Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen
1 (1982), S. 75–82

Asymptotische Darstellung verallgemeinerter Fourierintegrale IV

R. RIEDEL

Für verallgemeinerte Fourierintegrale der Form

$$\int_a^b K(t-a)\, e^{iH(t,s)}\, dt$$

wird das asymptotische Verhalten bei Annäherung des Parameters s an eine kritische Stelle s_0 untersucht. Dabei möge $H(t, s)$ bei $t = a$ eine stationäre Stelle β-ter Ordnung ($\beta > 0$) besitzen und die Fouriertransformierte zu $K(\tau)$ sei explizit angebbar. Es wird gezeigt, daß man unter gewissen Bedingungen stets eine asymptotische Darstellung zu diesem Integral mittels der Fouriertransformierten von K erhalten kann.

Для интегралов типа фурье вида

$$\int_a^b K(t-a)\, e^{iH(t,s)}\, dt$$

исследуется асимптотическое поведение при приближении параметра s к критической точке s_0. Пусть при этом $H(t, s)$ имеет в точке $t = a$ стационарную точку (дробного) порядка $\beta > 0$ и пусть задано преобразование фурье функции $K(\tau)$ в законченном виде. Доказывается, что при некоторых требованиях можно всегда найти асимптотическое представление этого интеграла, используя преобразование фурье функции K.

The asymptotic behavior of Fourier integrals of the form

$$\int_a^b K(t-a)\, e^{iH(t,s)}\, dt,$$

where the parameter s tends to a critical point s_0, is considered. It is provided that $H(t, s)$ has at $t = a$ a stationary point of (fractional) order $\beta > 0$, and the Fourier transform of the function $K(\tau)$ is given in closed form. Under certain conditions it is demonstrated that it's possible to obtain an asymptotical expansion of this integral by the Fourier transform of the function K.

Untersucht wird das asymptotische Verhalten von Parameterintegralen der Form

$$
\begin{aligned}
I(s) &= \int_a^b G(t, s)\, e^{iH(t,s)}\, dt, \\
I_c(s) &= \int_a^b G(t, s) \cos H(t, s)\, dt, \qquad (1) \\
I_s(s) &= \int_a^b G(t, s) \sin H(t, s)\, dt
\end{aligned}
$$

für $s \to s_0$ (s_0 kritische Stelle), $s \in S$. Die Integrationsgrenzen a, b können dabei auch vom Parameter s abhängig sein, und es ist auch $b = \infty$ zugelassen. Dabei sei $a = a(s)$ eine hinreichend genaue Näherung einer stationären Stelle β-ter Ordnung der Funktion $H(t, s)$, so daß gilt

$$H(t, s) = h(t, s) + f(t, s)$$

mit

$$h'(t, s) = (t - a)^{\beta-1}\, k(t, s) \qquad (\beta > 0),$$

$k(a, s) \neq 0$ und $k'(t, s)$ bez. der Variablen t stetig. Ferner sei

$$G(t, s) = K(t - a)\, g(t, s).$$

Wie in nachstehenden Voraussetzungen (14), (15), (16) näher ausgeführt, seien $k(t, s)$, $g(t, s)$ Funktionen, die innerhalb des Einflußbereiches der Stelle a annähernd konstante Funktionswerte annehmen, und $f(t, s)$ sei eine solche mit nur hinreichend kleinen Funktionswerten. Für spezielle Funktionen $K(x)$ und spezielle Werte β sind asymptotische Darstellungen für Integrale der Form (1) bereits in der Literatur bekannt. So wird in [1], [2] (Sätze 20.4 und 20.5) der Fall

$$K(x) \equiv 1, \qquad \beta = 2 \tag{2}$$

behandelt, in [3]

$$K(x) = x^{\alpha-1} \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha < \beta \tag{3}$$

und in [4]

$$K(x) \doteq x^{\alpha-1} \ln x \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha < \beta. \tag{4}$$

Gemeinsames Grundprinzip der hierbei vorgenommenen Herleitungen ist die Zurückführung der Funktion $H(t, s)$ auf eine solche der Form $\mu(s)\, t^\beta$ und damit der Integrale (1) auf geschlossen auswertbare Grundintegrale der Form

$$F_c(p) = \int_0^\infty K(x) \cos px^\beta\, dx, \qquad F_s(p) = \int_0^\infty K(x) \sin px^\beta\, dx. \tag{5}$$

