Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
2 (1982), S. 71–95

Spektrale Geometrie und Huygenssches Prinzip für Tensorfelder und Differentialformen I

R. SCHIMMING

Es werden verschiedene Laplaceoperatoren L zu einer n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) betrachtet, die auf Tensorfelder bzw. (alternierende bzw. symmetrische) Differentialformen p-ter Stufe wirken. Für definites g und geschlossenes M werden Ergebnisse zur spektralen Geometrie erhalten. Ist z. B. ein gewisses L isospektral zum Laplacian einer flachen Mannigfaltigkeit und p größer als eine von n abhängige Schranke, so ist (M, g) flach. Für lorentzsches g und $n = 6$ werden Ergebnisse zum *Huygensschen Prinzip* (*HP*) erhalten. Aus dem *HP* und gewissen Zusatzannahmen folgt, daß (M, g) flach ist.

Рассматриваются разные операторы Лапласа L, действующие на тензорные поля или на дифференциальные формы (альтернирующие или симметрические) на n-мерном римановом многообразии (M, g). Для знакоопреденной g и замкнутого M получены результаты по спектральной геометрии. Если, например, некоторый L изоспектрально к лапласиану плоского многообразия и степень p больше границы, зависящейся от n, то (M, g) является плоским. Для лоренцовой g и $n = 6$ получены результаты по *принципе Гюйгенса* (ПГ). При допольнительных предположениях из *ПГ* следует, что (M, g) является плоским.

Several Laplace operators L over an n-dimensional Riemannian manifold (M, g), applying to tensor fields and (alternating or symmetric) differential forms of degree p, are considered. For definite g and closed M results on spectral geometry are obtained. If e.g. some L is isospectral to a Laplacian of a flat manifold and p greater than some bound depending on n, then (M, g) is flat. For lorentzian g and $n = 6$ results on *Huygens' principle* (*HP*) are obtained. From *HP* and additional assumptions there follows that (M, g) is flat.

Einleitung

Es werden die folgenden Strukturen über einer orientierten Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geqq 2$ betrachtet:

— Eine definite oder lorentzsche riemannsche Metrik

$$g = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

— Die Vektorbündel

$$\otimes^p T^*, \quad \Lambda^p T^* \quad (0 \leqq p \leqq n), \quad \Pi^p T, \quad \Pi^p T^*/g,$$

welche aus allen p-stufigen Tensoren bzw. nur aus den alternierenden Tensoren bzw. den symmetrischen Tensoren bzw. den bezüglich g spurfreien symmetrischen Tensoren bestehen.

— Die Laplaceoperatoren oder Laplacians

$$\Delta := g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \text{ mit } \nabla := \textit{Levi-Civita-Ableitung} \text{ zu } g,$$

$$\Delta - \frac{n-2}{4(n-1)} RI \text{ mit } I := \text{identischer Operator},$$

$$\varepsilon\delta d - d\delta \equiv \Delta + \varepsilon Z \text{ mit dem Indikator } \varepsilon := \begin{cases} -1 & \text{für } \Lambda^p T^* \\ +1 & \text{für } \Pi^p T^* \end{cases}$$

und dem aus dem Krümmungstensor gebildeten Weitzenböck-Operator Z.

Wir verwenden folgende Sammelbezeichnungen:

$$E^p := \otimes^p T^*, \quad \Lambda^p T^*, \quad \Pi^p T^*, \quad \Pi^p T^*/g;$$

$$E := \bigotimes_{p \geq 0} E^p =: \otimes\, T^*, \quad \Lambda T^*, \quad \Pi T^*, \quad \Pi T^*/g;$$

$$L = \Delta + C \text{ mit } C = 0, \ -\frac{n-2}{4(n-1)} RI, \ \varepsilon Z;$$

$$\mathfrak{L} := C + \frac{n-2}{4(n-1)} RI = \textit{Cottoninvariante} \text{ von } L.$$

Der „reine Lapalacian“ Δ und der Laplacian mit $\mathfrak{L} = 0$ wirken auf die Schnitte eines beliebig gewählten E^p. Der aus

$$d := \text{äußeres Differential}, \ \delta := \text{inneres Differential}$$

gebildete „kanonische Laplacian“ $\varepsilon\delta d - d\delta$ wirkt dagegen nur auf (alternierende oder symmetrische) Differentialformen. Alle drei Typen von Laplacians $L = \Delta + C$ sind in der physikalischen Literatur anzutreffen! Griechische Indizes werden wie gewohnt mittels $(g_{\alpha\beta})$ gesenkt bzw. mittels $(g^{\alpha\beta}) := (g_{\alpha\beta})^{-1}$ gehoben. Weiter bezeichnen wir:

$$\langle u, v\rangle := \text{Skalarprodukt bezüglich } g \text{ von Tensoren } u, v;$$

$$|u|^2 := \langle u, u\rangle;$$

$$\|u\|^2 := \int_M |u|^2 \, d\, Vol \text{ für geschlossenes } M;$$

$$Tr := \text{Spur bezüglich } g \text{ und } E^p;$$

$$Riem = R_{\alpha\beta\mu\nu}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta\, dx^\mu \wedge dx^\nu = \textit{Krümmungstensor};$$

$$Ric = R_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta := g^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\nu\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = \textit{Riccitensor};$$

$$R := g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = \textit{Skalarkrümmung};$$

$$Weyl = C_{\alpha\beta\mu\nu}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta\, dx^\mu \wedge dx^\nu = \textit{Konformkrümmungstensor};$$

$$S = S_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta := Ric - \frac{1}{n} R \cdot g.$$

Nach J. Hadamard [9] kann im Falle der Analytizität die Grundlösung von L aus Potenzreihen in

$$\sigma = \sigma(x, y) = \frac{1}{2} (\text{geodätischer Abstand von } x, y)^2$$

aufgebaut werden. Die Entwicklungskoeffizienten sind dabei proportional zu den sogenannten *Hadamardkoeffizienten* $U_k = U_k(x, y)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, welche man auch für den Fall C^∞ erklären kann. Ab jetzt seien alle betrachteten Objekte von der Klasse C^∞. Aus den U_k kann man Informationen über L und dadurch vermittelt auch über M, g, E^p gewinnen, insbesondere in den beiden Situationen

(I) *g definit, M geschlossen (:= kompakt, randlos, zusammenhängend)*;

(II) *g lorentzsch, $n =: 2m + 2 \geq 4$ geradzahlig.*

In der vorliegenden Arbeit werden Informationen speziell aus $U_2(x, x)$ gewonnen. Die Spur (im Sinne der Spur eines linearen Operators) $Tr\, U_2(x, x)$ ist eine Linearkombination in $|Riem|^2$, $|Ric|^2$, R^2, ΔR; deshalb kann man unter Umständen von $Tr\, U_2$ auf die Krümmung *Riem* schließen.

Spektrale Geometrie: Bei (I) besitzt der formal selbstadjungierte elliptische Differentialoperator L eine Folge von reellen Eigenwerten endlicher Vielfachheit als Spektrum. Man fragt dann nach den Eigenschaften von (M, g), die sich im Spektrum von L widerspiegeln. Die Zahlen

$$U_k(M) := \int_M Tr\, U_k(x, x)\, d\, Vol\,(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

sind spektrale Invarianten. Ist L isospektral zum Laplacian einer flachen Mannigfaltigkeit, so gilt folglich $U_k(M) = 0$ für $k \geqq 1$. Durch Auswertung von $U_2(M) = 0$ beweisen wir unter anderem:

1. *Ist L isospektral zum Laplacian einer flachen Mannigfaltigkeit und ist $48p$ größer oder gleich der aus der Tabelle*

$E = \downarrow$ $\quad L = \rightarrow$	Δ	$\Delta - \frac{n-2}{4(n-1)} RI$
$\otimes T^*$	$4n^3$	n^3
ΠT^*	$8\sqrt{3}\, n^2$	$4\sqrt{3}\, n^2$
$\Pi T^*/g$	$8\sqrt{3}\, n^2$	$4\sqrt{3}\, n^2$

entnommene Schranke, so ist (M, g) flach.
(Wir werden auch noch feinere Abschätzungen für p herleiten! Die Aussage bezieht sich nur auf die in der Tabelle erfaßten Typen von L und E^p.)

2. *Ist $\varepsilon\delta d - d\delta$ für $n \geqq 4$ und drei paarweise verschiedene Stufen p isospektral zum Laplacian einer flachen Mannigfaltigkeit, so ist (M, g) flach.*

Die in die spektrale Geometrie geschlossener Mannigfaltigkeiten hier neu eingebrachten Gesichtspunkte sind insbesondere die Betrachtung
— nicht nur alternierender Differentialformen, sondern auch symmetrischer Differentialformen, spurfrei-symmetrischer Differentialformen und kovarianter Tensorfelder;
— nicht nur des kanonischen Laplacians, sondern auch gewisser „nichtkanonischer" Laplacians.

Im übrigen verweisen wir auf die Literatur, insbesondere [2, 13, 11, 4, 5, 8].

