G'_i = Q'_i F'_1 + R'_i$. Il vient $\sum_{i=2}^c \lambda_i R'_i = (Q - \sum_{i=2}^c \lambda_i Q'_i) F'_1$. Comme aucun des monômes des R'_i n'est divisible par $X_0^{d_1}$ et que le coefficient en $X_0^{d_1}$ de F'_1 est non nul, on a nécessairement $Q - \sum_{i=2}^c \lambda_i Q'_i = 0$, donc $\sum_{i=2}^c \lambda_i R'_i = 0$. Par conséquent, $P(F'_1, G'_2, \dots, G'_c)$ est le déterminant d'une matrice dont les lignes sont liées, et est nul. Ceci montre que $(\langle F'_1 \rangle, \langle G'_2 \rangle, \dots, \langle G'_c \rangle) \in \{P = 0\}$.

Enfin, remarquons que P est divisible par $a_{X_0^{d_1}}^{c-2}$. Pour cela, utilisons la dernière partie du lemme 2.6 : on a une identité de la forme $r_{d_2-d_1+1} = a_{X_0^{d_1}} T + b_{X_0^{d_2}} S$. Par homogénéité, S ne dépend pas des variables $(b_M)_{M \in \mathfrak{M}_{d_2}}$, de sorte qu'on obtient pour $2 \leq i \leq c$ des identités de la forme $r_{d_2-d_1+1}^{(i)} = a_{X_0^{d_1}} T^{(i)} + b_{X_0^{d_2}}^{(i)} S$. Ces expressions montrent que, dans la matrice $(C_j^{(i)})$, chaque ligne est somme de deux termes : les premiers divisibles par $a_{X_0^{d_1}}$, les seconds tous proportionnels. Développer le déterminant montre que P est divisible par $a_{X_0^{d_1}}^{c-2}$.

Posons alors $\tilde{P} = P/a_{X_0^{d_1}}^{c-2}$: c'est une section de $\mathcal{O}_{\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}}((c-1)(d_2-d_1)+1, 1, \dots, 1)$. Comme P est non nul en $(\langle F_1 \rangle, \langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$, c'est aussi le cas de \tilde{P} . Comme $W \subset \{P = 0\}$, que W est intègre par le lemme 2.2, et que W n'est pas inclus dans $\{a_{X_0^{d_1}} = 0\}$, $W \subset \{\tilde{P} = 0\}$. On a montré que $D = \{\tilde{P} = 0\}$ convenait. \square

Lemme 2.6. *On se place dans l'anneau*

$$A = \mathbb{Z}[X_s, a_L, b_M]_{0 \leq s \leq N, L \in \mathfrak{M}_{d_1}, M \in \mathfrak{M}_{d_2}}$$

trigradué par le degré total en les X_i , en les a_L et les b_M . On considère les éléments $f = \sum_{L \in \mathfrak{M}_{d_1}} a_L L$ et $g = \sum_{M \in \mathfrak{M}_{d_2}} b_M M$ de A . Alors, si $0 \leq j \leq d_2 - d_1 + 1$, il existe $q_j, r_j \in A$ homogènes de degrés respectifs $(d_2 - d_1, j - 1, 1)$ et $(d_2, j, 1)$ tels qu'aucun monôme de r_j ne soit divisible par $X_0^{d_2+1-j}$ et que

$$a_{X_0^{d_1}}^j g = q_j f + r_j.$$

De plus, si $j \geq 1$, tout monôme intervenant dans r_j est divisible soit par $a_{X_0^{d_1}}$ soit par $b_{X_0^{d_2}}$.

Preuve. L'existence de q_j et r_j résulte de l'algorithme de division euclidienne.

Plus précisément, on raisonne par récurrence sur j . Si $j = 0$, on prend $q_0 = 0$ et $r_0 = g$. Pour passer de l'égalité pour j à celle pour $j + 1$, on multiplie par $a_{X_0^{d_1}}$, on regroupe dans $a_{X_0^{d_1}} r_j$ les termes divisibles par $X_0^{d_2-j}$, et on réécrit ces termes en utilisant l'identité

$$a_{X_0^{d_1}} X_0^{d_2-j} = X_0^{d_2-d_1-j} f + X_0^{d_2-d_1-j} (a_{X_0^{d_1}} X_0^{d_1} - f).$$

Cette construction explicite permet facilement de vérifier la dernière propriété par récurrence sur j . \square

Calcul des fibrés amples. On peut à présent montrer

Théorème 2.7. *Le fibré $\mathcal{O}(l_1, l_2)$ sur \bar{H} est ample si et seulement si $l_2 > 0$ et $l_1/l_2 > (c-1)(d_2-d_1)+1$.*

Preuve. Comme $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ est affine, $\mathcal{O}(l_1, l_2)$ est ample si et seulement si il est ample relativement à $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Par [9, 4.7.1], il suffit de tester l'amplitude de $\mathcal{O}(l_1, l_2)$ sur les fibres du morphisme structurel, donc sur les fibres géométriques du morphisme structurel. La proposition est alors conséquence de la proposition 2.8 ci-dessous et du critère de Kleiman : pour une variété projective sur un corps algébriquement clos, le cône ample est l'intérieur du cône nef [18, 1.4.23]. \square

Proposition 2.8. *Soit K un corps algébriquement clos. Alors le fibré $\mathcal{O}(l_1, l_2)$ sur $\bar{H} \times_{\mathbb{Z}} K$ est nef si et seulement si $l_2 \geq 0$ et $l_1 \geq l_2((c-1)(d_2-d_1)+1)$.*

Preuve. Dans toute cette preuve, les variétés qu'on manipule sont définies sur le corps K . Les extensions des scalaires à K seront partout sous-entendues.

Étape 1 : *La condition est nécessaire.*

Supposons que $\mathcal{O}(l_1, l_2)$ est nef. On a $l_2 \geq 0$ car $\mathcal{O}(l_1, l_2)$ est π_2 -nef. On va montrer la seconde inégalité en calculant le degré de $\mathcal{O}(l_1, l_2)$ sur une courbe bien choisie.

Soient $X_0, X_1 \in H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(1))$ des équations linéairement indépendantes, $H \in H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(d_1-1))$ une équation non nulle et $(\lambda_j^{(i)})_{2 \leq i \leq c, 1 \leq j \leq d_2-d_1}$ des scalaires distincts. Pour $2 \leq i \leq c$, on note $G_i = HX_{i-1} \prod_{j=1}^{d_2-d_1} (X_0 + \lambda_j^{(i)} X_1)$. Considérons $\beta : \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{H}_{d_1}$ le pinceau $t \mapsto \langle H(X_0 + tX_1) \rangle$. La section constante $s : \bar{H}_{d_1} \rightarrow \bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$ de valeur $(\langle G_2 \rangle, \dots, \langle G_c \rangle)$ fournit un morphisme $s \circ \beta : \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}$.

Calculons les points de \mathbb{P}^1 dont l'image par $s \circ \beta$ est dans W . Soient $t \in \mathbb{P}^1(K)$ et $a_2, \dots, a_c \in K$ non tous nuls. Alors $H(X_0 + tX_1)$ divise $\sum_{i=2}^c a_i G_i$ si et seulement si $X_0 + tX_1$ divise $\sum_{i=2}^c a_i X_{i-1} \prod_{j=1}^{d_2-d_1} (X_0 + \lambda_j^{(i)} X_1)$. On voit aisément que cela ne peut se produire que si tous les a_i sauf un sont nuls. Si c'est a_i qui est non nul, les valeurs possibles de t sont soit $t = \lambda_j^{(i)}$ pour un $j \in \{1, \dots, d_2-d_1\}$, soit $t = \infty$ si $i = 2$. On a montré qu'exactly $(c-1)(d_2-d_1)+1$ points de \mathbb{P}^1 sont envoyés dans W par $s \circ \beta$.

Comme l'image de $s \circ \beta$ n'est pas incluse dans W et que e est birationnel par le lemme 2.3, le critère valuatif de propreté permet de relever $s \circ \beta$ en un morphisme $\gamma : \mathbb{P}^1 \rightarrow \Sigma$. Remarquons qu'exactly $(c-1)(d_2-d_1)+1$ points de \mathbb{P}^1 sont envoyés dans E par γ . Finalement, en composant par q , on obtient un morphisme $q \circ \gamma : \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{H}$.

