Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
2 (1982), S. 11–22

Verbindungsregeln (matching rules) für Projektoren in linearen Räumen

A. Felgenhauer

Bei der Behandlung singulär gestörter Differentialgleichungen spielen Verbindungsregeln und zusammengesetzte asymptotische Entwicklungen eine bedeutende Rolle (MAE-Methode). Im vorliegenden Beitrag definieren wir Verbindungsregeln für allgemeine lineare Räume und betrachten die bekannten Regeln unter diesem Gesichtspunkt. Infolge der Allgemeinheit dieser Betrachtungsweise ergeben sich Möglichkeiten, neue Verbindungsregeln zu konstruieren.

Значительную роль для исследования дифференциальных уравнений с малым параметром играют условия сращивания и составные асимптотические разложения (так называемый метод MAE). В настоящей работе определяются условия сращивания для общих линейных пространств и рассматриваются известные условия под этой точкой зрения. Из общности этого подхода следуют возможности конструировать новые условия сращивания.

Matching rules and composite expansion are useful in asymptotic theory of singular perturbations (method of matched asymptotic expansions, MAE). In this paper we give an algebraic definition of matching rules in abstract vector spaces. We consider the well-known rules from this point of view. By the generality of the definitions we are able to construct new matching rules.

1. Einführung

In einem linearen Raum $\mathbf{X}$ gilt für Projektoren P, d. h. lineare Operatoren mit $P^2 = P$ die Beziehung

$$x \in Px + \ker P \tag{1}$$

für alle $x \in \mathbf{X}$. Dabei ist $\ker P$ der Nullraum des Operators P. Die Beziehung (1) liegt allen Projektionsverfahren zugrunde. Um die Approximation zu verbessern, betrachtet man oft anstelle eines einzelnen Projektors P eine Familie von Projektoren. Durch

$$x \in P_n x + \ker P_n \qquad (n \in N)$$

wird x bis auf einen Fehler, der in der Menge $\bigcap\limits_n \ker P_n$ enthalten ist, festgelegt. Ein Problem besteht dann im allgemeinen darin, aus den bekannten $P_n x$ ein Element y mit

$$y \in \bigcap_n (P_n x + \ker P_n)$$

explizit zu konstruieren. Es ist gelöst, wenn es gelingt, auf der Grundlage der P_n einen Projektor P mit

$$\ker P = \bigcap_n \ker P_n$$

anzugeben. Dann kann $y = Px$ gewählt werden. In vielen Fällen mit $N = \{1, 2, \ldots, n_0\}$ gilt

$$P_n P_{n+1} = P_n \qquad (n = 1, \ldots, n_0 - 1). \tag{2}$$

Dafür ist

$$P = P_{n_0} \tag{3}$$

eine mögliche Wahl. (2) ist das einfachste Beispiel einer Verbindungsregel.

Kompliziertere Verbindungsregeln werden bei der Anwendung der MAE („*matched asymptotic expansions*")-Methode zur asymptotischen Lösung parameterabhängiger Differentialgleichungen benötigt (vgl. z. B. [4]). Hierbei dienen Verbindungsregeln nicht nur dazu, den zusammengesetzten Projektor P zu konstruieren. Hypothesen über die Gültigkeit bestimmter Verbindungsregeln werden auch genutzt, um die Elemente $P_n x$ eindeutig zu bestimmen. Insbesondere in [7, 11] und [4] werden spezielle Verbindungsregeln im Zusammenhang mit asymptotischen Methoden formuliert und genutzt.

BERG [2] weist auf den allgemeineren Charakter von Verbindungsregeln hin, der über den Rahmen der asymptotischen Methoden hinausreicht. Von diesem Gedanken ausgehend, setzt sich der vorliegende Beitrag das Ziel, den Begriff der Verbindungsregel von einem algebraischen Standpunkt aus zu formulieren. Durch diese Verallgemeinerung gelingt es, vorhandene Verbindungsregeln zu systematisieren und Möglichkeiten für neue Verbindungsregeln (Satz 2; Beispiel 3) aufzuzeigen. Außerdem lassen sich Methoden, die bisher nicht im Zusammenhang mit Verbindungsregeln gesehen worden sind, in das allgemeine Konzept einordnen (Beispiele 6 und 8).

