Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
2 (1982), S. 41–57

Über Nullräume, Wertebereiche und Relationen von Operatoren, die bei instationären Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungen auftreten

D. SCHOTT und W. PETERS

Zur Gewinnung von Lösungen bzw. verallgemeinerten Lösungen der linearen Gleichung $Ax = b$ werden Iterationsverfahren der Form

$$x_{n+1} = (I - D_nA)\, x_n + D_nb = P_nx_0 + B_nb$$

betrachtet. Dabei genügen die Reste $r_n = b - Ax_n$ der Iterationsvorschrift

$$r_{n+1} = (I - AD_n)\, r_n = Q_nr_0.$$

Die Existenz von $B_\infty = \lim_{n\to\infty} B_n$ sichert bereits die Existenz der übrigen Grenzwerte P_∞, Q_∞, x_∞ und r_∞. Es werden Bedingungen angegeben, unter denen B_∞ existiert und bestimmte zusätzliche Eigenschaften besitzt. Diese Bedingungen werden einerseits durch Operatorgleichungen und andererseits durch Beziehungen zwischen Nullräumen und Wertebereichen von Operatoren ausgedrückt. Die Ergebnisse werden auf zwei Klassen von Iterationsverfahren angewandt.

Рассматриваются итерационные методы

$$x_{n+1} = (I - D_nA)\, x_n + D_nb = P_nx_0 + B_nb,$$

чтобы находить решения или обобщённые решения линейного уравнения $Ax = b$. При этом выполняются итерационные условия

$$r_{n+1} = (I - AD_n)\, r_n = Q_nr_0$$

для остаточных членов $r_n = b - Ax_n$. Из существования оператора $B_\infty = \lim_{n\to\infty} B_n$ следует существование других предельных значений P_∞, Q_∞, x_∞ и r_∞. Задаются условия для того, чтобы B_∞ существует и имеет определённые дополнительные свойства. Эти условия описываются с одной стороны при помощи операторных уравнений и с другой стороны при помощи орношений между нулевыми пространствами и областями значений операторов. Результаты применяются к двум классам итерационных методов.

Iteration methods of the form

$$x_{n+1} = (I - D_nA)\, x_n + D_nb = P_nx_0 + B_nb$$

are considered to obtain solutions or generalized solutions of the linear equation $Ax = b$. Thereby the residues $r_n = b - Ax_n$ satisfy the iteration procedure

$$r_{n+1} = (I - AD_n)\, r_n = Q_nr_0.$$

The existence of $B_\infty = \lim_{n\to\infty} B_n$ already guarantees the existence of the remaining limits P_∞, Q_∞, x_∞ and r_∞. Conditions are given, under which B_∞ exists and possesses certain additional properties. These conditions are expressed on the one hand by operator equations and on the other hand by relations between null spaces and ranges of operators. The results are applied to two classes of iteration methods.

1. Einführung

Es seien X und Y zwei (nichttriviale) Banachräume. Die Menge der linearen und stetigen Operatoren von X in Y bzw. von Y in X wird wie üblich mit $L(X, Y)$ bzw. $L(Y, X)$ bezeichnet. Der Einheitsoperator (auf X bzw. Y) wird durch I dargestellt. Der Ausdruck $T \mid M$ symbolisiert die Einschränkung eines Operators T auf die Menge $M \subseteq X$. Die Mengen $\mathbf{R}(T)$ und $\mathbf{N}(T)$ bedeuten den Wertebereich bzw. den Nullraum von T. Unter lin M verstehen wir die lineare Hülle, unter $\overline{M}$ die Abschließung einer Menge M. Mit $M \oplus N$ bezeichnen wir die direkte Summe zweier Teilräume M und N, mit $M \overset{\perp}{\oplus} N$ die direkte orthogonale Summe in Hilberträumen. R ist die Menge der reellen Zahlen.

Zur Gewinnung von Lösungen bzw. verallgemeinerten Lösungen der linearen Gleichung

$$Ax = b \qquad \big(A \in L(X, Y),\ b \in Y\big) \tag{1.1}$$

eignen sich (i. a. instationäre) einstufige Iterationsverfahren der Form

$$x_{n+1} = T_n x_n + v_n \qquad (T_n = I - D_n A,\ v_n = D_n b), \tag{1.2}$$

die nach Vorgabe einer Operatorfolge (D_n) mit $D_n \in L(Y, X)$ und eines Startelementes $x_0 \in X$ eindeutig bestimmt sind. Die Reste $r_n = b - Ax_n$ genügen dabei der Iterationsvorschrift

$$r_{n+1} = S_n r_n \qquad (S_n = I - AD_n). \tag{1.3}$$

Die Iterierten x_{n+1} und r_{n+1} kann man mit den Abkürzungen

$$P_n = T_n T_{n-1} \dots T_0, \qquad Q_n = S_n S_{n-1} \dots S_0, \tag{1.4}$$

$$B_n = \sum_{i=0}^{n} T_n T_{n-1} \dots T_{i+1} D_i = \sum_{i=0}^{n} D_i Q_{i-1} \qquad (Q_{-1} = I) \tag{1.5}$$

explizit auch in der Gestalt

$$x_{n+1} = P_n x_0 + B_n b, \tag{1.2'}$$

$$r_{n+1} = Q_n r_0 \tag{1.3'}$$

schreiben. Weitere bekannte Beziehungen sind

$$AT_n = S_n A, \qquad T_n D_n = D_n S_n, \tag{1.6}$$

$$P_n = I - B_n A, \qquad Q_n = I - AB_n \tag{1.7}$$

(siehe z. B. [1, 3, 4]).

Es gibt sowohl für den stationären als auch für den instationären Fall bereits eine Reihe von Untersuchungen zur Konvergenz der Folgen (P_n), (Q_n), (B_n), (x_n), (r_n) und zu den Eigenschaften der entsprechenden Grenzwerte P_∞, Q_∞, B_∞, x_∞, r_∞ (siehe etwa [1, 3—7, 10—12]). Ein einfacher Zusammenhang besteht darin, daß die Existenz von B_∞ schon die Existenz der übrigen Grenzwerte zur Folge hat. Man erhält dann nämlich aus (1.7), (1.2') und (1.3'):

$$P_\infty = I - B_\infty A, \qquad Q_\infty = I - AB_\infty, \tag{1.8}$$

$$x_\infty = P_\infty x_0 + B_\infty b = (I - B_\infty A)\, x_0 + B_\infty b, \tag{1.9}$$

$$r_\infty = Q_\infty r_0 = (I - AB_\infty)\, r_0. \tag{1.10}$$

Es hat sich aber gezeigt, daß der direkte Konvergenznachweis für die Folge (B_n) oft schwierig ist. Daher ist die Suche nach geeigneten hinreichenden oder äquivalenten Konvergenzbedingungen sinnvoll. Diese Bedingungen können einerseits in Form von Operatorgleichungen und andererseits in Form von Beziehungen zwischen Nullräumen und Wertebereichen angegeben werden. Da das Grenzelement x_∞ außerdem Lösung bzw. in bestimmtem Sinne verallgemeinerte Lösung der Gleichung (1.1) sein soll, müssen die Operatoren P_∞, Q_∞ und B_∞ i. a. noch zusätzliche Eigenschaften besitzen. Gilt z. B. für alle n die Beziehung $D_nQ_\infty = 0$ (bzw. $D_nAB_\infty = D_n$), so ist x_∞ eine bezüglich der Folge (D_n) verallgemeinerte Lösung von (1.1), d. h., die Gleichungen

$$D_nAx_\infty = D_nb$$

sind erfüllt (siehe [3, S. 32–33], [4, S. 440–441], [11]). Für $B_\infty AB_\infty = B_\infty$ ergibt sich aus (1.9) die Gleichung

$$B_\infty Ax_\infty = B_\infty b.$$

Für $AB_\infty A = A$ entsteht die Beziehung

$$Ax_\infty = AB_\infty b = (I - Q_\infty)\, b,$$

wobei $Ax_\infty = b$ genau dann zutrifft, wenn b zu $\mathbf{R}(A)$ gehört (siehe [1, S. 378]).

In der vorliegenden Arbeit werden in dieser Richtung bereits bekannte Zusammenhänge vereinfacht und systematisiert sowie neue Zusammenhänge aufgedeckt. Dabei orientieren wir uns an der Veröffentlichung [8], die analoge Betrachtungen für den stationären Fall ($\forall n\colon D_n = D$) enthält. Die Ergebnisse werden auf zwei schon in [11] untersuchte Klassen von Iterationsverfahren angewandt.

