Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
1 (1982), S. 41–57

Obere und untere Schranken vollergodischer dynamischer Systeme mit quasidiskretem Spektrum

K. Häsler

In jeder Klasse dynamischer Systeme induziert der Faktorbegriff eine Ordnungsstruktur, bezüglich der gemeinsame Faktoren und gemeinsame Vielfache zweier dynamischer Systeme studiert werden können. Diese Fragestellungen werden im folgenden speziell für die Klasse $\mathscr{K}^*$ der vollergodischen dynamischen Systeme mit quasidiskretem Spektrum untersucht und insbesondere Bedingungen dafür angegeben, wann maximale untere bzw. minimale obere Schranken in $\mathscr{K}^*$ existieren.

В каждом классе динамических систем понятие фактора определяет порядок, относительно которого можно изучить совместные факторы и совместные кратные для любых динамических систем. В последующем вопрос о совместных факторах и совместных кратных рассматривается, в частности, в классе $\mathscr{K}^*$ вполне эргодических динамических систем с квазидискретным спектром и даются условия существования для максимальных нижных и минимальных верхних границ в $\mathscr{K}^*$.

For every class of dynamical systems the factor conception induces an order structure. With respect to this structure one can regard common factors and common multiples of any two dynamical systems. In the following this question is studied for the class $\mathscr{K}^*$ of totally ergodic dynamical systems with quasidiscrete spectrum and conditions of existence and of uniqueness are considered for maximal lower and minimal upper bounds for any two systems of $\mathscr{K}^*$.

1. Einleitung

Ist $(X, \mathscr{S}, m)$ ein Maßraum (im folgenden stets Lebesguesch) und T eine maßtreue Transformation in $(X, \mathscr{S}, m)$, so heißt das Quadrupel $D = (X, \mathscr{S}, m, T)$ ein dynamisches System. Für dynamische Systeme hat sich insbesondere das Problem der Isomorphieinvarianten als wichtige und zugleich in vielen Fällen schwierige Fragestellung erwiesen.

Vollständige Lösungen dieses Problems sind z. B. für die Klassen der ergodischen Systeme mit diskretem Spektrum (durch J. v. Neumann und P. Halmos, [7]), der vollergodischen Systeme mit quasidiskretem Spektrum (durch L. M. Abramov, [1]) und der Bernoulli-Schemata (durch D. Ornstein, [9]) gefunden worden. Eine umfassende Beschreibung des Isomorphieproblems in der Klasse der K-Automorphismen [10] liegt dagegen nicht vor.

Neben Isomorphiebetrachtungen haben in den letzten Jahren auch Untersuchungen über Faktoren dynamischer Systeme verstärktes Interesse gefunden. Ihr Zusammenhang mit Isomorphieproblemen liegt auf der Hand: Ist von zwei dynamischen Systemen jedes Faktor des anderen, so sind sie (wenigstens) zueinander schwach isomorph [13]. Zum Beispiel wurde die Frage der Faktorerblichkeit in vorgegebenen Klassen $\mathscr{D}$ dynamischer Systeme für wichtige Fälle untersucht. (Eine Klasse $\mathscr{D}$ wird faktorerblich genannt, wenn aus $D \in \mathscr{D}$ stets $D' \in \mathscr{D}$ für jeden Faktor D' von D folgt.) So konnte für ergodische dynamische Systeme mit diskretem Spektrum [7], für vollergodische dynamische Systeme mit quasidiskretem Spektrum [5] und Bernoulli-Schemata [10] Faktorerblichkeit nachgewiesen werden, was aber gerade in den letzten beiden Klassen nicht trivial ist. Das zeigt, daß trotz gut handhabbarer Isomorphieinvarianten Untersuchungen zur Faktorbeziehung in einer Klasse dynamischer Systeme ein kompliziertes Problem darstellen können. Die Gaußschen Systeme liefern ein Beispiel für eine nichtfaktorerbliche Klasse [8].

Auch bei den von H. Fürstenberg [4] definierten Begriffen extremer Nichtisomorphie dynamischer Systeme (Disjunktheit, Teilerfremdheit) spielen Faktoren dynamischer Systeme eine wichtige Rolle.

Interessant sind ebenfalls Resultate, die sich mit der Kennzeichnung besonderer Faktoren beschäftigen. Der Satz von J. Sinai, daß in jedes dynamische System mit positiver Entropie ein Bernoulli-Schema derselben Entropie eingebettet werden kann [13], die Ergebnisse von M. Pinsker über die Existenz eines maximalen Faktors der Entropie 0 für jedes dynamische System [12] oder die Untersuchungen von W. Parry über maximale Faktoren mit einer Darstellung als unipotente affine Transformationen auf Mannigfaltigkeiten für vollergodische dynamische Systeme [11] sind Beispiele für wichtige Ergebnisse in dieser Hinsicht.

Angeregt durch solche Resultate werden in dieser Arbeit in der Klasse $\mathscr{K}^*$ der vollergodischen dynamischen Systeme mit quasidiskretem Spektrum vor allem zwei Probleme untersucht:

a) Existenz und (eventuelle) Eindeutigkeit maximaler gemeinsamer Faktoren für zwei Systeme $D_1, D_2 \in \mathscr{K}^*$,

b) Existenz und (eventuelle) Eindeutigkeit minimaler Vielfachen für zwei Systeme $D_1, D_2 \in \mathscr{K}^*$.

In der Klasse $\mathscr{K}^*$ sind die Lösungen für die oben formulierten Probleme aus der Kenntnis des Isomorphieinvariantensystems nicht unmittelbar angebbar. Sie lassen den Strukturreichtum der Klasse $\mathscr{K}^*$ von einem anderen Betrachtungspunkt aus deutlich werden, als ihn Isomorphieuntersuchungen eröffnen.

Für eine Anwendung dieser Ergebnisse auf Disjunktheit dynamischer Systeme sei auf [6] verwiesen.

2. Vollergodische dynamische Systeme mit quasidiskretem Spektrum

Es sei $D = (X, \mathscr{S}, m, T)$ ein dynamisches System. Im folgenden wird der Hilbertraum der auf X definierten, quadratisch integrierbaren Funktionen durch $L^2(X)$ bezeichnet werden, durch U_D der durch den Automorphismus T auf $L^2(X)$ induzierte isometrische Operator: $U_D(f) = f \circ T \ (f \in L^2(X))$.

Für jedes dynamische System D läßt sich die multiplikative Gruppe $G \subset L^2(X)$ der Funktionen $f \in L^\infty(X)$ betrachten, die die Eigenschaft $|f| = 1$ m-f.ü. besitzen. Unter Benutzung der Restriktion des Operators U_D auf G läßt sich auf folgende Weise ein Endomorphismus R_D auf G definieren:

$$R_D(f) = U_D(f) \cdot \bar{f} \qquad (f \in G).$$

Daraus folgt unmittelbar die Beziehung

$$U_D(f) = R_D(f) \cdot f \qquad (f \in G).$$

Die Funktion $R_D(f)$ wird *Quasieigenwert* der *Quasieigenfunktion* $f \in G$ genannt. Auf der Grundlage dieser Festsetzungen bestimmt man für alle $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ durch

$$G_n(D) = R_D^{-n}(\{z \in \mathbf{C}: |z| = 1\}) = \{f \in G: R_D^n(f) \in K = \{z \in \mathbf{C}: |z| = 1\}\}$$

die Menge der *Quasieigenfunktionen n-ter Ordnung* (von U_D) und durch

$$H_n(D) = R_D G_n(D)$$

die Menge der *Quasieigenwerte n-ter Ordnung* (von U_D). Entsprechend wird

$$G(D) = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n(D)$$

als Menge der Quasieigenfunktionen von U_D und

$$H(D) = \bigcup_{n=0}^{\infty} H_n(D)$$

als Menge der Quasieigenwerte von U_D bezeichnet.[1])

Für ergodische dynamische Systeme haben die eingeführten Begriffe folgende Eigenschaften:

1. Die Mengen $G(D)$, $H(D)$, $G_n(D)$ und $H_n(D)$ ($n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$), sind multiplikative, abelsche Gruppen.
2. Die Gruppe $H(D)$ ist höchstens abzählbar.
3. Die Abbildung R_D ist ein lokal-nilpotenter Endomorphismus auf $H(D)$.
4. Es gilt $H_n(D) \subseteqq H_{n+1}(D) \subseteqq G_n(D) \subseteqq G_{n+1}(D)$ ($n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$).[2])
5. $G_n(D) \neq G_{n+1}(D)$ gilt genau dann, wenn $H_n(D) \neq H_{n+1}(D)$ richtig ist, und es impliziert $G_0(D) \neq G_1(D) \neq \cdots \neq G_n(D)$ und $H_0(D) \neq H_1(D) \neq \cdots \neq H_n(D)$.
6. Gehören die Funktionen $f_1, f_2 \in G(D)$ zum gleichen Quasieigenwert, so gilt $f_1 = c \cdot f_2$, wobei c ein Element der Gruppe K ist.

Ist die maßtreue Transformation T vollergodisch, sind also alle Abbildungen T^n ($n \in \mathrm{N}$), ergodisch, so gilt zusätzlich noch folgende Eigenschaft:

7. Quasieigenfunktionen zu verschiedenen Quasieigenwerten sind orthogonal.[3])

Ein dynamisches System $D = (X, \mathscr{S}, m, T)$ heißt *vollergodisch* und von *quasidiskretem Spektrum*, wenn T ein vollergodischer Automorphismus auf $(X, \mathscr{S}, m)$ ist und der Hilbertraum $L^2(X)$ aufgespannt wird durch die Gruppe der Quasieigenfunktionen $G(D)$ von U_D.