Huygenssches Prinzip (abgekürzt: *HP*): Bei (II) kann man fragen, ob der hyperbolische Differentialoperator L dem *HP* im Sinne von [3] genügt. Das Hadamardsche Kriterium besagt: L ist huygenssch genau dann, wenn

$$\sigma(x, y) = 0 \Rightarrow U_m(x, y) = 0$$

für hinreichend benachbarte Punkte $x, y \in M$. Im physikalischen Fall $n = 4$ kann man das *HP* so interpretieren, daß mit den Lösungen $u = u(x)$ der „Wellengleichung" $L[u] = 0$ eine ungestörte (d. h. ohne Nacheffekte, ohne Schweifterme) Signalübertragung möglich ist. Wir beschränken uns auf den Fall $n = 6$. Durch Auswertung von $Tr\, U_2(x, x) = 0$ beweisen wir unter anderem:

Es seien $|S|^2$, $|Weyl|^2$ positiv definit und $Tr\, \Delta\mathfrak{L} \leqq 0$ und p größer oder gleich der aus der Tabelle

$E =$ ↓ $\quad L =$ →	Δ	$\Delta - \frac{1}{5} RI$
$\otimes T^*$	15	1
ΠT^*	8	1
$\Pi T^*/g$	7	1

entnommene Schranke. Wenn dann L dem HP genügt, so ist (M, g) flach. (Wir werden einfache Beispiele dafür konstruieren, wie man die obigen Voraussetzungen befriedigen und die Schranke für p teilweise noch verkleinern kann. Die Aussage bezieht sich nur auf die in der Tabelle erfaßten Typen von L und E^p.) Die vorliegende Arbeit setzt die Untersuchungen des Autors zum HP bei $n = 6$ fort [20, 17].

§ 1. Natürliche Projektoren

Es sind natürliche Injektionen

$$\Lambda^p T^* \subset \otimes\, {}^p T^* \subset \Pi^p T^* \subset \Pi^p T^*/g \tag{1.1}$$

definiert und in jeweils umgekehrter Richtung natürliche Projektionen. Entsprechend hat man natürliche Projektoren

$$P = P^{(p)}: \otimes\, {}^p T^* \to E^p$$

und $\{\ldots\}$ bezeichne die jeweils zugehörige „Indexoperation". Für $E^p = \Lambda^p T^*$ ist $\{\ldots\}$ gleich der Alternierung $[\ldots]$ und für $E^p = \Pi^p T^*$ gleich der Mischung $(\ldots)$. In Komponenten kann man für $p \geqq 2$ schreiben

$$(Pu)_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = P^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} u_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p} = u_{\{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\}},$$
$$P^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = \delta^{\{\beta_1}_{\{\alpha_1}\delta^{\beta_2}_{\alpha_2} \ldots \delta^{\beta_p\}}_{\alpha_p\}}.$$

Für $p = 0$ und $p = 1$ werden die vier Bündel (1.1) identifiziert und

$$P^{(0)} = 1, \qquad P_\alpha{}^\beta = \delta_\alpha{}^\beta$$

gesetzt. Die Komponenten $P^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2}$ von $P^{(2)}$ sind gleich

$$\delta^{\beta_1}_{\alpha_1}\delta^{\beta_2}_{\alpha_2}, \quad \delta^{\beta_1}_{[\alpha_1}\delta^{\beta_2}_{\alpha_2]}, \quad \delta^{\beta_1}_{(\alpha_1}\delta^{\beta_2}_{\alpha_2)}, \quad \delta^{\beta_1}_{(\alpha_1}\delta^{\beta_2}_{\alpha_2)} - \frac{1}{n} g_{\alpha_1\alpha_2} g^{\beta_1\beta_2}$$

beziehentlich für $\otimes T^*$, ΛT^*, ΠT^*, $\Pi T^*/g$. Wir setzen ferner

$$P_{\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2} := g_{\beta_1\mu_1} g_{\beta_2\mu_2} P^{\mu_1\mu_2}_{\alpha_1\alpha_2}.$$

Satz 1.1: *Aus $g_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} = 0$ folgt*

$$2P_{\alpha\mu,\beta\nu}A^{\mu\nu} = \gamma A_{(\alpha\beta)} - \varepsilon A_{[\alpha\beta]} \tag{1.2}$$

mit beziehentlich in den vier Fällen

$$\gamma := 0, -1, +1, 1 - \frac{2}{n}, \qquad \varepsilon := 0, -1, +1, 1 + \frac{2}{n}. \tag{1.3}$$

Wir definieren:

$$N_0{}^p := \textit{Faserdimension von } E^p,\ N_q{}^p := \binom{p}{q} N_0{}^p/N_0{}^q$$

und betreiben mit diesen Zahlen etwas „Kombinatorik".

Satz 1.2: *Es gilt beziehentlich in den vier Fällen*

$$N_0{}^p = n^p,\quad \binom{n}{p},\quad \binom{n+p-1}{p},\quad \binom{n+p-1}{p} - \binom{n+p-3}{p-2};$$

$$N_q{}^p = \binom{p}{q} n^{p-q},\quad \binom{n-q}{p-q},\quad \binom{n+p-1}{p-q},\quad \frac{n+2p-2}{n+2q-2}\binom{n+p-3}{p-q}\quad (n+q \geqq 3).$$

Für $E = \Lambda T^*$ *bzw.* $= \Pi T^*$ *gilt die Formel*

$$\sum_{q=0}^{r} \varepsilon^q \binom{r}{q} N^p_{q+r} = N^{p+r}_{2r}. \tag{1.4}$$

Den Beweis von (1.4) führt man am besten für die beiden Fälle gesondert durch vollständige Induktion über r. Für ΛT^* findet sich die Formel (1.4) bereits in [8]; neu ist ihre Übertragung auf ΠT^* ∎

In der Algebra der symmetrischen Differentialformen mögen $\cdot$ bzw. $\lrcorner$ die äußere bzw. innere Multiplikation bezeichnen und e^a bzw. i_a die durch

$$e^a u_p := dx^a \cdot u_p,$$

$$i_a u_p := u_{a a_2 \ldots a_p}\, dx^{a_2} \ldots dx^{a_p} \quad (p \geqq 1),\ i_a u_0 := 0 \quad (p = 0)$$

definierte äußere bzw. innere Indexoperation sowie

$$g^p := g \cdot g \cdot \cdots \cdot g \quad (p\text{-mal}).$$

Satz 1.3: *Die natürliche Projektion* $\Pi^p T^* \to \Pi^p T^*/g$ *ist gleich*

$$\sum_{q=0}^{[p/2]} a_q{}^p G_q{}^p \tag{1.5}$$

mit Koeffizienten $a_q{}^p$ *gemäß*

$$(-4)^q \binom{n/2+p-2}{q} a_q{}^p := \binom{p}{2q}\binom{2q}{q} \tag{1.6}$$

und linearen Operatoren $G_q{}^p$ *gemäß*

$$G_q{}^p u_p := g^q \cdot (g^q \lrcorner\ u_p). \tag{1.7}$$

Äquivalent zu (1.6) *ist die Rekursionsformel* (*in der sich* N^p_{p-1} *auf* $\Pi T^*/g$ *beziehe*)

$$(p-2q)(n+p+2q-1)\, a_q{}^p + 4(q+1)^2 a^p_{q+1} = pN^q_{p-1} a^{p-1}_q. \tag{1.8}$$

Es gilt des weiteren die Formel

$$p^2 i_a G_q{}^p e^a = (p-2q)(n+p+2q-1)\, G_q{}^{p-1} + 4q^2 G^{p-1}_{q-1}. \tag{1.9}$$

Den Beweis von (1.9) geben wir hier nicht an. Die übrigen Behauptungen wurden in [18] bewiesen. ∎

Satz 1.4: *Es gilt für* $p \geqq 2$ *und* $1 \leqq k \leqq p-1$

$$N_0{}^k P^{a_1 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_p}_{\beta_1 \ldots \beta_k a_{k+1} \ldots a_p} = N_0{}^p P^{a_1 \ldots a_k}_{\beta_1 \ldots \beta_k}. \tag{1.10}$$

Beweis: Es genügt, (1.10) für $k = p - 1$ zu zeigen, d. h.

$$P^{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_p}_{\alpha\beta_2\ldots\beta_p} = \frac{N_0{}^p}{N_0{}^{p-1}} P^{\alpha_2\ldots\alpha_p}_{\beta_2\ldots\beta_p}. \tag{1.11}$$

Die allgemeine Formel (1.10) ergibt sich dann durch iterierte Anwendung von (1.11). Der Beweis von (1.11) verläuft nun unterschiedlich für die vier Fälle:

$\otimes T^*$: Trivial.

ΛT^* und ΠT^*: Aus der Entwicklungsformel

$$p \cdot P^{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_p}_{\beta\beta_2\ldots\beta_p} = \delta_\beta{}^\alpha P^{\alpha_2\ldots\alpha_p}_{\beta_2\ldots\beta_p} + \varepsilon \sum_{k=2}^{p} \delta^\alpha_{\beta_k} P^{\alpha_2\ldots\ldots\alpha_p}_{\beta_2\ldots\underset{\hat{\beta}}{\beta_k}\ldots\beta_p} \tag{1.12}$$

erhalten wir durch Verjüngung

$$p \cdot P^{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_p}_{\alpha\beta_2\ldots\beta_p} = [n + \varepsilon(p-1)]\, P^{\alpha_2\ldots\alpha_p}_{\beta_2\ldots\beta_p} = N^p_{p-1} P^{\alpha_2\ldots\alpha_p}_{\beta_2\ldots\beta_p}.$$

In (1.12) und im folgenden kennzeichne das Symbol $\wedge$ eine Lücke in einer Indexfolge. Ein Index unter $\wedge$ ist sinngemäß in die Lücke einzusetzen.