Grenzwerte von Operatorfolgen sind im weiteren stets im Sinne der punktweisen (starken) Operatortopologie zu verstehen. Der Raum $L(X, Y)$ ist bezüglich dieser Topologie abgeschlossen (siehe [2, S. 102]).

2. Nullräume und Wertebereiche der Operatoren P_∞ und Q_∞

Zunächst unterliegen Wertebereich und Nullraum von P_∞ bzw. Q_∞ bestimmten Beschränkungen.

Satz 2.1: *Existiert P_∞, so gilt*

$$\mathbf{R}(P_\infty) \supseteq \mathbf{N}(I - P_\infty) \supseteq \bigcap_n \mathbf{N}(I - T_n) = \bigcap_n \mathbf{N}(D_nA),$$

$$\mathbf{N}(P_\infty) \subseteq \mathbf{R}(I - P_\infty) \subseteq \overline{\mathrm{lin} \bigcup_n \mathbf{R}(I - T_n)} = \overline{\mathrm{lin} \bigcup_n \mathbf{R}(D_nA)}.$$

Existiert Q_∞, so gilt

$$\mathbf{R}(Q_\infty) \supseteq \mathbf{N}(I - Q_\infty) \supseteq \bigcap_n \mathbf{N}(I - S_n) = \bigcap_n \mathbf{N}(AD_n),$$

$$\mathbf{N}(Q_\infty) \subseteq \mathbf{R}(I - Q_\infty) \subseteq \overline{\mathrm{lin} \bigcup_n \mathbf{R}(I - S_n)} = \overline{\mathrm{lin} \bigcup_n \mathbf{R}(AD_n)}.$$

Beweis: Aus (1.5), (1.6) und (1.7) gewinnt man durch Grenzübergang einerseits

$$I - P_\infty = \lim_{n\to\infty} B_nA = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} T_nT_{n-1} \cdots T_{i+1}D_iA$$

und andererseits

$$I - P_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} D_i S_{i-1} S_{i-2} \dots S_0 A = \sum_{i=0}^{\infty} D_i A T_{i-1} T_{i-2} \dots T_0.$$

Unter Beachtung von (1.2) liefert die erste Beziehung

$$\bigcap_n \mathrm{N}(I - T_n) = \bigcap_n \mathrm{N}(D_n A) \subseteq \mathrm{N}(I - P_\infty)$$

und die zweite Beziehung

$$\overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(I - T_n)} = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n A)} \supseteq \mathrm{R}(I - P_\infty).$$

Da $(I - P_\infty)\, x = 0$ sofort $x = P_\infty x$ und $P_\infty x = 0$ sofort $(I - P_\infty)\, x = x$ nach sich zieht, bekommt man auch

$$\mathrm{N}(I - P_\infty) \subseteq \mathrm{R}(P_\infty), \qquad \mathrm{N}(P_\infty) \subseteq \mathrm{R}(I - P_\infty).$$

Die Behauptungen für Q_∞ zeigt man entsprechend ∎

Der folgende Satz beantwortet die Frage, wann in den Mengenbeziehungen des Satzes 2.1 das Gleichheitszeichen steht.

Satz 2.2: *Es existiere P_∞. Dann gilt*

a) $P_\infty = T_n P_\infty (\forall\, n) \Leftrightarrow D_n A P_\infty = 0 (\forall\, n) \Leftrightarrow \mathrm{R}(P_\infty) = \bigcap_n \mathrm{N}(D_n A)$,

b) $P_\infty = P_\infty T_n (\forall\, n) \Leftrightarrow P_\infty D_n A = 0 (\forall\, n) \Leftrightarrow \mathrm{N}(P_\infty) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n A)}$.

Ist in a) *oder* b) *eine der Bedingungen erfüllt, so ist P_∞ ein Projektor* ($P_\infty^2 = P_\infty$). *Ist in* a) *und* b) *jeweils eine der Bedingungen erfüllt, so ergibt sich*

$$X = \bigcap_n \mathrm{N}(D_n A) \oplus \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n A)}. \tag{2.1}$$

Es existiere Q_∞. Dann gilt

c) $Q_\infty = S_n Q_\infty (\forall\, n) \Leftrightarrow A D_n Q_\infty = 0 (\forall\, n) \Leftrightarrow \mathrm{R}(Q_\infty) = \bigcap_n \mathrm{N}(A D_n)$,

d) $Q_\infty = Q_\infty S_n (\forall\, n) \Leftrightarrow Q_\infty A D_n = 0 (\forall\, n) \Leftrightarrow \mathrm{N}(Q_\infty) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(A D_n)}$.

Ist in c) *oder* d) *eine der Bedingungen erfüllt, so ist Q_∞ ein Projektor* ($Q_\infty^2 = Q_\infty$). *Ist in* c) *und* d) *jeweils eine der Bedingungen erfüllt, so ergibt sich*

$$Y = \bigcap_n \mathrm{N}(A D_n) \oplus \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(A D_n)}. \tag{2.1'}$$

Beweis: Wegen $T_n = I - D_n A (\forall\, n)$ sind offenbar die Bedingungen $P_\infty = T_n P_\infty (\forall\, n)$ und $D_n A P_\infty = 0 (\forall\, n)$ bzw. $P_\infty = P_\infty T_n (\forall\, n)$ und $P_\infty D_n A = 0 (\forall\, n)$ äquivalent. Weiterhin bedeutet $D_n A P_\infty = 0 (\forall\, n)$ gerade

$$\mathrm{R}(P_\infty) \subseteq \bigcap_n \mathrm{N}(D_n A)$$

und $P_\infty D_n A = 0 (\forall\, n)$ ebenso

$$\overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n A)} \subseteq \overline{\mathrm{N}(P_\infty)} = \mathrm{N}(P_\infty).$$

Nach Satz 2.1 sind damit die Äquivalenzen in a) und b) nachgewiesen.

Aus $P_\infty = T_n P_\infty (\forall\, n)$ folgt $P_\infty = P_n P_\infty (\forall\, n)$ und nach Grenzübergang $P_\infty = P_\infty^2$. Entsprechend zieht $P_\infty = P_\infty T_n (\forall\, n)$ die Gleichung $P_\infty = P_\infty^2$ nach sich.

Aus $P_\infty = T_n P_\infty = P_\infty T_n (\forall\, n)$ erhält man wegen a), b) und $P_\infty = P_\infty^2$ die Darstellung (2.1).

Den zweiten Teil des Satzes zeigt man entsprechend ∎

Bemerkungen: a) Gilt die Zerlegung (2.1), dann kann man sich bei der Konvergenzuntersuchung von (P_n) auf den Raum $\overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n A)}$ beschränken, weil für alle $x \in \bigcap_n \mathrm{N}(D_n A)$ die Gleichung $P_n x = T_n x = x (\forall\, n)$ zutrifft (siehe auch [9]).

b) Ist der Operator P_∞ ein sogenannter Projektionskern (siehe [9]), d. h., genügt er der Beziehung $P_\infty = T_n P_\infty = P_\infty T_n (\forall\, n)$, so bestehen die Gleichungen

$$\mathrm{R}(P_\infty) = \mathrm{N}(I - P_\infty) = \bigcap_n \mathrm{N}(I - T_n) = \bigcap_n \mathrm{N}(D_n A),$$

$$\mathrm{N}(P_\infty) = \mathrm{R}(I - P_\infty) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(I - T_n)} = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n A)}.$$

c) Analoge Aussagen lassen sich für (Q_n) und Q_∞ formulieren.

Einige nützliche Zusammenhänge zwischen Operatorgleichungen und entsprechenden Beziehungen von Nullräumen und Wertebereichen vermitteln auch die beiden nachstehenden Sätze.