2. Bezeichnungen, Definitionen

Mit $L(\mathbf{X})$ bezeichnen wir eine lineare Menge von linearen Operatoren, die einen reellen linearen Raum $\mathbf{X}$ in sich abbilden. Es seien P, P_n, Q, $Q_n \in L(\mathbf{X})$ Projektoren und $Z_m \in L(\mathbf{X})$. Mit I bezeichnen wir den identischen Operator. Das Symbol O verwenden wir sowohl für den Nulloperator, für das Element $O \in \mathbf{X}$, als auch für die reelle Zahl 0. α, β, λ sind reelle Zahlen. $a(\cdot), b(\cdot), \ldots$ werden entsprechend des Zusammenhangs als formale oder reelle Polynome aufgefaßt.

Die Indizes n, m, k wählen wir aus geeigneten Mengen $n \in N$, $m \in M$, $k \in K$.

Definition 1: Ein Projektor P heißt *zusammengesetzter Projektor* (*composite projektor*) der Projektoren P_n $(n \in N)$, falls

$$\ker P = \bigcap_{n \in N} \ker P_n. \tag{4}$$

Äquivalent zu (4) sind die Bedingungen

$$P_n P = P_n, \tag{5}$$

$$\ker P \supset \bigcap_{n \in N} \ker P_n. \tag{6}$$

Für die folgende Definition betrachten wir Abbildungen R_k $(k \in K)$ und P, die beliebigen Familien $(P_n)_{n \in N}$, $(Z_m)_{m \in M}$ formal lineare Operatoren $R_k[(P_n), (Z_m)]$, $P[(P_n), (Z_m)]$ aus $L(\mathbf{X})$ zuordnen.

Definition 2: Folgt aus

$$R_k[(P_n), (Z_m)] = O \qquad (k \in K) \tag{7}$$

formal, daß $P[(P_n), (Z_m)]$ zusammengesetzter Projektor der Projektoren (P_n) ist, so heißen die Beziehungen (7) *Verbindungsregel* (*matching rule*).

Verbindungsregeln sind demnach formale Beziehungen zwischen Projektoren P_n und evtl. linearen Operatoren Z_m, die hinreichend dafür sind, daß ein formal vorgegebener Operator $P[(P_n), (Z_m)]$ zusammengesetzter Projektor von $(P_n)_{n \in N}$ ist. So sind z. B. die Beziehungen $P_1P_2 = P_2P_1 = O$ eine Verbindungsregel mit $P = P_1 + P_2$. In einem linearen Raum X, über dem (7) für eine Familie (P_n) mit geeigneten Z_m $(m \in M)$ erfüllt ist, steht somit ein zusammengesetzter Projektor zur Verfügung.

Im allgemeinen ist es nicht einfach, für vorgegebene Aufgabenstellungen Verbindungsregeln (7) und — im Zusammenhang damit — den linearen Raum X festzulegen. Diese Frage soll hier nicht untersucht werden. (Zur Anwendbarkeit von Verbindungsregeln in konkreten Räumen vgl. [3—9].

Für $\bigcap_n \ker P_n = \{O\}$ gilt für den zusammengesetzten Projektor notwendig $P = I$. Deshalb können wir für die folgenden Ausführungen

$$\bigcap_n \ker P_n \neq \{O\} \tag{8}$$

annehmen, ohne die Allgemeinheit einzuschränken. (8) erlaubt uns, das folgende Lemma zu formulieren.

Lemma 1: *Ist Q Projektor und*

$$P = \sum_n Z_nP_n + \alpha Q$$

zusammengesetzter Projektor von (P_n), so sind die folgenden Behauptungen richtig:

(a) *Aus* $\alpha \neq 0$ folgt $Q \neq I$.

(b) *Ist* $\alpha \neq 1$, *so gilt* $P = \left(I + \frac{\alpha}{1-\alpha} Q\right) \sum_n Z_nP_n$.

Beweis: (a) folgt aus (6) und (8). Aus (5) folgt

$$P = P^2 = \sum_n Z_nP_n + \alpha QP,$$

$$\alpha Q = \alpha Q \sum_n Z_nP_n + \alpha^2 Q,$$

$$\alpha Q = \frac{\alpha}{1-\alpha} Q \sum_n Z_nP_n,$$

und daraus erhalten wir (b) ∎

3. Verbindungsregeln für zwei Projektoren

Günstig sind zusammengesetzte Projektoren der Struktur

$$P = Z_1P_1 + Z_2P_2, \tag{9}$$

da sich in diesem Fall jedes Element Px direkt aus P_1x und P_2x bestimmen läßt. Wir erhalten dafür die folgende Verbindungsregel.