$\Pi^p T^*/g$: Indem wir der Einfachheit halber die Mischung — d. h. die natürliche Projektion $\otimes T^* \to \Pi T^*$ — als rechtsseitigen Faktor in der nachfolgend angedeuteten Rechnung mit Operatoren unterdrücken, erhalten wir aus den Formeln (1.8) und (1.9)

$$p^2 i_\alpha P^{(p)} e^\alpha = \sum_{q=0}^{[p/2]} a_q{}^p p^2 i_\alpha G_q{}^p e^\alpha = \cdots = p N^p_{p-1} P^{(p-1)}.$$

Die Komponenten von $i_\alpha P^{(p)} e^\alpha$ sind aber gerade die linke Seite von (1.11) ∎

§ 2. Laplacians und ihre Hadamardkoeffizienten

Die Ricciidentität für Tensorfelder schreiben wir als

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha)\, u = K_{\alpha\beta} u, \tag{2.1}$$

$$(K_{\alpha\beta} u)_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = \sum_{k=1}^{p} R_{\alpha\beta\alpha_k}{}^{\mu}\, u_{\alpha_1\ldots\underset{\hat{\mu}}{\alpha_k}\ldots\alpha_p} \qquad (p \geqq 1). \tag{2.2}$$

Satz 2.1: *Der kanonische Laplacian besitzt die Darstellung*

$$\varepsilon\delta d - d\delta = \Delta + \varepsilon Z \tag{2.3}$$

mit einem linearen Operator Z gemäß

$$\begin{aligned}(Zu)_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} &= \sum_{k=1}^{p} R^\mu_{\alpha_k} u_{\alpha_1\ldots\underset{\hat{\mu}}{\alpha_k}\ldots\alpha_p} \\ &\quad -2 \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^{p} R^{\mu}{}_{\cdot\alpha_k\alpha_l}{}^{\nu}\, u_{\alpha_1\ldots\underset{\hat{\mu}}{\alpha_k}\ldots\underset{\hat{\nu}}{\alpha_l}\ldots\alpha_p} \qquad (p \geqq 2)\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$Zu_0 = 0 \quad (p = 0), \qquad (Zu)_\alpha = R_\alpha{}^\mu u_\mu \quad (p = 1).$$

Beweis: Aus den Darstellungen

$$(p+1)\,(du)_{\alpha\alpha_1\ldots\alpha_p} = (p+1)\, \nabla_{[\alpha} u_{\alpha_1\ldots\alpha_p]} = \nabla_\alpha u_{\alpha_1\ldots\alpha_p} + \varepsilon \sum_{k=1}^{p} \nabla_{\alpha_k} u_{\alpha_1\ldots\underset{\hat{\alpha}}{\alpha_k}\ldots\alpha_p},$$

$$(\delta u)_{\alpha_2\ldots\alpha_p} = \varepsilon p \nabla^\alpha u_{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_p}$$

erhalten wir einerseits

$$\varepsilon(\delta du)_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \Delta u_{\alpha_1\ldots\alpha_p} + \varepsilon \sum_{k=1}^{p} \nabla^\alpha \nabla_{\alpha_k} u_{\alpha_1\ldots\underset{\hat{\alpha}}{\alpha_k}\ldots\alpha_p}$$

und setzen hier ein

$$(\nabla^\alpha \nabla_{\alpha_k} - \nabla_{\alpha_k}\nabla^\alpha)\, u_{\alpha_1\ldots\underset{\hat{\alpha}}{\alpha_k}\ldots\alpha_p} = -R^{\mu}_{\alpha_k} u_{\alpha_1\ldots\underset{\hat{\mu}}{\alpha_k}\ldots\alpha_p} + \sum_{l=1}^{k-1} R^{\alpha}{}_{\alpha_k\alpha_l}{}^{\mu}\, u_{\alpha_1\ldots\underset{\hat{\mu}}{\alpha_l}\ldots\underset{\hat{\alpha}}{\alpha_k}\ldots\alpha_p}$$
$$+ \sum_{l=k+1}^{p} R^{\alpha}{}_{\alpha_k\alpha_l}{}^{\mu}\, u_{\alpha_1\ldots\underset{\hat{\alpha}}{\alpha_k}\ldots\underset{\hat{\mu}}{\alpha_l}\ldots\alpha_p}.$$

Andererseits erhalten wir

$$(d\delta u)_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \varepsilon^{k+1}\nabla_{\alpha_k}(\delta u)_{\alpha_1\ldots\hat{\alpha_k}\ldots\alpha_p} = \sum_{k=1}^{p}\varepsilon^k \nabla_{\alpha_k}\nabla^\alpha u_{\alpha\alpha_1\ldots\hat{\alpha_k}\ldots\alpha_p} = \varepsilon\sum_{k=1}^{p}\nabla_{\alpha_k}\nabla^\alpha u_{\alpha_1\ldots\underset{\hat{\alpha}}{\alpha_k}\ldots\alpha_p}$$

und daraus die Behauptung $\varepsilon\delta d = \Delta + d\delta + \varepsilon Z$ ∎

Für ΛT^* ist die Darstellung (2.3) wohlbekannt (*Weitzenböck-Formel*); neu ist hier die Übertragung auf ΠT^* und die Möglichkeit einer einheitlichen Herleitung.

Neben Einpunkt-Größen (Skalare, Tensoren, Differentialformen, ...), welche über der ganzen Mannigfaltigkeit M erklärt sein sollen, sind auch Zweipunkt-Größen von Interesse, welche nur in einer Umgebung der Diagonale von $M \times M$ erklärt zu sein brauchen. Die Einschränkung auf die Diagonale wird als *Koinzidenzwert der Zweipunkt-Größe* bezeichnet. Die Relation der Gleichheit der Koinzidenzwerte symbolisieren wir durch $\doteq$. Wichtige Beispiele von Zweipunkt-Größen sind $\sigma = \sigma(x, y)$, welches durch das Differentialgleichungsproblem

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\sigma\nabla_\beta\sigma = 2\sigma, \qquad \nabla_\alpha\sigma \doteq 0, \qquad \nabla_\alpha\nabla_\beta\sigma \doteq g_{\alpha\beta} \tag{2.5}$$

bestimmt wird, sowie die Hadamardkoeffizienten $U_k = U_k(x, y)$. Letztere kann man als die regulären Lösungen des rekursiven Differentialgleichungssystems

$$\sigma^\alpha\nabla_\alpha U_0 + \mu U_0 = 0, \quad \sigma^\alpha\nabla_\alpha U_k + (\mu + k)\, U_k = L[U_{k-1}] \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{2.6}$$

nebst der Anfangsbedingung $U_0 \doteq I$, definieren, welche sich bezüglich des ersten Arguments x wie Schnitte von E^p und bezüglich des zweiten Arguments y wie Schnitte des dualen Bündels E^{p*} verhalten. Abkürzend wurde

$$\sigma^\alpha := g^{\alpha\beta}\nabla_\beta\sigma, \qquad 2\mu := \Delta\sigma - n$$

gesetzt und die Differentialoperatoren beziehen sich jeweils auf das erste Argument x.

Der uns hier interessierende Koinzidenzwert des 2. Hadamardkoeffizienten ist sogar für allgemeinere Laplacians

$$L = \Delta + 2A^\alpha\nabla_\alpha + C$$

bekannt: P. B. Gilkey [4, 5] hat $U_2(x, x)$ mittels einer invariantentheoretischen Methode berechnet. Der Autor der vorliegenden Arbeit hat später unabhängig davon das Resultat mittels der „Methode der Koinzidenzwerte" reproduziert [20, 17]. Einige Spezialfälle sind schon länger bekannt, siehe z. B. [6, 11, 2, 13].

Satz 2.2: *Für einen Laplacian $L = \Delta + C$ gilt*

$$180 U_2 \doteq (R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} - R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta})\, I + 15 K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}$$
$$+ 90\left(C + \frac{1}{6} RI\right)^2 + 30\Delta\left(C + \frac{1}{5} RI\right). \tag{2.7}$$

§ 3. Quadratische Krümmungsinvarianten

Wir betrachten skalare Invarianten der Metrik g der Gestalt

$$\begin{aligned} F = F[g] &= a_2 R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} + a_1 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + a_0 R^2 \\ &\equiv a_2 \,|Riem|^2 + a_1 \,|Ric|^2 + a_0 R^2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

mit $a_2, a_1, a_0 = \text{const}$.

Satz 3.1: *Die Invariante F ist gleich*

$$\frac{b_2}{4}\,|Weyl|^2 + \frac{b_1}{n-2}\,|S|^2 + \frac{b_0}{2n(n-1)}\,R^2 \quad \text{für } n \geqq 4,$$

$$b_1\,|S|^2 + \frac{b_0}{12}\,R^2 \quad \text{für } n = 3, \qquad \frac{b_0}{4}\,R^2 \quad \text{für } n = 2, \tag{3.2}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} &b_2 := 4a_2, \qquad b_1 := 4a_2 + (n-2)\,a_1, \\ &b_0 := 4a_2 + 2(n-1)\,(a_1 + na_0). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Definitheitseigenschaften von F lassen sich günstiger in der Darstellung (3.2) als in der Darstellung (3.1) studieren.