Satz 2.3: *Es existiere P_∞. Dann sind die Bedingungen*

$$\text{a) } P_\infty D_n = 0 (\forall\, n), \qquad \text{b) } \mathrm{N}(P_\infty) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n)}$$

äquivalent. Aus jeder der beiden Bedingungen folgt

$$P_\infty^2 = P_\infty,$$

$$\mathrm{N}(P_\infty) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n A)} = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n)}, \qquad \mathrm{N}(A D_n) = \mathrm{N}(D_n) (\forall\, n). \tag{2.2}$$

Es existiere Q_∞. Dann sind die Bedingungen

$$\text{c) } D_n Q_\infty = 0 (\forall\, n), \qquad \text{d) } \mathrm{R}(Q_\infty) = \bigcap_n \mathrm{N}(D_n)$$

äquivalent. Aus jeder der beiden Bedingungen folgt

$$Q_\infty^2 = Q_\infty, \quad \mathrm{R}(Q_\infty) = \bigcap_n \mathrm{N}(A D_n) = \bigcap_n \mathrm{N}(D_n), \quad \overline{\mathrm{R}(D_n A)} = \overline{\mathrm{R}(D_n)} (\forall\, n). \tag{2.2'}$$

Beweis: Es sei a) erfüllt. Dann gilt

$$\overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n)} \subseteq \overline{\mathrm{N}(P_\infty)} = \mathrm{N}(P_\infty).$$

Andererseits gewinnt man aus a) die Gleichungen $P_\infty D_n A = 0 (\forall\, n)$ und nach Satz 2.2 die Beziehungen

$$P_\infty^2 = P_\infty, \qquad \mathrm{N}(P_\infty) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n A)}.$$

Wegen $\overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n A)} \subseteq \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n)}$ bedeutet das

$$\mathrm{N}(P_\infty) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n A)} = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n)}.$$

Umgekehrt ergibt sich aus b) sofort a).

Die Gleichungen $P_\infty D_n = 0(\forall n)$ liefern nach (1.7) außerdem die Eigenschaft $\lim\limits_{m\to\infty} B_m A D_n \doteq D_n(\forall n)$. Daraus resultiert

$$N(D_n) \subseteq N(AD_n) \subseteq N\left(\lim_{m\to\infty} B_m A D_n\right) = N(D_n),$$

d. h. $N(AD_n) = N(D_n)$.

Es sei c) erfüllt. Dann gilt $R(Q_\infty) \subseteq \bigcap\limits_n N(D_n)$. Andererseits gewinnt man aus c) die Gleichungen $AD_n Q_\infty = 0(\forall n)$ und nach Satz 2.2 die Beziehungen

$$Q_\infty^2 = Q_\infty, \qquad R(Q_\infty) = \bigcap_n N(AD_n).$$

Wegen $\bigcap\limits_n N(D_n) \subseteq \bigcap\limits_n N(AD_n)$ bedeutet das $R(Q_\infty) = \bigcap\limits_n N(AD_n) = \bigcap\limits_n N(D_n)$. Umgekehrt ergibt sich aus d) sofort c).

Die Gleichungen $D_n Q_\infty = 0(\forall n)$ liefern nach (1.7) außerdem die Eigenschaft $\lim\limits_{m\to\infty} D_n A B_m = D_n(\forall n)$. Daraus resultiert

$$\overline{R(D_n)} \supseteq \overline{R(D_n A)} \supseteq \overline{R\left(\lim_{m\to\infty} D_n A B_m\right)} = \overline{R(D_n)},$$

d. h. $\overline{R(D_n A)} = \overline{R(D_n)}$ ∎

Bemerkungen: Existiert P_∞ und gilt $P_\infty = P_\infty T_n(\forall n)$, so sind nach Satz 2.2 und Satz 2.3 die Bedingungen

$$\text{a) } P_\infty D_n = 0(\forall n), \qquad \text{b) } \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n R(D_n A)} = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n R(D_n)}$$

gleichwertig. Existiert Q_∞ und gilt $Q_\infty = S_n Q_\infty(\forall n)$, so sind nach Satz 2.2 und Satz 2.3 die Bedingungen

$$\text{c) } D_n Q_\infty = 0(\forall n), \qquad \text{d) } \bigcap_n N(AD_n) = \bigcap_n N(D_n)$$

gleichwertig.

Die Beziehungen (2.2) und (2.2′) findet man unter etwas spezielleren Voraussetzungen im Matrizenfall schon in [3, S. 32] und [4, S. 440]. Hierbei ist die Abschließung in (2.2′) überflüssig. Im übrigen ist (2.2) schon dann erfüllt, wenn eine Folge (D_m'') mit $D_m'' \in L(Y, X)$ und $\lim\limits_{m\to\infty} (I - D_m'' A) D_n = 0(\forall n)$ existiert. Ebenso besteht die Gleichung (2.2′) schon dann, wenn es eine Folge (D_m') mit $D_m' \in L(Y, X)$ und $\lim\limits_{m\to\infty} D_n(I - AD_m') = 0(\forall n)$ gibt. Diese allgemeinen Bedingungen spielen später in Satz 3.2 noch eine Rolle.

Satz 2.4: *Es existiere P_∞. Dann sind die Bedingungen*

$$\text{a) } AP_\infty = 0, \qquad \text{b) } R(P_\infty) = N(A)$$

äquivalent. Aus jeder der beiden Bedingungen folgt

$$P_\infty^2 = P_\infty, \qquad R(P_\infty) = \bigcap_n N(D_n A) = N(A).$$

Es existiere Q_∞. Dann sind die Bedingungen

$$\text{c) } Q_\infty A = 0, \qquad \text{d) } N(Q_\infty) = \overline{R(A)}$$

äquivalent. Aus jeder der beiden Bedingungen folgt

$$Q_\infty^2 = Q_\infty, \qquad \mathrm{N}(Q_\infty) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(AD_n)} = \overline{\mathrm{R}(A)}.$$

Beweis: Aus a) erhält man unter Berücksichtigung von Satz 2.1

$$\mathrm{R}(P_\infty) \subseteq \mathrm{N}(A) \subseteq \bigcap_n \mathrm{N}(D_nA) \subseteq \mathrm{R}(P_\infty),$$

d. h. b). Die Umkehrung ist offensichtlich.
Aus c) erhält man unter Berücksichtigung von Satz 2.1

$$\overline{\mathrm{R}(A)} \subseteq \overline{\mathrm{N}(Q_\infty)} = \mathrm{N}(Q_\infty) \subseteq \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(AD_n)} \subseteq \overline{\mathrm{R}(A)},$$

d. h. d). Die Umkehrung ist offensichtlich. Das Übrige folgt aus Satz 2.2 ∎

Bemerkung: Existiert P_∞ und gilt $P_\infty = T_nP_\infty(\forall n)$, so sind nach Satz 2.2 und Satz 2.4 die Bedingungen

$$\text{a) } AP_\infty = 0, \qquad \text{b) } \bigcap_n \mathrm{N}(D_nA) = \mathrm{N}(A)$$

gleichwertig. Existiert Q_∞ und gilt $Q_\infty = Q_\infty S_n(\forall n)$, so sind nach Satz 2.2 und Satz 2.4 die Bedingungen

$$\text{c) } Q_\infty A = 0, \qquad \text{d) } \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(AD_n)} = \overline{\mathrm{R}(A)}$$

gleichwertig.

Wir wollen jetzt untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die Operatoren P_∞ und Q_∞ in Hilberträumen X und Y selbstadjungiert sind. Dazu benötigen wir zunächst zwei Hilfssätze. Der erste ist allgemein bekannt. Der zweite stammt aus der Arbeit [9].

Lemma 2.5: *Es sei H ein Hilbertraum. Dann ist ein Projektor $T \in L(H)$ genau dann selbstadjungiert, wenn $H = \mathrm{R}(T) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{N}(T)$ gilt.*

Lemma 2.6: *Es sei (H_n) eine Folge von Teilräumen des Hilbertraumes H. Dann besteht mit den Abkürzungen*

$$X_0 = \bigcap_n H_n, \qquad X_1 = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n H_n{}^\perp}$$

die Beziehung $H = X_0 \overset{\perp}{\oplus} X_1$.