Jedem dynamischen System D aus der Klasse $\mathscr{K}^*$ der vollergodischen dynamischen Systeme mit quasidiskretem Spektrum kann das Paar $\langle H(D), R_D\rangle$ zugeordnet werden, das durch die Gruppe $H(D)$ seiner Quasieigenwerte und den zugehörigen Endomorphismus R_D bestimmt wird. Aus dem Vorangegangenen geht hervor, daß die Komponenten jedes solchen Paares bestimmte algebraische Eigenschaften aufweisen. Das gibt Anlaß, diese Paare, die den Elementen der Klasse $\mathscr{K}^*$ zugeordnet werden können, algebraisch zu beschreiben.

Definition. Ist A eine torsionsfreie, abelsche, abzählbare Gruppe und S ein auf A definierter, lokal-nilpotenter Endomorphismus mit der Eigenschaft $A_1 = \{a \in A : Sa = 1\} \subset K$, so wird das Paar $\langle A, S\rangle$ eine *Endomorphismus-Gruppe* genannt.

---

[1]) Die Einführung der Begriffe der Quasieigenfunktionen und -werte für dynamische Systeme entspricht dem Vorgehen in der Arbeit [3], S. 215/216.

[2]) Für die Relation des mengentheoretischen Enthaltenseins wird im folgenden stets das Zeichen „$\subseteqq$" verwendet. Soll das die Gleichheit ausschließende Enthaltensein bezeichnet werden, so wird das Symbol „$\subset$" benutzt.

[3]) Zum Beweis der genannten Eigenschaften vgl. z. B. [1] oder [7].

Definition. 1. Zwei Endomorphismus-Gruppen $\langle A, S\rangle$ und $\langle A', S'\rangle$ werden *äquivalent* genannt (im Zeichen: $\langle A, S\rangle \simeq \langle A', S'\rangle$), wenn ein Isomorphismus V von A auf A' existiert, der folgende Eigenschaften besitzt:

1. $V(a) = a \qquad (a \in A_1)$,
2. $VS(a) = S'V(a) \qquad (a \in A)$.

2. Zwei Endomorphismus-Gruppen $\langle A, S\rangle$ und $\langle A', S'\rangle$ stehen in der Relation „$\leqq$" zueinander (in Zeichen: $\langle A, S\rangle \leqq \langle A', S'\rangle$ bzw. $\langle A, S\rangle \leqq \langle A', S'\rangle$ *mit der vermittelnden Abbildung* W, falls der vermittelnde Homomorphismus W von A in A' für die Betrachtung von Bedeutung ist), wenn ein injektiver Homomorphismus W von A in A' existiert, der folgende Eigenschaften besitzt:

1. $W(a) = a \qquad (a \in A_1)$,
2. $WS(a) = S'W(a) \qquad (a \in A)$.[4]

Die Relation „$\leqq$" bestimmt für Endomorphismus-Gruppen, benutzt man die angegebene Äquivalenzrelation, eine Ordnung. L. M. Abramov wies in seiner Arbeit [1] den eineindeutigen Zusammenhang zwischen den Elementen der Klasse $\mathscr{K}^*$ und den Äquivalenzklassen von Endomorphismus-Gruppen nach. Es kann nicht nur jedem dynamischen System aus $\mathscr{K}^*$ eine Endomorphismus-Gruppe, nämlich das Paar $\langle H(D), R_D\rangle$, zugeordnet werden, auch die umgekehrte Beziehung ist richtig. Zu jeder Endomorphismus-Gruppe $\langle A, S\rangle$ existiert ein System $D \in \mathscr{K}^*$ derart, daß $\langle A, S\rangle \simeq \langle H(D), R_D\rangle$ gilt.

L. M. Abramov bewies, daß die Menge der Äquivalenzklassen der Endomorphismus-Gruppen ein vollständiges System von Isomorphieinvarianten für die Klasse $\mathscr{K}^*$ bildet. Zwei dynamische Systeme aus $\mathscr{K}^*$ sind genau dann isomorph, wenn ihre Endomorphismus-Gruppen äquivalent sind.[5]

3. Faktoren dynamischer Systeme aus K^*

Der Begriff des Faktors eröffnet eine Möglichkeit, Beziehungen zwischen dynamischen Systemen zu erschließen und darzustellen.

Definition. Ein dynamisches System $D_1 = (X_1, \mathscr{S}_1, m_1, T_1)$ wird *Faktor* des dynamischen Systems $D_2 = (X_2, \mathscr{S}_2, m_2, T_2)$ genannt, wenn es eine multiplikative Isometrie $V: L^2(X_1) \to L^2(X_2)$ gibt, die der Bedingung $VU_{D_1} = U_{D_2}V$ genügt. (In Zeichen: $D_1 \leqq D_2$ oder, falls die Abbildung V für die Untersuchung von Bedeutung ist, $D_1 \leqq D_2$ *mit der vermittelnden Abbildung* V.)

Für die Betrachtung des Faktorbegriffes für dynamische Systeme aus $\mathscr{K}^*$ lieferten F. Hahn und W. Parry [5] einen wichtigen Beitrag. Sie wiesen nach, daß die Klasse $\mathscr{K}^*$ faktorerblich ist.

[4]) Ist für zwei Endomorphismus-Gruppen, die in der Relation „$\leqq$" zueinander stehen, wesentlich, daß sie nicht auch äquivalent sind, so wird das Symbol „$\leqq$" ersetzt durch das Zeichen „$<$".

[5]) Zwei dynamische Systeme D_1, D_2 sind bekanntlich genau dann isomorph (= konjugiert in der Terminologie P. Halmos'), wenn es einen multiplikativen, isometrischen Operator V: $L^2(X_1) \to L^2(X_2)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. $VL^2(X_1) = L^2(X_2)$,
2. $VU_{D1}(f) = U_{D2}V(f), \qquad f \in L^2(X_1)$.

S a t z (HAHN, PARRY). *Ist D_2 ein Element der Klasse $\mathscr{K}^*$ und D_1 ein dynamisches System mit der Eigenschaft $D_1 \leqq D_2$, so gilt $D_1 \in \mathscr{K}^*$.*

Die Untersuchung der Faktoren eines dynamischen Systems aus $\mathscr{K}^*$ führt wegen der Faktorerblichkeit dieser Klasse nicht aus ihr heraus. Da jedem System aus $\mathscr{K}^*$ auf eineindeutige Weise (mod. Äquivalenz) eine Endomorphismus-Gruppe zugeordnet werden kann, wird sich die Beziehung zwischen einem System aus $\mathscr{K}^*$ und jedem seiner Faktoren in einer bestimmten Beziehung der zugehörigen Endomorphismus-Gruppen widerspiegeln. Der nachfolgende Satz zeigt diesen Zusammenhang auf. (Dabei wird auf die in Paragraph 2 betrachtete Ordnungsrelation für Endomorphismus-Gruppen Bezug genommen.)

S a t z. *Für zwei dynamische Systeme D_1, D_2 aus $\mathscr{K}^*$ gilt $D_1 \leqq D_2$ genau dann, wenn für ihre Endomorphismus-Gruppen die Beziehung $\langle H(D_1), R_{D_1}\rangle \leqq \langle H(D_2), R_{D_2}\rangle$ richtig ist.*

B e w e i s. 1. Gilt $D_1 \leqq D_2$, existiert also eine multiplikative Isometrie $V\colon L^2(X_1) \to L^2(X_2)$, die die Bedingung $VU_{D_1} = U_{D_2}V$ erfüllt, so lassen sich leicht folgende Eigenschaften des Operators V nachprüfen:

1. $\operatorname{restr}_{H(D_1)} V\colon H(D_1) \to H(D_2)$.
2. $\operatorname{restr}_{H(D_1)} V$ ist eine multiplikative und injektive Abbildung.
3. Es gilt $V(g) = g$, $\big(g \in H_1(D_1)\big)$.
4. Es ist $VR_{D_1}(g) = R_{D_2}V(g)$, $\big(g \in H(D_1)\big)$, richtig.

Diese Eigenschaften zeigen, daß $\langle H(D_1), R_{D_1}\rangle \leqq \langle H(D_2), R_{D_2}\rangle$ mit der vermittelnden Abbildung $W = \operatorname{restr}_{H(D_1)} V$ von $H(D_1)$ in $H(D_2)$ gilt.

2. Es wird die Beziehung $\langle H(D_1), R_{D_1}\rangle \leqq \langle H(D_2), R_{D_2}\rangle$ mit der vermittelnden Abbildung $V\colon H(D_1) \to H(D_2)$ vorausgesetzt. Jeder Endomorphismus-Gruppe $\langle H, R\rangle$ kann ein unitärer Ring mit aufgeprägtem Automorphismus zugeordnet werden. (Vgl. [1], S. 522—524.) Der Raum $\mathscr{H}(H)$ aller auf H definierten, komplexwertigen Funktionen f, die der Bedingung

$$\sum_{c \in H} |f(c)|^2 < \infty$$

genügen, wird mit folgendem Skalarprodukt und folgender Multiplikationsoperation ausgestattet:

$$(f, g) = \sum_{c \in H} f(c) \cdot \overline{g(c)},$$

$$(f \cdot g)(c) = \sum_{\substack{a, b \in H \\ a \cdot b = c}} f(a) \cdot g(b),$$

wobei die Produktfunktion $f \cdot g$ existiert (in $\mathscr{H}(H)$), wenn

$$\sum_{c \in H} \Big| \sum_{\substack{a, b \in H \\ a \cdot b = c}} f(a) \cdot g(b) \Big|^2 < \infty$$

gilt $\big(f, g \in \mathscr{H}(H)\big)$.

