Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
2 (1982), S. 1–5

Über das Reduktionsverfahren für diskrete Wiener-Hopf-Gleichungen mit unstetigem Symbol

A. Böttcher und B. Silbermann

Die in der Arbeit gebrachten Resultate ergänzen und vervollständigen einerseits einige bisher bekannte Ergebnisse über das Reduktionsverfahren für diskrete Wiener-Hopf-Gleichungen mit unstetigem Symbol und beleuchten andererseits neue Aspekte dieser Problematik. So wird u. a. gezeigt, daß aus der Anwendbarkeit des Reduktionsverfahrens in $l^p (1 \leqq p < \infty)$ für die Toeplitzoperatoren $T(a_r)$, $a_r \in L^\infty$ $(r = 1, \ldots, R)$ die Anwendbarkeit für $T(a_1 \ldots a_R)$ folgt, falls nur die Singularitätenträger von $a_1, \ldots, a_R$ paarweise disjunkt sind. Ferner wird gezeigt, daß für eine genügend große Klasse stückweise stetiger Symbole für die Anwendbarkeit des Reduktionsverfahrens auf $T(a)$ in l^p die Invertierbarkeit von $T(a)$ und $T(\bar{a})$ notwendig und hinreichend ist.

Приведенные в работе результаты с одной стороны дополняют и усовершенствуют некоторые до сих пор известные результаты о методе редукции для дискретных уравнений Винера-Хопфа с разрывным символом и с другой стороны освещают новые аспекты этой проблемы. Показано, что если к теплицевым операторам $T(a_r)$, $a_r \in L^\infty$ $(r = 1, \ldots, R)$ применим метод редукции в $l^p (1 \leqq p < \infty)$, то он применим и к $T(a_1 \ldots a_R)$, если только носители сингулярностей от $a_1, \ldots, a_R$ попарно не пересекаются. Далее показано, что для широкого класса кусочно-непрерывных символов для применимости метода редукции к $T(a)$ в l^p необходимо и достаточно, чтобы $T(a)$ и $T(\bar{a})$ были обратимы.

The results of the paper complete and improve some hitherto existing results about the reduction method for discrete Wiener-Hopf equations with discontinuous symbol and, on the other hand, illustrate some new aspects of this set of problems. Thus, it is proved that if the reduction method in $l^p (1 \leqq p < \infty)$ is applicable to the Toeplitz operators $T(a_r)$, $a_r \in L^\infty$ $(r = 1, \ldots, R)$ and if $a_1, \ldots, a_R$ have no common singularities (discontinuities), then it is applicable to $T(a_1 \ldots a_R)$. Furthermore, there is proved that for a large class of piecewise continuous symbols the reduction method in l^p is applicable to $T(a)$ if and only if both $T(a)$ and $T(\bar{a})$ are invertible.

Sei $\tilde{l}_p$ $(1 < p < \infty)$ der Banachraum aller Zahlenfolgen $\xi = \{\xi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ mit der Norm $\|\xi\| = \left\{ \sum_{-\infty}^{\infty} |\xi_k|^p \right\}^{1/p}$ und $l_p \subset \tilde{l}_p$ der abgeschlossene Teilraum aller Folgen ξ mit $\xi_k = 0$ für $k < 0$. Es sei weiter $\Gamma = \{t \in \mathbf{C}: |t| = 1\}$ und $a \in L^\infty(\Gamma)$ eine gegebene Funktion. Mit a_k $(k = 0, \pm 1, \pm \cdots)$ bezeichnen wir ihre Fourierkoeffizienten:

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{i\varphi})\, e^{-ik\varphi} d\varphi.$$

Ferner bedeutet M_p die Menge aller derjenigen $a \in L^\infty(\Gamma)$, für die die unendliche Matrix $\{a_{j-k}\}_{j,k=-\infty}^{\infty}$ in $\tilde{l}_p$ einen beschränkten Operator induziert. Schließlich sei $M_{\langle p \rangle}$ die Menge aller Funktionen aus $L^\infty(\Gamma)$, die zu $M_{\tilde{p}}$ für alle $\tilde{p}$ aus einer Umgebung von p gehören.