Satz 1: (9) *ist genau dann zusammengesetzter Projektor von P_1 und P_2, falls*

$$\begin{aligned} P_1(I - Z_1)\, P_1 &= P_1Z_2P_2, \\ P_2(I - Z_2)\, P_2 &= P_2Z_1P_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Beweis: (10) entspricht (5). (6) ergibt sich unmittelbar aus (9). Aus (9) und (5) folgt dann $P^2 = P$, P ist demnach zusammengesetzter Projektor von P_1 und P_2 ∎

Jetzt wollen wir den Fall untersuchen, daß Z_1 und Z_2 Polynome in P_1 und P_2 darstellen. Satz 3 beantwortet dabei die Frage, wann eine Beziehung

$$R = a(P_1P_2) + P_2b(P_1P_2) + c(P_2P_1) + P_1d(P_2P_1) = O \tag{11}$$

eine Verbindungsregel darstellt.

Satz 2: *Sei $a(x)$ ein Polynom mit $\lambda^{-1} = a(1) \neq 0$. Gilt die Verbindungsregel*

$$P_2a(P_1P_2)(I - P_1) = O, \tag{12}$$

dann ist

$$P = P_1 + (I - P_1)P_2b(P_1P_2)(I - P_1) \tag{13}$$

zusammengesetzter Projektor von P_1 und P_2. Dabei ist $b(x)$ das Polynom mit

$$(1 - x)b(x) = 1 - \lambda a(x).$$

Beweis: Der Satz ist ein Spezialfall von Satz 1. Es gilt

$$\begin{aligned}
P_1P &= P_1,\\
P_2P &= P_2P_1 + P_2(I - P_1P_2)b(P_1P_2)(I - P_1),\\
&= P_2P_1 + P_2\big(I - \lambda a(P_1P_2)\big)(I - P_1),\\
&= P_2 \ ∎
\end{aligned}$$

Ergänzung: Gilt sogar

$$a(P_1P_2)(I - P_1) = O, \tag{14}$$

so vereinfacht sich (13) zu

$$P = I - (I - P_2)b(P_1P_2)(I - P_1). \tag{15}$$

Satz 3: (11) *sei erfüllt. Gilt*

$$\begin{aligned}
a(0) + c(0) &= 0,\\
a(1) + b(1) &= a(0),\\
c(1) + d(1) &= c(0),
\end{aligned} \tag{16}$$

so läßt sich für den allgemeinen Fall kein zusammengesetzter Projektor in Form eines Polynoms in P_1 und P_2 angeben. Anderenfalls ist das immer möglich.

Beweis: Für zwei Projektoren, die die Beziehungen

$$\begin{aligned}
P_1 &= P_2P_1,\\
P_2 &= P_1P_2
\end{aligned} \tag{17}$$

erfüllen, folgt für R aus (11)

$$R = a(0) + c(0) + \big(a(1) + b(1) - a(0)\big)P_2 + \big(c(1) + d(1) - c(0)\big)P_1.$$

Ist (16) erfüllt, so genügen die Projektoren (17) der Bedingung (11). Der zusammengesetzte Projektor P in Polynomform hätte für diese Projektoren die Form

$$P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma I.$$

Nach Lemma 1 ist $\gamma = 0$. Daraus folgt wegen (5) und (17) notwendig

$$P_1 = P_1 P = P = P_2 P = P_2 .$$

Daß Projektoren $P_1 \neq P_2$ mit (17) existieren, wird später (Beispiel 4) gezeigt. Ist dagegen eine der Gleichungen (16) nicht erfüllt, so läßt sich für mindestens eine der Beziehungen

$$P_i R(I - P_j) = 0 \qquad (i, j = 1, 2),$$

die die Form (12) bzw. (14) besitzen, der Satz 2 anwenden ∎

Neben zusammengesetzten Projektoren der Form (9) lassen sich bei asymptotischen Methoden Projektoren

$$P = P_1 + P_2 - Q \tag{18}$$

finden (vgl. Beispiel 5). Dafür erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 4: *Sei Q ein Projektor.* (18) *ist genau dann ein zusammengesetzter Projektor von P_1 und P_2, falls*