On calcule alors les degrés des fibrés en droites de \bar{H} sur \mathbb{P}^1 :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 \cdot \gamma^* q^* \mathcal{O}(1, 0) &= \mathbb{P}^1 \cdot \gamma^* q^* \pi_2^* \mathcal{O}(1) = \mathbb{P}^1 \cdot \gamma^* e^* p_1^* \mathcal{O}(1) \\ &= \mathbb{P}^1 \cdot \beta^* s^* p_1^* \mathcal{O}(1) = \mathbb{P}^1 \cdot \beta^* \mathcal{O}(1) \\ &= 1 \quad \text{car } \beta : \mathbb{P}^1 \rightarrow \bar{H}_{d_1} \text{ est une droite;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 \cdot \gamma^* q^* \mathcal{O}(0, 1) &= \mathbb{P}^1 \cdot \gamma^* e^* \mathcal{O}(0, 1, \dots, 1) - \mathbb{P}^1 \cdot \gamma^* \mathcal{O}(E) \quad \text{par la proposition 2.4} \\ &\leq \mathbb{P}^1 \cdot \beta^* s^* \mathcal{O}(0, 1, \dots, 1) - (c-1)(d_2-d_1) - 1 \quad \text{par calcul de } \text{Card}(\gamma^{-1}(E)) \\ &= -(c-1)(d_2-d_1) - 1 \quad \text{car } s^* \mathcal{O}(0, 1, \dots, 1) = \mathcal{O}. \end{aligned}$$

On montre enfin l'inégalité voulue comme suit :

$$\begin{aligned}
 l_1 - l_2((c - 1)(d_2 - d_1) + 1) &\geq \mathbb{P}^1 \cdot \gamma^* q^* \mathcal{O}(l_1, l_2) && \text{car } l_2 \geq 0 \\
 &\geq 0 && \text{car } \mathcal{O}(l_1, l_2) \text{ est nef.}
 \end{aligned}$$

Étape 2 : *La condition est suffisante.*

Supposons à présent les inégalités vérifiées, et montrons que $\mathcal{O}(l_1, l_2)$ est nef. Soit pour cela C une courbe intègre de \bar{H} . Notons \tilde{C} sa normalisation et $\alpha : \tilde{C} \rightarrow \bar{H}$ le morphisme naturel. Comme q est un fibré localement trivial, on peut trouver une section rationnelle $\beta : \tilde{C} \dashrightarrow \Sigma$ de α ; on peut de plus supposer que son image n'est pas incluse dans E . Par critère valuatif de propreté, β est en fait un morphisme. Notons $\gamma = e \circ \beta$. Comme $\beta(\tilde{C}) \not\subset E$, on a $\gamma(\tilde{C}) \not\subset W$. On peut donc choisir par la proposition 2.5 un diviseur de Cartier $D \in |\mathcal{O}_{\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}}((c - 1)(d_2 - d_1) + 1, 1, \dots, 1)|$ contenant W mais pas $\gamma(\tilde{C})$, donc tel que e^*D contienne E mais pas $\beta(\tilde{C})$. On calcule alors :

$$\begin{aligned}
 \tilde{C} \cdot \alpha^* \mathcal{O}_{\bar{H}}(l_1, l_2) &= \tilde{C} \cdot \beta^* q^* \mathcal{O}_{\bar{H}}(l_1, l_2) && \text{par projection} \\
 &= \tilde{C} \cdot \beta^*(e^* \mathcal{O}_{\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}}(l_1, l_2, \dots, l_2) - l_2 E) && \text{par 2.4} \\
 &\geq \tilde{C} \cdot \beta^*(e^* \mathcal{O}_{\bar{H}_{d_1} \times \bar{H}_{d_2}^{c-1}}(l_1, l_2, \dots, l_2) - l_2 e^* D) && \text{car } E \subset e^* D, l_2 \geq 0 \\
 &= \tilde{C} \cdot \gamma^* \mathcal{O}(l_1 - l_2((c - 1)(d_2 - d_1) + 1), 0, \dots, 0) && \text{par projection} \\
 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

On a bien montré que $\mathcal{O}_{\bar{H}}(l_1, l_2)$ est nef. □

Remarque 2.9. Au paragraphe 1.3, on a pu montrer facilement le théorème 1.1(i) car le diviseur discriminant $\Delta = \bar{H} \setminus H$ était ample sur \bar{H} , et son complémentaire H était donc affine. Cette méthode ne permet pas de montrer le théorème 1.1(ii) ; plus précisément, si $c = 2$, elle ne fonctionne jamais.

En effet, le théorème 1.2 de [4] permet de calculer le fibré en droites associé au diviseur discriminant $\Delta = \bar{H} \setminus H$. Quand $c = 2$, les calculs sont menés dans l'exemple 1.10 de [4], et on obtient $\mathcal{O}(\Delta) = \mathcal{O}(l_1, l_2)$ avec $l_1 = d_2(e_2^{N-1} + 2e_1e_2^{N-2} + \dots + Ne_1^{N-1})$ et $l_2 = d_1(e_1^{N-1} + 2e_2e_1^{N-2} + \dots + Ne_2^{N-1})$, et où l'on a posé $e_i = d_i - 1$. Comme $l_1/l_2 \leq d_2/d_1 \leq d_2 - d_1 + 1$, le théorème 2.7 montre que ce fibré n'est jamais ample.

Quand $c > 2$, les formules calculant l_1 et l_2 sont plus compliquées, et font apparaître des sommes alternées, ce qui rend difficile une vérification analogue.

2.3. Théorie géométrique des invariants

Dans ce paragraphe, on applique le critère de Hilbert–Mumford pour montrer le théorème 1.1(ii). On commence par évaluer les fonctions μ intervenant dans ce critère pour l'action de SL_{N+1} sur \bar{H} relativement aux fibrés en droites SL_{N+1} -linéarisés décrits au paragraphe 2.1. Ces fonctions μ dépendent d'un point géométrique $P = [F_1, \dots, F_c] \in \bar{H}(K)$ et d'un sous-groupe à un paramètre non trivial $\rho : \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow \text{SL}_{N+1,K}$.

Rappelons brièvement leur définition. Considérons la fibre en $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) \cdot P$ du fibré en droites géométrique sur \bar{H} associé à $\mathcal{O}(l_1, l_2)$. Le morphisme ρ induit une action de $\mathbb{G}_{m,K}$ sur cette fibre. Cette action se fait via un caractère de $\mathbb{G}_{m,K}$, c'est-à-dire un entier ; on note $\mu^{\mathcal{O}(l_1, l_2)}(P, \rho)$ l'opposé de cet entier. Dans les deux lemmes qui suivent, on met ρ et P sous une forme qui permettra de calculer $\mu^{\mathcal{O}(l_1, l_2)}(P, \rho)$.

Lemme 2.10. *Soit $\rho : \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow \mathrm{SL}_{N+1,K}$ un sous-groupe à un paramètre non trivial. Alors on peut trouver des entiers $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N$ non tous nuls de somme nulle et une base de K^{N+1} dans laquelle $\rho(t) \cdot (x_0, \dots, x_N) = (t^{\alpha_0} x_0, \dots, t^{\alpha_N} x_N)$.*

Preuve. C'est standard. \square

Dans le reste de ce paragraphe, ρ est fixé. On travaille avec un système de coordonnées et des entiers α_i comme dans le lemme 2.10.

Conventions 2.11. Si α est la donnée d'entiers $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N$ non tous nuls de somme nulle, le α -degré d'un monôme $M = X_0^{\lambda_0} \dots X_N^{\lambda_N}$ est $\deg_\alpha(M) = \sum_i \alpha_i \lambda_i$. Si $F \in H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d))$ est une équation non nulle, on note $\deg_\alpha(F)$ le plus grand α -degré des monômes de F . Par convention, $\deg_\alpha(0) = -\infty$. Soit F^α la somme des termes de F de α -degré $\deg_\alpha(F)$. On dit que F est α -homogène si $F = F^\alpha$.

Lemme 2.12. *Soit $P = [F_1, \dots, F_c] \in \bar{H}(K)$. Alors il existe des équations $\Phi_i \in H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_i))$ pour $2 \leq i \leq c$ telles que :*

- (i) $P = [F_1, \Phi_2, \dots, \Phi_c]$.
- (ii) $\deg_\alpha(\Phi_i) \leq \deg_\alpha(F_i)$ pour $2 \leq i \leq c$.
- (iii) $[F_1^\alpha, \Phi_2^\alpha, \dots, \Phi_c^\alpha] \in \bar{H}(K)$.

Preuve. Choisissons $\Phi_i \in H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_i))$ pour $2 \leq i \leq c$ vérifiant les propriétés (i) et (ii), et telles que $\sum_{i=2}^c \deg_\alpha(\Phi_i)$ soit minimal. Montrons par l'absurde que la condition (iii) est automatiquement vérifiée.

Si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver $Q \in H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_2 - d_1))$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_c \in K$ non tous nuls tels que $QF_1^\alpha = \sum_{i=2}^c \lambda_i \Phi_i^\alpha$. En ne gardant dans cette identité que les termes de α -degré maximal (i.e. quitte à remplacer Q par Q^α ou 0 et à remplacer certains des λ_i par 0), on peut supposer que tous les termes de cette identité sont α -homogènes de même α -degré. Soit alors $2 \leq j \leq c$ tel que λ_j soit non nul ; on pose $\Phi'_i = \Phi_i$ si $i \neq j$ et $\Phi'_j = \sum_{i=2}^c \lambda_i \Phi_i - QF_1$.