Mit diesen Festlegungen wird $\mathscr{H}(H)$ zum unitären Ring. Durch die Bedingung $U(1_a) = Z(a) \cdot 1_a \cdot 1_{R(a)}$ wird für die Elemente der Orthonormalbasis $\{1_a\}$ von $\mathscr{H}(H)$, die definiert sind durch

$$1_a(c) = \begin{cases} 1, & \text{falls } a = c, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (a, c \in H),$$

ein isometrischer Operator konstruiert. Dabei ist Z ein (beliebiger) Isomorphismus der Gruppe H in die Kreisgruppe K, der die Eigenschaft $Z(a) = a$ für alle $a \in H_1$ besitzt. Die lineare Fortsetzung von U auf den gesamten Ring liefert einen multiplikativen, unitären Operator von $\mathscr{H}(H)$ auf sich.

Es seien im folgenden $(\mathscr{H}(H(D_i)), U_i)$ $(i = 1, 2)$, unitäre Ringe mit aufgeprägten Automorphismen, die auf die angegebene Weise den Endomorphismus-Gruppen $\langle H(D_i), R_{D_i}\rangle$ zugeordnet sind. Man betrachtet nun die Endomorphismus-Gruppe $\langle VH(D_1), R_{D_2}\rangle$ und den zugehörigen unitären Ring mit aufgeprägtem Automorphismus $(\mathscr{H}(VH(D_1)), U)$, wobei der Automorphismus U durch die Bedingung

$$U(1_a) = Z(a) \cdot 1_a \cdot 1_{R_{D_2}(a)}$$

mit $Z(a) = Z_1 V^{-1}(a)$ $(a \in VH(D_1))$ festgelegt sei.

Durch die Bestimmung $W(1_{a_1}) = 1_{Va_1}$ $(a_1 \in H(D_1))$ und anschließende lineare Fortsetzung des Operators W auf den ganzen Raum $\mathscr{H}(H(D_1))$ wird eine multiplikative Isometrie von $\mathscr{H}(H(D_1))$ auf $\mathscr{H}(VH(D_1))$ definiert, für die die Eigenschaft $UW(f) = WU_1(f)$ $(f \in \mathscr{H}(H(D_1)))$ gilt.

Sowohl dem unitären Ring mit Automorphismus $(\mathscr{H}(VH(D_1)), U)$ als auch dem unitären Ring mit Automorphismus $(\mathscr{H}(VH(D_1)), U_2)$ entspricht gemäß der Konstruktion zu Beginn dieses Beweisteils die Endomorphismus-Gruppe $\langle VH(D_1), R_{D_2}\rangle$. Es kann gezeigt werden, daß für jedes dynamische System $D \in \mathscr{K}^*$, dessen Endomorphismus-Gruppe $\langle H(D), R_D\rangle$ isomorph zu $\langle VH(D_1), R_{D_2}\rangle$ ist, multiplikative Isometrien

$$S_1\colon L^2(X) \to \mathscr{H}(VH(D_1)) \quad \text{und} \quad S_2\colon L^2(X) \to \mathscr{H}(VH(D_1))$$

mit den Eigenschaften

$$S_i(L^2(X)) = \mathscr{H}(VH(D_1)) \quad (i = 1, 2)$$

und

$$S_1 U_D = U S_1, \qquad S_2 U_D = U_2 S_2$$

existieren. (Vgl. [1].)

Man betrachtet nun den Operator $\mathscr{W} = S_2 S_1^{-1} W$, der den unitären Ring $\mathscr{H}(H(D_1))$ in den unitären Ring $\mathscr{H}(H(D_2))$ abbildet. Man zeigt leicht, daß die Abbildung $\mathscr{W}$ eine multiplikative Isometrie ist, die der Bedingung $\mathscr{W} U_1 = U_2 \mathscr{W}$ genügt. Außerdem gilt: Die Spektraltypen $(L^2(X_i), U_{D_i})$ besitzen die Eigenschaft: es existieren multiplikative Isometrien $\mathscr{W}_i\colon L^2(X_i) \to \mathscr{H}(H(D_i))$ $(i = 1, 2)$, wobei $\mathscr{W}_i(L^2(X_i)) = \mathscr{H}(H(D_i))$ und $\mathscr{W}_i U_{D_i} = U_i \mathscr{W}_i$ $(i = 1, 2)$ zutrifft. (Vgl. [1].)

Daher ist die Beziehung $D_1 \leqq D_2$ mit der die Faktoreigenschaft vermittelnden Abbildung $S = \mathscr{W}_2^{-1} \mathscr{W} \mathscr{W}_1$ richtig. ∎

Bemerkung.

1. Der vorangegangene Satz ermöglicht eine einfache Beweisführung für den bekannten Sachverhalt, daß in der Klasse $\mathscr{K}^*$ die Begriffe der starken und der schwachen Isomorphie übereinstimmen. L. M. Abramov bewies, daß zwei dynamische Systeme aus $\mathscr{K}^*$ genau dann (stark) isomorph sind, wenn ihre Endomorphismus-Gruppen $\langle H(D_1), R_{D_1}\rangle$ und $\langle H(D_2), R_{D_2}\rangle$ äquivalent sind [1]. Nach der Definition von J. Sinai [13] werden zwei Systeme D_1, D_2 *schwach isomorph* genannt, wenn sowohl $D_1 \leqq D_2$ als auch $D_2 \leqq D_1$ gilt. Der vorangegangene Satz zeigt, daß schwache Isomorphie für dynamische Systeme D_1, D_2 aus $\mathscr{K}^*$ gleichbedeutend ist mit dem gleichzeitigen Gelten der beiden Relationen

$$\langle H(D_1), R_{D_1}\rangle \leqq \langle H(D_2), R_{D_2}\rangle \quad \text{und} \quad \langle H(D_2), R_{D_2}\rangle \leqq \langle H(D_1), R_{D_1}\rangle.$$

Da die $\leqq$-Relation für Endomorphismus-Gruppen aber eine Ordnung ist, entspricht das gerade der Äquivalenz der zwei Endomorphismus-Gruppen.

2. Der angegebene Satz ermöglicht einfache Folgerungen, die vor allem die praktische Untersuchung über das Verhältnis von zwei vorgegebenen dynamischen Systemen aus $\mathscr{K}^*$ erleichtern können:

So folgt für zwei Systeme D_1, D_2 aus $\mathscr{K}^*$ aus der Beziehung $D_1 \leqq D_2$ stets $H_1(D_1) \subseteqq H_1(D_2)$; die Umkehrung dieses Satzes ist natürlich i. a. falsch.

Bezeichnet man durch $n(D_1)$, $n(D_2)$ die Halmos-Invarianten der Systeme D_1, D_2 aus $\mathscr{K}^*$, dann ergibt sich mit obigem Satz unmittelbar: Die Beziehung $D_1 \leqq D_2$ hat die Eigenschaft $n(D_1) \leqq n(D_2)$ zur Folge.

4. Untere Schranken dynamischer Systeme aus $\mathscr{K}^*$

Bei der Strukturuntersuchung der Klasse $\mathscr{K}^*$ mit Hilfe des Faktorbegriffes ist es naheliegend, nach der Beschaffenheit der gemeinsamen Faktoren zweier oder mehr dynamischer Systeme aus $\mathscr{K}^*$ zu fragen. Im folgenden wird nur die Memge der gemeinsamen Faktoren für beliebige zwei Systeme aus $\mathscr{K}^*$ untersucht. Die angeführten Resultate lassen sich aber ohne Schwierigkeiten auf den Fall einer beliebigen endlichen Zahl von Systemen aus $\mathscr{K}^*$ verallgemeinern. Die Betrachtung einer abzählbaren oder überabzählbaren Anzahl von Elementen aus $\mathscr{K}^*$ bezüglich der ihnen allen gemeinsamen Faktoren bedarf neuer Überlegungen.

Definition. Sind D_1, D_2 Elemente aus $\mathscr{K}^*$, so wird ein dynamisches System D_0 *untere Schranke* von D_1 und D_2 genannt, wenn $D_0 \leqq D_i$ $(i = 1, 2)$ gilt. Ein dynamisches System D_0 wird *maximale untere Schranke* von D_1 und D_2 genannt, wenn gilt:

1. D_0 ist untere Schranke von D_1 und D_2.
2. Für jedes dynamische System D mit der Eigenschaft $D_0 \leqq D \leqq D_i$ $(i = 1, 2)$ ist $D_0 \simeq D$ richtig.

Bezeichnung. Die Menge der unteren Schranken zweier Systeme D_1 und D_2 wird durch $\mathscr{U}(D_1, D_2)$ bezeichnet, die Menge der maximalen unteren Schranken durch $\mathscr{U}_*(D_1, D_2)$.

Die Definitionen der unteren und der maximalen unteren Schranke können auf die angegebene Weise für Elemente aus beliebigen Klassen dynamischer Systeme getroffen werden. Die faktorerbliche Klasse $\mathscr{K}$ der ergodischen dynamischen Systeme mit diskretem Spektrum liefert eine einfache Möglichkeit dafür, sich die betrachteten Mengen $\mathscr{U}(D_1, D_2)$ und $\mathscr{U}_*(D_1, D_2)$ $(D_1, D_2 \in \mathscr{K})$ am speziellen Beispiel zu veranschaulichen. Benutzt man das von Neumannsche vollständige System von Isomorphieinvarianten für die Klasse $\mathscr{K}$, so lassen sich leicht folgende Zusammenhänge nachprüfen: Die Menge $\mathscr{U}(D_1, D_2)$ wird für beliebige zwei Systeme D_1, D_2 aus $\mathscr{K}$ durch alle Elemente aus $\mathscr{K}$ gebildet, deren Eigenwertgruppen enthalten sind im Durchschnitt der Eigenwertgruppen von D_1 und D_2. Als (mod. Isomorphie) eindeutig bestimmte maximale untere Schranke von D_1 und D_2 erweist sich dasjenige System aus $\mathscr{K}$, dessen Eigenwertgruppe gleich dem Durchschnitt der Eigenwertgruppen von D_1 und D_2 ist.