$$QP_1 = QP_2 = Q, \tag{19}$$

$$P_1 Q = P_1 P_2, \qquad P_2 Q = P_2 P_1. \tag{20}$$

Außerdem kann dann in (18) *Q durch $P_1 P_2$ bzw. $P_2 P_1$ ersetzt werden.*

Bemerkung: Die letzte Folgerung erhält Eckhaus [5] für einen Spezialfall asymptotischer Entwicklungen. Wir weisen darauf hin, daß in dem hier betrachteten Fall immer anstelle von (18) der zusammengesetzte Projektor

$$P = P_1 + P_2 - P_1 P_2$$

benutzt werden kann, ohne daß eine konkrete Struktur von P_1 oder P_2 bekannt sein muß.

Beweis: Nach Lemma 1 folgt für zusammengesetzte Projektoren (18) notwendig

$$P = \left(I - \frac{1}{2} Q\right)(P_1 + P_2), \tag{21}$$

$$2Q = QP_1 + QP_2 \tag{22}$$

und wegen (21) nach Satz 1

$$P_1 P - P_1 = P_1 P_2 - P_1 Q = 0.$$

Aus (22) folgt damit

$$QP_2 = QP_1 P_2 = QP_1 Q. \tag{23}$$

Genauso erhalten wir

$$QP_1 = QP_2 Q. \tag{24}$$

Daraus folgt

$$QP_1 Q = QP_2 Q.$$

Unter Beachtung von (22), (23) und (24) haben wir (19). Gilt umgekehrt (19), so können wir die Darstellung (21) nutzen und Satz 1 anwenden.

Weiterhin gilt dann nach (19) und (20)

$$P_1P_2P_1 = P_1QP_1 = P_1Q = P_1P_2$$

und analog

$$P_2P_1P_2 = P_2P_1.$$

Demnach sind die Operatoren P_1P_2 bzw. P_2P_1 ebenfalls Projektoren, die die Bedingungen (19) und (20) erfüllen ∎

4. Beispiele für Verbindungsregeln asymptotischer Entwicklungen

Zur Illustration betrachten wir reelle stetige Funktionen $f_\varepsilon(x, y)$ mit dem Definitionsbereich $x \in [\alpha\varepsilon, 1]$, $y \in [\beta\varepsilon, 1]$. Dabei ist $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ein kleiner Parameter und $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$. Von Interesse sollen Grenzschichteffekte für $\varepsilon \to 0$ bei $x = 0$ bzw. $y = 0$ sein. Viele weitere Beispiele sind in [4—6, 8—9] angegeben.

Wir definieren für diese Funktionen *Entwicklungsoperatoren*

$$E^n(\delta, \vartheta) = E^n(\delta, \vartheta; \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n)$$

(vgl. [4]); $\delta, \vartheta, \delta_0, \ldots, \delta_n$ sind geeignete, nur von ε abhängende *Vergleichsfunktionen* mit

$$0 < \delta(\varepsilon) \leqq 1, \qquad 0 < \eta(\varepsilon) \leqq 1,$$

$$\delta_k(\varepsilon) \geqq 0, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_{k+1}(\varepsilon)}{\delta_k(\varepsilon)} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Dann sei

$$\begin{aligned}\big(E(\delta, \vartheta)\, f_\varepsilon\big)(x, y) &= \big(E(\delta, \vartheta)\, f_\varepsilon\big)\big(\xi\delta(\varepsilon), \eta\vartheta(\varepsilon)\big),\\ &= \begin{cases}\lim\limits_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon\big(\xi\delta(\varepsilon), \eta\vartheta(\varepsilon)\big), & \xi\eta > 0,\\ \text{stetig}, & \xi\eta = 0,\end{cases}\end{aligned}$$

und

$$E^0(\delta, \vartheta)\, f_\varepsilon = \delta_0 E(\delta, \vartheta)\, (\delta_0^{-1} f_\varepsilon),$$

$$E^n(\delta, \vartheta)\, f_\varepsilon = E^{n-1}(\delta, \vartheta)\, f_\varepsilon + \delta_n E(\delta, \vartheta)\, \big(\delta_n^{-1}(f_\varepsilon - E^{n-1}(\delta, \vartheta)\, f_\varepsilon)\big).$$

Nach dieser Definition sind Entwicklungsoperatoren Projektoren, die den Funktionen f_ε, für die sie definiert sind, asymptotische Entwicklungen der Form

$$\big(E^n(\delta, \vartheta)\, f_\varepsilon\big)(x, y) = \sum_{k=0}^{n} g_k\left(\frac{x}{\delta(\varepsilon)}, \frac{y}{\vartheta(\varepsilon)}\right) \delta_k(\varepsilon)$$

zuordnen.