Außer bei den (2)—(4) verwendeten Grundintegralen sind weitere bekannt, die zur Herleitung asymptotischer Darstellungen Verwendung finden könnten. So bieten sich folgende Beziehungen an:

Für $K(x) = e^{-bx^2}$ ($b > 0$), $\beta = 1$ (vgl. [6], 3.896):

$$\begin{aligned} F_c(p) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left\{-\frac{p^2}{4b}\right\}, \\ F_s(p) &= \frac{p}{2b} \exp\left\{-\frac{p}{4b}\right\} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; p^2/4b\right); \end{aligned} \tag{6}$$

für $K(x) = e^{-bx} \ln x$ ($b > 0$), $\beta = 1$ (vgl. [6], 4.441):

$$\begin{aligned} F_c(p) &= -\frac{1}{p^2 + b^2}\left[\frac{b}{2} \ln (p^2 + b^2) + p \arctan \frac{p}{b} + bC\right], \\ F_s(p) &= \frac{1}{p^2 + b^2}\left[b \arctan \frac{p}{b} - pC + \frac{p}{2} \ln (p^2 + b^2)\right]; \end{aligned} \tag{7}$$

für $K(x) = (b^2 + x^4)^{-1/2}$, $\beta = 2$ (vgl. [6], 3.855):

$$F_c(p) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p\pi}{2}}\, I_{1/4}\left(\frac{pb}{2}\right) K_{1/4}\left(\frac{pb}{2}\right), \qquad F_s(p) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p\pi}{2}}\, I_{1/4}\left(\frac{pb}{2}\right) K_{1/4}\left(\frac{pb}{2}\right); \tag{8}$$

für $K(x) = (b + x)^{-1/2}$ $(b > 0)$, $\beta = 1$ (vgl. [6], 3.751):

$$\begin{aligned} F_c(p) &= \sqrt{\frac{\pi}{2p}}\left[\cos(bp) + \sin(bp) - 2C(\sqrt{bp})\cos(bp) - 2S(\sqrt{bp})\sin(bp)\right], \\ F_s(p) &= \sqrt{\frac{\pi}{2p}}\left[\cos(bp) - \sin(bp) + 2C(\sqrt{bp})\sin(bp) - 2S(\sqrt{bp})\cos(bp)\right]; \end{aligned} \tag{9}$$

für $K(x) = \ln x/x$, $\beta = 1$ (vgl. [6], 4.421(1.)):

$$F_s(p) = -\frac{\pi}{2}(C + \ln p); \tag{10}$$

für $K(x) = x^{\alpha-1}(\ln x)^2$ $(0 < \alpha < 1)$, $\beta = 1$ (vgl. [6], 4.424(2.)):

$$\begin{aligned} F_s(p) = \frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha}\sin\frac{\alpha\pi}{2}\Big[&\psi'(\alpha) + \psi^2(\alpha) + \pi\psi(\alpha)\cot\frac{\alpha\pi}{2} - 2\psi(\alpha)\ln p \\ &- \pi\ln p\cot\frac{\alpha\pi}{2} + (\ln p)^2 - \pi^2\Big]. \end{aligned} \tag{11}$$

Es könnten weitere solche Grundintegrale angeführt werden (vgl. in [6] z. B. 3.765, 3.766, 3.771(1.2.), 3.773, 3.774, 3.853, 4.421(2.3.), 4.424(1.)). In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, wie nach dem in [3] und [4] verwendeten Herleitungsprinzip solche Grundintegrale zur Aufstellung asymptotischer Darstellungen von Fourierintegralen der Form (1) genutzt werden können. Wir setzen dabei voraus, daß $K(x)$ eine Funktion mit auswertbaren Fourierintegralen (5) sei, für welche die nachfolgenden Bedingungen (I), (II), (III) erfüllt seien. In ihnen seien λ_c, λ_s, λ_i $(i = 1, 2, 3)$ Hilfsfunktionen einfacher Beschaffenheit, die möglichst scharfe obere asymptotische Schranken zu den angegebenen Funktionen sind:

(I) *Für alle Werte* $p \in P \subseteqq \mathbf{R}_+$ (Menge der positiv-reellen Zahlen) *sei*

$$F_c(p) = \mathcal{O}(\lambda_c(p)), \qquad F_s(p) = \mathcal{O}(\lambda_s(p))$$

und

$$(p) \asymp |\lambda_c(p)| + |\lambda_s(p)|$$

($\asymp$ bedeutet asymptotische Äquivalenz, vgl. [2], Satz 1.3.).