Satz 3.2: *Ist die Metrik g definit und ist eine der Bedingungen*

$$\begin{aligned} &n \geqq 4 \quad \textit{und} \quad \operatorname{sgn} b_2 = \operatorname{sgn} b_1 = \operatorname{sgn} b_0 \neq 0, \\ &n = 3 \quad \textit{und} \quad \operatorname{sgn} b_1 = \operatorname{sgn} b_0 \neq 0, \\ &n = 2 \quad \textit{und} \quad b_0 \neq 0 \end{aligned}$$

erfüllt, so ist F eine definite quadratische Form im Krümmungstensor. Genauer hat man:

$$\begin{aligned} &F \textit{ positiv definit} \Leftrightarrow \operatorname{Min} b_k > 0, \\ &F \textit{ negativ definit} \Leftrightarrow \operatorname{Max} b_k < 0. \end{aligned}$$

Wir haben gesetzt sgn = signum = Vorzeichen. Zur Bestimmung des minimalen und des maximalen b_k sind die Formeln nützlich

$$\begin{aligned} &b_1 - b_2 = (n-2)\,a_1, \qquad b_0 - b_2 = 2(n-1)\,(a_1 + na_0), \\ &b_0 - b_1 = na_1 + 2(n-1)\,a_0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Äquivalent zu Satz 3.2 sind gewisse Abschätzungen für F bzw. seine Bestandteile. Solche Abschätzungen wurden frühzeitig von P. Günther [6, 7] angewendet.

Bei lorentzschen Metriken g kann man Definitheitsschlüsse anwenden, wenn $|S|^2$ und $|Weyl|^2$ definit oder wenigstens semidefinit in den nichtverschwindenden Komponenten von S bzw. $Weyl$ sind. Wir betrachten im folgenden dafür hinreichende Bedingungen. Es sei $n \geqq 4$, die Signatur sei $(+ - \cdots -)$ und die Indexkonvention abweichend vom bisherigen

$$\begin{aligned} &\alpha, \beta, \mu, \nu, \ldots = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \\ &i, j, k, l, \ldots = 1, 2, \ldots, n-1; \\ &I, J, K, L, \ldots = 2, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

Satz 3.3: *Gestattet die Metrik einen hyperflächenorthogonalen (abgekürzt: hfo.) Killingvektor, d. h. ein Vektorfeld* $v = v^\alpha \partial_\alpha$ *mit*

$$v_{[\mu}\nabla_\alpha v_{\beta]} = 0, \qquad \nabla_{(\alpha}v_{\beta)} = 0, \tag{3.5}$$

so gilt

$$v_{[\mu}S_{\alpha]\beta}v^\beta = 0, \qquad v_{[\lambda}C_{\alpha\beta]\mu\nu}v^\nu = 0; \tag{3.6}$$

$$|v|^2 > 0 \Rightarrow |S|^2, \qquad |Weyl|^2 \text{ positiv definit}; \tag{3.7}$$

$$|v|^2 = 0 \Rightarrow |S|^2, \qquad |Weyl|^2 \text{ positiv semidefinit}. \tag{3.8}$$

Beweis: Aus (3.5) folgen lokale Darstellungen

$$v_\alpha = e^{2\lambda}\,\partial_\alpha\varphi, \qquad \nabla_\alpha v_\beta = 2\lambda_{[\alpha}v_{\beta]}, \qquad \nabla_\mu\nabla_\alpha v_\beta = 2\lambda_{\mu[\alpha}v_{\beta]}$$

mit

$$\lambda_\alpha := \nabla_\alpha\lambda, \qquad \lambda_{\alpha\beta} := e^{-\lambda}\nabla_\alpha\nabla_\beta e^\lambda = \lambda_\alpha\lambda_\beta + \nabla_\alpha\lambda_\beta.$$

Im Falle $|v|^2 > 0$ kann man nach einem Argument von A. Trautman [19] $e^{2\lambda} = |v|^2$ wählen und erhält dann:

$$0 = 2v^\alpha v^\beta\nabla_\alpha v_\beta = v^\alpha\nabla_\alpha\,|v|^2 \;\Rightarrow\; v^\alpha\lambda_\alpha = 0.$$

Im Falle $v^2 = 0$ erhält man einfacher:

$$0 = \nabla_\alpha\,|v|^2 = 2v^\beta\nabla_\alpha v_\beta = -v^\beta\lambda_\beta v_\alpha \;\Rightarrow\; v^\alpha\lambda_\alpha = 0.$$

In beiden Fällen erhält man weiter

$$\lambda_{\alpha\beta}v^\beta = \lambda_\beta\lambda^\beta v_\alpha, \qquad 0 = \underset{v}{\pounds}\,\Gamma_{\alpha\beta\mu} = \nabla_\beta\nabla_\alpha v_\mu + R_{\mu\alpha\beta\nu}v^\nu$$

und daraus

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}v^\nu = 2v_{[\alpha}\lambda_{\beta]\mu}, \qquad R_{\alpha\beta}v^\beta = v_\alpha\cdot\Delta\lambda.$$

Die Behauptung (3.6) ergibt sich hieraus durch Einsetzen der Definitionsformeln von S und *Weyl*.

Im Falle $|v|^2 > 0$ normieren wir v und wählen Koordinaten so, daß in einem bestimmten festen Punkt gilt

$$v = \partial_0, \qquad g = (dx^0)^2 - dx^i\,dx^i.$$

Die Bedingungen (3.6) bedeuten dann in dem festen Punkt

$$S_{0i} = 0, \qquad C_{0ijk} = 0,$$

woraus sich ergibt

$$|S|^2 = S_{00}^2 + S_{ij}S_{ij}, \quad |Weyl|^2 = 4C_{0i0j}C_{0i0j} + C_{ijkl}C_{ijkl}.$$

Offenbar sind hier $|S|^2$, $|Weyl|^2$ positiv definit.

Im Falle $|v|^2 = 0$ wählen wir Koordinaten so, daß in einem bestimmten festen Punkt gilt

$$v = \partial_0, \qquad g = 2dx^0\,dx^1 - dx^I\,dx^I.$$

Die Bedingungen (3.6) bedeuten dann in dem festen Punkt

$$S_{00} = 0, \qquad S_{0I} = 0,$$

$$C_{010I} = 0, \quad C_{01IJ} \equiv C_{0I1J} - C_{1I0J} = 0, \quad C_{0I0J} = 0, \quad C_{0IJK} = 0,$$

woraus sich ergibt

$$|S|^2 = 2S_{01}^2 + S_{IJ}S_{IJ},$$
$$|Weyl|^2 = 4C_{0101}^2 + 8C_{0I1J}C_{0I1J} + C_{IJKL}C_{IJKL}.$$

Offenbar sind hier $|S|^2$, $|Weyl|^2$ positiv semidefinit und es gilt in dem festen Punkt

$$|S|^2 = 0 \Leftrightarrow S = S_{11}(dx^1)^2 + 2S_{1I}\,dx^1\,dx^I,$$
$$|Weyl|^2 = 0 \Leftrightarrow Weyl = 8C_{011I}\,dx^0 \wedge dx^1\,dx^2 \wedge dx^I + 4C_{1I1J}\,dx^1 \wedge dx^I\,dx^1 \wedge dx^J + 4C_{1IJK}\,dx^1 \wedge dx^I\,dx^J \wedge dx^K \;\blacksquare$$

Die zuletzt im Beweis behandelten Bedingungen an S, $Weyl$ kann man auch koordinateninvariant formulieren: Aus (3.6), $|v|^2 = 0$, $|S|^2 = 0$ und $|Weyl|^2 = 0$ folgt:

$$v_{[\mu}S_{\alpha][\beta}v_{\nu]} = 0, \qquad S_{\alpha\beta}v^\beta = 0; \tag{3.9}$$
$$C_{\alpha\beta\mu\nu}v^\beta v^\nu = 0, \qquad v_{[\lambda}C_{\alpha\beta]\mu\nu}v^\nu = 0, \qquad v_{[\lambda}C_{\alpha\beta][\mu\nu}v_{\varrho]} = 0; \tag{3.10}$$
$$v_{[\lambda}C_{\alpha]\beta\mu\nu}v^\beta = 0. \tag{3.11}$$

Bei $n = 4$ werden hierdurch wohlbekannte Typen von Tensoren charakterisiert: (3.9) charakterisiert einen Tensor S vom *Plebanskityp* $[4N]_3$; (3.10) charakterisiert einen Tensor *Weyl* vom *Beltyp* 3a; (3.11) charakterisiert einen Tensor *Weyl* vom *Petrovtyp* III (siehe dazu etwa [10, 1, 12]). Mathematisch gesehen handelt es sich um eine (nicht extreme) Ausartung der Tensoren; physikalisch gesehen handelt es sich um (nicht extreme) Strahlungsbedingungen.

Im Beweis von Satz 3.3 können S, *Weyl* sinngemäß durch *Ric*, *Riem* ersetzt werden: Gestattet die Metrik einen hfo. Killingvektor v, so gilt

$$v_{[\mu}R_{\alpha]\beta}v^\beta = 0, \qquad v_{[\lambda}R_{\alpha\beta]\mu\nu}v^\nu = 0; \tag{3.12}$$
$$|v|^2 > 0 \;\Rightarrow\; |Ric|^2,\ |Riem|^2 \text{ positiv definit}; \tag{3.13}$$
$$|v|^2 = 0 \;\Rightarrow\; |Ric|^2,\ |Riem|^2 \text{ positiv semidefinit}. \tag{3.14}$$

Aus (3.12), $|v|^2 = 0$, $|Ric|^2 = 0$ und $|Riem|^2 = 0$ folgt dann:

$$v_{[\mu}R_{\alpha][\beta}v_{\nu]} = 0, \qquad R_{\alpha\beta}v^\beta = 0; \tag{3.15}$$
$$R_{\alpha\beta\mu\nu}v^\beta v^\nu = 0, \qquad v_{[\lambda}R_{\alpha\beta]\mu\nu}v^\nu = 0, \qquad v_{[\lambda}R_{\alpha\beta][\mu\nu}v_{\varrho]} = 0; \tag{3.16}$$
$$v_{[\lambda}R_{\alpha\beta]\beta\mu\nu}v^\beta = 0. \tag{3.17}$$

Nachdem wir die Krümmungsgrößen bei Existenz eines hfo. Killingvektors und bei etwaigen Zusatzbedingungen untersucht haben, bestimmen wir Normalformen für die lorentzsche Metrik g selbst. Die der allgemeinen Relativitätstheorie entstammende Definition:

g statisch $\Leftrightarrow$ g gestattet zeitartigen hfo. Killingvektor,

wurde in [16, 17] ergänzt durch die neue Begriffsbildung:

g retardiert $\Leftrightarrow$ g gestattet lichtartigen hfo. Killingvektor.