Die Mengen $\mathscr{U}(D_1, D_2)$ und $\mathscr{U}_*(D_1, D_2)$ weisen für beliebige Systeme D_1, D_2 aus $\mathscr{K}^*$ entsprechende Eigenschaften auf. Mit Hilfe des Faktorkriteriums für $\mathscr{K}^*$ können die Elemente aus $\mathscr{U}(D_1, D_2)$ $(D_1, D_2 \in \mathscr{K}^*)$ durch Forderungen an die Beschaffenheit ihrer Endomorphismus-Gruppen beschrieben werden. Es läßt sich zeigen, daß die Menge $\mathscr{U}_*(D_1, D_2)$ für beliebige Systeme D_1, D_2 aus $\mathscr{K}^*$ (bis auf Isomorphie) genau ein Element enthält. Der Nachweis hierfür soll in zwei Schritten erfolgen.

Satz. *Gilt* $D_1, D_2 \in \mathcal{K}^*$ *und* $D \in \mathcal{U}(D_1, D_2)$, *so existiert ein dynamisches System* $D_0 \in \mathcal{U}_*(D_1, D_2)$ *mit der Eigenschaft* $D \leqq D_0$.

Beweis. Es seien

$$D \in \mathcal{U}(D_1, D_2) \quad \text{und} \quad \mathcal{U} = \{D' \in \mathcal{U}(D_1, D_2) : D \leqq D'\}.$$

$\mathcal{U}$ ist nicht leer. Der Faktorbegriff für dynamische Systeme induziert für die Menge $\mathcal{U}$ eine Ordnung. Für Systeme $D', D'' \in \mathcal{U}$ gelte $D' \prec D''$ genau dann, wenn $D' \leqq D''$ richtig ist. Mit dieser Ordnungsrelation versehen, ist $\mathcal{U}$ induktiv geordnet. Ist (D_ι') ($\iota \in I$ = Indexmenge) eine beliebige Kette aus $\mathcal{U}$, dann gilt gemäß § 2

$$\langle H(D_\iota'), R_{D_\iota'}\rangle \leqq \langle H(D'_{\iota+1}), R_{D_{\iota+1}}\rangle$$

für alle $\iota \in I$. Der induktive Limes dieser Endomorphismus-Gruppen (bezüglich des Homomorphismus-Systems (V_ι)) ist (mod. Äquivalenz) eine Endomorphismus-Gruppe, die die Eigenschaft besitzt, daß das durch sie bestimmte dynamische System aus $\mathcal{K}^*$ sämtliche Systeme D_ι' ($\iota \in I$) zu Faktoren hat und gleichzeitig ein Element in $\mathcal{U}$ ist.[6])

Die Anwendung des Zornschen Lemmas auf die geordnete Menge $\mathcal{U}$ erbringt den Beweis für die Existenz eines maximalen Elementes in $\mathcal{U}$, das wegen der Konstruktion von $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}_*(D_1, D_2)$ auch zu $\mathcal{U}_*(D_1, D_2)$ gehört. ∎

Hilfssatz. *Gilt* $D_1, D_2 \in \mathcal{K}^*$ *und* $D, D' \in \mathcal{U}_*(D_1, D_2)$, *so ist für die Gruppen der Quasieigenwerte zweiter Ordnung* $H_2(D)$, $H_2(D')$ *die folgende Beziehung richtig:*

$$\langle H_2(D), R_D\rangle \simeq \langle H_2(D'), R_{D'}\rangle.$$

Beweis. Es seien $D^{(2)}$ und $D'^{(2)}$ die zu den Endomorphismus-Gruppen $\langle H_2(D), R_D\rangle$ bzw. $\langle H_2(D'), R_{D'}\rangle$ gehörigen Systeme aus $\mathcal{K}^*$. O. B. d. A. kann angenommen werden, daß die vermittelnden Transformationen für die Faktorbeziehungen

$$\langle H_2(D), R_D\rangle \leqq \langle H(D_1), R_{D_1}\rangle \quad \text{und} \quad \langle H_2(D'), R_{D'}\rangle \leqq \langle H(D_1), R_{D_1}\rangle$$

die identischen Abbildungen sind. Für die Beziehung

$$\langle H_2(D), R_D\rangle \leqq \langle H(D_2), R_{D_2}\rangle$$

wird die vermittelnde Abbildung durch W, für

$$\langle H_2(D'), R_{D'}\rangle \leqq \langle H(D_2), R_{D_2}\rangle$$

durch W' bezeichnet.

1. *Konstruktion eines Elementes* $D_0 \in \mathcal{U}(D^{(2)}, D'^{(2)})$. Die Menge

$$H = \{h \in H_2(D) : \exists\, h' \in H_2(D') \quad \text{mit} \quad R_D(h) = R_{D'}(h')\}$$

bildet offensichtlich eine torsionsfreie, abelsche Gruppe, deren Kern bezüglich R_D eine Untergruppe der Kreisgruppe K ist. Es gilt $\ker R_D \cap H = H_1(D)$. Die Gruppe H kann vermittels eines Isomorphismus V in die Gruppe $H_2(D')$ abgebildet werden:

Für jedes $h \in H_1(D) \cap H = H_1(D)$ bestimmt man $V(h) = h$. Existiert ein Element $h \in H \setminus H_1(D)$, so erweitert man den Isomorphismus V auf die Gruppe $\tilde{H}$, die erzeugt wird von $H_1(D)$, allen Vielfachen von h und allen Wurzeln von h, die in H liegen, auf folgende Weise: Besitzt h keine Wurzel in H, so setzt man $V(h) = c \cdot h$, wobei $c \in H_1(D_1)$ so gewählt ist, daß $V(h) = c \cdot h \in H(D')$ gilt. Hat h eine Wurzel in H,

---

[6]) Zur Konstruktion des inversen Limes vergleiche man [2] (besonders Theorem 1) unter Beachtung der Faktorerblichkeit der Klasse $\mathcal{K}^*$.

existiert also eine Zahl $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ mit $\sqrt[n]{h} \in H$, so bestimmt man $V(\sqrt[n]{h}) = c' \cdot \sqrt[n]{h} \in H(D')$ mit geeignetem $c' \in H_1(D_1)$. Gehören zwei Wurzeln von h zu H, d. h. gibt es natürliche Zahlen m und n ($m \neq n$, $m \neq 1$, $n \neq 1$) mit $\sqrt[m]{h} \in H$ und $\sqrt[n]{h} \in H$, so ist auch $\sqrt[m \cdot n]{h^k} \in H$ richtig, wobei k der größte gemeinsame Teiler von m und n ist. Man definiert

$$V\left(\sqrt[m \cdot n]{h^k}\right) = c'' \cdot \sqrt[m \cdot n]{h^k} \in H(D')$$

mit geeignetem $c'' \in H_1(D_1)$. Induktive Fortsetzung des Verfahrens führt wegen der Abzählbarkeit von H nach höchstens abzählbar vielen Schritten auf eine Wurzel $\bar{h}$ von h in H mit der Eigenschaft, daß alle anderen Wurzeln von h in H Vielfache von $\bar{h}$ sind. Man bestimmt $V(\bar{h}) = c \cdot \bar{h} \in H(D')$ mit geeignetem $c \in H_1(D_1)$. Die Abbildung V kann auf $\tilde{H}$ multiplikativ fortgesetzt werden. Gilt $\{\bar{\bar{h}}\} \subseteq H \setminus \tilde{H}$, so wendet man die eben benutzte Konstruktion zur Erweiterung von V auf die Gruppe $\tilde{\tilde{H}}$ an, die erzeugt wird durch $\tilde{H}$, alle Vielfachen von $\bar{\bar{h}}$ und alle Wurzeln von $\bar{\bar{h}}$ in H. Nach höchstens abzählbar vielen Schritten endet auch dieses Vorgehen wegen der Abzählbarkeit von H. Aus der Bestimmung von V folgt unmittelbar, daß $R_{D_1} V = V R_{D_1}$ gilt. Das dynamische System $D_0 \in \mathcal{K}^*$, das die Endomorphismus-Gruppe $\langle H(D_0), R_{D_0} \rangle \simeq \langle H, R_{D_1} \rangle$ besitzt, ist daher ein Element aus $\mathcal{U}(D^{(2)}, D'^{(2)})$.

2. *Es gilt* $D_0 \in \mathcal{U}_*(D^{(2)}, D'^{(2)})$.

Für ein beliebiges System $\tilde{D} \in \mathcal{U}(D^{(2)}, D'^{(2)})$ ist nämlich folgendes richtig:

$$H_1(\tilde{D}) \subseteq H_1(D^{(2)}) \cap H_1(D'^{(2)}) = H_1(D_0).$$

Außerdem existieren für beliebiges Element $\tilde{h} \in H(\tilde{D})$ nach Voraussetzung über $\tilde{D}$ Funktionen $h \in H_2(D)$ bzw. $h' \in H_2(D')$ mit der Eigenschaft $Z(\tilde{h}) = h$ und $Z'(\tilde{h}) = h'$, wenn man $\tilde{D} \leqq D^{(2)}$ mit der vermittelnden Abbildung Z und $\tilde{D} \leqq D'^{(2)}$ mit der vermittelnden Abbildung Z' setzt. Wegen

$$R_D(h) = R_D Z(\tilde{h}) = Z R_{\tilde{D}}(\tilde{h}) = R_{\tilde{D}}(\tilde{h}) = Z' R_{\tilde{D}}(\tilde{h}) = R_{D'} Z'(\tilde{h}) = R_{D'}(h')$$

ist $h = Z(\tilde{h}) \in H$ richtig. Es gilt daher

$$\langle H(\tilde{D}), R_{\tilde{D}} \rangle \leqq \langle H, R_D \rangle \simeq \langle H(D_0), R_{D_0} \rangle$$

mit der vermittelnden Abbildung $Z\colon H(\tilde{D}) \to H$.