Les Φ'_i vérifient encore la propriété (i). On a bien $\deg_\alpha(\Phi'_i) = \deg_\alpha(\Phi_i)$ si $i \neq j$. De plus, l'expression de Φ'_j montre que $\deg_\alpha(\Phi'_j) \leq \deg_\alpha(\Phi_j)$, mais que la somme des termes de α -degré $\deg_\alpha(\Phi_j)$ dans Φ'_j est nulle, i.e. $\deg_\alpha(\Phi'_j) < \deg_\alpha(\Phi_j)$. D'une part cela montre que les Φ'_i vérifient encore la propriété (ii). D'autre part, cela contredit la minimalité dans le choix des Φ_i . \square

Calculons maintenant les fonctions μ qui nous seront utiles.

Lemme 2.13. *Soit $\langle F_1 \rangle \in \bar{H}_{d_1}(K)$. Alors $\mu^{\mathcal{O}(1)}(\langle F_1 \rangle, \rho) = \deg_\alpha(F_1)$.*

Preuve. On rappelle que, par définition de l'action duale, si F est un élément α -homogène de $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_1)) = \text{Sym}^{d_1}(K^{N+1})^\vee$, l'action de ρ sur F est donnée par $\rho(t) \cdot F = t^{-\deg_\alpha(F)} F$. Ainsi, si l'on écrit $F_1 = F_1^\alpha + R$,

$$\rho(t) \cdot \langle F_1 \rangle = \langle \rho(t) \cdot F_1 \rangle = \langle t^{\deg_\alpha(F_1)} \rho(t) \cdot F_1 \rangle = \langle F_1^\alpha + t^{\deg_\alpha(F_1)} \rho(t) \cdot R \rangle.$$

Le terme de droite tendant vers 0, on a $\lim_{t \rightarrow 0} \rho(t) \cdot \langle F_1 \rangle = \langle F_1^\alpha \rangle$.

Enfin, dans $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_1))$, $\rho(t) \cdot F_1^\alpha = t^{-\deg_\alpha(F_1)} F_1^\alpha$, ce qui montre, par définition de la SL_{N+1} -linéarisation de $\mathcal{O}(1)$, que $\mu^{\mathcal{O}(1)}(\langle F_1 \rangle, \rho) = \deg_\alpha(F_1)$. \square

Lemme 2.14. Soit $P \in \tilde{H}(K)$. On écrit $P = [F_1, \Phi_2, \dots, \Phi_c]$ où les Φ_i ont été choisis comme dans le lemme 2.12. Alors $\mu^{\mathcal{O}(0,1)}(P, \rho) = \sum_{i=2}^c \deg_\alpha(\Phi_i)$.

Preuve. La preuve est analogue à celle du lemme précédent. \square

En combinant les lemmes 2.13 et 2.14, on obtient :

Proposition 2.15. Soit $P \in \tilde{H}(K)$. On écrit $P = [F_1, \Phi_2, \dots, \Phi_c]$ où les Φ_i ont été choisis comme dans le lemme 2.12. Alors

$$\mu^{\mathcal{O}(l_1, l_2)}(P, \rho) = l_1 \deg_\alpha(F_1) + l_2 \sum_{i=2}^c \deg_\alpha(\Phi_i).$$

Nous sommes prêts à appliquer le critère de Hilbert–Mumford.

Proposition 2.16. Il existe un fibré en droites ample SL_{N+1} -linéarisé \mathcal{L} sur \tilde{H} tel que $H \subset \tilde{H}^s(\mathcal{L})$ si et seulement si

$$d_2(N - c + 2) > d_1((c - 1)(d_2 - d_1) + 1). \tag{10}$$

Preuve. On a vu au paragraphe 2.1 que les fibrés en droites sur \tilde{H} sont de la forme $\mathcal{O}(l_1, l_2)$ et sont uniquement SL_{N+1} -linéarisés. Par le théorème 2.7, un tel fibré en droites est ample si et seulement si $l_2 > 0$ et $l_1/l_2 > (c - 1)(d_2 - d_1) + 1$.

Supposons dans un premier temps que (10) est vérifiée et montrons que $\mathcal{L} = \mathcal{O}(l_1, l_2)$ avec $l_1 = kd_2(N + 2 - c) - 1$ et $l_2 = kd_1$ convient si $k \gg 0$. Ce fibré en droites est bien ample : $l_2 > 0$ et $l_1/l_2 > (c - 1)(d_2 - d_1) + 1$ est vrai pour $k \gg 0$ par (10). Montrons alors $H \subset \tilde{H}^s(\mathcal{O}(l_1, l_2))$ en appliquant le critère de Hilbert–Mumford [20, Theorem 2.1]. Soient pour cela $P = [F_1, \dots, F_c] \in H(K)$ et $\rho : \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow \text{SL}_{N+1,K}$ un sous-groupe à un paramètre non trivial qu'on peut supposer de la forme obtenue dans le lemme 2.10. Par le lemme 2.12 et la proposition 2.15, quitte à modifier F_2, \dots, F_c , on peut supposer que $\mu^{\mathcal{O}(l_1, l_2)}(P, \rho) = l_1 \deg_\alpha(F_1) + l_2 \sum_{i=2}^c \deg_\alpha(F_i)$. Par le théorème 3.1(ii) ci-dessous, pour montrer que $\mu^{\mathcal{O}(l_1, l_2)}(P, \rho) > 0$ et conclure, il suffit de vérifier que $(N + 1)l_1d_1 > l_1d_1 + (c - 1)l_2d_2$ et que $(N + 1)l_2d_2 > l_1d_1 + (c - 1)l_2d_2$, i.e. que

$$\frac{d_2}{d_1} \frac{c - 1}{N} < \frac{l_1}{l_2} < \frac{d_2}{d_1} (N - c + 2).$$

On remarque alors que l_1/l_2 est une fonction croissante de k qui tend vers $(d_2/d_1)(N - c + 2)$. Cela montre que la seconde inégalité est toujours vraie. Comme

$(c - 1)/N < 1 < N - c + 2$, cela montre aussi que la première inégalité est vraie pour $k \gg 0$.

Réciproquement, supposons que (10) n'est pas vérifiée, et soit $\mathcal{O}(l_1, l_2)$ un fibré ample sur \bar{H} . L'amplitude de $\mathcal{O}(l_1, l_2)$ et le fait que (10) n'est pas vraie montrent que $l_1/l_2 \geq (d_2/d_1)(N - c + 2)$, donc que $(N + 1)l_2d_2 \leq l_1d_1 + (c - 1)l_2d_2$. Alors, par le théorème 3.1(iii), on peut trouver des entiers $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N$ non tous nuls de somme nulle et des équations $F_i \in H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d_i))$, $1 \leq i \leq c$, définissant une intersection complète lisse telles que $l_1 \deg_\alpha(F_1) + l_2 \sum_{i=2}^c \deg_\alpha(F_i) \leq 0$. Soient Φ_2, \dots, Φ_c comme dans le lemme 2.12. Par la condition (ii) de ce lemme, on a encore $l_1 \deg_\alpha(F_1) + l_2 \sum_{i=2}^c \deg_\alpha(\Phi_i) \leq 0$. Notons $\rho : \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow \mathrm{SL}_{N+1,K}$ le sous-groupe à un paramètre défini par $\rho(t) \cdot (x_0, \dots, x_N) = (t^{\alpha_0}x_0, \dots, t^{\alpha_N}x_N)$, et $P = [F_1, \dots, F_c] \in H(K)$. Par la proposition 2.15, $\mu^{\mathcal{O}(l_1, l_2)}(P, \rho) \leq 0$, et le critère de Hilbert–Mumford montre que $P \notin \bar{H}^s(\mathcal{O}(l_1, l_2))$. \square

On en déduit immédiatement le théorème 1.1(ii).

Preuve du théorème 1.1(ii). Par la proposition 2.16, il existe un fibré en droites SL_{N+1} -linéarisé ample sur \bar{H} rendant tous les points de H stables. La théorie géométrique des invariants permet donc de construire un quotient géométrique quasi-projectif de H par SL_{N+1} [23, Theorem 4]. Celui-ci est aussi un quotient géométrique quasi-projectif de H par PGL_{N+1} ; l'espace de modules grossier M est donc bien quasi-projectif. \square

3. Minoration du α -degré

On fixe un corps algébriquement clos K . Dans cette partie, on autorise $1 \leq c \leq N$ et $2 \leq d_1 \leq \dots \leq d_c$. Une intersection complète sur K est toujours de codimension c dans \mathbb{P}_K^N et de degrés d_1, \dots, d_c . On conserve les conventions 2.11. L'objectif de cette partie est la preuve de l'inégalité suivante, qu'on a utilisée au paragraphe 2.3 pour vérifier le critère de Hilbert–Mumford.

Théorème 3.1. (i) Soient k_1, \dots, k_c des nombres réels tels que

$$\min_{1 \leq i \leq c} k_i \geq \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^c k_i. \quad (11)$$

Alors si $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N$ sont des entiers non tous nuls de somme nulle et si F_1, \dots, F_c constituent une suite régulière globale définissant une intersection complète lisse, on a

$$\sum_{i=1}^c k_i \frac{\deg_\alpha(F_i)}{d_i} \geq 0. \quad (12)$$

- (ii) Supposons qu'on n'a pas $c = 1$ et $d_1 = 2$. Alors si l'inégalité (11) est stricte, l'inégalité (12) est stricte.
- (iii) Les énoncés (i) et (ii) sont optimaux au sens où ils seraient faux pour d'autres valeurs des k_i .