(II) *Gleichmäßig für alle* $p \in \mathbf{R}_+$ *sei*

$$\int_0^p |K(x)|\,dx = \mathcal{O}(\lambda_2(p)), \qquad \int_0^p |K(x)|\,x^\beta\,dx = \mathcal{O}(\lambda_3(p)).$$

(III) *Für* $y \to \infty$, *gleichmäßig für alle* $p \in P$ *sei*

$$\int_y^\infty K\left(\left(\frac{x}{p}\right)^{1/\beta}\right) x^{1/\beta-1}\cos x\,dx = o(p^{1/\beta}\lambda_1(p)),$$

$$\int_y^\infty K\left(\left(\frac{x}{p}\right)^{1/\beta}\right) x^{1/\beta-1}\sin x\,dx = o(p^{1/\beta}\,\lambda_1(p)).$$

Bei vorgegebener Funktion K sind (I) und (III) einschränkende Bedingungen für die Menge P, welche hiernach oft als ein Intervall der Form $(0, \infty)$, $[c, \infty)$, $(0, C]$

oder $[c, C]$ mit $0 < c < C < \infty$ gewählt werden kann. (II) beinhaltet lediglich definierende Eigenschaften zu den Funktionen λ_2, λ_3, die für die Voraussetzungen des nachfolgenden Satzes von Bedeutung sind. In diesem Satz und in seinem Beweis verwenden wir die Abkürzungen

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} k(a, s), \quad k(a, s) = k, \quad g(a, s) = g, \quad h(a, s) = h$$

und bezeichnen mit

$$\omega_g[a, a + \delta], \qquad \omega_k[a, a + \delta]$$

die Schwankung der Funktion $g(t, s)$ bzw. $k(t, s)$ im Intervall $a \leqq t \leqq a + \delta$. Die Intervallänge $\delta(s)$ sei dabei so gewählt, daß der Integralanteil

$$I_\delta(s) = \int_a^{a+\delta} G(t, s)\, e^{iH(t,s)}\, dt$$

von (1) (bzw. entsprechende Integrale mit Kosinus- oder Sinuskern) mit $0 < \delta \leqq b - a$ den für das asymptotische Verhalten bestimmenden Anteil ergibt (vgl. Voraussetzung (17)). Die Wahl dieser Intervallänge wird außerdem durch die Voraussetzungen (13)—(16) eingeschränkt.

Satz. *Ist für alle $s \in S$ stets*

$$|k|/\beta \in P \tag{12}$$

und gilt für $s \to s_0$, $s \in S$

$$\delta\, |k|^{1/\beta} \to \infty, \tag{13}$$

$$\omega_g[a, a + \delta] = o\big(g\lambda_1(|k|/\beta)/\lambda_2(\delta)\big), \tag{14}$$

$$\omega_k[a, a + \delta] = o\big(\lambda_1(|k|/\beta)/\lambda_3(\delta)\big) \tag{15}$$

sowie

$$f(t, s) = o\big(\lambda_1(|k|/\beta)/\lambda_2(\delta)\big) \tag{16}$$

gleichmäßig für $a \leqq t \leqq a + \delta$, gilt ferner für das Restintegral

$$\int_{a+\delta}^{b} G(t, s)\, e^{iH(t,s)}\, dt = o\big(g\lambda_1(|k|/\beta)\big), \tag{17}$$

so ist für $s \to s_0$, $s \in S$

$$I(s) \sim g\, e^{ih}[F_c(|k|/\beta) + i\varepsilon F_s(|k|/\beta)]. \tag{18}$$

Unter denselben Voraussetzungen, lediglich mit der Modifikation von (17) *durch entsprechende Restintegrale mit Kosinus- bzw. Sinuskern, erhält man*

$$\left.\begin{aligned} I_c(s) &\sim g[F_c(|k|/\beta)\cos h - \varepsilon F_s(|k|/\beta)\sin h] \\ I_s(s) &\sim g[F_c(|k|/\beta)\sin h + \varepsilon F_s(|k|/\beta)\cos h]. \end{aligned}\right\} \tag{18'}$$