Mithin ist das System $D_0 \in \mathcal{K}^*$ eindeutig bestimmte maximale untere Schranke von $D^{(2)}$ und $D'^{(2)}$.

3. *Wie in* § 5 *angegeben, konstruiere man zu den Systemen* $D^{(2)}$ *und* $D'^{(2)}$ *unter Benutzung ihrer maximalen unteren Schranke* D_0 *ein dynamisches System* D^* *aus* $\mathcal{O}^*(D^{(2)}, D'^{(2)})$. Es gelte also

$$\left(L^2(X_0), U_{D_0}\right) \leqq \left(L^2(X^{(2)}), U_D\right) \text{ mit der vermittelnden Abbildung } V,$$

$$\left(L^2(X^{(2)}), U_D\right) \leqq \left(L^2(X^*), U_{D^*}\right) \text{ mit der vermittelnden Abbildung } W,$$

$$\left(L^2(X_0), U_{D_0}\right) \leqq \left(L^2(X'^{(2)}), U_{D'}\right) \text{ mit der vermittelnden Abbildung } V'$$

und

$$\left(L^2(X'^{(2)}), U_{D'}\right) \leqq \left(L^2(X^*), U_{D^*}\right) \text{ mit der vermittelnden Abbildung } W',$$

wobei die Eigenschaft $WV(f_0) = W'V'(f_0)$ für alle Funktionen $f_0 \in L^2(X_0)$ gilt.

Dabei ist $H_1(D^*) = H_1(D) = H_1(D')$ richtig. Gilt nämlich

$$R_{D^*}(h^*) = R_{D^*}(Wh \cdot W'h') = 1 \quad \left(Wh \in WH_2(D), \quad W'h' \in W'H_2(D')\right),$$

d. h.

$$R_{D^*}W(h) = WR_D(h) = W'R_{D'}(h'^{-1}) = R_{D^*}W'(h'^{-1}) \in H_1(D_0),$$

wie unmittelbar aus den Bedingungen für $W(h)$ und $W'(h')$ folgt, ergibt sich $W(h) \in WH$. Wegen der Ergodizität von D^* (vgl. § 5, Hilfssatz 5), erhält man $W(h) = c \cdot W'(h'^{-1})$, $c \in K$. Aus den Voraussetzungen über D_0 und die Abbildungen V, W, V', W' folgt sofort $c \in H_1(D_0) = H_1(D) = H_1(D')$. Daher gilt $h^* = c \in H_1(D_0)$.

Die Eigenschaft $H_1(D^*) = H_1(D_0)$ beweist, daß D^* vollergodisch ist: Gemäß Hilfssatz 4 und 5 aus § 5 ist D^* ergodisch und besitzt quasidiskretes Spektrum. Aus der Torsionsfreiheit von $H_1(D^*)$ folgt nun sogar $D^* \in \mathscr{K}^*$.

4. *D^* ist untere Schranke von D_1 und D_2.*

Man konstruiert dazu entsprechend wie in Beweisteil 1 eine untere Schranke von D^* und D_i, indem man definiert

$$H_i = \{h^* \in H_2(D^*) = H(D^*) : \exists\, h_i \in H_2(D_i) \quad \text{mit} \quad R_{D^*}(h^*) = R_{D_i}(h_i)\}$$
$$(i = 1, 2).$$

Aus der Konstruktion von D^* folgt dann unmittelbar, daß $\langle H_i, R_{D_i}\rangle \simeq \langle H(D^*), R_{D^*}\rangle$ richtig ist. Das heißt, es gilt $D^* \leqq D_i$ $(i = 1, 2)$. Das ist mit der Voraussetzung $D, D' \in u_*(D_1, D_2)$, d. h. speziell $D^{(2)}, D'^{(2)} \in \mathscr{U}_*(D_1^{(2)}, D_2^{(2)})$, nur dann vereinbar, wenn $D^{(2)} \simeq D^* \simeq D'^{(2)}$ richtig ist. ∎

Satz. *Gilt $D_1, D_2 \in \mathscr{K}^*$ und $D, D' \in \mathscr{U}_*(D_1, D_2)$, so ist $D \simeq D'$ richtig.*

Beweis. Es gelte $D_0 \in \mathscr{U}_*(D, D')$. Wie in § 5 angegeben, konstruiert man zu D und D' unter Benutzung von D_0 eine minimale obere Schranke D^*. Bezeichnet W die vermittelnde Abbildung der Beziehung $\big(L^2(X), U_D\big) \leqq (L^2(X^*), U_{D^*})$ und W' die vermittelnde Abbildung für $\big(L^2(X'), U_{D'}\big) \leqq \big(L^2(X^*), U_{D^*}\big)$, so lassen sich folgende Eigenschaften zeigen:

1. Es gilt $H_1(D^*) = H_1(D) = H_1(D') \subseteqq H_1(D_i)$ $(i = 1, 2)$, wie man mit Hilfe des vorangegangenen Hilfssatzes beweist.

2. Es gilt $D^* \in \mathscr{K}^*$, wie aus der Torsionsfreiheit von $H_1(D^*)$, die durch die Eigenschaft 1 bewiesen wird, unmittelbar mit Hilfssatz 4 und 5 aus § 5 folgt.

3. $\langle H_2(D^*), R_{D^*}\rangle \simeq \langle H_2(D), R_D\rangle \leqq \langle H_2(D_i), R_{D_i}\rangle$ $(i = 1, 2)$ ist richtig. Das beweist man leicht mit Hilfe des vorangegangenen Hilfssatzes. Es gilt speziell $H_2(D^*) = WH_2(D)$.

4. Für jedes $j \in \mathrm{N}$ gilt

$$\langle H_j(D^*), R_{D^*}\rangle \simeq \langle \{WH_j(D), W'H_j(D')\}, R_{D^*}\rangle.$$

Ist nämlich

$$W(h) \cdot W'(h') \in H_j(D^*) \qquad \big(h \in H(D), h' \in H(D')\big),$$

richtig, so ist

$$R^j_{D^*}\big(W(h) \cdot W'(h')\big) = c \in H_1(D^*) = H_1(D) = H_1(D')$$

gültig. Man erhält daher $R^j_{D^*}\big(W(h)\big) = c \cdot R^j_{D^*}\big(W'(h'^{-1})\big)$, und aus dem Vorangegangenen $R^{j-1}_{D^*}\big(W(h)\big) \in WH_2(D)$, d. h. $W(h) \in WH_j(D)$, und entsprechend $W'(h') \in W'H_j(D')$. Also gilt

$$W(h) \cdot W'(h') \in \{WH_j(D), W'H_j(D')\}.$$

Umgekehrt ist offensichtlich auch

$$\{WH_j(D), W'H_j(D')\} \subseteqq H_j(D^*)$$

richtig.

5. Für jedes $j \in \mathrm{N}$ ist $WH_j(D) = W'H_j(D')$ gültig:

Die Behauptung sei für $j-1$ zutreffend. Ist $W(h) \cdot W'(h') \in H_j(D^*)$ $\big(h \in H(D),$ $h' \in H(D')\big)$ beliebig gewählt, so erhält man $W(h) = g \cdot W'(h')$ mit $g \in WH_{j-1}(D)$ $= W'H_{j-1}(D')$. (Vgl. Eigenschaft 4.) Das heißt, für jedes $W(h) \in WH_j(D)$ gilt

$$W(h) = g \cdot W'(h') \in \{W'H_{j-1}(D'), W'H_j(D')\} = W'H_j(D')$$

und für jedes $W'(h') \in W'H_j(D')$

$$W'(h') = g^{-1} \cdot W(h) \in \{WH_{j-1}(D), WH_j(D)\} = WH_j(D).$$

Daraus folgt $WH_j(D) = W'H_j(D')$.

Die Eigenschaften 1—5 des Systems D^* beweisen, daß $D \simeq D'$ gelten muß. ∎

5. Obere Schranken dynamischer Systeme aus $\mathscr{K}^*$

Alternativ zur unteren Schranke dynamischer Systeme läßt sich zur Beschreibung der Menge aller dynamischen Systeme, die zwei oder mehr vorgegebene Systeme als Faktoren besitzen, der Begriff der oberen Schranke einführen. Er soll im folgenden für beliebige zwei Systeme aus $\mathscr{K}^*$ untersucht werden. Die angeführten Resultate lassen sich auch hier ohne Schwierigkeiten auf eine beliebige endliche Anzahl von Systemen aus $\mathscr{K}^*$ erweitern.

Definition. Sind D_1, D_2 Elemente aus $\mathscr{K}^*$, so wird ein dynamisches System D_0 *obere Schranke* von D_1 und D_2 genannt, wenn $D_i \leqq D_0$ $(i = 1, 2)$ gilt. Ein dynamisches System D_0 wird *minimale obere Schranke* von D_1 und D_2 genannt, wenn gilt:

1. D_0 ist obere Schranke von D_1 und D_2.
2. Für jedes dynamische System D mit der Eigenschaft $D_i \leqq D \leqq D_0$ $(i = 1, 2)$ ist $D_0 \simeq D$ richtig.

Bezeichnung. Die Menge der oberen Schranken zweier Systeme D_1 und D_2 wird durch $\mathcal{O}(D_1, D_2)$ bezeichnet, die Menge der minimalen oberen Schranken durch $\mathcal{O}^*(D_1, D_2)$.

Es ist offensichtlich, daß für beliebige Systeme $D_1, D_2 \in \mathscr{K}^*$ stets $\mathcal{O}(D_1, D_2) \neq \emptyset$ gilt, denn es ist z. B. immer $D_1 \times D_2 \in \mathcal{O}(D_1, D_2)$ richtig. Ebenso leicht überzeugt man sich, daß $\mathcal{O}(D_1, D_2)$ nicht in $\mathscr{K}^*$ enthalten ist: Bestehen die Mengen X_i beide mod. Isomorphie aus genau einem Element, so ist jedes andere dynamische System, speziell also auch jedes nichtergodische System, obere Schranke von D_1 und D_2. Besitzt wenigstens eines der beiden Systeme D_i eine nichttriviale Grundmenge X_i, o. B. d. A. sei es D_1, dann ist das System $D_1 \times D_1 \times D_2$ nichtergodische obere Schranke von D_1 und D_2.