Précisons le sens de (iii). Dire que l'énoncé (i) est optimal signifie que si k_1, \dots, k_c sont des réels ne vérifiant pas (11), il existe des entiers non tous nuls de somme nulle $\alpha_0 \leq \dots \leq \alpha_N$ et des équations F_1, \dots, F_c définissant une intersection complète lisse tels que l'inégalité (12) soit fautive. L'assertion concernant l'énoncé (ii) est analogue.

L'inégalité (12) permet de minorer les α -degrés des équations d'une intersection complète lisse. Son heuristique est la suivante : si les α -degrés des équations d'une intersection complète sont petits, cela signifie que beaucoup de monômes n'interviennent pas dans ces équations. Ce fait doit permettre de montrer, via le critère jacobien, que cette intersection complète est en fait singulière.

Le paragraphe 3.1 est constitué de résultats préliminaires autour du lien entre α -degré d'une équation F et singularités de $\{F = 0\}$; le paragraphe 3.2 est consacré à la preuve du théorème 3.1.

3.1. Étude d'une équation

On fixe dans tout ce paragraphe un entier $d \geq 2$ et une équation non nulle $F \in H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(d))$. Le lemme 3.2 ci-dessous permettra de faire le lien entre la géométrie de l'hypersurface $\{F = 0\}$ et le α -degré $\deg_\alpha(F)$.

Lemme 3.2. *Soient u, v et s des entiers tels que $u, v \geq 0, s \geq 0$ et $u + v = N - s$. Alors, si $\deg_\alpha(F) < \alpha_u + (d - 1)\alpha_v$,*

$$\dim(\text{Sing}(\{F = 0\}) \cap \{X_0 = \dots = X_{v-1} = 0\}) \geq s.$$

Preuve. Comme $d \geq 2$ et les α_i sont croissants, quitte à échanger u et v , on peut supposer que $u \leq v$. Écrivons alors $F = X_0 P_0 + \dots + X_N P_N$, où P_i ne dépend pas de X_0, \dots, X_{i-1} . L'hypothèse $\deg_\alpha(F) < \alpha_u + (d - 1)\alpha_v$ montre que si $i \geq u$, P_i ne dépend que de X_0, \dots, X_{v-1} .

Posons $Z = \{X_0 = \dots = X_{v-1} = P_0 = \dots = P_{u-1} = 0\}$. Si $i \leq v - 1$, X_i est nul sur Z . Si $i \geq v$, on a $i \geq u$, de sorte que P_i , qui ne dépend que de X_0, \dots, X_{v-1} , est nul sur Z . Par conséquent, $F = \sum_{i=0}^N X_i P_i$ est nul sur Z . De même, pour $0 \leq j \leq N$, on peut écrire

$$\frac{\partial F}{\partial X_j} = P_j + \sum_{i=0}^N X_i \frac{\partial P_i}{\partial X_j}.$$

En distinguant comme ci-dessus les cas $i \leq v - 1$ et $i \geq v$, on voit que $X_i \frac{\partial P_i}{\partial X_j}$ s'annule sur Z . De plus, si $j < u$, P_j est nul sur Z et si $j \geq u$, P_j ne dépend que de X_0, \dots, X_{v-1} , est donc aussi nul sur Z . Sommant, on voit que $\frac{\partial F}{\partial X_j}$ est nul sur Z .

On a montré que F et tous les $\frac{\partial F}{\partial X_j}$ s'annulent sur Z , de sorte que, par le critère jacobien, $Z \subset \text{Sing}(\{F = 0\})$. Comme, par le théorème de l'intersection projective, $\dim(Z) \geq N - u - v = s$, le lemme est démontré. \square

Le lemme 3.2 motive la définition qui suit.

Définition 3.3. On note $s(F)$ le plus petit entier $s \in \{-1, \dots, N-1\}$ tel que, si $u, v \geq 0$ sont des entiers avec $u + v = N - s - 1$, on a $\deg_\alpha(F) \geq \alpha_u + (d-1)\alpha_v$.

Supposons que $0 \leq s \leq s(F)$. On note $v_s(F)$ le plus grand entier $v \in \{0, \dots, N-s\}$ tel que $\deg_\alpha(F) < \alpha_{N-v_s(F)-s} + (d-1)\alpha_{v_s(F)}$.

Lemme 3.4. L'entier $s(F)$ est bien défini. Soit $0 \leq s \leq s(F)$. Alors $v_s(F)$ est bien défini et $v_s(F) \geq (N + s(F) - 2s)/2$. De plus, si $0 < s \leq s(F)$, on a $v_{s-1}(F) \geq v_s(F) + 1$.

Preuve. Comme le plus petit α -degré possible d'un monôme de degré d est $d\alpha_0$, on a $\deg_\alpha(F) \geq d\alpha_0$, de sorte que $s(F)$ est bien défini.

Par définition de $s(F)$, et comme $s(F) \geq 0$, il existe $u, v \geq 0$ tels que $u + v = N - s(F)$ et $\deg_\alpha(F) < \alpha_u + (d-1)\alpha_v$. Comme $d \geq 2$ et que les α_i sont croissants, quitte à échanger u et v , on peut supposer $v \geq u$, soit $v \geq (N - s(F))/2$. Alors, si $v' = v + s(F) - s$, comme les α_i sont croissants, on a $\deg_\alpha(F) < \alpha_{v'} + (d-1)\alpha_v$. Ceci montre d'une part l'existence de $v_s(F)$ et d'autre part que

$$v_s(F) \geq v' \geq \frac{N - s(F)}{2} + s(F) - s = \frac{N + s(F) - 2s}{2}.$$

Finalement, supposons $0 < s \leq s(F)$. Comme $\deg_\alpha(F) < \alpha_{N-s-v_s(F)} + (d-1)\alpha_{v_s(F)}$, par croissance des α_i , on obtient $\deg_\alpha(F) < \alpha_{N-s-v_s(F)} + (d-1)\alpha_{v_s(F)+1}$, ce qui montre que $v_{s-1}(F) \geq v_s(F) + 1$. \square

Le lemme ci-dessous permet d'interpréter l'entier $s(F)$ comme la dimension attendue, connaissant $\deg_\alpha(F)$, de $\text{Sing}(\{F = 0\})$. Les entiers $v_s(F)$ indiquent, eux, la manière dont on s'attend à ce que les singularités de $\{F = 0\}$ se situent par rapport au drapeau $\emptyset \subset \{X_0 = \dots = X_{N-1} = 0\} \subset \dots \subset \{X_0 = 0\} \subset \mathbb{P}_K^N$.

Lemme 3.5. On a $\dim(\text{Sing}(\{F = 0\})) \geq s(F)$. Si $0 \leq s \leq s(F)$,

$$\dim(\text{Sing}(\{F = 0\}) \cap \{X_0 = \dots = X_{v_s(F)-1} = 0\}) \geq s.$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate du lemme 3.2 et des définitions. \square

Les deux lemmes suivants permettent de minorer le α -degré des équations telles que $s(F) = -1$ (resp. $s(F) \geq 0$).

Lemme 3.6. Supposons que $s(F) = -1$. Alors $\deg_\alpha(F) \geq 0$. De plus, cette inégalité est stricte si $d \geq 3$.

Preuve. On calcule :

$$\begin{aligned} N \deg_\alpha(F) &\geq (\alpha_0 + (d-1)\alpha_N) + \dots + (\alpha_{N-1} + (d-1)\alpha_1) \text{ car } s(F) = -1 \\ &= -\alpha_N - (d-1)\alpha_0 \quad \text{car } \sum_i \alpha_i = 0 \\ \frac{1}{d-1} \deg_\alpha(F) &\geq \frac{1}{d-1}\alpha_0 + \alpha_N \quad \text{car } s(F) = -1. \end{aligned}$$

Sommant ces deux inégalités, on obtient

$$\deg_\alpha(F) \geq -\frac{d(d-2)}{Nd - N + 1}\alpha_0.$$

Ceci conclut car $d \geq 2$ et $\alpha_0 < 0$ (les α_i sont croissants non tous nuls de somme nulle). \square

Lemme 3.7. *Supposons que $s(F) \geq 0$. Alors*

$$\frac{\deg_{\alpha}(F)}{d} \geq -\frac{\sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)}}{N - s(F)}.$$

Preuve. Par définition de $v_0(F)$, on a

$$(N - v_0(F)) \deg_{\alpha}(F) \geq (\alpha_0 + (d - 1)\alpha_N) + \cdots + (\alpha_{N-v_0(F)-1} + (d - 1)\alpha_{v_0(F)+1}). \quad (13)$$