Die asymptotischen Beziehungen (18), (18′) *sind dabei im Sinne einer verallgemeinerten Definition asymptotischer Gleichheit nach* E. RIEKSTIŅŠ (vgl. [5], (3.3)) *zu verstehen mit einem Restglied der Ordnung $o\big(g\lambda_1(|k|/\beta)\big)$.*

Beim **Beweis** beschränken wir uns auf Integrale (1) mit Kosinuskern, die anderen

Typen lassen sich analog behandeln. Geht man von den Integralen

$$I_1(s) = \int_a^{a+\delta} \frac{g(t, s)}{g} K(t-a) \cos H(t, s)\, dt,$$

$$I_2(s) = \int_a^{a+\delta} K(t-a) \cos H(t, s)\, dt,$$

$$I_3(s) = \int_a^{a+\delta} K(t-a) \cos h(t, s)\, dt,$$

$$I_4(s) = \int_a^{a+\delta} K(t-a) \cos [h + (t-a)^\beta k/\beta]\, dt$$

aus, so ist die asymptotische Beziehung

$$\int_a^{a+\delta} G(t, s) \cos H(t, s)\, dt \sim g I_4(s) \tag{19}$$

im oben erklärten Sinne offenbar erfüllt, wenn

$$I_\nu(s) - I_{\nu+1}(s) = o\big(\lambda_1(|k|/\beta)\big)$$

für $\nu = 1, 2, 3$ gilt. Unter Verwendung von (14) und (II) erhält man nun

$$|I_1 - I_2| \leqq \int_a^{a+\delta} \left| \frac{g(t, s) - g}{g} K(t-a) \right| dt \leqq \frac{\omega_g}{|g|} \int_0^\delta |K(x)|\, dx = o\big(\lambda_1(|k|/\beta)\big);$$

aus (16) und (II) folgt

$$\begin{aligned} |I_2 - I_3| &\leqq \int_a^{a+\delta} |K(t-a) f(t, s)|\, dt \leqq \max_{a \leqq t \leqq a+\delta} |f(t, s)| \int_0^\delta |K(x)|\, dx \\ &= o\big(\lambda_1(|k|/\beta)\big). \end{aligned}$$

Benutzt man die bereits in [3] und [4] hergeleitete Beziehung

$$|\cos h(t, s) - \cos [h + (t-a)^\beta k/\beta]| \leqq (t-a)^\beta \omega_k[a, a+\delta]/\beta,$$

so erhält man mit (15) und (II)

$$|I_3 - I_4| \leqq \frac{\omega_k}{\beta} \int_0^\delta |K(x)|\, x^\beta\, dx = o\big(\lambda_1(|k|/\beta)\big).$$

Damit ist (19) bewiesen. Wir versuchen nun, das Integral auf der rechten Seite durch Grundintegrale der Form (5) zu ersetzen. Mittels Variablensubstitution $|k|\, x^\beta/\beta = u$ erhält man

$$\int_\delta^\infty K(x) \cos (|k|\, x^\beta/\beta)\, dx = \frac{1}{\beta} (\beta/k)^{1/\beta} \int_{\delta^\beta |k|}^\infty K\big((\beta u/|k|)^{1/\beta}\big)\, u^{1/\beta - 1} \cos u\, du,$$

und wegen (12), (13) und (III) ist

$$\int_{\delta}^{\infty} K(x) \cos(|k|\, x^{\beta}/\beta)\, dx = o\big(\lambda_1(|k|/\beta)\big).$$

Eine solche Beziehung gilt auch für das entsprechende Integral mit Sinusfaktor im Integranden. Daraus ersieht man, daß

$$I_4(s) = \int_0^{\infty} K(x) \cos[h + kx^{\beta}/\beta]\, dx + o\big(\lambda_1(|k|/\beta)\big)$$

gilt. Zusammen mit (19) und (17) (in modifizierter Form) erhält man nun nach einigen trigonometrischen Umformungen die gewünschte Beziehung (18') ▮