Bemerkung: Für eine Folge (U_n) mit $U_n \in L(H)$ erhält man wegen

$$H = \mathrm{N}(U_n) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{R}(U_n{}^*)} = \overline{\mathrm{R}(U_n)} \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{N}(U_n{}^*)$$

nach Lemma 2.6 offenbar die Darstellungen

$$\begin{aligned} H &= \bigcap_n \mathrm{N}(U_n) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(U_n{}^*)} = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(U_n)} \overset{\perp}{\oplus} \bigcap_n \mathrm{N}(U_n{}^*) \\ &= \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{N}(U_n)} \overset{\perp}{\oplus} \bigcap_n \overline{\mathrm{R}(U_n{}^*)} = \bigcap_n \overline{\mathrm{R}(U_n)} \overset{\perp}{\oplus} \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{N}(U_n{}^*)}. \end{aligned}$$

Satz 2.7: *Es existiere P_∞.*

a) *Gilt $P_\infty = T_nP_\infty(\forall n)$, so ist $P_\infty = P_\infty^* \Leftrightarrow \mathrm{N}(P_\infty) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(A^*D_n{}^*)}$.*
b) *Gilt $AP_\infty = 0$, so ist $P_\infty = P_\infty^* \Leftrightarrow \mathrm{N}(P_\infty) = \overline{\mathrm{R}(A^*)}$.*

c) *Gilt* $P_\infty = P_\infty T_n(\forall n)$, *so ist* $P_\infty = P_\infty^* \Leftrightarrow \mathbf{R}(P_\infty) = \bigcap_n \mathbf{N}(A^* D_n^*)$.

d) *Gilt* $P_\infty D_n = 0(\forall n)$, *so ist* $P_\infty = P_\infty^* \Leftrightarrow \mathbf{R}(P_\infty) = \bigcap_n \mathbf{N}(D_n^*)$.

Es existiere Q_∞.

e) *Gilt* $Q_\infty = S_n Q_\infty(\forall n)$, *so ist* $Q_\infty = Q_\infty^* \Leftrightarrow \mathbf{N}(Q_\infty) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathbf{R}(D_n^* A^*)}$.

f) *Gilt* $D_n Q_\infty = 0(\forall n)$, *so ist* $Q_\infty = Q_\infty^* \Leftrightarrow \mathbf{N}(Q_\infty) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathbf{R}(D_n^*)}$.

g) *Gilt* $Q_\infty = Q_\infty S_n(\forall n)$, *so ist* $Q_\infty = Q_\infty^* \Leftrightarrow \mathbf{R}(Q_\infty) = \bigcap_n \mathbf{N}(D_n^* A^*)$.

h) *Gilt* $Q_\infty A = 0$, *so ist* $Q_\infty = Q_\infty^* \Leftrightarrow \mathbf{R}(Q_\infty) = \mathbf{N}(A^*)$.

Beweis: Es existiere P_∞. Für $P_\infty = T_n P_\infty(\forall n)$ ist nach Satz 2.2 die Gleichung $\mathbf{R}(P_\infty) = \bigcap_n \mathbf{N}(D_n A)$ erfüllt. Nach Lemma 2.6 ergibt sich

$$\mathbf{R}(P_\infty)^\perp = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathbf{N}(D_n A)^\perp} = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathbf{R}(A^* D_n^*)}.$$

Für $AP_\infty = 0$ ist nach Satz 2.4 die Gleichung $\mathbf{R}(P_\infty) = \mathbf{N}(A)$ erfüllt. Daraus ergibt sich

$$\mathbf{R}(P_\infty)^\perp = \mathbf{N}(A)^\perp = \overline{\mathbf{R}(A^*)}.$$

Auf Grund von Lemma 2.5 sind die Beziehungen $\mathbf{R}(P_\infty)^\perp = \mathbf{N}(P_\infty)$ und $P_\infty = P_\infty^*$ äquivalent. Also stimmen die Behauptungen a) und b). Die übrigen Behauptungen zeigt man ähnlich ∎

Bemerkung: Jede der Voraussetzungen in b), d), f) bzw. *h*) impliziert die jeweils vorangehende Voraussetzung in a), c), e) bzw. g). So gewinnt man aus $AP_\infty = 0$ und $P_\infty = P_\infty^*$ z. B. die Gleichungen

$$\mathbf{N}(P_\infty) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathbf{R}(A^* D_n^*)} = \overline{\mathbf{R}(A^*)}.$$

Bisher wurde die Existenz von P_∞ bzw. Q_∞ stets vorausgesetzt. Das nachstehende Lemma enthält hinreichende Bedingungen für die Existenz dieser Operatoren.

Lemma 2.8: *Es sei* (U_n) *eine Folge von Operatoren in einem Hilbertraum* H. *Dabei existiere eine endliche Anzahl von Operatoren* $U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_m}$ *aus der Menge* $\{U_n\}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Es ist* $\{U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_m}\} = \{U_n\}$.

b) *Die konstanten Folgen* $(U_{n_1}), (U_{n_2}), \ldots, (U_{n_m})$ *sind Teilfolgen von* (U_n).

c) *Es gilt* $\sup_n \min \{k-n \mid k > n,\ U_k = U_n\} < \infty$.

d) *Die Operatoren* $U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_m}$ *sind Orthoprojektoren (bezüglich einer geeigneten Norm).*

e) *Einer der Operatoren* $U_{n_1}, U_{n_2}, \ldots, U_{n_m}$ *ist kompakt auf dem Teilraum* $\overline{\operatorname{lin} \bigcup_{i=1}^m \mathbf{N}(U_{n_i})}$.

Dann konvergiert die Produktfolge $U_n U_{n-1} \ldots U_0$. *Für den Grenzoperator* U *ergibt sich darüber hinaus*

$$U^2 = U = U^* = UU_n = U_n U(\forall n),$$

$$\mathbf{R}(U) = \bigcap_{i=1}^m \mathbf{R}(U_{n_i}), \qquad \mathbf{N}(U) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_{i=1}^m \mathbf{N}(U_{n_i})}.$$

Beweis: Die Behauptungen sind in der Arbeit [10] unter allgemeineren Voraussetzungen hergeleitet ∎

Bemerkungen: Operatorfolgen (U_n) mit den Eigenschaften a), b), c) enthalten nur endlich viele verschiedene Operatoren, die in bestimmten, nicht über alle Grenzen wachsenden Abständen in der Folge immer wieder auftreten. Die Voraussetzung e) ist äquivalent zur Bedingung

e') Es ist $\dim \mathbf{R}\left(U_{n_i} \mid \overline{\operatorname{lin} \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{N}(U_{n_i})}\right) < \infty$ für ein $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

3. Existenzbedingungen und Eigenschaften von B_∞

Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, daß A normal auflösbar ist $\left(\mathbf{R}(A) = \overline{\mathbf{R}(A)}\right)$. Nach einem vorbereitenden Lemma werden Bedingungen für die Existenz von B_∞ angegeben. Die Bedingungen werden schrittweise so verschärft, daß B_∞ jeweils noch bestimmte zusätzliche Eigenschaften besitzt. In eckige Klammern gesetzte Ausdrücke sind im Grunde überflüssig, können bei Bedarf aber auch hinzugenommen werden.

Lemma 3.1: *Existieren für zwei Operatorfolgen (C_n), (C_m') mit $C_n \in L(Y, X)$, $C_m' \in L(Y, X)$ die Grenzwerte*

$$\lim_{n\to\infty} C_n A, \qquad \lim_{m\to\infty} A C_m',$$

so existieren auch die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} C_n A C_m', \qquad \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} C_n A C_m'.$$

Darüber hinaus stimmen beide überein.

Beweis: Es mögen die Grenzwerte $C = \lim_{n\to\infty} C_n A$ und $C' = \lim_{m\to\infty} A C_m'$ existieren. Dann existiert auch der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} C_n \mid \mathbf{R}(A)$, den wir mit C^0 bezeichnen. Das Element $\lim_{m\to\infty} A C_m' x = C'x$ gehört offenbar zu $\mathbf{R}(A) = \overline{\mathbf{R}(A)}$. Daher gibt es ein y mit $C'x = Ay$. Also existiert

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} C_n A C_m' x = \lim_{n\to\infty} C_n C' x = \lim_{n\to\infty} C_n A y = C y = C^0 A y = C^0 C' x$$

für alle x. Ebenso existiert wegen $\mathbf{R}(A) = \overline{\mathbf{R}(A)}$

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} C_n A C_m' x = \lim_{m\to\infty} C C_m' x = \lim_{m\to\infty} C^0 A C_m' x = C^0 C' x$$

für alle x ∎

Satz 3.2: *Der Grenzoperator B_∞ existiert, wenn eine der beiden nachstehenden Voraussetzungen erfüllt ist:*

a) *Es existiert P_∞. Es gibt eine Folge (D_m') mit $D_m' \in L(Y, X)$, für die $\lim_{m\to\infty} A D_m'$ existiert und $\lim_{m\to\infty} D_n(I - A D_m') = 0 (\forall\, n)$ gilt.*

b) *Es existiert Q_∞. Es gibt eine Folge (D_n'') mit $D_n'' \in L(Y, X)$, für die $\lim_{n\to\infty} D_n'' A$ existiert und $\lim_{n\to\infty} (I - D_n'' A) D_m = 0 (\forall\, m)$ gilt.*