Breite Anwendung bei asymptotischen Entwicklungen findet die Verbindungsregel

$$P_1P_2P_1 = P_1P_2 \tag{25}$$

(z. B. [4, 6]). Das ist ein Spezialfall von (14) $\big(a(x) = x\big)$. Zusammengesetzter Projektor ist dann nach (15)

$$P = P_1 + P_2 - P_2P_1. \tag{26}$$

Beispiel 1: Sei

$$f_\varepsilon(x, y) = (\ln x - \ln \varepsilon + y + \varepsilon)^{-1},$$
$$P_2 = E^0(1, 1; -\ln^{-1} \varepsilon),$$
$$P_1 = E^0(\varepsilon, 1; 1).$$

Dann gilt

$$P_2P_1f_\varepsilon = -\ln^{-1} \varepsilon,$$
$$P_1P_2f_\varepsilon = P_1P_2P_1f_\varepsilon = 0,$$

also

$$Pf_\varepsilon = (\ln x - \ln \varepsilon + y)^{-1}.$$

Hinreichend für (25) sind die Beziehungen

$$P_1(I - Q) = 0, \tag{27}$$
$$QP_2 = P_2P_1. \tag{28}$$

(27) ist sicher für $Q = P_1$ erfüllt, wir erhalten die Verbindungsregel von van Dyke [11]

$$P_1P_2 = P_2P_1. \tag{29}$$

Beispiel 2: Sei

$$f_\varepsilon(x, y) = \left(\cos y - \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\left(\sin x - \exp\left(-\frac{y}{\varepsilon}\right)\right),$$
$$P_1 = E^1(\varepsilon, \varepsilon; 1, \varepsilon),$$
$$P_2 = E^1(1, 1; 1, \varepsilon).$$

Dann gilt

$$P_1P_2f_\varepsilon = P_2P_1f_\varepsilon = x,$$
$$Pf_\varepsilon = \cos y \sin x - x \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) - \exp\left(-\frac{y}{\varepsilon}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right).$$

Eine andere Variante für (27) ist in [10] angegeben. Wir können für Q die Entwicklung in eine Laurentreihe wählen. (27) gibt dabei an, bis zu welcher Größenordnung entwickelt werden muß. Für das Beispiel 2 erhalten wir wegen

$$\sin x \sim x + \cdots,$$
$$\cos x \sim 1 + \cdots$$

die Beziehung

$$QP_2f_\varepsilon = x = P_2P_1f_\varepsilon.$$

Weitere Beispiele dazu sind in [10] zu finden.

Die Ergebnisse von Kap. 3 erlauben es jetzt, eine Vielzahl weiterer Verbindungsregeln zu konstruieren. Wir wollen als Beispiel die einfachste Verallgemeinerung der Regel (25) betrachten.

Satz 2 liefert für $a(x) = x$ die Verbindungsregel

$$P_2P_1P_2P_1 = P_2P_1P_2 \tag{30}$$

mit

$$P = P_1 + P_2 - P_1P_2 - P_2P_1 + P_1P_2P_1. \tag{31}$$

Beispiel 3: Sei

$$f_\varepsilon(x, y) = \varepsilon y^{-1}(x + \ln \varepsilon \ln y - \ln^2 \varepsilon)^{-1} - x(y + \ln x - \ln \varepsilon)^{-1},$$

$$P_1 = E^0(1, \varepsilon; -\ln^{-1} \varepsilon),$$

$$P_2 = E^0(\varepsilon, \ln^{-2} \varepsilon; \varepsilon).$$

Dann gilt

$$P_1 f_\varepsilon = \big(\varepsilon y \ln \varepsilon(\ln y - \ln \varepsilon)\big)^{-1} + x \ln^{-1} \varepsilon,$$

$$P_2 f_\varepsilon = -\varepsilon y^{-1} \ln^{-2} \varepsilon - x(\ln x - \ln \varepsilon)^{-1},$$