Satz 3.4: *Eine statische Metrik läßt sich durch geeignete Koordinatenwahl auf die Form bringen*

$$g = g_{00}(x^k)\,(dx^0)^2 + g_{ij}(x^k)\,dx^i\,dx^j. \tag{3.18}$$

Eine statische Metrik mit $|Riem|^2 = 0$ ist flach.

Eine retardierte Metrik läßt sich durch geeignete Koordinatenwahl auf die Form bringen

$$g = 2g_{01}(x^k)\, dx^0\, dx^1 + g_{ij}(x^k)\, dx^i\, dx^j. \tag{3.19}$$

Eine retardierte Metrik mit $|Riem|^2 = 0$ *ist eine pp-Wellen-Metrik (:= plane-fronted wave metric with parallel rays) vom Kundtschen Typ, d. h. läßt sich durch geeignete Koordinatenwahl auf die Form bringen*

$$g = 2dx^0\, dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 + 2g_{1I}\, dx^1\, dx^I - dx^I\, dx^I \tag{3.20}$$

mit

$$\partial_0 g_{11} = \partial_0 g_{1I} = 0.$$

Eine retardierte Metrik mit

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu}_{\cdot\cdot\cdot} = 0 \tag{3.21}$$

ist eine pp-Wellen-Metrik vom Robinsonschen Typ, d. h. läßt sich durch geeignete Koordinatenwahl auf die Form bringen

$$g = 2dx^0\, dx^1 + g_{11}(x^1, x^K)\, (dx^1)^2 - dx^I\, dx^I. \tag{3.22}$$

Das Vektorfeld $v = v^\alpha \partial_\alpha = \partial_0$ *ist bei* (3.18), (3.19) *ein hfo. Killingvektor und bei* (3.20), (3.22) *sogar ein kovariant konstanter Vektor.*

Der Beweis kann leicht mit den in [15, 16] dargelegten Methoden erbracht werden. Die obige zu (3.12) bis (3.17) gehörige Diskussion ist dabei von Nutzen ∎

Neben den Spezialisierungen in den beiden vorstehenden Sätzen betrachten wir jetzt noch eine andere Art der Spezialisierung: Die Metrik g oder genauer die riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt (n', n'')*-zerlegbar*, falls sich M durch Koordinatensysteme überdecken läßt, in denen lokal gilt

$$g = g' + g'' = g_{ab}(x^c)\, dx^a\, dx^b + g_{ij}(x^k)\, dx^i\, dx^j, \tag{3.23}$$

mit den Teildimensionen

$$n' = \dim g' \geqq 1, \qquad n'' = \dim g'' \geqq 1, \qquad n' + n'' = n \tag{3.24}$$

und der Indexkonvention

$$a, b, c, \ldots = 1, 2, \ldots, n'; \qquad i, j, k, \ldots = n' + 1, n' + 2, \ldots, n.$$

Es erweist sich als zweckmäßig, die Schreibweise (3.23), (3.24) formal auch auf die Fälle „uneigentlicher Zerlegbarkeit"

$$g' = 0, \quad g'' = g, \quad n' = 0, \quad n'' = n;$$

$$g' = g, \quad g'' = 0, \quad n' = n, \quad n'' = 0$$

auszudehnen.

Satz 3.5: *Eine Invariante* $F = F[g]$ *der Gestalt* (3.1) *genügt einer „Additionsformel"*

$$g = g' + g'' \Rightarrow F[g] = F[g'] + F[g''] + 2a_0 R' R''. \tag{3.25}$$

Ist hier g'' *flach, so gilt*

$$F[g] = F[g'] = a_2\, |Riem'|^2 + a_1\, |Ric'|^2 + a_0 R'^2, \tag{3.26}$$

wobei die Größen

$$\begin{aligned} Riem' &= R_{abcd}\, dx^a \wedge dx^b\, dx^c \wedge dx^d, \\ Ric' &= R_{ab}\, dx^a\, dx^b, \qquad R' = R \end{aligned} \tag{3.27}$$

und die Operation $|\ldots|^2$ *sowohl bezüglich* g' *als auch bezüglich* g *gedeutet werden können. Ist überdies* g' *definit und*

$$\begin{aligned} &b_2' := 4a_2, \qquad b_1' := 4a_2 + (n'-2)\, a_1, \\ &b_0' := 4a_2 + 2(n'-1)\,(a_1 + n'a_0) \end{aligned}$$

gesetzt, so folgt aus jeder der Bedingungen

$$\begin{aligned} &n' \geqq 4 \quad \text{und} \quad \operatorname{sgn} b_2' = \operatorname{sgn} b_1' = \operatorname{sgn} b_0' \neq 0, \\ &n' = 3 \quad \text{und} \quad \operatorname{sgn} b_1' = \operatorname{sgn} b_0' \neq 0, \\ &n' = 2 \quad \text{und} \quad b_0' \neq 0 \end{aligned}$$

die Definitheit von F *im Krümmungstensor.*

§ 4. Berechnung von Spuren

Motiviert durch die Formeln (2.2) und (2.4) betrachten wir lineare Operatoren von besonderer Gestalt.

Definition: Es sei $A^{(q)}$ ein gemäß

$$(A^{(q)}u)_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q} = A^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q} u_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q} \tag{4.1}$$

auf kovariante q-Tensorfelder u wirkender linearer Operator. Der gemäß

$$(A_q{}^p u)_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = \sum_{\binom{p}{q}} A^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}_{\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\ldots\alpha_{k_q}} u_{\alpha_1\ldots\underset{\hat\mu_1}{\alpha_{k_1}}\ldots\underset{\hat\mu_2}{\alpha_{k_2}}\ldots\underset{\hat\mu_q}{\alpha_{k_q}}\ldots\alpha_p} \tag{4.2}$$

auf kovariante p-Tensorfelder u $(p \geqq q)$ wirkende lineare Operator $A_q{}^p$ heiße *p-Erweiterung* von $A^{(q)}$. In (4.2) erfolge die Summation über alle $\binom{p}{q}$ Stück q-stelligen Teilfolgen $(k_1, k_2, \ldots, k_q)$ der Folge $(1, 2, \ldots, p)$.

Für $q = 1$ bzw. $q = 2$ spezialisiert sich (4.2) zu

$$(A_1{}^p u)_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = \sum_{k=1}^{p} A^{\mu}_{\alpha_k} u_{\alpha_1\ldots\underset{\hat\mu}{\alpha_k}\ldots\alpha_p} \qquad (p \geqq 1), \tag{4.3}$$

$$(A_2{}^p u)_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{l=k+1}^{p} A^{\mu\nu}_{\alpha_k\alpha_l} u_{\alpha_1\ldots\underset{\hat\mu}{\alpha_k}\ldots\underset{\hat\nu}{\alpha_l}\ldots\alpha_p} \qquad (p \geqq 2). \tag{4.4}$$

Der Autor hat in [14] folgendes bewiesen:

Satz 4.1: *Ändern sich die Komponenten* $A^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_q}$ *von* $A^{(q)}$ *bei gleichzeitiger Vertauschung von* μ_k *mit* μ_l *und von* α_k *mit* α_l $(1 \leqq k, l \leqq q)$ *nicht, so ist die p-Erweiterung* $A_q{}^p$ *von* $A^{(q)}$ *mit der Alternierung bzw. Mischung (d. h. mit der natürlichen Projektion auf* $\Lambda^p T^*$ *bzw.* $\Pi^p T^*$*) vertauschbar.*

Nunmehr lassen sich die Formeln (2.2), (2.4) nachträglich rechtfertigen:

Satz 4.2: *Die Anwendung der operatorwertigen 2-Form* $K_{\alpha\beta}\, dx^\alpha \wedge dx^\beta$ *gemäß* (2.2) *ist mit der natürlichen Projektion auf* $\Lambda^p T^*$ *bzw. auf* $\Pi^p T^*$ *bzw. auf* $\Pi^p T^*/g$ *vertausch-*

bar. Die Anwendung des Operators Z gemäß (2.4) ist mit der natürlichen Projektion auf $\Lambda^p T^*$ bzw. auf $\Pi^p T^*$ vertauschbar.