Die im Satz formulierten asymptotischen Beziehungen bestätigen die eingangs angeführten bekannten asymptotischen Darstellungen für Integrale vom Typ (1). So erhält man im Fall (3) mit der Menge $P = \mathbf{R}_+$ und mit

$$\lambda_c = \lambda_s = \lambda_1 = p^{-\alpha/\beta}, \qquad \lambda_2 = p^{\alpha}, \qquad \lambda_3 = p^{\alpha+\beta}$$

die asymptotischen Beziehungen (9) in [3], die für $\alpha = 1$, $\beta = 2$ die wichtigen Beziehungen (20.20) und (20.27) in [2] als Spezialfälle enthalten. Im Fall (4) ergeben sich die Beziehungen (7) und (19a) in der Arbeit [4]. Dabei ist die Menge $P = \mathbf{R}_+$ und sind die Funktionen

$$\lambda_c = \lambda_s = \lambda_1 = \frac{1 + |\ln p|}{p^{\alpha/\beta}},$$

$$\lambda_2 = p^{\alpha}(1 + |\ln p|), \qquad \lambda_3 = p^{\alpha+\beta}(1 + |\ln p|)$$

zu benutzen. Der Sachverhalt (II) ist dabei im dort bewiesenen Lemma 2 enthalten, und (III) ist mit der Aussage von diesem Lemma 2 ebenfalls leicht nachweisbar.

Unschwer lassen sich jetzt weitere asymptotische Aussagen für Integrale vom Typ (1) formulieren, beispielsweise bei Zugrundelegung der Integralbeziehungen (6) bis (9). Dabei braucht man sich nur noch mit den Bedingungen (I)—(III) auseinanderzusetzen, denn die Formulierung des Satzes in der entsprechenden speziellen Form kann hiernach formal vorgenommen werden.

Beginnend mit dem Grundintegral (6) stellt man fest, daß die erwähnten Bedingungen auf jedem endlichen Intervall $P = (0, C]$ mit Funktionen

$$\lambda_c = 1, \qquad \lambda_s = p, \qquad \lambda_1 = 1,$$

$$\lambda_2 = \frac{p}{p+1}, \qquad \lambda_3 = \frac{p^2}{p^2+1}$$

erfüllbar sind. Für $p \to \infty$ sind die Bedingungen (I) und (III) nicht vereinbar, so daß die Formeln (18) und (18') im Fall $|k| \to \infty$ nicht allgemeingültig sind. Das bestätigt beispielsweise die mit der Methode der stationären Phase ermittelbare Beziehung

$$\int_0^1 e^{-t^2} \cos st\, dt = \frac{\sin s}{s} + o\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (s \to \infty),$$

während (18') für das linksstehende Integral eine asymptotische Darstellung von der Größenordnung $o(1/s)$ ergäbe. Ein ähnlicher Sachverhalt liegt bei (7) vor, wo man sich ebenfalls auf endliche Intervalle $P = [0, C]$ beschränken muß und die Funktionen

$$\lambda_c = 1, \qquad \lambda_s = p, \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

verwendet werden können.

Bei den Integraldarstellungen (8) sind die Bedingungen (I)—(III) jedoch für $P = \mathbf{R}_+$ erfüllbar, wobei die Funktionen

$$\lambda_c = 1/(\sqrt{p} + 1), \qquad \lambda_s = \sqrt{p}/(p + 1), \qquad \lambda_1 = 1/(\sqrt{p} + 1),$$
$$\lambda_2 = p/(p + 1), \qquad \lambda_3 = p^3/(1 + p^2)$$

herangezogen werden können. Zum Nachweis von (III) ist

$$\int\limits_y^\infty \left[t\left(b^2 + (t/p)^2\right)\right]^{-1/2} \cos t \, dt = o\left(\sqrt{p}/(\sqrt{p} + 1)\right)$$

für $y \to \infty$ gleichmäßig für alle $p \in \mathbf{R}_+$ (und entsprechendes für ein Integral mit Sinusfaktor) zu bestätigen. Das entspricht der Beziehung

$$\int\limits_{\sqrt{y/p}}^\infty [b^2 + x^4]^{-1/2} \cos (px^2) \, dx = o\left((\sqrt{p} + 1)^{-1}\right). \tag{20}$$

Diese Bedingung ist für alle p jedes endlichen Intervalles wegen

$$\left|\int\limits_{\sqrt{y/p}}^\infty [b^2 + x^4]^{-1/2} \cos (px^2) \, dx\right| \leq \int\limits_{\sqrt{y/p}}^\infty [b^2 + x^4]^{-1/2} \, dx$$

und $\sqrt{y/p} \to \infty$ gleichmäßig in p erfüllt. Im Fall $p \to \infty$ formen wir das in (20) linksstehende Integral durch partielle Integration um und erhalten

$$\left.\frac{\sin (px^2)}{2px\sqrt{b^2 + x^4}}\right|_{\sqrt{y/p}}^\infty - \frac{1}{p} \int\limits_{\sqrt{y/p}}^\infty \left(\frac{1}{x\sqrt{b^2 + x^4}}\right)' \sin (px^2) \, dx = \frac{1}{\sqrt{yp}} \mathcal{O}(1) + o\left(\frac{1}{p}\right).$$