$$P_1P_2 f_\varepsilon = x \ln^{-1} \varepsilon,$$

$$P_2P_1 f_\varepsilon = -\varepsilon y^{-1} \ln^{-2} \varepsilon,$$

$$P_1P_2P_1 f_\varepsilon = P_2P_1P_2 f_\varepsilon = 0.$$

Aus (31) ergibt sich daraus die zusammengesetzte Entwicklung

$$P f_\varepsilon = \varepsilon\big(y \ln \varepsilon(\ln y - \ln \varepsilon)\big)^{-1} - x(\ln x - \ln \varepsilon)^{-1}.$$

Als nächstes wollen wir den Beweis von Satz 3 vollenden. Weitere Beispiele dafür sowie eine ausführliche Diskussion von Verbindungsregeln für Funktionen, in deren Entwicklung die Entwicklungsskala nach Potenzen von $-\ln \varepsilon$ fortschreitet, findet man in [6].

Beispiel 4: Sei $f_\varepsilon(x, y) = \ln^{-2} \varepsilon(\ln^2 x - \ln x \ln \varepsilon)$

$$P_1 = E^1(1, 1; 1, -\ln^{-1} \varepsilon),$$

$$P_2 = E^1(\varepsilon, 1; 1, -\ln^{-1} \varepsilon).$$

Dann gilt

$$P_1 f_\varepsilon = P_2P_1 f_\varepsilon = -\ln^{-1} \varepsilon \ln x,$$

$$P_2 f_\varepsilon = P_1P_2 f_\varepsilon = -1 + \ln^{-1} \varepsilon \ln x.$$

Insbesondere läßt sich demnach ein linearer Raum konstruieren, in dem (17) für zwei Projektoren $P_1 \neq P_2$ gilt, wobei (8) erfüllt ist.

Neben den Verbindungsregeln (25) und (29) werden für asymptotische Entwicklungen Regeln benutzt, die auf *Überlappungshypothesen* beruhen. Die Grundlagen dafür sind insbesondere bei KAPLUN [7] und ECKHAUS [3] zu finden (vgl. auch [4, 8—9]. Der Vorteil dieser Verbindungsregeln besteht darin, daß man über die Beziehung (4) hinaus die Information erhält, daß der zusammengesetzte Projektor gleichmäßig gültige asymptotische Entwicklungen liefert (vgl. [4]). Das formale Vorgehen haben wir in Satz 4 formuliert. Q ist dabei Entwicklungsoperator in einer „Zwischenvariablen" (intermediate expansion), (19) entspricht der Überlappungshypothese. Eine Folgerung von Satz 4 ist die Tatsache, daß wir im Gültigkeitsbereich der Beziehungen (19), (20) stets die Verbindungsregel (25) anwenden können.

Beispiel 5: Für das Beispiel 2 setzen wir für $0 < \alpha, \beta < 1$

$$Q = E^n(\varepsilon^\alpha, \varepsilon^\beta; 1, \delta_1, \ldots, \delta_n), \qquad \delta_k = \varepsilon^{\gamma_k}.$$

Dabei durchläuft γ_k alle Werte von $2\nu\beta + (2\mu + 1)\alpha$ mit

$$0 < 2\nu\beta + (2\mu + 1)\alpha \leqq 1 \qquad (\nu, \mu = 0, 1, \ldots).$$

Damit gilt

$$Qf_\varepsilon = \sum_{0 \leqq 2\nu\beta + (2\mu+1)\alpha \leqq 1} (-1)^{\nu+\mu} \frac{x^{2\mu+1} y^{2\nu}}{(2\nu)!\,(2\mu+1)!}.$$

Für $1 < 3\alpha < 3$, $1 - \alpha < 2\beta < 2$ ist die Überlappungshypothese (19) und die Bedingung (20) erfüllt, wir erhalten

$$Qf_\varepsilon = x$$

und damit nach (18) die gleiche zusammengesetzte Entwicklung wie in Beispiel 2.

Verbreitet ist die Methode, zusammengesetzte asymptotische Approximationen mit Hilfe von Lokalisierungsfunktionen zu konstruieren. Das läßt sich als Spezialfall von Satz 1 interpretieren. Die Operatoren Z_1 und Z_2 stellen dabei die Multiplikation mit den Lokalisierungsfunktionen dar. In der Regel gilt dabei

$$Z_1 + Z_2 = I.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} P_1 Z_2 &= 0, \\ P_2 Z_1 &= 0 \end{aligned} \tag{32}$$

hinreichend für (10).