Beweis: Es existiere P_∞. Dann existiert nach (1.7) auch $\lim_{n\to\infty} B_n A$. Gibt es eine

Folge (D_m') mit den obigen Eigenschaften, so ist

$$D_n = \lim_{m\to\infty} D_n A D_m' = D_n \lim_{m\to\infty} A D_m' (\forall\, n),$$

$$B_n = \sum_{i=0}^{n} T_n T_{n-1} \dots T_{i+1} D_i = \sum_{i=0}^{n} T_n T_{n-1} \dots T_{i+1} \left(D_i \lim_{m\to\infty} A D_m'\right)$$

$$= B_n \lim_{m\to\infty} A D_m'.$$

Benutzt man nun Lemma 3.1 mit $C_n = B_n$ und $C_m' = D_m'$, dann erhält man die Existenz von

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} B_n A D_m' = \lim_{n\to\infty} B_n \lim_{m\to\infty} A D_m' = \lim_{n\to\infty} B_n = B_\infty .$$

Entsprechend zeigt man die Existenz von B_∞ unter der Voraussetzung b) ∎

Bemerkung: Der Satz ist eine Verallgemeinerung von Theorem 6 der Arbeit [1].

Lemma 3.3: *Existiert B_∞ und gilt $B_\infty A D_n = D_n (\forall\, n)$ oder $D_n A B_\infty = D_n (\forall\, n)$, so ist B_∞ eine äußere Inverse von A ($B_\infty A B_\infty = B_\infty$).*

Beweis: Aus $B_\infty A D_n = D_n (\forall\, n)$ folgt

$$B_\infty A B_n = B_\infty A \sum_{i=0}^{n} D_i Q_{i-1} = \sum_{i=0}^{n} D_i Q_{i-1} = B_n (\forall\, n).$$

Aus $D_n A B_\infty = D_n (\forall\, n)$ gewinnt man

$$B_n A B_\infty = \sum_{i=0}^{n} T_n T_{n-1} \dots T_{i+1} D_i \cdot A B_\infty = \sum_{i=0}^{n} T_n T_{n-1} \dots T_{i+1} D_i = B_n (\forall\, n).$$

Durch Grenzübergang entsteht die Behauptung ∎

Bemerkung: Unter etwas spezielleren Voraussetzungen findet man die Behauptung für Matrizen etwa in [3, S. 32] und [4, S. 440].

Satz 3.4: *Die Bedingungen*

a) $\exists\, P_\infty,\ \exists\, Q_\infty,\ P_\infty D_n = 0 (\forall\, n)$,

b) $\exists\, P_\infty,\ \exists\, Q_\infty,\ \mathrm{N}(P_\infty) = \overline{\mathrm{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n)}\ [= \overline{\mathrm{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n A)}]$,

c) $\exists\, B_\infty,\ B_\infty A D_n = D_n (\forall\, n)$

sind äquivalent. Die Bedingungen

d) $\exists\, P_\infty,\ \exists\, Q_\infty,\ D_n Q_\infty = 0 (\forall\, n)$,

e) $\exists\, P_\infty,\ \exists\, Q_\infty,\ \mathrm{R}(Q_\infty) = \bigcap_n \mathrm{N}(D_n) \left[= \bigcap_n \mathrm{N}(A D_n)\right]$,

f) $\exists\, B_\infty,\ D_n A B_\infty = D_n (\forall\, n)$

sind äquivalent.

Aus jeder der Bedingungen folgt $B_\infty A B_\infty = B_\infty$, $P_\infty B_\infty = B_\infty Q_\infty = 0$.

Beweis: Unter der Voraussetzung a) ist mit $D_n'' = B_n$ die Bedingung b) des Satzes 3.2 erfüllt. Damit existiert B_∞. Aus $P_\infty D_n = 0 (\forall\, n)$ ergibt sich nach (1.8) auch $B_\infty A D_n = D_n (\forall\, n)$. Also ist c) nachgewiesen. Die Umkehrung ist auf Grund von (1.7) und (1.8) offensichtlich. Die Äquivalenz von a) und b) liefert Satz 2.3. Den zweiten Teil der Behauptungen zeigt man entsprechend. Die Beziehungen $B_\infty A B_\infty = B_\infty$ und $P_\infty B_\infty = B_\infty Q_\infty = 0$ erhält man unter Beachtung von Lemma 3.3 und (1.8) ∎

Lemma 3.5: *Existiert B_∞, so existieren auch P_∞ und Q_∞. Außerdem sind dann folgende Bedingungen äquivalent:*

a) $AB_\infty A = A$ (B_∞ *ist innere Inverse von* A), b) $AP_\infty = 0$, c) $Q_\infty A = 0$,
d) $\mathrm{R}(P_\infty) = \mathrm{N}(A) \left[= \bigcap\limits_n \mathrm{N}(D_n A)\right]$, e) $\mathrm{N}(Q_\infty) = \mathrm{R}(A) \left[= \overline{\mathrm{lin} \bigcup\limits_n \mathrm{R}(AD_n)}\right]$.

Beweis: Die Behauptungen resultieren unmittelbar aus (1.7), (1.8) und Satz 2.4, wenn man $\overline{\mathrm{R}(A)} = \mathrm{R}(A)$ beachtet ∎

Bemerkung: Die Bedingung a) wird unter den Voraussetzungen d) und e) für Matrizen schon in [3, S. 33] bzw. [4, S. 442) hergeleitet.

Satz 3.6: *Die Bedingungen*

a) $\exists P_\infty, \exists Q_\infty, P_\infty D_n = 0 (\forall n), AP_\infty = 0$,
b) $\exists P_\infty, \exists Q_\infty, \mathrm{N}(P_\infty) = \overline{\mathrm{lin} \bigcup\limits_n \mathrm{R}(D_n)}, \mathrm{R}(P_\infty) = \mathrm{N}(A)$,
c) $\exists B_\infty, B_\infty A D_n = D_n (\forall n), AB_\infty A = A$

sind äquivalent. Die Bedingungen

d) $\exists P_\infty, \exists Q_\infty, D_n Q_\infty = 0 (\forall n), Q_\infty A = 0$,
e) $\exists P_\infty, \exists Q_\infty, \mathrm{R}(Q_\infty) = \bigcap\limits_n \mathrm{N}(D_n), \mathrm{N}(Q_\infty) = \mathrm{R}(A)$,
f) $\exists B_\infty, D_n A B_\infty = D_n (\forall n), AB_\infty A = A$

sind äquivalent.

Beweis: Die Behauptungen ergeben sich aus Satz 3.4 und Lemma 3.5 ∎

Ab jetzt seien X und Y Hilberträume.

Satz 3.7: *Die Bedingungen*

a) $\exists P_\infty, \exists Q_\infty, P_\infty D_n = 0 (\forall n), P_\infty = P_\infty^*$,
b) $\exists P_\infty, \exists Q_\infty, \mathrm{N}(P_\infty) = \overline{\mathrm{lin} \bigcup\limits_n \mathrm{R}(D_n)}, \mathrm{R}(P_\infty) = \bigcap\limits_n \mathrm{N}(D_n^*)$,
c) $\exists B_\infty, B_\infty A D_n = D_n (\forall n), (B_\infty A)^* = B_\infty A$

sind äquivalent. Die Bedingungen

d) $\exists P_\infty, \exists Q_\infty, D_n Q_\infty = 0 (\forall n), Q_\infty = Q_\infty^*$,
e) $\exists P_\infty, \exists Q_\infty, \mathrm{R}(Q_\infty) = \bigcap\limits_n \mathrm{N}(D_n), \mathrm{N}(Q_\infty) = \overline{\mathrm{lin} \bigcup\limits_n \mathrm{R}(D_n^*)}$,
f) $\exists B_\infty, D_n A B_\infty = D_n (\forall n), (AB_\infty)^* = AB_\infty$

sind äquivalent.

Beweis: Die Behauptungen erhält man aus Satz 3.4, Satz 2.7 und Formel (1.8) ∎

Mit Hilfe der bisher bereitgestellten Aussagen kann man leicht weitere Äquivalenzsätze herleiten. Durch Kombination der Sätze 3.6 und 3.7 ergeben sich z. B. Bedingungen dafür, daß B_∞ die sogenannte *Moore-Penrose-Inverse* von A darstellt.