Ähnliches gilt im Fall (9), wo die Bedingungen (I), (II), (III) für die Menge $P = \mathbf{R}_+$ mit den Funktionen

$$\lambda_s = \lambda_1 = 1/\sqrt{p}, \left(\sqrt{p} + 1\right), \qquad \lambda_c = 1/\sqrt{p}\,(p + 1), \quad \lambda_2 = \frac{p}{\sqrt{p} + 1}, \qquad \lambda_3 = \frac{p^2}{\sqrt{p} + 1}$$

erfüllbar sind. Zum Nachweis von (III) ist für $y \to \infty$

$$\int\limits_y^\infty \left[\frac{x}{p} + b\right]^{-1/2} \cos x \, dx = o\left(\sqrt{p}/(\sqrt{p} + 1)\right)$$

gleichmäßig für $p \in \mathbf{R}_+$ zu bestätigen. Durch partielle Integration des linksstehenden Integrals erhält man

$$\left.-\frac{\sin x}{\sqrt{\dfrac{x}{p} + b}}\right|_y^\infty - \frac{1}{2p} \int\limits_y^\infty \frac{\sin x}{\left(\dfrac{x}{p} + b\right)^{3/2}} \, dx = \sqrt{p} \left[\frac{\sin y}{\sqrt{y + bp}} - \frac{1}{2} \int\limits_y^\infty \frac{\sin x}{(x + bp)^{3/2}} \, dx\right],$$

woraus die gewünschte Relation hervorgeht.

Zusatz: Wenn $h(a, s) = 0$ für alle $s \in S$ und nur eines der Integrale $I_c(s)$ oder $I_s(s)$ asymptotisch untersucht werden soll, so ist dies unter Abschwächung einer Voraussetzung möglich. In der Bedingung (I) kann man nämlich dann

$$\lambda_1 = \lambda_c \quad \text{bzw.} \quad \lambda_1 = \lambda_s$$

setzen. Das Ergebnis (18) nimmt jetzt die Form

$$I_c(s) \sim gF_c(|k|/\beta)$$

bzw.

$$I_s(s) \sim \varepsilon g F_s(|k|/\beta)$$

an. So kann beispielsweise das Grundintegral (11) im Fall $h(a, s) = 0$ zur Aufstellung einer asymptotischen Beziehung nach dem obigen Satz verwendet werden. Hierbei ist $P = \mathbf{R}_+$ und sind die Funktionen

$$\lambda_s = \lambda_1 = p^{-a}(\ln^2 p + 1),$$

$$\lambda_2 = p^a(\ln^2 p + 1), \qquad \lambda_3 = p^{a+1}(\ln^2 p + 1)$$

zu verwenden. Die Gültigkeit von (II) ist ähnlich wie beim Lemma 2 in [4] nachweisbar. Dagegen kann mit dem Grundintegral (10) nach dem hier dargelegten Verfahren keine asymptotische Darstellung gefunden werden, weil $K(x) = \ln x/x$ an der Stelle $x = 0$ nicht lokal integrierbar ist. Solchen Fällen soll eine spätere Untersuchung gewidmet sein.

LITERATUR

[1] BERG, L.: Asymptotische Darstellungen für verallgemeinerte Fourierintegrale. Math. Nachr. 20 (1959), 166–170.
[2] BERG, L.: Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen. Berlin 1968.
[3] RIEDEL, R.: Zur Methode der stationären Phase. Wiss. Z. Univ. Halle. 25 M (1976), 17–23.
[4] RIEDEL, R.: Asymptotische Darstellung verallgemeinerter Fourierintegrale III. Beiträge zur Analysis 17 (1981), 123–133.
[5] РИЕКСТЫНЬШ, Э. Я.: Асимптотические разложения интегралов. Том 1. Рига 1974.
[6] ГРАДШТЕЙН, И. С., и И. М. РЫЖИК: Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е. Москва 1963.

Manuskripteingang: 8. 10. 1980

VERFASSER:

Dr. ROLAND RIEDEL
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle—Wittenberg
DDR-4010 Halle, Universitätsplatz 6