Beispiel 6: Wir betrachten f_ε, P_1, P_2 aus Beispiel 2 und eine Lokalisierungsfunktion $\psi_\varepsilon(x, y)$ mit

$$\begin{aligned} &0 \leqq \psi_\varepsilon(x, y) \leqq 1, \\ &\psi_\varepsilon \text{ — hinreichend glatt,} \\ &\psi_\varepsilon(x, y) = 0 \quad \text{für} \quad \min\{x, y\} \leqq \varepsilon^q, \\ &\psi_\varepsilon(x, y) = 1 \quad \text{für} \quad \min\{x, y\} \geqq 2\varepsilon^q. \end{aligned}$$

Wir wählen

$$\begin{aligned} &(Z_1 f_\varepsilon)(x, y) = \psi_\varepsilon(x, y)\, f_\varepsilon(x, y), \\ &Z_2 f_\varepsilon = f_\varepsilon - Z_1 f_\varepsilon. \end{aligned}$$

Dann sind die Beziehungen (32) für beschränkte f_ε erfüllt, falls $0 < q < 1$ gewählt wurde. Zusammengesetzte Entwicklung ist dann

$$\begin{aligned} &(Pf_\varepsilon)(x, y) \\ &= \psi_\varepsilon(x, y) \sin x \cos y + \big(1 - \psi_\varepsilon(x, y)\big) \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \left(x - \exp\left(-\frac{y}{\varepsilon}\right)\right). \end{aligned}$$

5. Verbindungsregeln für mehr als zwei Projektoren

Offensichtlich ist das folgende Lemma.

Lemma 2: *Ist Q_n $(n \in N)$ zusammengesetzter Projektor der Projektoren P_{n_k} $(k \in K_n)$, so ist ein zusammengesetzter Projektor P der Projektoren Q_n auch zusammengesetzter Projektor aller P_{n_k}.*

Damit können wir leicht Verbindungsregeln und zusammengesetzte Projektoren für mehr als zwei Projektoren konstruieren. Aus der Verbindungsregel (25) erhalten wir beispielsweise für drei Projektoren die Bedingungen

$$P_2P_3(I - P_2) = 0, \tag{33}$$

$$P_1(P_2 + P_3 - P_3P_2)(I - P_1) = 0, \tag{34}$$

für den zusammengesetzten Projektor

$$P = P_1 + (P_2 + P_3 - P_3P_2) - (P_2 + P_3 - P_3P_2)\,P_1. \tag{35}$$

Eine direkte Untersuchung zeigt jedoch, daß (35) auch noch zusammengesetzter Projektor bleibt, falls anstelle von (33) nur

$$P_2P_3(I - P_2)(I - P_1) = 0 \tag{36}$$

gilt. Aus dem nächsten Satz folgt, daß die Verbindungsregel (34), (36) auch notwendig für den zusammengesetzten Projektor (35) ist.

Satz 5: *Der Operator*

$$P = \sum_n Z_n P_n$$

ist genau dann zusammengesetzter Projektor der Familie (P_n), *falls für alle* $k \in N$

$$P_k = P_k \sum_n Z_n P_n \tag{37}$$

gilt.

Der Beweis stimmt mit dem des Satzes 1 überein.

Zwei abschließende Beispiele aus dem Bereich asymptotischer Methoden sollen die Möglichkeiten andeuten, auf der Grundlage von Satz 5 konkrete Verbindungsregeln zu konstruieren. Der Einfachheit halber beschränken wir uns hier auf Funktionen einer Veränderlichen $f_\varepsilon(x)$ und setzen

$$E^n(\delta; \delta_0, \ldots, \delta_n) = E^n(\delta, 1; \delta_0, \ldots, \delta_n).$$