Beweis: Sinngemäß ist $K_{\alpha\beta}$ vom Typ $A_1{}^p$ und deshalb mit der Alternierung bzw. Mischung vertauschbar. Ist u eine spurfreie symmetrische Form, so ist $K_{\alpha\beta} u$ auf Grund von $R_{\alpha\beta\mu}{}^{\mu}{}_{\cdot} = 0$ wieder spurfrei. In der Zerlegung gemäß (2.4)

$$Z = Z_1{}^p + Z_2{}^p \text{ mit Komponenten } Z_\alpha{}^\mu = R_\alpha{}^\mu, \quad Z^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = -2R^{\mu}{}_{\cdot\alpha\beta}{}^{\nu}_{\cdot} \tag{4.5}$$

von Operatoren $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$ sind auf Grund von $Z^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = Z^{\nu\mu}_{\beta\alpha}$ beide Summanden $Z_1{}^p$, $Z_2{}^p$ mit der Alternierung bzw. Mischung vertauschbar. ∎

Als *Spur* eines Operators $A^{(p)}$ bezüglich g und E hat man

$$Tr\, A^{(p)} := P^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p} A^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} \tag{4.6}$$

zu definieren. Speziell gilt

$$Tr\, I = Tr\, P^{(p)} = P^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} = N_0{}^p. \tag{4.7}$$

Die Definition (4.6) läßt sich etwa so motivieren: Die Fasern von E^p (aufgefaßt als Unterbündel von $\otimes\, {}^pT^*$) werden jeweils von den Elementen

$$e^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p} := P^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}\, dx^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\beta_p}$$

aufgespannt und die Fasern des zugehörigen dualen Bündels E^{p*} (aufgefaßt als Unterbündel von $\otimes\, {}^pT$) jeweils von den

$$e_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p} := P^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}\, \partial_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\alpha_p}.$$

Es gelten die „Dualitätsrelation“

$$\langle e_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}, e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\rangle = P^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_p}$$

und (4.6) in einer der gewohnten Spurdefinition nachgebildeten Form

$$Tr\, A^{(p)} = \sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} \langle e_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}, A^{(p)} e^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p}\rangle.$$

Wir berechnen die Spur von p-Erweiterungen bzw. gewisser Produkte von p-Erweiterungen.

Satz 4.3: *Es gilt in den vereinbarten Bezeichnungen*

$$Tr\, A_q{}^p = N_q{}^p\, Tr\, A^{(q)}, \tag{4.8}$$

$$Tr\,(A_1{}^p B_1{}^p) = N_1{}^p A_\beta{}^\alpha B_\alpha{}^\beta + 2N_2{}^p P^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2} A^{\beta_1}_{\alpha_1} B^{\beta_2}_{\alpha_2}. \tag{4.9}$$

Unter der Voraussetzung $A^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = A^{\nu\mu}_{\beta\alpha}$, $B^{\mu\nu}_{\alpha\beta} = B^{\nu\mu}_{\beta\alpha}$ gilt weiter

$$Tr\,(A_2{}^p B_1{}^p) = 2N_2{}^p P^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2} A^{\beta_1\mu}_{\alpha_1\alpha_2} B^{\beta_2}_{\mu} + 3N_3{}^p P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{\beta_1\beta_2\beta_3} A^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} B^{\beta_3}_{\alpha_3}, \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} Tr\,(A_2{}^p B_2{}^p) = {} & N_2{}^p P^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2} A^{\mu\nu}_{\alpha_1\alpha_2} B^{\beta_1\beta_2}_{\mu\nu} + 6N_3{}^p P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}_{\beta_1\beta_2\beta_3} A^{\mu\beta_3}_{\alpha_1\alpha_2} B^{\beta_1\beta_2}_{\mu\alpha_3} \\ & + 6N_4{}^p P^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}_{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} A^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} B^{\beta_3\beta_4}_{\alpha_3\alpha_4}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Beweis: Die Verjüngung $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2$, …, $\beta_p = \alpha_p$ von

$$\sum_{\binom{p}{q}} A^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_q}_{\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\ldots\alpha_{k_q}} P^{\beta_1\ldots\ldots\ldots\ldots\beta_p}_{\alpha_1\ldots\underset{\hat\mu_1}{\alpha_{k_1}}\ldots\underset{\hat\mu_2}{\alpha_{k_2}}\ldots\underset{\hat\mu_q}{\alpha_{k_q}}\ldots\alpha_p}$$

ergibt unter Beachtung von (1.10)

$$\sum_{\binom{p}{q}} A^{\mu_1\,\mu_2\,\dots\,\mu_q}_{\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\dots\alpha_{k_q}} \frac{N_0{}^p}{N_0{}^q} P^{\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\dots\alpha_{k_q}}_{\mu_1\,\mu_2\,\dots\,\mu_q} = N_q{}^p\, Tr\, A^{(q)}.$$

Die Komponenten von $A_1{}^pB_1{}^pu$ sind gleich

$$\sum_l A^{\nu}_{\alpha_l} \Big(\sum_{k<l} B^{\mu}_{\alpha_k} u_{\alpha_1\dots\underset{\hat\mu}{\alpha_k}\dots\underset{\hat\nu}{\alpha_l}\dots\alpha_p} + B_\nu{}^\mu u_{\alpha_1\dots\underset{\hat\mu}{\alpha_l}\dots\alpha_p} + \sum_{k>l} B^{\mu}_{\alpha_k} u_{\alpha_1\dots\underset{\hat\nu}{\alpha_l}\dots\underset{\hat\mu}{\alpha_k}\dots\alpha_p}\Big).$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} A_1{}^pB_1{}^p = {} & p\text{-Erweiterung von } A^{(1)}B^{(1)} \\ & + p\text{-Erweiterung von } (A^{(1)} \otimes B^{(1)} + B^{(1)} \otimes A^{(1)}) \end{aligned}$$

und daraus (4.9) unter Beachtung von (4.8). Die Formeln (4.10), (4.11) können ebenfalls durch direkte Ausrechnung der Komponenten bewiesen werden. Da aber die Ausdrücke sehr umfangreich werden, unterdrücken wir diese Rechnungen ∎

Im folgenden spielt die Größe

$$M_1{}^p := (N_1{}^p + \varepsilon N_2{}^p)/N_0{}^p = \frac{p}{n} + \frac{\varepsilon}{N_0{}^2}\binom{p}{2} \tag{4.12}$$

eine gewisse Rolle. Für $E = \Lambda T^*$ bzw. $= \Pi T^*$ erhalten wir aus (1.4) mit $r = 1$

$$M_1{}^p = N_2{}^{p+1}/N_0{}^p \tag{4.13}$$

und ergänzen dies durch die Definition einer weiteren Größe

$$M_2{}^p := N_4^{p+2}/N_0{}^p. \tag{4.14}$$

Satz 4.4: *Es gilt die Spurformel*

$$Tr\, K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} = -N_0{}^p \cdot M_1{}^p \cdot |Riem|^2. \tag{4.15}$$

Für $E = \Lambda T^*$ bzw. $= \Pi T^*$ gelten weiter die Spurformeln

$$\begin{aligned} Tr\, Z &= N_2{}^{p+1} \cdot R, \\ Tr\, Z^2 &= N_2{}^{p+1} \cdot |Ric|^2 + N_4{}^{p+2} \cdot [(2+\varepsilon)\,|Riem|^2 + 4\varepsilon\,|Ric|^2 + R^2]. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Beweis: Man wendet Satz 4.3 sinngemäß auf $K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}$ und auf die Bestandteile von

$$Z = Z_1{}^p + Z_2{}^p, \qquad Z^2 = (Z_1{}^p)^2 + Z_1{}^pZ_2{}^p + Z_2{}^pZ_1{}^p + (Z_2{}^p)^2$$

an. Satz 1.1 erweist sich in der Version

$$2P^{\alpha_1\alpha_2}_{\beta_1\beta_2}A^{\beta_2}_{\alpha_2} = \begin{cases} \varepsilon A^{\alpha_1}_{\beta_1} & \text{für } A_{\alpha\beta} = A_{[\alpha\beta]}, \\ \delta^{\alpha_1}_{\beta_1}A^{\mu}_{\mu} + \gamma A^{\alpha_1}_{\beta_1} & \text{für } A_{\alpha\beta} + A_{(\alpha\beta)} \end{cases}$$

als nützlich. Für $E = \Lambda T^*$ bzw. $= \Pi T^*$ werden die Komponenten von $P^{(3)}$ mittels der Entwicklungsformel (1.12) auf die von $P^{(2)}$ zurückgeführt und die Komponenten von $P^{(4)}$ werden analog auf die von $P^{(3)}$ zurückgeführt. Die Formel (1.4) kommt mit $r = 1$ und mit $r = 2$ zur Anwendung ∎

Die bisherigen Vorbereitungen zielen vor allem darauf, die Spur des Koinzidenzwertes des 2. Hadamardkoeffizienten zu berechnen.