Der nachfolgende Satz liefert ein Hilfsmittel zur Beschreibung der Menge $\mathcal{O}(D_1, D_2) \cap \mathscr{K}^*$.

Satz. *Sind D_1, D_2 Elemente aus $\mathscr{K}^*$, so gilt $\mathcal{O}(D_1, D_2) \cap \mathscr{K}^* \neq \emptyset$ genau dann, wenn die erzeugte Gruppe $\{H_1(D_1), H_1(D_2)\}$ torsionsfrei ist.*

Beweis.

1. Es wird vorausgesetzt, daß die Gruppe $\{H_1(D_1), H_1(D_2)\}$ torsionsfrei ist. Man betrachtet das Produktsystem $D_1 \times D_2$. Im Hilbertraum $L^2(X_1 \times X_2)$ bilden dann die Funktionen $g_1 \cdot g_2$, $g_i \in G(D_i)/_K$ $(i = 1, 2)$ eine Orthonormalbasis. Die Elemente dieser Orthonormalbasis sind Quasieigenfunktionen in $L^2(X_1 \times X_2)$ bezüglich des durch die Formel $U(g_1 \cdot g_2) = U_{D_1}(g_1) \cdot U_{D_2}(g_2)$, $g_i \in G(D_i)$ $(i = 1, 2)$

definierten Automorphismus U. Die Abbildung $R_{1\times 2}$, die durch die Beziehung

$$R_{1\times 2}(g_1 \cdot g_2) = R_{D_1}(g_1) \cdot R_{D_2}(g_2), \quad g_i \in G(D_i) \qquad (i = 1, 2)$$

festgelegt ist, ist ein lokal-nilpotenter Endomorphismus auf der Gruppe $\{G(D_1), G(D_2)\} \subseteqq L^2(X_1 \times X_2)$. Alle Elemente der erzeugten Gruppe

$$\{H(D_1), H(D_2)\} = \{R_{D_1}G(D_1), R_{D_2}G(D_2)\}$$

sind daher Quasieigenwerte in $L^2(X_1 \times X_2)$ bezüglich U.

Offensichtlich ist $\{H(D_1), H(D_2)\}$ kommutativ und abzählbar. Bezüglich des Endomorphismus $R_{1\times 2}$ ist diese Gruppe torsionsfrei:

Zunächst zeigt sich, daß der Kern von $R_{1\times 2}$ bezüglich $\{H(D_1), H(D_2)\}$ enthalten ist in der erzeugten Gruppe $\{H_2(D_1), H_2(D_2)\}$. Gilt nämlich

$$R_{1\times 2}(h_1 \cdot h_2) = 1,$$

d. h.

$$R_{1\times 2}(h_1) = R_{D_1}(h_1) = R_{D_2}(h_2^{-1}) = R_{1\times 2}(h_2^{-1}),$$

$h_i \in H(D_i)$ $(i = 1, 2)$, so ist für die eindeutigen Darstellungen

$$R_{1\times 2}(h_1) = c_1 \cdot f_1 \cdot 1$$

und

$$R_{1\times 2}(h_2^{-1}) = c_2 \cdot 1 \cdot f_2, \quad c_i \in K, \quad f_i \in G(D_i)/_K \qquad (i = 1, 2),$$

$c_1 \cdot f_1 \cdot 1 = c_2 \cdot 1 \cdot f_2$ richtig. Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung durch Elemente der Orthonormalbasis für jede Funktion aus $L^2(X_1 \times X_2)$ ergibt sich $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$. Es gilt daher $R_{D_1}(h_1) = c_1$, d. h. $h_1 \in H_2(D_1)$, und $R_{D_2}(h_2) = c_2^{-1}$, d. h. $h_2 \in H_2(D_2)$.

Die erzeugte Gruppe $\{H_2(D_1), H_2(D_2)\}$ ist torsionsfrei. Ist nämlich $h_1 \cdot h_2 \in \{H_2(D_1), H_2(D_2)\}$ ein Gruppenelement mit der Eigenschaft

$$(h_1 \cdot h_2)^n = 1 \quad \text{für gewisses } n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\},$$

so zeigt man unter Benutzung der angegebenen Orthonormalbasis $h_1^n = h_2^{-n} = c \in K$. Wegen der Torsionsfreiheit der Gruppen $H(D_i)$ $(i = 1, 2)$ gilt dann $R_{D_1}(h_1) = 1$ und $R_{D_2}(h_2^{-1}) = 1$, d. h. $h_1 \in H_1(D_1)$ und $h_2^{-1} \in H_1(D_2)$. Die vorausgesetzte Torsionsfreiheit der Gruppe $\{H_1(D_1), H_1(D_2)\}$ liefert daher für alle Funktionen $h_1 \cdot h_2$, $h_i \in H_2(D_i)$ $(i = 1, 2)$, für die ein $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ mit $(h_1 \cdot h_2)^n = 1$ existiert, folgende notwendige Beziehung: $h_1 \cdot h_2 = 1$. Mithin ist $\{H_2(D_1), H_2(D_2)\}$ torsionsfrei.

Die Torsionsfreiheit der Gruppe $\{H(D_1), H(D_2)\}$ folgt aus der Torsionsfreiheit der Gruppe $\{H_2(D_1), H_2(D_2)\}$: Ist $h \in \{H(D_1), H(D_2)\}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $h^n = 1$ für gewisses $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, so läßt sich, falls $R_{1\times 2}(h) \neq 1$ gilt, wegen der lokalen Nilpotenz von $R_{1\times 2}$ eine natürliche Zahl m so bestimmen, daß

$$R_{1\times 2}^{m+1}(h) = 1 \quad \text{und} \quad R_{1\times 2}^{m}(h) = f \neq 1, \qquad f \in \{H_2(D_1), H_2(D_2)\},$$

richtig ist. Die Voraussetzung über h führt zu dem Widerspruch

$$1 = R_{1\times 2}^{m}(1) = R_{1\times 2}^{m}(h^n) = \left(R_{1\times 2}^{m}(h)\right)^n = f^n \neq 1.$$

Gilt andernfalls unter der Voraussetzung $h^n = 1$, $n \neq 0$, die Beziehung $R_{1\times 2}(h) = 1$, so folgt $h = 1$, wie bereits oben gezeigt wurde.

Man betrachtet nun das Paar $\langle\{H(D_1), H(D_2)\}, R_{1\times 2}\rangle$. Falls der Kern von $R_{1\times 2}$ in $\{H(D_1), H(D_2)\}$ keine Untergruppe der Gruppe K ist, so bildet man $\{H(D_1), H(D_2)\}$ vermittels eines Isomorphismus φ, der der Beziehung $\varphi(c) = c$ für alle Elemente c

aus $\{H_1(D_1), H_1(D_2)\}$ genügt, in K ab. Die Existenz eines solchen Isomorphismus φ ist wegen der Eigenschaften der Gruppe $\{H(D_1), H(D_2)\}$ gesichert. (Vgl. [1], S. 519, Lemma 3.)

Durch die Bedingung

$$R(f) = R(\varphi(h)) = \varphi(R_{1\times 2}(h)), \quad h \in \{H(D_1), H(D_2)\}, \quad f = \varphi(h),$$

wird ein lokal-nilpotenter Endomorphismus R auf $\varphi(\{H(D_1), H(D_2)\})$ definiert. Aus den oben bewiesenen Eigenschaften folgt, daß $\langle\{H(D_1), H(D_2)\}, R_{1\times 2}\rangle$ (bzw. $\langle\varphi(\{H(D_1), H(D_2)\}), R\rangle$, falls eine Transformation erforderlich sein sollte) eine Endomorphismus-Gruppe bildet. Jedes dynamische System $D \in \mathscr{K}^*$, für das die Beziehung

$$\langle H(D), R_D\rangle \simeq \langle\{H(D_1), H(D_2)\}, R_{1\times 2}\rangle$$

(bzw. $\langle H(D), R_D\rangle \simeq \langle\varphi(\{H(D_1), H(D_2)\}), R\rangle$) richtig ist, ist obere Schranke von D_1 und D_2.

2. Es wird vorausgesetzt, daß die Gruppe $\{H_1(D_1), H_1(D_2)\}$ nicht torsionsfrei ist. Existierte ein System $D \in \mathscr{K}^*$ mit der Eigenschaft $D_i \leqq D$ $(i = 1, 2)$, so müßten die Beziehungen $\langle H(D_i), R_{D_i}\rangle \leqq \langle H(D), R_D\rangle$, mit den vermittelnden Abbildungen $V_i\colon H(D_i) \to H(D)$ $(i = 1, 2)$ richtig sein. Es müßte also insbesondere $H_1(D_i) = V_i H_1(D_i) \subseteqq H_1(D)$ $(i = 1, 2)$, d. h. $\{H_1(D_1), H_1(D_2)\} \subseteqq H_1(D)$, gelten. Die Voraussetzung steht dann aber im Widerspruch zur Torsionsfreiheit der Gruppe $H_1(D)$. ∎

Bemerkung. Man überzeugt sich leicht, daß es dynamische Systeme $D_1, D_2 \in \mathscr{K}^*$ mit der Eigenschaft $\mathscr{O}(D_1, D_2) \cap \mathscr{K}^* = \emptyset$ gibt. Man betrachte z. B. zu beliebigem System $D_1 \in \mathscr{K}^*$ ein $D_2 \in \mathscr{K}^*$, das die folgende Eigenschaft besitzt: Es gibt eine Konstante $c_1 \in H_1(D_1)$ so, daß $c_2 = c \cdot c_1$ für ein Element $c_2 \in H_1(D_2)$ gilt, wobei c eine n-te Einheitswurzel aus K ist $(c \neq 1, n \neq 0)$. Die Gruppe $\{H_1(D_1), H_1(D_2)\}$ enthält dann mit c ein Element endlicher Ordnung, ist also nicht torsionsfrei.