Pour $0 < s \leq s(F)$, par définition de $v_s(F)$, et comme $v_{s-1}(F) \geq v_s(F) + 1$ par le lemme 3.4, on a

$$(v_{s-1}(F) - v_s(F) - 1) \deg_{\alpha}(F) \geq (\alpha_{N-s-v_{s-1}(F)+1} + (d - 1)\alpha_{v_{s-1}(F)-1}) + \cdots + (\alpha_{N-s-v_s(F)-1} + (d - 1)\alpha_{v_s(F)+1}). \quad (14)$$

Le lemme 3.4 montre que $2v_s(F) + s(F) - N \geq 0$. Ceci permet d'écrire, utilisant la définition de $s(F)$,

$$(2v_s(F) + s(F) - N) \deg_{\alpha}(F) \geq (\alpha_{N-s(F)-v_s(F)} + (d - 1)\alpha_{v_s(F)-1}) + \cdots + (\alpha_{v_s(F)-1} + (d - 1)\alpha_{N-s(F)-v_s(F)}). \quad (15)$$

Sommant deux fois l'inégalité (13), deux fois les inégalités (14) et l'inégalité (15), on obtient

$$(N - s(F)) \deg_{\alpha}(F) \geq 2(\alpha_0 + \cdots + \alpha_{N-s(F)-v_s(F)-1}) + d(\alpha_{N-s(F)-v_s(F)} + \cdots + \alpha_{v_s(F)-1}) + (2d - 2)(\alpha_{v_s(F)} + \cdots + \alpha_N) - (2d - 2) \sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)}. \quad (16)$$

Remarquons alors que

$$0 \geq [\alpha_0 + \cdots + \alpha_{N-s(F)-v_s(F)-1}] - \left[\alpha_{v_s(F)} + \cdots + \alpha_N - \sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)} \right].$$

En effet, chacun des crochets est une somme de $N - s(F) - v_s(F)$ des α_i . Les indices intervenant dans le premier crochet sont tous plus petits que les indices intervenant dans le second, de sorte que l'on conclut par croissance des α_i .

Multipliant cette équation par $(d - 2) \geq 0$, et l'ajoutant à (16), on obtient

$$(N - s(F)) \deg_{\alpha}(F) \geq d(\alpha_0 + \cdots + \alpha_N) - d \sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)}.$$

Comme les α_i sont de somme nulle, cela prouve l'inégalité voulue. \square

Enfin, montrons une propriété de positivité des $\alpha_{v_s(F)}$:

Lemme 3.8. *Supposons que $s(F) \geq 0$. Alors*

$$\alpha_{v_s(F)} + \frac{\sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)}}{N - s(F)} > 0.$$

Preuve. En sommant les inégalités (13) et (14) de la preuve du lemme 3.7, on obtient

$$(N - s(F) - v_{s(F)}(F)) \deg_{\alpha}(F) \geq (\alpha_0 + \cdots + \alpha_{N-s(F)-v_{s(F)}(F)-1}) \\ + (d-1)(\alpha_{v_{s(F)}(F)} + \cdots + \alpha_N) - (d-1) \sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)}. \quad (17)$$

Par définition de $v_{s(F)}(F)$, $\deg_{\alpha}(F) < \alpha_{N-s(F)-v_{s(F)}(F)} + (d-1)\alpha_{v_{s(F)}(F)}$. Comme, par le lemme 3.4, $N - s(F) - v_{s(F)}(F) \leq v_{s(F)}(F)$, la croissance des α_i montre $\deg_{\alpha}(F) < d\alpha_{v_{s(F)}(F)}$. Combinons ce fait avec l'inégalité (17), puis utilisons le fait que $d \geq 2$ et que les α_i sont croissants :

$$(N - s(F) - v_{s(F)}(F))d\alpha_{v_{s(F)}(F)} + (d-1) \sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)} \\ > (\alpha_0 + \cdots + \alpha_{N-s(F)-v_{s(F)}(F)-1}) + (d-1)(\alpha_{v_{s(F)}(F)} + \cdots + \alpha_N) \\ \geq (d-1)(\alpha_0 + \cdots + \alpha_{N-s(F)-v_{s(F)}(F)-1} + \alpha_{v_{s(F)}(F)} + \cdots + \alpha_N) \\ - (N - s(F) - v_{s(F)}(F))(d-2)\alpha_{v_{s(F)}(F)}.$$

Utilisons que les α_i sont de somme nulle, puis à nouveau leur croissance :

$$(N - s(F) - v_{s(F)}(F))(2d-2)\alpha_{v_{s(F)}(F)} + (d-1) \sum_{s=0}^{s(F)} \alpha_{v_s(F)} \\ > -(d-1)(\alpha_{N-s(F)-v_{s(F)}(F)} + \cdots + \alpha_{v_{s(F)}(F)-1}) \\ \geq -(2v_{s(F)}(F) + s(F) - N)(d-1)\alpha_{v_{s(F)}(F)}.$$

On obtient l'inégalité voulue en divisant par $(d-1)(N - s(F)) > 0$. \square

3.2. Équations d'une intersection complète lisse

Utilisons les résultats du paragraphe précédent pour montrer le théorème 3.1.

Preuve du théorème 3.1(i). Tout d'abord, en sommant pour $i \in \{1, \dots, c\}$ les inégalités $k_i \geq (k_1 + \cdots + k_c)/(N+1)$, on montre $(N+1-c)(k_1 + \cdots + k_c) \geq 0$, donc $k_1 + \cdots + k_c \geq 0$, et finalement $k_i \geq 0$ pour $i \in \{1, \dots, c\}$.

Distinguons alors deux cas. Si $s(F_i) = -1$ pour tout $i \in \{1, \dots, c\}$, le lemme 3.6 montre que $\deg_{\alpha}(F_i) \geq 0$. Ainsi, $\sum_{i=1}^c k_i \frac{\deg_{\alpha}(F_i)}{d_i} \geq 0$.

Supposons au contraire qu'il existe l tel que $s(F_l) \geq 0$. On choisit un tel l de sorte que $\sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)}/N - s(F_l)$ soit maximal. On va construire des entiers $j_0, \dots, j_{s(F_l)} \in \{1, \dots, c\}$ distincts tels que, pour $0 \leq s \leq s(F_l)$,

$$\frac{\deg_{\alpha}(F_{j_s})}{d_{j_s}} \geq \alpha_{v_s(F_l)}. \quad (18)$$

Supposons j_0, \dots, j_{s-1} convenables, et construisons j_s . Par le lemme 3.5, $\dim(\text{Sing}(\{F_l = 0\}) \cap \{X_0 = \dots = X_{v_s(F_l)-1} = 0\}) \geq s$. Le théorème de l'intersection projective implique que $\dim(\text{Sing}(\{F_l = 0\}) \cap \{X_0 = \dots = X_{v_s(F_l)-1} = F_{j_0} = \dots = F_{j_{s-1}} = 0\}) \geq 0$. Ce fermé est donc non vide ; on y choisit un point fermé P . Comme $\{F_1 = \dots = F_c = 0\}$ est une intersection complète lisse, elle ne peut contenir le point singulier P de $\{F_l = 0\}$: il existe j_s tel que F_{j_s} soit non nul en P . Comme $F_{j_0}, \dots, F_{j_{s-1}}$ s'annulent en P , $j_s \notin \{j_0, \dots, j_{s-1}\}$. Enfin, comme $P \in \{X_0 = \dots = X_{v_s(F_l)-1} = 0\}$, on a $\{X_0 = \dots = X_{v_s(F_l)-1} = 0\} \not\subset \{F_{j_s} = 0\}$. En considérant les monômes intervenant dans F_{j_s} , on voit que cela implique $\deg_\alpha(F_{j_s}) \geq d_{j_s} \alpha_{v_s(F_l)}$, comme voulu.

Soit maintenant $i \in \{1, \dots, c\}$ quelconque. Montrons que

$$\frac{\deg_\alpha(F_i)}{d_i} \geq - \frac{\sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)}}{N - s(F_l)}. \tag{19}$$

Si $s(F_l) \geq 0$, cela résulte du lemme 3.7 et du choix de l . Si $s(F_l) = -1$, on raisonne comme suit. Par le lemme 3.8,

$$\alpha_{v_{s(F_l)}(F_i)} + \frac{\sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)}}{N - s(F_l)} > 0.$$

Comme, par le lemme 3.4, $\alpha_{v_{s(F_l)}(F_i)}$ est le plus petit des $(\alpha_{v_s(F_l)})_{0 \leq s \leq s(F_l)}$, on en déduit

$$\sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)} > 0.$$

Par le lemme 3.6, on a donc

$$\frac{\deg_\alpha(F_i)}{d_i} \geq 0 \geq - \frac{\sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)}}{N - s(F_l)}.$$

On peut alors conclure. Notons $I = \{j_0, \dots, j_{s(F_l)}\}$ et utilisons les minoration (18) pour $i \in I$ et (19) pour $i \notin I$. On obtient

$$\sum_{i=1}^c k_i \frac{\deg_\alpha(F_i)}{d_i} \geq \sum_{s=0}^{s(F_l)} k_{j_s} \alpha_{v_s(F_l)} - \left(\sum_{i \notin I} k_i \right) \frac{\sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)}}{N - s(F_l)}. \tag{20}$$