Satz 4.5: *Die Größe* $180\,Tr\,U_2/N_0{}^p$ *ist beziehentlich gleich dem Produkt des Zeilenvektors*

$$\left(1 - 15M_1{}^p,\ -1,\ \frac{5}{2},\ 6\right) \text{ für } \Delta,$$
$$\left(1 - 15M_1{}^p,\ -1,\ \frac{5}{8}\left(\frac{n-4}{n-1}\right)^2,\ -\frac{3}{2}\left(\frac{n-6}{n-1}\right)\right) \quad \textit{für } \Delta - \frac{n-2}{4(n-1)} RI, \tag{4.17}$$

$$(1, M_1{}^p, M_2{}^p) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{2} & 6 \\ -15 & 90 & 30\varepsilon & 30\varepsilon \\ 90(2+\varepsilon) & 360\varepsilon & 90 & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{für } \Delta + \varepsilon Z \tag{4.18}$$

mit dem Spaltenvektor $\begin{pmatrix} |Riem|^2 \\ |Ric|^2 \\ R^2 \\ \Delta R \end{pmatrix}.$

Zum Beweis ist $C = 0,\ -\frac{n-2}{4(n-1)} RI,\ \varepsilon Z$ in

$$180U_2 \doteq \left(|Riem|^2 - |Ric|^2 + \frac{5}{2} R^2 + 6\Delta R\right) I$$
$$+ 15K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} + 90C^2 + 30RC + 30\Delta C$$

einzusetzen und die Spur unter Benutzung von (4.7), (4.15), (4.16) zu berechnen. Für den Fall $E = \Lambda T^*$, $L = \Delta - Z = -(d\delta + \delta d)$ reproduziert unser Ergebnis (4.18) Formeln aus der Literatur [8, 13] ∎

Wir untersuchen die Größe $M_1{}^p$ etwas genauer:

Satz 4.6: *In der Reihenfolge*

$$E = \Lambda T^*, \quad \otimes T^*, \quad \Pi T^*, \quad \Pi T^*/g \tag{4.19}$$

gilt beziehentlich

$$M_1{}^p = \frac{p(n-p)}{n(n-1)},\ \frac{p}{n},\ \frac{p(n+p)}{n(n+1)},\ \frac{p(n+p-2)}{n(n-1)}. \tag{4.20}$$

Eine Ungleichung bzw. Gleichung (man lese jeweils eins der Zeichen $>, =, <, \geqq, \leqq$*!)*

$$A \cdot M_1{}^p \gtreqless B \tag{4.21}$$

ist beziehentlich äquivalent zu einer Ungleichung bzw. Gleichung

$$\begin{aligned} &A\left(p - \frac{n}{2}\right)^2 \lesseqgtr A\frac{n^2}{4} - Bn(n-1) && \textit{für } \Lambda T^*, \\ &Ap \gtreqless Bn && \textit{für } \otimes T^*, \\ &A\left(p + \frac{n}{2}\right)^2 \gtreqless A\frac{n^2}{4} + Bn(n+1) && \textit{für } \Pi T^*, \\ &A\left(p + \frac{n}{2} - 1\right)^2 \gtreqless A\left(\frac{n}{2} - 1\right)^2 + Bn(n-1) && \textit{für } \Pi T^*/g. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Die Größe $M_1{}^p = M_1{}^p(n, E)$ *hängt monoton*

— *fallend von* n *ab,*
— *steigend von* p *ab,*
— *steigend von* E *bezüglich der Reihenfolge* (4.19) *ab.*

Dabei sei für $E = \Lambda T^*$ *noch* $p \leqq \frac{n}{2}$ *vereinbart.*

Kraft der Dualität bei alternierenden Differentialformen (M sei orientierbar!) bedeutet die letztgenannte Vereinbarung keine Einschränkung der Allgemeinheit.

Das folgende Ergebnis wird für § 6 bereitgestellt:

Satz 4.7: *Für* $n \geqq 3$, $E^p \neq E^0$ *und* $\neq \Lambda^{\frac{n}{2}} T^*$ *gilt:*

$$K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu}{}_{\cdots\lambda} = 0. \tag{4.23}$$

Beweis: Die Komponenten von $K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}$ sind gleich

$$\sum_k L^{\mu}_{\alpha_k} P^{\beta_1 \cdots\cdots \beta_p}_{\alpha_1 \ldots \underset{\hat{\mu}}{\alpha_k} \ldots \alpha_p} + 2 \sum_{k<l} L^{\mu\nu}_{\alpha_k \alpha_l} P^{\beta_1 \cdots\cdots\cdots \beta_p}_{\alpha_1 \ldots \underset{\hat{\mu}}{\alpha_k} \ldots \underset{\hat{\nu}}{\alpha_l} \ldots \alpha_p} \tag{4.24}$$

mit den Abkürzungen

$$L^{\beta_1\beta_2}_{\alpha_1\alpha_2} := R_{\mu\nu\alpha_1}{}^{\beta_1} R^{\mu\nu}{}_{\cdot\cdot}, \qquad L_\alpha{}^\beta := L^{\mu\beta}_{\alpha\mu}.$$

Aus (4.15) folgt:

$$Tr\, K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow L_\alpha{}^\alpha = 0.$$

Unter Beachtung dessen wird die $(p - 1)$-fache Verjüngung $\beta_2 = \alpha_2, \ldots, \beta_p = \alpha_p$ von (4.24) ausgerechnet: Sie ist gleich $L^{\beta_1}_{\alpha_1}$ multipliziert beziehentlich mit

$$N_1{}^p + 2\,\frac{n+1}{n}\,N_2{}^p + 2\,\frac{n+4}{n+2}\,N_3{}^p \quad \text{für } \Pi T^*/g,$$

$$N_1{}^p + 3\varepsilon N_2{}^p + 2\varepsilon^2 N_3{}^p \text{ sonst.}$$

Dieser Faktor ist offenbar positiv außer eventuell für ΛT^*, $2 \leqq p \leqq n - 1$. Im letzteren Falle ist der Faktor

$$\frac{n-2p}{p-1}\binom{n-3}{p-2} \neq 0 \quad \text{für} \quad p \neq \frac{n}{2} \;\blacksquare$$

§ 5. Ergebnisse zur spektralen Geometrie

In diesem Abschnitt setzen wir durchweg die Mannigfaltigkeit M als geschlossen und die Metrik g als definit voraus. Bei Integration von $Tr\, U_2$ über M verschwindet jeweils der Term mit ΔR, und wir erhalten aus Satz 4.5 die Darstellung

$$180 U_2(M)/N_0{}^p = a_2\, \|Riem\|^2 + a_1\, \|Ric\|^2 + a_0\, \|R\|^2, \tag{5.1}$$

wobei der hierdurch erklärte Zeilenvektor (a_2, a_1, a_0) beziehentlich gleich ist

$$\begin{aligned}
&\left(1 - 15M_1{}^p, -1, \frac{5}{2}\right) && \text{für } \Delta, \\
&\left(1 - 15M_1{}^p, -1, \frac{5}{8}\left(\frac{n-4}{n-1}\right)^2\right) && \text{für } \Delta - \frac{n-2}{4(n-1)} RI, \\
&(1, M_1{}^p, M_2{}^p) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ -15 & 90 & 30\varepsilon \\ 90(2+\varepsilon) & 360\varepsilon & 90 \end{pmatrix} && \text{für } \Delta + \varepsilon Z.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Die sinngemäß angewandte Transformation aus Satz 3.1 liefert für die nichtkanonischen Laplacians (für den kanonischen Laplacian soll diese Transformation in einer späteren Arbeit abgehandelt werden):

$$\begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & n-2 & 0 \\ 4 & 2(n-1) & 2(n-1)\,n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 60M_1{}^p \\ 6 - n - 60M_1{}^p \\ b_0{}^0 - 60M_1{}^p \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

mit der Abkürzung

$$b_0{}^0 := \begin{cases} 5n^2 - 7n + 6 & \text{für } \Delta \\ \dfrac{n-6}{4(n-1)}(5n^2 - 18n + 4) & \text{für } \Delta - \dfrac{n-2}{4(n-1)} RI. \end{cases}$$

(Offenbar ist $b_0{}^0$ der Wert von b_0 für $p = 0$.) Aus den Formeln (5.3), (5.4) ergeben sich die folgenden Monotonieeigenschaften:

Satz 5.1: *Für die nichtkanonischen Laplacians hängen die Größen b_2, b_1, b_0 monoton*
- *fallend von p ab,*
- *fallend von E bezüglich der Reihenfolge* (4.19) *ab,*
- *fallend von L bezüglich der Reihenfolge Δ, $\Delta - \dfrac{n-2}{4(n-1)} RI$ ab.*

Die Größen b_2, b_0 hängen monoton steigend von n ab. Dabei sei jeweils für $E = \Lambda T^*$ noch $p \leqq \dfrac{n}{2}$ vereinbart.

Beweis: Die Abhängigkeit von p und von E wird nur durch $M_1{}^p$ vermittelt, und b_2, b_1, b_0 verhalten sich wie $(-M_1{}^p)$. Da b_2, b_1 für die beiden Laplacians übereinstimmen, sind die Ausdrücke b_0 zu vergleichen. Für $n \geqq 2$ gilt aber

$$4(n-1)(5n^2 - 7n + 6) \geqq (n-6)(5n^2 - 18n + 4).$$

Die Monotonie von b_2, b_1 in n folgt daraus, daß für $n \geqq 2$ die Ausdrücke

$$(-M_1{}^p), \quad 5n^2 - 7n + 6, \quad 5n^2 - 18n + 4, \quad \frac{n-6}{n-1}$$

monoton steigend sind ∎

Nachdem unsere Vorbereitungen soweit gediehen sind, kommen wir zu zentralen Ergebnissen:

Theorem 5.1: *Es sei eine der folgenden Bedingungen an E, n, p erfüllt:*

(1) $n = 2$;

(2) $2 \leqq n \leqq 5$ *und* $p = 0$;

(3) $60p > n(5n^2 - 7n + 6)$ *für* $\otimes T^*$,

$$60\left(p + \frac{n}{2}\right)^2 > n(5n^3 - 2n^2 + 14n + 6) \quad \textit{für } \Pi T^*,$$

$$60\left(p + \frac{n}{2} - 1\right)^2 > 5n^4 - 12n^3 + 28n^2 - 66n + 60 \quad \textit{für } \Pi T^*/g;$$

(4) $12p \geqq n^3$ *für* $\otimes T^*$;

$\sqrt{12}\, p \geqq n^2$ *für* ΠT^* *bzw.* $\Pi T^*/g$.

Wenn dann der reine Laplacian Δ isospektral zum Laplacian einer flachen Mannigfaltigkeit ist, so ist (M, g) flach.