Für die Menge der oberen Schranken zweier Systeme $D_1, D_2 \in \mathscr{K}^*$ war die Eigenschaft $\mathscr{O}(D_1, D_2) \neq \emptyset$ offensichtlich. Der Nachweis der Richtigkeit der Bedingung $\mathscr{O}^*(D_1, D_2) \neq \emptyset$ soll konstruktiv erfolgen. In den Beweis wird ein Element D_0 der Menge $\mathscr{U}_*(D_1, D_2)$ einbezogen. Nach einem Satz von H. Furstenberg ([4], S. 5) existiert eine obere Schranke D von D_1 und D_2 derart, daß $(L^2(X_0), U_{D_0}) \leqq (L^2(X_i), U_{D_i})$ mit der vermittelnden Abbildung $V_i\colon L^2(X_0) \to L^2(X_i)$ und $(L^2(X_i), U_{D_i}) \leqq (L^2(X), U_D)$ mit der vermittelnden Abbildung $W_i\colon L^2(X_i) \to L^2(X)$ $(i = 1, 2)$, mit der Bedingung $W_1V_1(f_0) = W_2V_2(f_0)$ für alle Funktionen $f_0 \in L^2(X_0)$ richtig ist. Man betrachtet den unitären Unterring $\mathscr{H}$ von $L^2(X)$, der durch die erzeugte Gruppe $\{W_1G(D_1), W_2G(D_2)\}$ aufgespannt wird. Das mod. Isomorphie eindeutig bestimmte dynamische System, dessen Spektraltyp zu $(\mathscr{H}, U_D)$ äquivalent ist, soll durch das Symbol D' bezeichnet werden. Die folgenden Hilfssätze zeigen einige Eigenschaften von $(\mathscr{H}, U_D)$. (Es werden dabei die angegebenen Bezeichnungen und Zusammenhänge benutzt.)

Hilfssatz 1. *Es gilt* $W_1H(D_1) \cap W_2H(D_2) = W_1V_1H(D_0) = W_2V_2H(D_0)$.

Hilfssatz 2. *Gilt für zwei Funktionen* $g_1 \in G(D_1)$, $g_2 \in G(D_2)$ *die Beziehung* $R_D(W_1g_1) = R_D(W_2g_2)$, *so existiert ein Element* $g_0 \in G(D_0)$ *derart, daß* $g_1 = V_1(g_0)$ *und* $g_2 = c \cdot V_2(g_0)$, $c \in K$, *richtig ist.*

Hilfssatz 3. *Die Funktionen* $f_1 \cdot f_2 \in \{W_1G(D_1), W_2G(D_2)\}/_K$, $f_i \in W_iG(D_i)$ $(i = 1, 2)$ *bilden in* $\mathscr{H}$ *ein Orthonormalsystem.*

Durch $R_D(f_1 \cdot f_2) = W_1R_{D_1}(g_1) \cdot W_2R_{D_2}(g_2)$, $f_i = W_i(g_i)$, $g_i \in G(D_i)$ $(i = 1, 2)$ wird auf der Gruppe $\{W_1G(D_1), W_2G(D_2)\}$ ein Endomorphismus bestimmt, der jeder Funktion dieser Gruppe ihren Quasieigenwert bezüglich U_D zuordnet.

Hilfssatz 4. *Für jeden Quasieigenwert* $h \in \{W_1G(D_1), W_2G(D_2)\}$ *in* $\mathscr{H}$ *existiert eine Funktion* $g \in \{W_1G(D_1), W_2G(D_2)\}/_K$ *mit der Eigenschaft* $R_D(g) = h$.

Hilfssatz 5. *Der unitäre Ring* $\mathscr{H}$ *mit dem aufgeprägten Automorphismus* U_D *ist ergodisch.*

Für beliebige zwei Systeme $D_1, D_2 \in \mathscr{K}^*$ existiert also stets eine ergodische obere Schranke mit quasidiskretem Spektrum. Der folgende Satz benutzt das System D', um die Beziehung $\mathcal{O}^*(D_1, D_2) \neq \emptyset$ nachzuweisen.

Satz. *Für beliebige zwei Systeme* $D_1, D_2 \in \mathscr{K}^*$ *gilt* $\mathcal{O}^*(D_1, D_2) \neq \emptyset$.

Beweis. Man konstruiert, wie oben angegeben, zu D_1 und D_2 das System D'. Dann gilt $D' \in \mathcal{O}^*(D_1, D_2)$: $D' \in \mathcal{O}(D_1, D_2)$ ist aus der Konstruktion offensichtlich. Ist $D'' \in \mathcal{O}(D_1, D_2)$ ein dynamisches System mit der Eigenschaft $D'' \leqq D'$, so folgt $D'' \simeq D'$, wie man auf nachfolgende Weise einsieht.

Es gelte

$\left(L_2(X_i), U_{D_i}\right) \leqq \left(L^2(X''), U_{D''}\right)$ mit der vermittelnden Abbildung $Z_i\colon L^2(X_i) \to L^2(X'')$,
$\left(L^2(X''), U_{D''}\right) \leqq (\mathscr{H}, U_D) \simeq \left(L^2(X'), U_{D'}\right)$ mit der vermittelnden Abbildung $Z\colon L^2(X'') \to \mathscr{H}$,
$\left(L^2(X_0), U_{D_0}\right) \leqq \left(L^2(X_i), U_{D_i}\right)$ mit der vermittelnden Abbildung $V_i\colon L^2(X_0) \to L^2(X_i)$ und
$\left(L^2(X_i), U_{D_i}\right) \leqq (\mathscr{H}, U_D)$ mit der vermittelnden Abbildung $W_i\colon L^2(X_i) \to \mathscr{H}$ $\quad (i = 1, 2)$.

1. Sind $g_i \in G(D_i)/_K$ $(i = 1, 2)$ zwei Funktionen mit der Eigenschaft $W_1(g_1) = W_2(g_2)$, so gilt auch $ZZ_1(g_1) = ZZ_2(g_2)$. Sind nämlich die Funktionen g_i Elemente von $G_1(D_i)/_K$ $(i = 1, 2)$, so folgt aus der Ergodizität von U_D, und den Hilfssätzen 1—3 leicht die Behauptung. Durch Induktion nach der Ordnung der Quasieigenfunktionen zeigt man, ebenfalls unter Heranziehung der Ergodizität von U_D, und der Hilfssätze 1—3, die Richtigkeit der Aussage für beliebige Quasieigenfunktionen $g_i \in G(D_i)/_K$ mit der Eigenschaft $W_1(g_1) = W_2(g_2)$.

2. Die Gruppe $G(D_0)/_K$ kann vermittels der multiplikativen, isometrischen Operatoren ZZ_1V_1 und ZZ_2V_2 in die Gruppe $\{ZZ_1G(D_1)/_K, ZZ_2G(D_2)/_K\}$ isomorph eingebettet werden. Beweisteil 1 zeigt, daß $ZZ_1V_1(g_0) = ZZ_2V_2(g_0)$ für alle Funktionen $g_0 \in G(D_0)/_K$ richtig ist.

3. Nimmt man an, daß $D'' < D'$ gilt, so ergeben sich folgende Zusammenhänge: Aus Hilfssatz 4 und 5 folgt, daß die Gruppe $\{W_1G(D_1), W_2G(D_2)\}$ alle Quasieigenfunktionen aus $\mathscr{H}$ enthält. Da die Abbildung Z die Faktorbeziehung zwischen $\left(L^2(X''), U_{D''}\right)$ und $(\mathscr{H}, U_D)$ vermittelt, besitzt sie speziell auch die Eigenschaft, die Gruppe der Quasieigenfunktionen $\{Z_1G(D_1), Z_2G(D_2)\}$ in die Gruppe $\{W_1G(D_1), W_2G(D_2)\}$ abzubilden. Wegen der Annahme muß dann

$$\{ZZ_1G(D_1), ZZ_2G(D_2)\} \subset \{W_1G(D_1), W_2G(D_2)\}$$

richtig sein. Daher läßt sich die Gruppe $\{ZZ_1G(D_1)/_K, ZZ_2G(D_2)/_K\}$ durch einen injektiven Homomorphismus stets nur *in* die Gruppe $\{W_1G(D_1)/_K, W_2G(D_2)/_K\}$ abbilden. Es existieren daher Funktionen $g_i \in G(D_i)/_K$ $(i = 1, 2)$ mit den Eigenschaften

$$W_1(g_1) \neq W_2(g_2), \tag{1}$$

$$ZZ_1(g_1) = ZZ_2(g_2). \tag{2}$$

Es seien g_1, g_2 so ausgewählt, daß sie den Beziehungen (1) und (2) genügen. Für die erzeugte Gruppe $\{ZZ_1V_1G(D_0)/_K, ZZ_1(g_1)\}$ gilt dann:

$$H(D_0) \simeq ZZ_1V_1G(D_0)/_K \subset \{ZZ_1V_1G(D_0)/_K, ZZ_1(g_1)\},$$

$$\{ZZ_1V_1G(D_0), ZZ_1(g_1)\}/_K \simeq \{ZZ_1V_1H(D_0), ZZ_1R_{D_1}(g_1)\},$$

(vgl. [1], S. 516), und

$$\{ZZ_1V_1H(D_0), ZZ_1R_{D_1}(g_1)\} = \{ZZ_2V_2H(D_0), ZZ_2R_{D_2}(g_2)\}.$$

Daher sind die folgenden Beziehungen richtig:

$$\langle ZZ_1V_1H(D_0), R_{D'}\rangle < \langle\{ZZ_1V_1H(D_0), ZZ_1R_{D_1}(g_1)\}, R_{D'}\rangle \leqq \langle ZZ_1H(D_1), R_{D'}\rangle$$

und

$$\langle\{ZZ_1V_1H(D_0), ZZ_1R_{D_1}(g_1)\}, R_{D'}\rangle \simeq \langle\{ZZ_2V_2H(D_0), ZZ_2R_{D'}(g_2)\}, R_{D'}\rangle \leqq \langle ZZ_2H(D_2), R_D\rangle.$$