Montrons que le terme de droite de (20) coïncide avec

$$\sum_{s=0}^{s(F_l)} \left(\alpha_{v_s(F_l)} + \frac{\alpha_{v_0(F_l)} + \dots + \alpha_{v_{s(F_l)}(F_l)}}{N - s(F_l)} \right) \left(k_{j_s} - \frac{k_1 + \dots + k_c}{N + 1} \right). \tag{21}$$

Pour cela, on développe (21), et on identifie les coefficients des k_i avec ceux apparaissant dans le terme de droite de (20). Si $i \notin I$, ce coefficient vaut

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{N + 1} \sum_{s=0}^{s(F_l)} \left(\alpha_{v_s(F_l)} + \frac{\alpha_{v_0(F_l)} + \dots + \alpha_{v_{s(F_l)}(F_l)}}{N - s(F_l)} \right) \\ &= - \frac{1}{N + 1} \left(\frac{s(F_l) + 1}{N - s(F_l)} + 1 \right) \sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)} = - \frac{1}{N - s(F_l)} \sum_{s=0}^{s(F_l)} \alpha_{v_s(F_l)}. \end{aligned}$$

Si $i = j_s \in I$, un terme supplémentaire apparaît, de sorte que ce coefficient vaut bien

$$-\frac{1}{N-s(F_i)} \sum_{s=0}^{s(F_i)} \alpha_{v_s(F_i)} + \alpha_{v_s(F_i)} + \frac{\alpha_{v_0(F_i)} + \cdots + \alpha_{v_{s(F_i)}(F_i)}}{N-s(F_i)} = \alpha_{v_s(F_i)}.$$

Il reste à montrer que (21) est positif ou nul. Comme, par le lemme 3.4, $\alpha_{v_s(F_i)(F_i)}$ est le plus petit des $(\alpha_{v_s(F_i)})_{0 \leq s \leq s(F_i)}$, le lemme 3.8 montre que le premier facteur (21) est positif. Le second facteur est positif ou nul par hypothèse sur les k_i . \square

Preuve du théorème 3.1(ii). Tout d'abord, en sommant pour $i \in \{1, \dots, c\}$ les inégalités $k_i > (k_1 + \cdots + k_c)/(N+1)$, on montre $(N+1-c)(k_1 + \cdots + k_c) > 0$, donc $k_1 + \cdots + k_c > 0$, et finalement $k_i > 0$ pour $i \in \{1, \dots, c\}$.

On effectue alors la même preuve que ci-dessus. Le second cas, où il existe i tel que $s(F_i) \geq 0$, est identique : on obtient une inégalité stricte grâce aux hypothèses plus fortes $k_i > (k_1 + \cdots + k_c)/(N+1)$ et à l'inégalité stricte dans le lemme 3.8.

Dans le premier cas, où $s(F_i) = -1$ pour tout i , on raisonne de même pour montrer que $\sum_{i=1}^c k_i \frac{\deg_\alpha(F_i)}{d_i} \geq 0$. Comme $k_i > 0$, et par le cas de stricte inégalité du lemme 3.6, on obtient une inégalité stricte sauf éventuellement si $d_1 = \cdots = d_c = 2$. L'étude du cas d'égalité montre qu'on peut alors supposer $\deg_\alpha(F_1) = \cdots = \deg_\alpha(F_c) = 0$ et $\alpha_i + \alpha_{N-i} = 0$ pour $0 \leq i \leq N$.

Traisons ce cas directement ; rappelons que par hypothèse, on a alors $c \geq 2$. Soit $0 \leq r \leq N$ le plus petit entier tel que $\alpha_r > 0$. Comme $\alpha_i + \alpha_{N-i} = 0$, $r' = N - r$ est le plus grand entier tel que $\alpha_{r'} < 0$. Comme $\deg_\alpha(F_i) = 0$, on voit que $\{X_0 = \cdots = X_{r-1} = 0\} \subset \{F_i = 0\}$, de sorte que $\{X_0 = \cdots = X_{r-1} = 0\}$ est inclus dans l'intersection complète $\{F_1 = \cdots = F_c = 0\}$. Montrons qu'il existe un point de $\{X_0 = \cdots = X_{r-1} = 0\}$ en lequel $\{F_1 = 0\}$ et $\{F_2 = 0\}$ ont même espace tangent. Cela contredira la lissité en ce point de $\{F_1 = \cdots = F_c = 0\}$.

Comme $\deg_\alpha(F_1) = 0$, $\frac{\partial F_1}{\partial X_i}([0 : \dots : 0 : x_r : \dots : x_N])$ est nul si $i > r'$; c'est une forme linéaire en x_r, \dots, x_N si $i \leq r'$. Notons A_1 la matrice $(r'+1) \times (r'+1)$ dont les lignes sont les formes linéaires $(\partial F_1 / \partial X_i)_{0 \leq i \leq r'}$. De même, on note A_2 la matrice $(r'+1) \times (r'+1)$ dont les lignes sont les formes linéaires $(\partial F_2 / \partial X_i)_{0 \leq i \leq r'}$. Considérons $\det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)$; c'est un polynôme homogène en λ_1 et λ_2 . Comme K est algébriquement clos, on peut trouver $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ tels que $\det(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = 0$. Il existe donc $(x_r, \dots, x_N) \neq (0, \dots, 0)$ tel que $(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)(x_r, \dots, x_N) = 0$. Alors

$$\frac{\partial(\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2)}{\partial X_i}([0 : \dots : 0 : x_r : \dots : x_N]) = 0 \quad \text{pour tout } i ;$$

c'est ce qu'on voulait. \square

Preuve du théorème 3.1(iii). Montrons l'optimalité dans le cas (i) : supposons donnés des réels k_1, \dots, k_c tels que la conclusion de (i) soit satisfaite. Fixons $1 \leq j \leq c$. On choisit $\alpha_0 = \cdots = \alpha_{N-1} = -1$ et $\alpha_N = N$. Si $i \neq j$, on choisit pour F_i une équation générique ne faisant pas intervenir la variable X_N ; en particulier $\deg_\alpha(F_i) = -d_i$. Par le théorème de Bertini, l'intersection des $\{F_i = 0\}_{i \neq j}$ a $[0 : \dots : 0 : 1]$ comme unique point singulier. On choisit une équation F_j générique, qui évite ce point singulier. Le monôme

$X_N^{d_j}$ intervient donc dans F_j de sorte que $\deg_\alpha(F_j) = Nd_j$. De plus, par le théorème de Bertini, $\{F_1 = \dots = F_c = 0\}$ est lisse. On peut donc écrire

$$\sum_{i=1}^c k_i \deg_\alpha(F_i) = \sum_{i \neq j} -k_i + Nk_j \geq 0.$$

Ceci se réécrit $k_j \geq (k_1 + \dots + k_c)/(N + 1)$ comme voulu.

Dans le cas (ii), la même preuve fonctionne. Il faut seulement vérifier qu’il était nécessaire d’exclure le cas $c = 1$ et $d_1 = 2$. Pour cela, on prend $\alpha_0 = -1$, $\alpha_i = 0$ pour $1 \leq i \leq N - 1$ et $\alpha_N = 1$. On choisit alors $F_1 = X_0X_N + Q(X_1, \dots, X_{N-1})$ où Q est une forme quadratique ordinaire en X_1, \dots, X_{N-1} . Alors $\{F_1 = 0\}$ est lisse, mais $\deg_\alpha(F_1) = 0$. □

4. Hilbert-stabilité

Dans cette partie, on conserve les conventions 2.1 et 2.11, à ceci près qu’on autorise $1 \leq c \leq N - 1$ et $2 \leq d_1 \leq \dots \leq d_c$.

Dans [19], Mumford propose de construire des espaces de modules quasi-projectifs en appliquant la théorie géométrique des invariants au schéma de Hilbert. On spécialise ici cette stratégie au cas des intersections complètes, et on fait le lien avec les résultats des paragraphes précédents. On obtient en particulier (Corollaire 4.4) une condition nécessaire de Hilbert-stabilité des intersections complètes.

On note P le polynôme de Hilbert des intersections complètes, et $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$ le schéma de Hilbert de \mathbb{P}^N correspondant ; c’est un schéma projectif sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$. Si Z est un sous-schéma de \mathbb{P}_K^N de polynôme de Hilbert P (par exemple une intersection complète), on note $[Z]$ le point géométrique de $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$ correspondant. Si $l \gg 0$, on peut plonger $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$ dans la grassmannienne des quotients de dimension $P(l)$ de $H^0(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}(l))$, et le fibré de Plücker induit un fibré ample sur $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$ noté \mathcal{P}_l . Le schéma en groupes SL_{N+1} agit sur $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$ par changement de coordonnées, et les fibrés en droites \mathcal{P}_l sont naturellement linéarisés. On dit que Z est *Hilbert-stable* si $[Z] \in (\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P)^s(\mathcal{P}_l)$ pour $l \gg 0$. Par le critère de Hilbert–Mumford, il est équivalent de demander que, pour $l \gg 0$, pour tout sous-groupe à un paramètre $\rho : \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow \text{SL}_{N+1,K}$, on ait $\mu^{\mathcal{P}_l}([Z], \rho) > 0$. Pour pouvoir utiliser ce critère, explicitons ces fonctions μ dans notre situation.