Satz 3.8: *Die Bedingungen*

a) $\exists P_\infty, P_\infty D_n = 0 (\forall n), AP_\infty = 0, P_\infty = P_\infty^*$,
$\exists Q_\infty, D_n Q_\infty = 0 (\forall n), [Q_\infty A = 0], Q_\infty = Q_\infty^*$,
b) $\exists P_\infty, \mathrm{N}(P_\infty) = \overline{\mathrm{lin} \bigcup\limits_n \mathrm{R}(D_n)}, \mathrm{R}(P_\infty) = \bigcap\limits_n \mathrm{N}(D_n^*) = \mathrm{N}(A)$,
$\exists Q_\infty, \mathrm{R}(Q_\infty) = \bigcap\limits_n \mathrm{N}(D_n), \mathrm{N}(Q_\infty) = \overline{\mathrm{lin} \bigcup\limits_n \mathrm{R}(D_n^*)} [= \mathrm{R}(A)]$,

c) $\exists B_\infty, B_\infty A D_n = D_n (\forall n), D_n A B_\infty = D_n (\forall n)$,
$[B_\infty A B_\infty = B_\infty], A B_\infty A = A, (B_\infty A)^* = B_\infty A, (A B_\infty)^* = A B_\infty$
sind äquivalent.

Im folgenden sollen die Ergebnisse dieses Abschnittes auf zwei Klassen von Iterationsverfahren angewandt werden.

4. Eine Klasse von Projektionsverfahren

Gegeben seien zwei Hilberträume X, Y und eine Folge (Z_n) von weiteren Hilberträumen. Wir betrachten einen normal auflösbaren Operator $A \in L(X, Y)$ und eine Operatorfolge (G_n) mit $G_n \in L(Y, Z_n)$ und $\mathrm{R}(G_n A) = Z_n$ für alle n. Der nachstehende Hilfssatz enthält Resultate der Arbeit [11].

Lemma 4.1: a) *Die Operatoren* $G_n A A^* G_n^* \in L(Z_n)$ *besitzen lineare stetige Inverse.*
b) *Das Iterationsverfahren* (1.2) *mit den speziellen Operatoren*

$$D_n = A^* G_n^* (G_n A A^* G_n^*)^{-1} G_n \tag{4.1}$$

projiziert nacheinander orthogonal auf die Lösungsmengen der Gleichungen $G_n A x = G_n b$.
c) *Die Operatoren* T_n *sind Orthoprojektoren mit*

$$\mathrm{R}(T_n) = \mathrm{N}(D_n A) = \mathrm{N}(G_n A) = \mathrm{N}(A^* D_n^*) = \mathrm{N}(D_n^*),$$

$$\mathrm{N}(T_n) = \mathrm{R}(D_n A) = \mathrm{R}(D_n) = \mathrm{R}(A^* D_n^*) = \mathrm{R}(A^* G_n^*).$$

d) *Die Operatoren* S_n *sind Projektoren, auf* $\mathrm{R}(A) = \overline{\mathrm{R}(A)}$ *sogar* $(AA^*)^{-1}$*-Orthoprojektoren, mit*

$$\mathrm{R}(S_n) = \mathrm{N}(A D_n) = \mathrm{N}(D_n) = \mathrm{N}(G_n), \quad \mathrm{N}(S_n) = \mathrm{R}(A D_n) = \mathrm{R}(A A^* G_n^*).$$

Bemerkung: Ist $X = \mathbf{R}^N$, $Y = \mathbf{R}^M$ und (G_n) eine zyklische Folge bestimmter Zeilenauswahlmatrizen, so entsteht aus (1.2), (4.1) das in [7] untersuchte PSH-Verfahren.

Aus den vorangehenden Abschnitten kann man in Verbindung mit Lemma 4.1 Aussagen für Iterationsverfahren der Gestalt (1.2), (4.1) gewinnen.

Satz 4.2: *Es existiere* P_∞ *mit* $P_\infty = P_\infty T_n (\forall n)$. *Es existiere* Q_∞. *Dann existiert auch* B_∞ *mit* $B_\infty A D_n = D_n (\forall n)$ *und* $B_\infty A B_\infty = B_\infty$. *Die Iterationsfolge* (x_n) *konvergiert gegen den Grenzwert* (1.9), *der der Gleichung*

$$B_\infty A x_\infty = B_\infty b$$

genügt. Gilt auch $P_\infty = T_n P_\infty (\forall n)$, *so ist* $(B_\infty A)^* = B_\infty A$. *Außerdem zieht dann die Bedingung* $\bigcap_n \mathrm{N}(G_n A) = \mathrm{N}(A)$ *die Gleichungen*

$$A B_\infty A = A, \qquad A x_\infty = A B_\infty b = (I - Q_\infty)\, b$$

nach sich, wobei aus $b \in \mathrm{R}(A)$ *auch* $A x_\infty = b$ *folgt.*

Beweis: Aus $P_\infty T_n = P_\infty (\forall n)$ erhält man nach Satz 2.2

$$\mathrm{N}(P_\infty) = \overline{\mathrm{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n A)}.$$

Auf Grund von Lemma 4.1 ist $\mathrm{R}(D_nA) = \mathrm{R}(D_n)$ für alle n und damit

$$\overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_nA)} = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n)}.$$

Satz 3.4 liefert nun die Existenz von B_∞ und die Eigenschaften

$$B_\infty AD_n = D_n(\forall n), \qquad B_\infty AB_\infty = B_\infty.$$

Ist zusätzlich die Bedingung $P_\infty = T_nP_\infty(\forall n)$ erfüllt, so sind P_∞ und $B_\infty A = I - P_\infty$ nach Satz 2.7 selbstadjungiert, denn aus $\mathrm{R}(D_nA) = \mathrm{R}(A^*D_n^*)(\forall n)$ ergibt sich auch

$$\mathrm{N}(P_\infty) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(A^*D_n^*)}.$$

Außerdem gilt dann wegen Satz 2.2 und Lemma 4.1

$$\mathrm{R}(P_\infty) = \bigcap_n \mathrm{N}(D_nA) = \bigcap_n \mathrm{N}(G_nA).$$

Für $\bigcap_n \mathrm{N}(G_nA) = \mathrm{N}(A)$ bekommt man also $\mathrm{R}(P_\infty) = \mathrm{N}(A)$. Nach Lemma 3.5 ist die letzte Gleichung äquivalent zu $AB_\infty A = A$. Die übrigen Behauptungen sind aus der Einführung zu entnehmen ∎

Satz 4.3: *Es existiere P_∞. Es existiere Q_∞ mit $Q_\infty = S_nQ_\infty(\forall n)$. Dann existiert auch B_∞ mit $D_nAB_\infty = D_n(\forall n)$ und $B_\infty AB_\infty = B_\infty$. Die Iterationsfolge (x_n) konvergiert gegen den Grenzwert* (1.9), *der für alle n den Gleichungen*

$$G_nAx_\infty = G_nb$$

genügt. Aus $\bigcap_n \mathrm{N}(G_n) = \{0\}$ folgt $AB_\infty = I$.

Gilt auch $Q_\infty = Q_\infty S_n(\forall n)$, so ergibt sich:

$$\overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(AA^*G_n^*)} = \mathrm{R}(A) \Rightarrow AB_\infty A = A;$$

$$\overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(AA^*G_n^*)} = \mathrm{R}(A), \quad \bigcap_n \mathrm{N}(G_n) = \mathrm{N}(A^*) \Rightarrow (AB_\infty)^* = AB_\infty.$$

Beweis: Aus $Q_\infty = S_nQ_\infty(\forall n)$ erhält man nach Satz 2.2

$$\mathrm{R}(Q_\infty) = \bigcap_n \mathrm{N}(AD_n).$$

Auf Grund von Lemma 4.1 ist

$$\bigcap_n \mathrm{N}(AD_n) = \bigcap_n \mathrm{N}(D_n) = \bigcap_n \mathrm{N}(G_n).$$

Damit liefert Satz 3.4 die Existenz von B_∞ und die Eigenschaften

$$D_nAB_\infty = D_n(\forall n), \qquad B_\infty AB_\infty = B_\infty, \qquad D_nQ_\infty = 0(\forall n).$$

Also gilt für den Grenzwert x_∞ nach der Einführung

$$D_nAx_\infty = D_nb(\forall n)$$

und unter Beachtung von $\bigcap_n \mathrm{N}(D_n) = \bigcap_n \mathrm{N}(G_n)$ schließlich

$$G_nAx_\infty = G_nb(\forall n).$$

$\bigcap \mathrm{N}(G_n) = \{0\}$ bedeutet $\mathrm{R}(Q_\infty) = \{0\}$ und $Q_\infty = I - AB_\infty = 0$.