Für $a \in M_p$ ist der durch die unendliche Matrix $\{a_{j-k}\}_{j,k=0}^{\infty}$ in l_p induzierte Operator offenbar beschränkt; dieser Operator heißt *Toeplitzoperator* und die Funktion a heißt *Symbol* dieses Operators. Letzteren bezeichnen wir mit $T(a)$.

In der Banachalgebra $\mathscr{L}(l_p)$ aller beschränkten Operatoren auf l_p sind offenbar die durch

$$P_n\{\xi_0, \xi_1, \ldots\} = \{\xi_0, \ldots, \xi_n, 0, \ldots\}$$

definierten Projektoren P_n enthalten. Man sagt, daß für $T(a) \in \mathscr{L}(l_p)$ das Reduktionsverfahren im Raum l_p *konvergiert*, wenn für hinreichend große n die Operatoren $T_n(a) = P_n T(a) P_n|_{\operatorname{Im} P_n}$ invertierbar sind und für jedes Element $\eta \in l_p$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Es existiert ein Element $\xi \in l_p$ mit $T_n^{-1}(a) P_n \eta \to \xi$.
2. $T(a) \xi = \eta$.

In diesem Fall schreiben wir $T(a) \in \Pi(l_p)$. Wie leicht einzusehen ist, folgt aus $T(a) \in \Pi(l_p)$ die Invertierbarkeit von $T(a)$. Für verschiedene Klassen von Symbolen $a \in L^\infty(\Gamma)$ sind Bedingungen bekannt, unter denen $T(a) \in \Pi(l_p)$ gilt:

Falls $p = 2$ und $T(a)$ invertierbar ist, gilt $T(a) \in \Pi(l_2)$ in folgenden Fällen:

(i) $a \in PC$, wobei PC die Klasse der stückweise stetigen Funktionen auf Γ ist (vgl. [2])
(ii) $a \in C + H^\infty$ (vgl. [5, 6]); $C + H^\infty$ ist hierbei die sogenannte Douglasalgebra (vgl. [4]).
(iii) a reellwertig, ess inf $a > 0$ und $a \in L^\infty(\Gamma)$.

Diese Fakten stützen die Hypothese, daß $T(a) \in \Pi(l_2)$ genau dann gilt, wenn $T(a)$ invertierbar ist.

Für $p \neq 2$ ist die Problematik weitaus komplizierter. In [7] wurde gezeigt, daß aus $T(a) \in \Pi(l_p)$ die Invertierbarkeit von $T(a)$ und $T(\tilde{a})$ folgt, wobei $\tilde{a}(t) = a\left(\frac{1}{t}\right)$ ist. Es sei vermerkt, daß für $p = 2$ $T(a)$ genau dann invertierbar ist, wenn $T(\tilde{a})$ diese Eigenschaft aufweist. Für $p \neq 2$ ist dies im allgemeinen nicht mehr der Fall. In [7] wurde ferner gezeigt, daß, falls für die Unstetigkeitsstellen $t_1, \ldots, t_R$ von $a \in M_{\langle p \rangle} \cap PC$ die Beziehung

$$a(t_r + 0)/a(t_r - 0) = a(t_s + 0)/a(t_s - 0) \qquad (r, s = 1, \ldots, R)$$

gilt (insbesondere ist dies erfüllt, falls a nur eine Unstetigkeitsstelle 1. Art aufweist) und $T^{-1}(a)$, $T^{-1}(\tilde{a})$ existieren, $T(a) \in \Pi(l_p)$ folgt. Wir vermerken, daß in [7] sogar Räume l_p mit entsprechenden Gewichten betrachtet wurden.

In dieser Arbeit geben wir eine Methode an, die es erlaubt, das Reduktionsverfahren für Toeplitzoperatoren mit allgemeineren Symbolen $a \in L^\infty(\Gamma)$ zu begründen. Für $p = 2$ betrifft dies insbesondere den Fall, daß a ein gewisses Produkt von Funktionen aus PC, $C + H^\infty$, $C + \overline{H}^\infty$ und reellwertigen Funktionen ist; weiterhin werden wir für $a \in PC \cap M_{\langle p \rangle}$ zeigen, daß $T(a) \in \Pi(l_p)$ genau dann gilt, wenn $T(a)$ und $T(\tilde{a})$ invertierbar sind.