Proposition 4.1. *Soit $l \gg 0$, Z une intersection complète sur le corps algébriquement clos K et $\rho : \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow \text{SL}_{N+1,K}$ un sous-groupe à un paramètre choisi comme dans le lemme 2.10. Alors*

$$\mu^{\mathcal{P}_l}([Z], \rho) = \min_{\mathfrak{B}} \left(\sum_{F \in \mathfrak{B}} \deg_\alpha(F) \right),$$

où le min porte sur les bases \mathfrak{B} de $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_Z(l))$.

Preuve. Ce calcul classique se trouve par exemple dans [10, Prop. 4.23]. □

4.1. Majoration des fonctions μ

On majore ici la quantité $\mu^{\mathcal{P}l}([Z], \rho)$ calculée dans la proposition 4.1.

Lemme 4.2. *Soient $Z = \{F_1 = \dots = F_c = 0\}$ une intersection complète sur le corps algébriquement clos K , $\rho : \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow \mathrm{SL}_{N+1,K}$ un sous-groupe à un paramètre choisi comme dans le lemme 2.10 et $l \gg 0$. Alors*

$$\mu^{\mathcal{P}l}([Z], \rho) \leq \sum_{i=1}^c \deg_{\alpha}(F_i) \left(\sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, c\} \\ |I|=r}} (-1)^{c-1-|I|} \binom{N+l-\sum_{j \notin I} d_j}{N} \right). \quad (22)$$

Preuve. Si $I \subset \{1, \dots, c\}$, on note $V_I^l = H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l - \sum_{i \notin I} d_i))$. Pour $0 \leq r \leq c$, on pose

$$K_I^r = \bigoplus_{\substack{I \subset \{1, \dots, c\} \\ |I|=r}} V_I^l.$$

Considérons la résolution de Koszul de \mathcal{O}_Z sur \mathbb{P}_K^N . Si l'on tensorise cette résolution par $\mathcal{O}(l)$ pour $l \gg 0$, le complexe obtenu en prenant les sections globales reste exact par annulation de Serre. On obtient ainsi une suite exacte longue de la forme

$$0 \rightarrow K_I^0 \rightarrow \dots \xrightarrow{d^{r-1}} K_I^r \xrightarrow{d^r} \dots \rightarrow K_I^c \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}(l)) \rightarrow 0,$$

où $d^r : V_I^l \rightarrow V_I^l$ est au signe près la multiplication par F_i si $J = I \cup \{i\}$ et est nul dans les autres cas. On notera $N_I^r = \mathrm{Ker}(d^r) = \mathrm{Im}(d^{r-1}) \subset K_I^r$.

On introduit les notations suivantes. Si $F \in V_I^l$, on pose

$$\deg'_{\alpha}(F) = \deg_{\alpha}(F) - \sum_{i \notin I} \deg_{\alpha}(F_i).$$

Si $\Phi = (F_I) \in K_I^r$, on pose $\deg'_{\alpha}(\Phi) = \max_I \deg'_{\alpha}(F_I)$. De plus, on modifie légèrement les conventions 2.11 : dans toute cette preuve, la notation Φ^{α} ou la notion d'élément α -homogène fait référence à \deg'_{α} et non à \deg_{α} . Remarquons que si $0 \leq r < c$ et $\Phi \in K_I^r$, par définition de \deg'_{α} et vu l'expression de d^r , on a $\deg'_{\alpha}(d^r(\Phi)) \leq \deg'_{\alpha}(\Phi)$.

On va montrer par récurrence sur $0 \leq r \leq c$ l'énoncé suivant : il existe une base \mathfrak{B}_I^r de N_I^r telle que

$$\sum_{\Phi \in \mathfrak{B}_I^r} \deg'_{\alpha}(\Phi) \leq \sum_{i=1}^c \deg_{\alpha}(F_i) \left(\sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, c\} \\ |I| \leq r-1}} (-1)^{r-1-|I|} \dim(V_I^l) \right). \quad (23)$$

Pour $r = 0$, $N_I^0 = \{0\}$, de sorte qu'on peut prendre $\mathfrak{B}^0 = \emptyset$.

Supposons l'énoncé vrai pour r et montrons-le pour $r+1$. Soit \mathfrak{B}_I^r une base de N_I^r telle que $\sum_{\Phi \in \mathfrak{B}_I^r} \deg'_{\alpha}(\Phi)$ soit minimal. On voit aisément que $\mathfrak{B}_I^{r,\alpha} = \{\Phi^{\alpha} : \Phi \in \mathfrak{B}_I^r\}$ est une famille libre d'éléments α -homogènes de K_I^r . Complétons cette famille en une base \mathfrak{C}_I^r de K_I^r constituée d'éléments α -homogènes. Remarquons que $\sum_{\Phi \in \mathfrak{C}_I^r} \deg'_{\alpha}(\Phi)$ ne dépend

pas de la base \mathcal{C} de K_l^r constituée d'éléments α -homogènes. Utilisant $\alpha_0 + \dots + \alpha_N = 0$, cette quantité est facile à calculer pour la base \mathcal{C} constituée des monômes. Il vient donc

$$\sum_{\Phi \in \mathcal{C}_l^r} \text{deg}'_{\alpha}(\Phi) = \sum_{\Phi \in \mathcal{C}} \text{deg}'_{\alpha}(\Phi) = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, c\} \\ |I|=r}} \dim(V_l^I) \left(- \sum_{i \notin I} \text{deg}_{\alpha}(F_i) \right). \tag{24}$$

Comme $\{\Phi^{\alpha} : \Phi \in \mathfrak{B}_l^r \cup (\mathcal{C}_l^r \setminus \mathfrak{B}_l^{r,\alpha})\} = \mathcal{C}_l^r$ est une base de K_l^r , $\mathfrak{B}_l^r \cup (\mathcal{C}_l^r \setminus \mathfrak{B}_l^{r,\alpha})$ est également une base de K_l^r . En particulier, $\mathcal{C}_l^r \setminus \mathfrak{B}_l^{r,\alpha}$ est une base d'un supplémentaire de N_l^r dans K_l^r , de sorte que $\mathfrak{B}_l^{r+1} = d^r(\mathcal{C}_l^r \setminus \mathfrak{B}_l^{r,\alpha})$ est une base de N_l^{r+1} . Montrons que cette base convient. Pour cela, on calcule

$$\begin{aligned} \sum_{\Phi \in \mathfrak{B}_l^{r+1}} \text{deg}'_{\alpha}(\Phi) &\leq \sum_{\Phi \in \mathcal{C}_l^r \setminus \mathfrak{B}_l^{r,\alpha}} \text{deg}'_{\alpha}(\Phi) = \sum_{\Phi \in \mathcal{C}_l^r} \text{deg}'_{\alpha}(\Phi) - \sum_{\Phi \in \mathfrak{B}_l^r} \text{deg}'_{\alpha}(\Phi) \\ &\leq \sum_{i=1}^c \text{deg}_{\alpha}(F_i) \left(\sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, c\} \\ |I| \leq r}} (-1)^{r-|I|} \dim(V_l^I) \right), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé respectivement (24) et l'hypothèse de récurrence (23) pour évaluer les deux termes. Cela conclut la récurrence.

Faisons à présent $r = c$ dans (23). On obtient une base \mathfrak{B}_l^c de $N_l^c = \text{Ker}[H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l)) \rightarrow H^0(Z, \mathcal{O}(l))] = H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{I}_Z(l))$ car $l \gg 0$. Comme deg_{α} et deg'_{α} coïncident pour des éléments de $H^0(\mathbb{P}_K^N, \mathcal{O}(l))$, et comme $\dim(V_l^I) = \binom{N+l-\sum_{j \notin I} d_j}{N}$, il vient

$$\sum_{F \in \mathfrak{B}_l^c} \text{deg}_{\alpha}(F) \leq \sum_{i=1}^c \text{deg}_{\alpha}(F_i) \left(\sum_{i \notin I \subset \{1, \dots, c\}} (-1)^{c-1-|I|} \binom{N+l-\sum_{j \notin I} d_j}{N} \right).$$

Par la proposition 4.1, cela conclut. □

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 4.3. *Soient $Z = \{F_1 = \dots = F_c = 0\}$ une intersection complète sur le corps algébriquement clos K et $\rho : \mathbb{G}_{m,K} \rightarrow \text{SL}_{N+1,K}$ un sous-groupe à un paramètre choisi comme dans le lemme 2.10. Alors*

$$\limsup_{l \rightarrow +\infty} \frac{\mu^{\mathcal{P}_l}([Z], \rho)}{l^{N-c+1}} \leq \frac{d_1 \dots d_c}{(N-c+1)!} \sum_{i=1}^c \frac{\text{deg}_{\alpha}(F_i)}{d_i}. \tag{25}$$

Preuve. Le polynôme $\sum_{i \notin I \subset \{1, \dots, c\}} (-1)^{c-1-|I|} \binom{N+l-\sum_{j \notin I} d_j}{N}$ a pour terme dominant $\frac{d_1 \dots d_i \dots d_c}{(N-c+1)!} X^{N-c+1}$, comme le montre une récurrence sur c .