Ist zusätzlich die Bedingung $Q_\infty = Q_\infty S_n(\forall n)$ erfüllt, gewinnt man nach Satz 2.2 und Lemma 4.1

$$\mathrm{N}(Q_\infty) = \overline{\lim \bigcup_n \mathrm{R}(AD_n)} = \overline{\mathrm{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(AA^*G_n^*)}.$$

Daher ist $\overline{\mathrm{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(AA^*G_n^*)} = \mathrm{R}(A)$ äquivalent zu $\mathrm{N}(Q_\infty) = \mathrm{R}(A)$. Die letzte Gleichung garantiert nach Lemma 3.5 gerade die Eigenschaften $AB_\infty A = A$ und $Q_\infty A = 0$. Besteht außerdem noch die Beziehung $\bigcap_n \mathrm{N}(G_n) = \mathrm{N}(A^*)$, dann ist $\mathrm{R}(Q_\infty) = \mathrm{N}(A^*)$. In diesem Falle folgt $Q_\infty = Q_\infty^*$ und $AB_\infty = (AB_\infty)^*$ aus Lemma 2.5 bzw. auch aus Satz 2.7 ∎

Bemerkungen: a) Der Operator P_∞ existiert z. B., wenn die Orthoprojektorenfolge (T_n) den Voraussetzungen des Lemmas 2.8 genügt. Das ist durch geeignete Wahl der Folge (G_n) auf vielfältige Weise erreichbar. Außerdem besitzt P_∞ dann die Eigenschaften

$$P_\infty^2 = P_\infty = P_\infty^* = T_n P_\infty = P_\infty T_n(\forall n).$$

b) Existiert P_∞, so existiert Q_∞ auf den Teilräumen $\mathrm{R}(A)$ und $\bigcap_n \mathrm{N}(G_n)$. Denn es gilt $Q_m A = AP_m$ für alle m und $Q_m x = S_m x = x$ für alle $x \in \bigcap_n \mathrm{R}(S_n) = \bigcap_n \mathrm{N}(G_n)$ und alle m. Daher existiert Q_∞ unter der obigen Voraussetzung, wenn zusätzlich die Bedingung

$$Y = \mathrm{R}(A) + \bigcap_n \mathrm{N}(G_n)$$

erfüllt ist.

c) Ist $Y = \mathrm{R}(A)$ und genügt die $(AA^*)^{-1}$-Orthoprojektorenfolge (S_n) den Voraussetzungen des Lemmas 2.8, so existiert Q_∞ und besitzt die Eigenschaften

$$Q_\infty^2 = Q_\infty = AA^*Q_\infty^*(AA^*)^{-1} = S_n Q_\infty = Q_\infty S_n(\forall n).$$

Aus $\bigcap_n \mathrm{N}(G_n A) = \mathrm{N}(A)$ folgt dabei $\bigcap_n \mathrm{N}(G_n) = \{0\}$ und $Q_\infty = 0$.

5. Eine Klasse von Restprojektionsverfahren

Gegeben seien zwei Hilberträume X, Y und eine Folge (Z_n) von weiteren Hilberträumen. Wir betrachten einen normal auflösbaren Operator $A \in L(X, Y)$ und eine Operatorfolge (H_n) mit $H_n \in L(Z_n, X)$ und $\mathrm{R}(H_n{}^*A^*) = Z_n(\forall n)$. Der nachstehende Hilfssatz enthält Resultate der Arbeit [11].

Lemma 5.1: a) *Die Operatoren* $H_n{}^*A^*AH_n \in L(Z_n)$ *besitzen lineare stetige Inverse.*

b) *Die zum Iterationsverfahren* (1.2) *mit den speziellen Operatoren*

$$D_n = H_n(H_n{}^*A^*AH_n)^{-1} H_n{}^*A^* \tag{5.1}$$

gehörende Restiteration (1.3) *projiziert nacheinander orthogonal auf die Lösungsmengen der Gleichungen* $H_n{}^*A^*r = 0$.

c) *Die Operatoren* S_n *sind Orthoprojektoren mit*

$$\mathrm{R}(S_n) = \mathrm{N}(AD_n) = \mathrm{N}(D_n) = \mathrm{N}(D_n{}^*A^*) = \mathrm{N}(H_n{}^*A^*),$$

$$\mathrm{N}(S_n) = \mathrm{R}(AD_n) = \mathrm{R}(AH_n) = \mathrm{R}(D_n{}^*A^*) = \mathrm{R}(D_n{}^*).$$

d) *Die Operatoren* T_n *sind Projektoren, auf* $\mathbf{R}(A^*) = \overline{\mathbf{R}(A^*)}$ *sogar* A^*A*-Orthoprojektoren, mit*

$$\mathbf{R}(T_n) = \mathbf{N}(D_nA) = \mathbf{N}(H_n^*A^*A), \quad \mathbf{N}(T_n) = \mathbf{R}(D_nA) = \mathbf{R}(D_n) = \mathbf{R}(H_n).$$

Bemerkung: Ist $X = R^N$, $Y = R^M$ und (H_n) eine zyklische Folge bestimmter Spaltenauswahlmatrizen, so entsteht aus (1.2), (5.1) das in [6] untersuchte SPA-Verfahren.

Aus den vorangehenden Abschnitten kann man in Verbindung mit Lemma 5.1 Aussagen für Iterationsverfahren der Gestalt (1.2), (5.1) gewinnen.

Satz 5.2: *Es existiere* P_∞. *Es existiere* Q_∞ *mit* $Q_\infty = S_nQ_\infty(\forall n)$. *Dann existiert auch* B_∞ *mit* $D_nAB_\infty = D_n(\forall n)$ *und* $B_\infty AB_\infty = B_\infty$. *Die Iterationsfolge* (x_n) *konvergiert gegen den Grenzwert* (1.9), *der für alle* n *den Gleichungen*

$$H_n^*A^*Ax_\infty = H_n^*A^*b$$

genügt. Gilt auch $Q_\infty = Q_\infty S_n(\forall n)$, *so ist* $(AB_\infty)^* = AB_\infty$. *Außerdem zieht dann die Bedingung* $\overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathbf{R}(AH_n)} = \mathbf{R}(A)$ *die Gleichungen*

$$AB_\infty A = A, \qquad Ax_\infty = AB_\infty b = (I - Q_\infty)\, b$$

nach sich, wobei aus $b \in \mathbf{R}(A)$ *auch* $Ax_\infty = b$ *folgt.*

Beweis: Zunächst bestehen nach Lemma 5.1 die Beziehungen

$$\bigcap_n \mathbf{N}(AD_n) = \bigcap_n \mathbf{N}(D_n) = \bigcap_n \mathbf{N}(D_n^*A^*) = \bigcap_n \mathbf{N}(H_n^*A^*).$$

Aus $Q_\infty = S_nQ_\infty(\forall n)$ erhält man unter Berücksichtigung von Satz 2.2

$$\mathbf{R}(Q_\infty) = \bigcap_n \mathbf{N}(AD_n) = \bigcap_n \mathbf{N}(D_n).$$

Satz 3.4 liefert nun die Existenz von B_∞ und die Eigenschaften

$$D_nAB_\infty = D_n(\forall n), \qquad B_\infty AB_\infty = B_\infty, \qquad D_nQ_\infty = 0(\forall n).$$

Damit gilt nach der Einführung für den Grenzwert x_∞

$$D_nAx_\infty = D_nb(\forall n)$$

und unter Beachtung von $\bigcap_n \mathbf{N}(D_n) = \bigcap_n \mathbf{N}(H_n^*A^*)$ schließlich

$$H_n^*A^*Ax_\infty = H_n^*A^*b(\forall n).$$

Ist zusätzlich die Bedingung $Q_\infty = Q_\infty S_n(\forall n)$ erfüllt, dann sind die Operatoren Q_∞ und $AB_\infty = I - Q_\infty$ wegen

$$\mathbf{R}(Q_\infty) = \bigcap_n \mathbf{N}(D_n^*A^*)$$

nach Satz 2.7 selbstadjungiert. Außerdem ergibt sich nach Satz 2.2 und Lemma 5.1

$$\mathbf{N}(Q_\infty) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathbf{R}(AD_n)} = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathbf{R}(AH_n)}.$$

Für $\overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathbf{R}(AH)_n} = \mathbf{R}(A)$ bekommt man also $\mathbf{N}(Q_\infty) = \mathbf{R}(A)$.