Wir beweisen zunächst folgenden einfachen Hilfssatz.

Hilfssatz 1: *Für $a \in M_p$ gilt $T(a) \in \Pi(l_p)$ genau dann, wenn $T(\tilde{a}) \in \Pi(l_p)$.*

Beweis: Sei W_n der auf l_p durch

$$W_n\{\xi_0, \xi_1, \ldots\} = \{\xi_n, \ldots, \xi_0, 0, \ldots\}$$

definierte Operator. Dann gilt $W_n T_n(a) W_n = T_n(\tilde{a})$. Wenn $T(a) \in \Pi(l_p)$, dann ist für hinreichend große n $T_n(a)$ invertierbar und

$$\|T_n^{-1}(a) P_n\| \leq A.$$

Wegen $W_n^2 = P_n$ folgt somit für hinreichend große n die Invertierbarkeit von $T_n(\tilde{a})$ und wegen $\|W_n\| = 1$

$$\|T_n^{-1}(\tilde{a})\, P_n\| \leqq A.$$

Somit gilt $T(\tilde{a}) \in \Pi(l_p)$. Wegen $\tilde{\tilde{a}} = a$ folgt nach eben Bewiesenen aus $T(\tilde{a}) \in \Pi(l_p)$ auch $T(a) \in \Pi(l_p)$ ∎

Beim Studium von Toeplitzoperatoren spielen die sogenannten *Hankeloperatoren* eine große Rolle. Für $a \in M_p$ ist der Hankeloperator $H(a) \in \mathscr{L}(l_p)$ durch die unendliche Matrix $\{a_{i+j+1}\}_{i,j=0}^{\infty}$ gegeben. Es gelten dann die wichtigen Identitäten (vgl. [5]):

$$T(ab) = T(a)\, T(b) + H(a)\, H(\tilde{b}), \tag{1}$$

$$T_n(ab) = T_n(a)\, T_n(b) + P_n H(a)\, H(\tilde{b})\, P_n + W_n H(\tilde{a})\, H(b)\, W_n. \tag{2}$$

Mit $\mathscr{K}(l_p)$ bezeichnen wir das Ideal der kompakten Operatoren auf l_p und mit $\Phi_0(l_p)$ die Klasse aller Fredholmoperatoren auf l_p mit dem Index 0 (vgl. [4] für $p = 2$). Wir vermerken, daß $T(a) \in \mathscr{L}(l_p)$ genau dann invertierbar ist, wenn $T(a) \in \Phi_0(l_p)$ (vgl. [3], Kap. XIV, Lemma 6.1). Ausgangspunkt für das Weitere ist der folgende Satz.

SATZ 1:

a) *Es gelte $a, b \in L^\infty(\Gamma)$ und es seien folgende Bedingungen erfüllt:*

$$T(a),\ T(b) \in \Pi(l_p), \qquad H(\tilde{a})\, H(b) \in \mathscr{K}(l_p).$$

Dann gilt $T(a)\, T(b) \in \Pi(l_p)$.

b) *Es gelte $a, b \in L^\infty$, $T(a)\, T(b) \in \Pi(l_p)$, $H(a)\, H(\tilde{b}) \in \mathscr{K}(l_p)$. Dann ist $T(ab) \in \Pi(l_p)$.*

Beweis: Aus (1) und (2) folgt

$$P_n T(a)\, T(b)\, P_n = T_n(a)\, T_n(b) + W_n H(\tilde{a})\, H(b)\, W_n. \tag{3}$$

Unter Benutzung von $W_n^2 = P_n$ und $W_n T_n(a)\, W_n = T_n(\tilde{a})$ erhält man aus (3) und aus Hilfssatz 1

$$\begin{aligned} P_n T(a)\, T(b)\, P_n &= W_n T_n(\tilde{a})\, T_n(\tilde{b})\, W_n + W_n H(\tilde{a})\, H(b)\, W_n \\ &= W_n T_n(\tilde{a})\, T_n(\tilde{b})\, \{I + T_n^{-1}(b)\, T_n^{-1}(\tilde{a})\, H(a)\, H(b)\}\, W_n. \end{aligned}$$