Beispiel 7: Sei

$$f_\varepsilon(x) = \exp\left(x - \frac{x^2}{\varepsilon}\right) + \exp\left(x^2 - \frac{x}{\varepsilon}\right) + \sin(x + \varepsilon),$$

$$P_1 = E^2(1; \varepsilon^{-1}, 1, \varepsilon),$$

$$P_2 = E^2(\sqrt{\varepsilon}; 1, \sqrt{\varepsilon}, \varepsilon),$$

$$P_3 = E^1(\varepsilon; 1, \varepsilon).$$

Dann gilt

$$P_1P_2f_\varepsilon = P_2P_1f_\varepsilon = P_3P_1f_\varepsilon = x + \varepsilon,$$

$$P_1P_3f_\varepsilon = P_2P_3f_\varepsilon = P_3P_2f_\varepsilon = -\frac{x^2}{\varepsilon} + 1 + 2x + \varepsilon.$$

Damit ist die Verbindungsregel

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= P_2P_1 = P_3P_1, \\ P_1P_3 &= P_2P_3 = P_3P_2 \end{aligned} \tag{38}$$

erfüllt. (38) entspricht der Regel von VAN DYKE (29) für drei Projektoren und ist hinreichend für (33) und (34). Als zusammengesetzten Projektor erhalten wir

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 + P_3 - P_3P_1 - P_3P_2, \\ Pf &= \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right) + \sin x + \varepsilon \cos x. \end{aligned} \tag{39}$$

Beispiel 8: Wir betrachten weiterhin f_ε, P_1, P_2 und P_3 aus Beispiel 7. Analog zu Beispiel 6 führen wir hinreichend glatte Lokalisierungsfunktionen

$$\psi_\varepsilon^q(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geqq 2\varepsilon^q, \\ 0 & \text{für } x \leqq \varepsilon^q \end{cases}$$

und Operatoren

$$\begin{aligned} (Z_1f_\varepsilon)(x) &= \psi_\varepsilon^q(x)\, f_\varepsilon(x), \\ (Z_2f_\varepsilon)(x) &= \big(\psi_\varepsilon^p(x) - \psi_\varepsilon^q(x)\big)\, f_\varepsilon(x), \\ (Z_3f_\varepsilon)(x) &= \big(1 - \psi_\varepsilon^p(x)\big)\, f_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

ein. Dann sind die Voraussetzungen von Satz 5 für $0 < q < \frac{1}{2} < p < 1$ erfüllt. Wir erhalten

$$Pf_\varepsilon = \begin{cases} \sin x + \varepsilon \cos x, & 2\varepsilon^q \leqq x \leqq 1, \\ x + \varepsilon + \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right), & 2\varepsilon^p \leqq x \leqq \varepsilon^q, \\ 1 + 2x + \varepsilon - \frac{x^2}{\varepsilon} + \exp\left(-\frac{x}{\varepsilon}\right), & 0 \leqq x \leqq \varepsilon^q. \end{cases}$$

LITERATUR

[1] BERG, L.: Operatorenrechnung I. Berlin 1972.

[2] BERG, L.: Two matching rules. Beitr. Anal. 9 (1976), 7–10.

[3] ECKHAUS, W.: On the foundations of the method of matched asymptotic approximations. J. Mech. 8 (1969), 265–300.

[4] ECKHAUS, W.: Matched asymptotic expansions and singular perturbations. Amsterdam—New York 1973.

[5] ECKHAUS, W.: Matching principles and composite expansions. Lect. Notes in Math. 594 (1977), 146–177.

[6] FRAENKEL, L. E.: On the method of matched asymptotic expansions I–III. Proc. Cambridge Phil. Soc. 65 (1969), 209–284.

[7] KAPLUN, S. (ed. P. A. LAGERSTROM, L. N. HOWARD and C. S. LIU): Fluid mechanics and singular perturbations. New York 1967.

[8] MAUSS, J.: On first order matching process for singular functions. In: Spectral theory and asymptotics of differential equations. Amsterdam—London 1974, p. 163–173.

[9] Mauss, J.: On matching principles. Lect. Notes in Math. **711** (1979), 1–8.
[10] Shivamoggi, B. K.: Method of matched asymptotic expansions — asymptotic matching principle for higher approximations. ZAMM **58** (1978), 354–356.
[11] Van Dyke, M.: Perturbation methods in fluid mechanics. Stanford (Calif.) 1975.

Manuskripteingang: 8. 10. 1980

VERFASSER:

Dr. Andreas Felgenhauer
Sektion Mathematik und Physik der Technischen Hochschule „Otto von Guericke“
DDR-3010 Magdeburg, Postschließfach 124