Auf Grund von Lemma 3.5 ist diese Gleichung äquivalent zu $AB_\infty A = A$. Die übrigen Behauptungen sind aus der Einführung zu entnehmen ∎

Satz 5.3: *Es existiere* P_∞ *mit* $P_\infty = P_\infty T_n(\forall n)$. *Es existiere* Q_∞. *Dann existiert auch* B_∞ *mit* $B_\infty A D_n = D_n(\forall n)$ *und* $B_\infty A B_\infty = B_\infty$. *Die Iterationsfolge* (x_n) *konvergiert gegen den Grenzwert* (1.9), *der der Gleichung*

$$B_\infty A x_\infty = B_\infty b$$

genügt. Aus $\overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(H_n)} = X$ *folgt* $B_\infty A = I$.

Gilt auch $P_\infty = T_n P_\infty(\forall n)$, *so ergibt sich*

$$\bigcap_n \mathrm{N}(H_n{}^* A^* A) = \mathrm{N}(A) \Rightarrow A B_\infty A = A\,;$$

$$\bigcap_n \mathrm{N}(H_n{}^* A^* A) = \mathrm{N}(A), \qquad \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(H_n)} = \mathrm{R}(A^*) \Rightarrow (B_\infty A)^* = B_\infty A.$$

Beweis: Aus $P_\infty = P_\infty T_n(\forall n)$ erhält man nach Satz 2.2 und Lemma 5.1

$$\mathrm{N}(P_\infty) = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n A)} = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(D_n)} = \overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(H_n)}.$$

Satz 3.4 liefert nun die Existenz von B_∞ und die Eigenschaften

$$B_\infty A D_n = D_n(\forall n), \qquad B_\infty A B_\infty = B_\infty.$$

Die Beziehung $\overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(H_n)} = X$ bedeutet $\mathrm{N}(P_\infty) = X$ bzw. $P_\infty = I - B_\infty A = 0$.

Ist zusätzlich die Bedingung $P_\infty = T_n P_\infty(\forall n)$ erfüllt, gewinnt man nach Satz 2.2 und Lemma 5.1

$$\mathrm{R}(P_\infty) = \bigcap_n \mathrm{N}(D_n A) = \bigcap_n \mathrm{N}(H_n{}^* A^* A).$$

Daher ist $\bigcap_n \mathrm{N}(H_n{}^* A^* A) = \mathrm{N}(A)$ äquivalent zu $\mathrm{R}(P_\infty) = \mathrm{N}(A)$. Die letzte Gleichung garantiert nach Lemma 3.5 gerade die Eigenschaften $A B_\infty A = A$ und $A P_\infty = 0$. Besteht außerdem noch die Beziehung $\overline{\operatorname{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(H_n)} = \mathrm{R}(A^*)$, dann ist $\mathrm{N}(P_\infty) = \mathrm{R}(A^*)$. In diesem Falle folgt $P_\infty = P_\infty^*$ und $B_\infty A = (B_\infty A)^*$ aus Lemma 2.5 bzw. auch aus Satz 2.7. Die restlichen Behauptungen sind aus der Einführung zu entnehmen ∎

Bemerkungen: a) Der Operator Q_∞ existiert z. B., wenn die Orthoprojektorenfolge (S_n) den Voraussetzungen des Lemmas 2.8 genügt. Das ist durch geeignete Wahl der Folge (H_n) auf vielfältige Weise erreichbar. Außerdem besitzt Q_∞ dann die Eigenschaften

$$Q_\infty^2 = Q_\infty = Q_\infty^* = S_n Q_\infty = Q_\infty S_n(\forall n).$$

b) Die Existenz von Q_∞ zieht die Existenz von P_∞ nach sich, so daß sich die Existenzforderungen von P_∞^* in den Sätzen 5.2 und 5.3 als überflüssig erweisen. Das kann man folgendermaßen einsehen. Unter der obigen Voraussetzung existiert P_∞ wegen $Q_m A = A P_m(\forall m)$ bzw. $P_m{}^* A^* = A^* Q_m{}^*(\forall m)$ auf $\mathrm{R}(A^*)$. Beachtet man die Beziehung

$$P_m = (A^* A)^{-1} P_m{}^* A^* A(\forall m)$$

auf $\mathrm{R}(A^*)$ (siehe Lemma 5.1), existiert damit auch P_∞ auf $\mathrm{R}(A^*)$. Schließlich ist P_∞ auf $\bigcap_n \mathrm{N}(H_n{}^* A^* A) \supseteq \mathrm{N}(A)$ erklärt. Denn es gilt $P_m x = T_m x = x$ für alle

$x \in \bigcup_n \mathrm{R}(T_n) = \bigcap_n \mathrm{N}(H_n{}^* A^* A)$ und alle m. Auf Grund der Zerlegung $X = \mathrm{R}(A^*) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{N}(A)$ existiert P_∞ demnach auf dem ganzen Raum X.

c) Ist $X = \mathrm{R}(A^*)$ und genügt die A^*A-Orthoprojektorenfolge (T_n) den Voraussetzungen des Lemmas 2.8, so existiert P_∞ und besitzt die Eigenschaften

$$P_\infty^2 = P_\infty = (A^*A)^{-1} P_\infty^* A^*A = T_n P_\infty = P_\infty T_n (\forall n).$$

Aus $\overline{\mathrm{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(AH_n)} = \mathrm{R}(A)$ folgt dabei $\overline{\mathrm{lin} \bigcup_n \mathrm{R}(H_n)} = X$ und $P_\infty = 0$ ∎

LITERATUR

[1] Berg, L.: General iteration methods for the evaluation of linear equations. Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1 (4) (1979), 365–381.

[2] Ljusternik, L. A., und W. I. Sobolew: Elemente der Funktionalanalysis. Akademie-Verlag: Berlin 1968.

[3] Maess, G.: Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme. Nova Acta Leopoldina. Neue Folge 238, Band 52, Halle 1979.

[4] Maess, G.: Iterative Lösung rechteckiger linearer Gleichungssysteme und verallgemeinerte Matrixinverse. Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 22. Numerical Methods. Keszthely (Hungary) 1977.

[5] Maess, G.: Iterative solution of rectangular systems of linear algebraic equations. Banach Center Publications, Vol. Computational Mathematics, XVth Semester, Warsaw 1980 (to appear).

[6] Maess, G., und W. Peters: Lösung inkonsistenter linearer Gleichungssysteme und Bestimmung einer Pseudoinversen für rechteckige Matrizen durch Spaltenapproximation. Z. Angew. Math. Mech. 58 (1978), 233–237.

[7] Peters, W.: Lösung linearer Gleichungssysteme durch Projektion auf Schnitträume von Hyperebenen und Berechnung einer verallgemeinerten Inversen. Beitr. zur Num. Math. 5 (1976), 129–146.

[8] Peters, W., und D. Schott: Über Nullräume, Wertebereiche und Relationen von Operatoren, die bei stationären Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungen auftreten. Rostock. Math. Kolloq. 17 (1981), 71–85.

[9] Schott, D.: Projektionskerne einer Operatorfolge. Beitr. zur Analysis 18 (1981), 31–41.

[10] Schott, D.: Zur Konvergenz von Operatorfolgen im Zusammenhang mit Iterationsverfahren. Math. Nachr. 104 (1981), 253–270.

[11] Schott, D.: Endlich erzeugte Projektionsverfahren zur Lösung linearer Gleichungen im Hilbertraum. Rostock. Math. Kolloq. 16 (1981), 103–128.

[12] Tanabe, K.: Characterization of linear stationary iterative processes for solving a singular system of linear equations. Numer. Math. 22 (1974), 349–359.

Manuskripteingang: 22. 12. 1980

VERFASSER:

Dr. Dieter Schott

Sektion Mathematik/Physik der Pädagogischen Hochschule „Liselotte Herrmann"
DDR-2600 Güstrow, Goldberger Str. 12

Dr. Wolfgang Peters

Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität
DDR - 2500 Rostock, Universitätsplatz 1