Wegen der starken Konvergenz von $T_n^{-1}(\tilde{a})$ gegen $T_n^{-1}(\tilde{a})$ und von $T_n^{-1}(\tilde{b})$ gegen $T^{-1}(\tilde{b})$ folgt

$$\|T_n^{-1}(\tilde{b})\, T_n^{-1}(\tilde{a})\, H(\tilde{a})\, H(b) - T^{-1}(\tilde{b})\, T^{-1}(\tilde{a})\, H(\tilde{a})\, H(b)\| \to 0. \tag{4}$$

Wegen (1) ist $I + T^{-1}(\tilde{b})\, T^{-1}(\tilde{a})\, H(\tilde{a})\, H(b) = T^{-1}(\tilde{b})\, T^{-1}(\tilde{a})\, T(\tilde{a}\tilde{b})$. Wiederum wegen (1) ist $T(ab) \in \Phi_0(l_p)$ und somit invertierbar. Folglich ist nach (4)

$$I + T_n^{-1}(\tilde{b})\, T_n^{-1}(\tilde{a})\, H(\tilde{a})\, H(b) \tag{5}$$

für alle hinreichend großen n invertierbar. Außerdem sind die Inversen von (5) gleichmäßig beschränkt. Dies liefert zusammen mit

$$\|T_n^{-1}(\tilde{a})\|,\ \|T_n^{-1}(\tilde{b})\| \leqq A,\ \|W_n\| = 1$$

für alle hinreichend großen n die Invertierbarkeit von $P_n T(a)\, T(b)\, P_n$ und die gleichmäßige Beschränktheit der Inversen. Somit ist

$$T(a)\, T(b) \in \Pi(l_p).$$

Die Behauptung b) folgt sofort aus (1) und der Tatsache (vgl. [2]), daß aus der Invertierbarkeit von $A + T$, $T \in \mathcal{K}(l_p)$, $A \in \Pi(l_p)$ auch $A + T \in \Pi(l_p)$ folgt ∎

Satz 1 zeigt, von welchem Interesse die Frage ist, wann das Produkt von Hankeloperatoren kompakt ist. Wir vermerken hier einige wichtige Fälle:

1^0. Für $f \in L^\infty(\Gamma)$ bezeichnen wir mit sing supp f den Singularitätenträger von f, d. h. das Komplement der größten offenen Teilmenge von Γ, auf der f stetig ist. Für $a, b \in L^\infty(\Gamma)$ mit sing supp $a \cap$ sing supp $b = \emptyset$ gilt dann

$$H(a)\,H(\tilde{b}),\, H(\tilde{a})\,H(b) \in \mathcal{K}(l_2) \qquad \text{(vgl. [3])}.$$

2^0. Mit PW bezeichnen wir die Klasse aller Funktionen der Gestalt $f(t) = \sum_{k=1}^{n} f_k(t)\,\lambda_k(t)$, wobei f_k auf Γ wienersch und λ_k die charakteristische Funktion eines Kreisbogens $\Gamma_k \subset \Gamma$ ist. Dann gilt $f \in M_p$ für alle $p > 1$, und falls $a, b \in PW$ keine gemeinsamen Unstetigkeitsstellen haben,

$$H(a)\,H(\tilde{b}),\, H(\tilde{a})\,H(b) \in \mathcal{K}(l_p) \qquad \text{(vgl. [3, 8])}.$$

3^0. Für jede stetige Funktion $a \in M_{\langle p\rangle}$ gilt $H(a) \in \mathcal{K}(l_p)$ (vgl. [8]).

Wie S. Axler einem der Autoren mitteilte, gilt sogar folgender Sachverhalt:

$$H(a)\,H(\tilde{b}) \in \mathcal{K}(l_2), \quad \text{falls} \quad H^\infty(\bar{a}) \cap H^\infty(b) \subset C + H^\infty$$

ist; hierbei wird mit $H^\infty(f)$ die durch H^∞ und f erzeugte Algebra bezeichnet.