Ainsi, le terme de droite dans l'inégalité (22) est un polynôme en l de degré $\leq N - c + 1$ et dont le coefficient de l^{N-c+1} est

$$\frac{d_1 \dots d_c}{(N-c+1)!} \sum_{i=1}^c \frac{\text{deg}_{\alpha}(F_i)}{d_i}.$$

On conclut en divisant par l^{N-c+1} l'inégalité (22), et en faisant tendre l vers $+\infty$. □

4.2. Condition nécessaire de Hilbert-stabilité

La proposition 4.3 a pour corollaire immédiat une condition nécessaire de Hilbert-stabilité, qui est le résultat principal de cette partie.

Corollaire 4.4. *Soit $Z = \{F_1 = \cdots = F_c = 0\}$ une intersection complète Hilbert-stable sur le corps algébriquement clos K . Alors, si $\alpha_0 \leq \cdots \leq \alpha_N$ sont des entiers de somme nulle, et quel que soit le système de coordonnées choisi,*

$$\sum_{i=1}^c \frac{\deg_{\alpha}(F_i)}{d_i} \geq 0. \quad (26)$$

Vu [21, Theorem 1.1], si Z est Chow-stable, l'inégalité (26) est stricte. Rappelons que, par un théorème de Fogarty ([8], voir aussi [20, App. 4C]), la Chow-stabilité de Z implique la Hilbert-stabilité de Z (en général, on n'a pas l'implication inverse). Le corollaire 4.4 et [21, Theorem 1.1] sont donc très proches mais ne peuvent se déduire l'un de l'autre.

Enfin, l'article [21] affirme (dans la preuve du Corollary 1.2) que, si $c = 2$, et si l'inégalité (26) est vérifiée et est stricte, Z est Hilbert-stable. L'argument donné est malheureusement erroné.

Quand Z est lisse, l'inégalité (26) est vraie par le théorème 3.1 pour $k_1 = \cdots = k_c = 1$. Autrement dit, le théorème 3.1 implique une forme faible de la Hilbert-stabilité des intersections complètes lisses.

La Hilbert-stabilité des intersections complètes lisses est connue dans très peu de cas. Quand $c = 1$ est trivial, $\text{Hilb}_{\mathbb{P}^N}^P$ est un espace projectif, tous les fibrés amples \mathcal{P}_l introduits ci-dessus sont donc nécessairement proportionnels au fibré $\mathcal{O}(1)$, et les hypersurfaces lisses sont Hilbert-stables par [20, Prop. 4.2]. Signalons un cas non trivial où la Hilbert-stabilité est connue. Quand $N = 3$, $c = 2$, $d_1 = 2$ et $d_2 = 3$, Casalaina-Martin, Jensen et Laza [6] montrent que les intersections complètes lisses sont Chow-stables, ce qui implique leur Hilbert-stabilité par le théorème de Fogarty mentionné ci-dessus.

Pour montrer la Hilbert-stabilité d'une intersection complète lisse Z , la difficulté supplémentaire par rapport au théorème 3.1 est une estimation de la différence entre les deux termes de l'inégalité (22), qui dépend des compensations entre termes de α -degré maximal des équations de Z . Comme le signale le rapporteur, il serait déjà intéressant de montrer la Hilbert-stabilité d'une intersection complète générale, dans l'esprit de [2].

Remerciements. Les suggestions d'un rapporteur anonyme ont permis d'améliorer la présentation de ce texte de manière importante.

Références

- [1] Allcock, D.: The moduli space of cubic threefolds. *J. Algebraic Geom.* **12**, 201–223 (2003) [Zbl 1080.14531](#) [MR 1949641](#)
- [2] Alper, J., Smyth, D., Fedorchuk, M.: Finite Hilbert stability of (bi)canonical curves. *Invent. Math.* **191**, 671–718 (2013) [Zbl 1276.14067](#) [MR 3020172](#)
- [3] Avritzer, D., Miranda, R.: Stability of pencils of quadrics in \mathbf{P}^4 . *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (3) **5**, 281–300 (1999) [Zbl 0965.14005](#) [MR 1738422](#)

- [4] Benoist, O.: Degrés d'homogénéité de l'ensemble des intersections complètes singulières. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **62**, 1189–1214 (2012) [Zbl 1254.14061](#) [MR 3013820](#)
- [5] Benoist, O.: Séparation et propriété de Deligne–Mumford des champs de modules d'intersections complètes lisses. *J. London Math. Soc.* **87**, 138–156 (2013) [Zbl 06139409](#) [MR 3022710](#)
- [6] Casalaina-Martin, S., Jensen, D., Laza, R.: The geometry of the ball quotient model of the moduli space of genus four curves. In: *Compact Moduli Spaces and Vector Bundles*, *Contemp. Math.* 564, Amer. Math. Soc., 107–136 (2012) [Zbl 1260.14032](#) [MR 2895186](#)
- [7] Casalaina-Martin, S., Jensen, D., Laza, R.: Log canonical models and variation of GIT for genus four canonical curves. [arXiv:1203.5014](#) (2012)
- [8] Fogarty, J.: Truncated Hilbert functors. *J. Reine Angew. Math.* **234**, 65–88 (1969) [Zbl 0197.17101](#) [MR 0244268](#)
- [9] Grothendieck, A.: Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **11**, 167 pp. (1961) [Zbl 0118.36206](#) [MR 0163910](#)
- [10] Harris, J., Morrison, I.: *Moduli of Curves*. *Grad. Texts in Math.* 187, Springer, New York (1998) [Zbl 0913.14005](#) [MR 1631825](#)
- [11] Keel, S., Mori, S.: Quotients by groupoids. *Ann. of Math. (2)* **145**, 193–213 (1997) [Zbl 0881.14018](#) [MR 1432041](#)
- [12] Knudsen, F. F.: The projectivity of the moduli space of stable curves. III. The line bundles on $M_{g,n}$, and a proof of the projectivity of $\overline{M}_{g,n}$ in characteristic 0. *Math. Scand.* **52**, 200–212 (1983) [Zbl 0544.14021](#) [MR 0702954](#)
- [13] Kollár, J.: Livre en préparation. <http://www.math.princeton.edu/~kollar/>.
- [14] Kollár, J.: Projectivity of complete moduli. *J. Differential Geom.* **32**, 235–268 (1990) [Zbl 0684.14002](#) [MR 1064874](#)
- [15] Kollár, J.: Quotient spaces modulo algebraic groups. *Ann. of Math. (2)* **145**, 33–79 (1997) [Zbl 0881.14017](#) [MR 1432036](#)
- [16] Kollár, J.: Non-quasi-projective moduli spaces. *Ann. of Math. (2)* **164**, 1077–1096 (2006) [Zbl 1140.14011](#) [MR 2259254](#)
- [17] Laza, R.: The moduli space of cubic fourfolds. *J. Algebraic Geom.* **18**, 511–545 (2009)
- [18] Lazarsfeld, R.: *Positivity in Algebraic Geometry. I*. *Ergeb. Math. Grenzgeb.* 48, Springer, Berlin (2004) [Zbl 1093.14501](#) [MR 2095471](#)
- [19] Mumford, D.: Stability of projective varieties. *Enseignement Math. (2)* **23**, 39–110 (1977) [Zbl 0363.14003](#) [MR 0450272](#)
- [20] Mumford, D., Fogarty, J., Kirwan, F.: *Geometric Invariant Theory*. 3rd ed., *Ergeb. Math. Grenzgeb. (2)* 34, Springer, Berlin (1994) [Zbl 0797.14004](#) [MR 1304906](#)
- [21] Sano, Y.: On stability criterion of complete intersections. *J. Geom. Anal.* **14**, 533–544 (2004) [Zbl 1097.14038](#) [MR 2077164](#)
- [22] Sernesi, E.: *Deformations of Algebraic Schemes*. *Grundlehren Math. Wiss.* 334, Springer, Berlin (2006) [Zbl 1102.14001](#) [MR 2247603](#)
- [23] Seshadri, C. S.: Geometric reductivity over arbitrary base. *Adv. Math.* **26**, 225–274 (1977) [Zbl 0371.14009](#) [MR 0466154](#)
- [24] Shah, J.: Degenerations of $K3$ surfaces of degree 4. *Trans. Amer. Math. Soc.* **263**, 271–308 (1981) [Zbl 0456.14019](#) [MR 0594410](#)
- [25] Viehweg, E.: *Quasi-Projective Moduli for Polarized Manifolds*. *Ergeb. Math. Grenzgeb. (3)* 38, Springer, Berlin (1995) [Zbl 0844.14004](#) [MR 1368632](#)