Es existiert also ein System $D_0' \in \mathscr{K}^*$, das folgende Eigenschaften hat:

$$\langle H(D_0), R_{D_0}\rangle < \langle H(D_0'), R_{D_0'}\rangle \simeq \langle\{ZZ_1V_1H(D_0), ZZ_1R_{D_1}(g_1)\}, R_{D'}\rangle \leqq \langle H(D_i), R_{D_i}\rangle \qquad (i = 1, 2).$$

Das widerspricht aber der Voraussetzung $D_0 \in \mathscr{U}_*(D_1, D_2)$. Es gilt folglich

$$\{ZZ_1G(D_1), ZZ_2G(D_2)\} = \{W_1G(D_1), W_2G(D_2)\}.$$

Der von der Gruppe $\{ZZ_1G(D_1), ZZ_2G(D_2)\}$ erzeugte unitäre Ring $\mathscr{H}_1$ stimmt daher mit $\mathscr{H}$ überein. Damit ergibt sich $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 \subseteqq ZL^2(X'') \subseteqq \mathscr{H}$. D'' und D' sind also isomorphe dynamische Systeme. ∎

Satz. *Gilt für zwei Systeme D_1, D_2 aus $\mathscr{K}^*$ die Beziehung $\mathscr{O}(D_1, D_2) \cap \mathscr{K}^* \neq \emptyset$, so ist auch $\mathscr{O}^*(D_1, D_2) \cap \mathscr{K}^* \neq \emptyset$ richtig.*

Beweis. Die Menge $\mathscr{M} = \mathscr{O}(D_1, D_2) \cap \mathscr{K}^*$, ausgestattet mit der Faktorbeziehung als Ordnungsrelation, ist eine induktiv geordnete Menge. Ist nämlich $(D_i')_{i\in I}$ eine beliebige (fallend geordnete) Kette aus $\mathscr{M}$, gilt also

$$\langle H(D'_{i+1}), R_{D'_{i+1}}\rangle \leqq \langle H(D_i'), R_{D_i'}\rangle$$

mit der vermittelnden Abbildung $V_i\colon H(D'_{i+1}) \to H(D_i')$ $(i \in I)$, so ist jedes dynamische System D, dessen Endomorphismus-Gruppe äquivalent ist zu

$$\left\langle \bigcap_{\substack{i\in I\\ i\neq 1}} \left(\prod_{j=1}^{i-1} V_j\right) H(D_i') \cap H(D_1'), R_{D_1'}\right\rangle,$$

untere Grenze der betrachteten Kette in $\mathscr{M}$. (Dabei bezeichne $\prod_{j=1}^{i-1} V_j$ die Hintereinanderausführung der Homomorphismen V_j $(j = 1, \ldots, i-1)$.) Die Anwendung des Zornschen Lemmas ergibt, daß in $\mathscr{M}$ ein bezüglich der betrachteten Ordnungsrelation minimales Element D_0 existiert. Da die Klasse $\mathscr{K}^*$ faktorerblich ist, ist D_0 zugleich auch minimal in $\mathscr{O}(D_1, D_2)$. Es gilt also $D_0 \in \mathscr{O}^*(D_1, D_2) \cap \mathscr{K}^*$. ∎

Satz. *Gilt $D_1, D_2 \in \mathscr{K}^*$, so enthält die Menge $\mathscr{O}^*(D_1, D_2) \cap \mathscr{K}^*$, sofern sie nicht leer ist, mod. Isomorphie genau ein Element.*

Beweis. Es gelte $D, D' \in \mathscr{O}^*(D_1, D_2) \cap \mathscr{K}^*$. Für jedes System $\tilde{D} \in \mathscr{U}_*(D, D')$ trifft dann, da $D_1, D_2 \in \mathscr{U}(D, D')$ richtig ist, $D_i \leqq \tilde{D}$ $(i = 1, 2)$ zu. Wegen $D, D' \in \mathscr{O}^*(D_1, D_2)$ folgt daraus sofort $\tilde{D} \simeq D'$ und $\tilde{D} \simeq D$, d. h. $D \simeq D'$. ∎

Bemerkung. Die von W. Parry in der Arbeit [11] durchgeführten Untersuchungen für spezielle obere Schranken unipotenter affiner Transformationen lassen sich in die vorliegenden Betrachtungen auf folgende Weise einordnen:

Man prüft leicht nach, daß für zwei Systeme $D_1, D_2 \in \mathscr{K}^*$ genau dann eine vollergodische obere Schranke existiert, wenn $\mathcal{O}(D_1, D_2) \cap \mathscr{K}^* \neq \emptyset$ gilt. (Sei nämlich $\mathcal{O}(D_1, D_2) \cap \mathscr{K}^* = \emptyset$, d. h. $\{H_1(D_1), H_1(D_2)\}$ eine nichttorsionsfreie Gruppe, dann enthält der Hilbertraum $L^2(X)$ jeder vollergodischen oberen Schranke D von D_1 und D_2 einen Eigenwert endlicher Ordnung (bezüglich U_D): Ist $c = c_1 \cdot c_2 = R_{D_1}(f_1) R_{D_2}(f_2)$ eine n-te Einheitswurzel, $(n \neq 0)$, dann gilt

$$U_D(S_1 f_1 \cdot S_2 f_2) = c \cdot (S_1 f_1) \cdot (S_2 f_2) \qquad (c_i \in H_1(D_i), f_i \in G(D_i),$$
$$R_{D_i}(f_i) = c_i \qquad (i = 1, 2),$$

wenn S_i die Faktorabbildungen zwischen D_i und D darstellen. Die Existenz eines Eigenwertes endlicher Ordnung widerspricht aber der vorausgesetzten Vollergodizität von D. Die Richtigkeit der umgekehrten Behauptung ist offensichtlich.)

Benutzt man die Bezeichnung

$\mathscr{M}$ = Menge aller dynamischen Systeme, die eine Darstellung durch eine unipotente affine Transformation auf einer Nilmannigfaltigkeit besitzen,

so liefert Theorem 2.2 aus [11] für Elemente aus $\mathscr{K}^*$ folgendes Resultat:

Satz. *Für beliebige zwei Systeme* $D_1, D_2 \in \mathscr{K}^* \cap \mathscr{M}$ *mit* $\mathcal{O}(D_1, D_2) \cap \mathscr{K}^* \neq \emptyset$ *existiert stets ein minimales Element in* $\mathcal{O}(D_1, D_2) \cap \mathscr{M}$.

(Minimalität ist hier bezüglich der Faktorrelation gemeint.)

Unter den im Satz angegebenen Voraussetzungen für $D_1, D_2 \in \mathscr{K}^*$ ergibt sich darüber hinaus mit Hilfe des zitierten Theorems von W. Parry, daß jedes vollergodische System aus $\mathcal{O}^*(D_1, D_2)$ eine Darstellung als unipotente affine Transformation auf einer Nilmannigfaltigkeit besitzt. Das Ergebnis von W. Parry ermöglicht also, für spezielle Systeme aus $\mathscr{K}^*$ Eigenschaften der Menge ihrer minimalen oberen Schranken von einem andersgearteten Aspekt aus, als es in der vorliegenden Arbeit getan wird, zu beschreiben.

LITERATUR

[1] Абрамов, Л. М.: Метрические автоморфизмы с квазидискретным спектром. Изв. АН СССР 26 (1962), 513–530.

[2] Brown, J. R.: Inverse limits, entropy and weak isomorphism for discrete dynamical systems. Transactions Amer. Math. Soc. **164** (1972), 55–66.

[3] Dinculeanu, N., and C. Foias: Algebraic models for measure preserving transformations. Michigan Math. J. **15** (1968), 215–237.

[4] Furstenberg, H.: Disjointness in ergodic theory, minimal sets and a problem in diophantine approximation. Math. Systems Theory **1** (1967), 1–49.

[5] Hahn, F., and W. Parry: Some characteristic properties of dynamical systems with quasidiscrete spectrum. Math. Systems Theory **2** (1968), 179–190.

[6] Хеслер, К.: Дизьюнктные вполне эргодические динамические системы с квазидискретным спектром. Вестник ЛГУ **19** (1980).

[7] Jacobs, K.: Lecture Notes in Ergodic Theory 1962/63, Part II. 1. Aufl., Aarhus 1963.

[8] Jacobs, K.: Recent Developments in Ergodic Theory. In: Transactions of the Seventh Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes 1974, Vol. A. Prague 1977, p. 283–308.

[9] Ornstein, D.: Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic. Adv. in Math. **4** (1970), 337–352.

[10] ORNSTEIN, D.: Ergodic theory, randomness and dynamical systems. New Haven and London 1974.
[11] PARRY, W.: Dynamical representations in nilmanifolds. Comp. mat. **26** (1973), 159–174.
[12] ПИНСКЕР, М. С.: Димамические системы с вполне положительной и нулевой энтропией. Докл. АН СССР **133** (1960), 1025–1026.
[13] СИНАЙ, Я. Г.: Слабый изоморфизм преобразований с инвариантной мерой. Докл. АН СССР **147** (1962), 797–800.

Manuskripteingang: 31. 7. 1980

VERFASSER:

Dr. KARIN HÄSLER
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg
DDR-4010 Halle, Universitätsplatz 6