FOLGERUNG 1: Es gelte $a_1, \ldots, a_R \in L^\infty(\Gamma)$ und es sei $T(a_r) \in \Pi(l_2)$ $(r = 1, \ldots, R)$. Falls

$$\text{sing supp } a_r \cap \text{sing supp } a_s = \emptyset \qquad (r \neq s), \tag{6}$$

so gilt $T(a_1 \ldots a_R) \in \Pi(l_2)$. Der Beweis ergibt sich sofort aus Satz 1 und 1^0.

FOLGERUNG 2: Sei $a = a_1 \ldots a_4$, wobei a_1 reellwertig ist und ess inf $a_1 > 0$ gilt, $a_2 \in PC$, $a_3 \in H^\infty + C$, $a_4 \in \overline{H^\infty} + C$ und (6) erfüllt ist. Wenn $T(a_i)$ für $i = 1, 2, 3, 4$ in $\mathcal{L}(l_2)$ invertierbar ist, gilt $T(a) \in \Pi(l_2)$.

FOLGERUNG 3: Es sei $a \in M_{\langle p\rangle}$ $(1 < p < \infty)$ stückweise stetig. Dann gilt $T(a) \in \Pi(l_p)$ genau dann, wenn $T(a)$, $T(\tilde{a})$ invertierbar in $\mathcal{L}(l_p)$ sind.

Beweis: Die Notwendigkeit ergibt sich aus Hilfssatz 1. Seien nun $T(a)$ und $T(\tilde{a})$ invertierbar in $\mathcal{L}(l_p)$ und $t_1, \ldots, t_R \in \Gamma$ die Unstetigkeitsstellen von a. Dann kann a als

$$a = a_0 \psi_{t_1,\beta_1} \cdots \psi_{t_R,\beta_R}$$

dargestellt werden, wobei $a_0 \in C(\Gamma) \cap M_{\langle p\rangle}$ und ψ_{t_r,β_r} $(\beta_r \in \mathbb{C})$ ein eindeutiger Zweig von t^{β_r} ist, der in jedem von t_r verschiedenen Punkt von Γ stetig ist (vgl. [7]). Die Bemerkungen 2^0 und 3^0 liefern, daß $T(\psi_{t_r,\beta_r})$ und $T(\tilde{\psi}_{t_r,\beta_r})$ in $\mathcal{L}(l_p)$ invertierbar sind, $r = 1, \ldots, R$, und daß $T(a_0)$ invertierbar ist. In [7] wurde ferner gezeigt, daß

$$T(\psi_{t_r,\beta_r}) \in \Pi(l_p) \quad (r = 1, \ldots, R), \quad T(a_0) \in \Pi(l_p).$$

Satz 1 liefert nun unter Berücksichtigung von 2^0 und 3^0 $T(a) \in \Pi(l_p)$ ∎

LITERATUR

[1] Вербицкий, И. Э.: О мультипликаторах в пространствах l_p с весом. Мат. иссл. 45 (Кишинев 1977), 3—16.
[2] Гохберг, И. Ц., и И. А. Фельдман: Уравнения в свертках и проекционние методы их решения. Москва 1971.
[3] Гохберг, И. Ц., и Н. Я. Крупник: Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов, Кишинёв 1973.
[4] Douglas, R. G.: Banach algebra techniques in operator theory. Academic Press: New York 1972.
[5] Widom, H.: Asymptotic behavior of block Toeplitz matrices and determinants II. Adv. in Math. 21 (1976), 1—29.
[6] Böttcher, A., and B. Silbermann: Notes on the asymptotic behavior of block Toeplitz matrices and determinants. Math. Nachrichten 98 (1980), 183—210.
[7] Вербицкий, И. Э., и Н. Я. Крупник: О применимости проекционного метода к дискретным уравнениям Винера-Хопфа с кусочнонепрерывным символом. Мат. иссл. 45 (Кишинёв 1977), 17—28.
[8] Дудучава, Р. В.: Дискретныв уравнения Винера-Хопфа в пространствах l_p с весом. Сообщ. АН ГССР 67 (1972), 17—20.

Manuskripteingang: 9. 01. 1981

VERFASSER:

Dipl.-Math. Albrecht Böttcher und Prof. Dr. Bernd Silbermann
Sektion Mathematik der Technischen Hochschule
DDR-9010 Karl-Marx-Stadt, PSF 964