Beweis: Aus (3.4) und (5.2) erhalten wir

$$b_2 - b_1 = n - 2, \quad b_0 - b_2 = (n-1)(5n-2) \Rightarrow b_1 \leqq b_2 < b_0.$$

Wir schließen:

(1) $\Rightarrow b_0 = 12 - 60M_1{}^p \neq 0$ aus Teilbarkeitsgründen;

(2) $\Rightarrow b_1 = 6 - n > 0$;

(3) $\Rightarrow b_0 < 0$ unter Benutzung von Satz 4.6.

Die Abschätzung (4) ist gröber als die Abschätzung (3): Die Differenzen „grobe Abschätzung (4) — feine Abschätzung (3)"

$$\begin{array}{ll} 7n - 6 & \text{für } \otimes T^*, \\ \alpha n^2 + n - 6 & \text{für } \Pi T^*, \\ (\alpha + 10)\, n^2 - (2\alpha + 9)\, n + 6 & \text{für } \Pi T^*/g \end{array}$$

mit $\alpha := 2 + 10\sqrt{3}$ sind für $n \geqq 2$ positiv, so daß (4) $\Rightarrow$ (3). Aus jeder der Bedingungen (1) bis (4) folgt also die Definitheit des Ausdrucks (5.1) und damit $U_2(M) = 0$ $\Rightarrow Riem = 0$ ∎

Die „feinen Abschätzungen" (3) kann man leicht auf konkrete Werte von n und p spezialisieren. Beispielsweise wird (3) erfüllt, wenn p größer oder gleich der aus der Tabelle

$E =$ ↓ $\quad n =$ →	3	4	5	6
$\otimes T^*$	2	4	9	15
ΠT^*	2	3	5	8
$\Pi T^*/g$	2	3	5	7

entnommene Schranke ist.

Theorem 5.2: *Es sei eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

(1) $n = 2$ *oder* $= 3$;

(2) $2 \leqq n \leqq 6$ *und* $p \geqq 1$;

(3) $n \geqq 7$ *und*

$$240(n-1)\,p > n(n-6)\,(5n^2 - 18n + 4) =: \varphi(n) \quad \text{für } \otimes T^*,$$

$$240(n-1)\left(p + \frac{n}{2}\right)^2 > 60n^2(n-1) + (n+1)\,\varphi(n) \quad \text{für } \Pi T^*,$$

$$240\left(p + \frac{n}{2} - 1\right)^2 > 60(n-2)^2 + \varphi(n) \quad \text{für } \Pi T^*/g;$$

(4) $48p \geqq n^3$ *für* $\otimes T^*$,

$\sqrt{48}\, p \geqq n^2$ *für* ΠT^* *bzw.* $\Pi T^*/g$.

Wenn dann der Laplacian mit verschwindender Cottoninvariante $\Delta - \frac{n-2}{4(n-1)} RI$ *isospektral zum Laplacian einer flachen Mannigfaltigkeit ist, so ist* (M, g) *flach.*

Beweis: Aus (3.4) und (5.2) erhalten wir

$$b_2 - b_1 = n - 2, \qquad 4(n-1)\,(b_0 - b_2) = 5n(n-4)^2 - 8(n-1)^2,$$

$$4(n-1)\,(b_0 - b_1) = n(n-6)\,(5n - 14).$$

Es folgt

$$b_0 \leqq b_1 < b_2 \quad \text{für} \quad 3 \leqq n \leqq 6 \quad \text{und} \quad b_1 < b_2 < b_0 \quad \text{für} \quad n \geqq 7.$$

Wir schließen

$n = 2 \Rightarrow b_0 \neq 0$ wie bei Δ;

$n = 3$ und $p = 0 \Rightarrow 8b_0 = 15 > 0$;

$2 \leqq n \leqq 6$ und $p = 1 \Rightarrow nb_2 = 4n - 60 < 0$;

$2 \leqq n \leqq 6$ und $p \geqq 1 \Rightarrow b_2 < 0$ wegen Monotonie in p nach Satz 5.1;

(3) $\Rightarrow b_0 < 0$ unter Benutzung von Satz 4.6.

Die Abschätzung (4) ist gröber als die Abschätzung (3): Die Differenzen „grobe Abschätzung (4) — feine Abschätzung (3)"

$43n^2 - 112n + 24$ für $\otimes T^*$,

$(2\alpha - 5)\,n^3 - (2\alpha + 8)\,n^2 - 44n + 12$ für ΠT^*,

$\alpha n^2 - (2\alpha + 4)\,n + 6$ für $\Pi T^*/g$

mit $\alpha := 12 + 5\sqrt{3}$ sind für $n \geqq 3$ positiv so daß (4) $\Rightarrow$ (3). Wie beim Beweis von Theorem 5.1 ergibt sich *Riem* $= 0$ ∎

Zu den beiden Theoremen sind noch einige Bemerkungen angebracht:

1. Der „allgemeine Fall" bei den Beweisen ist Max $b_k = b_0 < 0$. Ausnahmen davon liegen für spezielle (kleine) Werte von n bzw. von p vor. Im „allgemeinen Fall"

gilt nach Satz 5.1 das folgende Prinzip. Aussagen von der Art:

L isospektral zum Laplacian eines flachen $(\tilde{M}, \tilde{g}) \Rightarrow (M, g)$ flach

sind um so leichter zu erhalten, je
— kleiner n ist,
— größer p ist,
— weiter rechts E aus der Folge (4.19) gewählt wird.

Sie sind ferner für $\Delta - \frac{n-2}{4(n-1)} RI$ leichter als für Δ zu erhalten.

2. Die Punkte (1), (2) sind jeweils so gemeint, daß $E = \Lambda T^*$ mit erfaßt ist; bei (3), (4) ist dagegen ΛT^* jeweils nicht mit erfaßt. Der Grund dafür ist: Für $E^p = \Lambda^p T$, $p \geqq 1$, folgt aus $n \geqq 3$, $L = \Delta$ bzw. aus $n \geqq 7$, $L = \Delta - \frac{n-2}{4(n-1)} RI$:

$$b_1 < 0 < b_0 \Rightarrow U_2(M) \text{ indefinit.}$$

3. Auf die „groben Abschätzungen“ (4) kommt man auf naheliegende Weise, wenn man nämlich $M_1{}^p$ bzw. b_0 formal durch ihre asymptotischen Ausdrücke bei $n \to \infty$ und $\frac{p}{n} \to \infty$ ersetzt:

$$M_1{}^p \approx \left(\frac{p}{n}\right)^2 \qquad \text{für } \Pi T^* \text{ und für } \Pi T^*/g,$$

$$b_0 \approx 5n^2 - 60 M_1{}^p \qquad \text{für } \Delta,$$

$$b_0 \approx \frac{5}{4} n^2 - 60 M_1{}^p \qquad \text{für } \Delta - \frac{n-2}{4(n-1)} RI.$$

(Beachte: Für $\otimes T^*$ gilt $M_1{}^p = \frac{p}{n}$ und für ΛT^* hat $\frac{p}{n} \to \infty$ keinen Sinn.) Nachträglich erweisen sich dann die so gewonnenen Abschätzungen sogar als für alle $n \geqq 2$ brauchbar. Die Tabelle in der Einleitung ist nur eine modifizierte Form der Abschätzungen (4).

4. Für $n = 6$, $p = 0$ ergibt sich eine Nullstelle von b_1 bzw. von b_1, b_0 gleichzeitig:

$$180 U_2(M) = \begin{cases} \|Weyl\|^2 + \frac{12}{5} \|R\|^2 & \text{für } L = \Delta, \\ \|Weyl\|^2 & \text{für } L = \Delta - \frac{1}{5} RI. \end{cases}$$

(Der allgemeinen Frage nach Nullstellen der b_k soll in einer späteren Arbeit nachgegangen werden.)

Aus der letzten Bemerkung ergeben sich zwanglos die beiden folgenden Sätze:

Satz 5.2: *Wenn Δ für $n = 6$, $p = 0$ isospektral zum Laplacian selbigen Typs einer konformflachen Mannigfaltigkeit mit verschwindender Skalarkrümmung ist, so hat auch (M, g) diese Eigenschaften.*

Satz 5.3: *Wenn $\Delta - \frac{1}{5} RI$ für $n = 6$, $p = 0$ isospektral zum Laplacian selbigen Typs einer konform-flachen Mannigfaltigkeit ist, so ist auch (M, g) konform-flach.*

Auch in der spektralen Geometrie des kanonischen Laplacians $\Delta + \varepsilon Z$ führt die Suche nach Werten n, p mit definitem $U_2(M)$ zu Ergebnissen. Wir schlagen hier jedoch einen anderen Weg ein: Nicht die Definitheit einer gewissen quadratischen Form, sondern die Regularität einer gewissen Matrix wird ausgenutzt.

Theorem 5.3: *Wenn der kanonische Laplacian $\varepsilon\delta d - d\delta \equiv \Delta + \varepsilon Z$ für ein $n \geqq 4$ und für drei paarweise verschiedene Stufen $p = p_1, p_2, p_3$ isospektral zum Laplacian einer flachen Mannigfaltigkeit ist, so ist (M, g) flach. Dabei sei $\Lambda^p T^*$ nur für $p \leqq \frac{n}{2}$ betrachtet.*

Beweis: Aus der Formel

$$N_2^4 \cdot M_2^p = -\frac{1}{2} N_1^2 \cdot M_1^p + N_0^2 \cdot (M_1^p)^2$$

folgt für $n \geqq 4$ $\quad \mathrm{Rang}\,(1, M_1^{p_i}, M_2^{p_i}) = \mathrm{Rang}\,\big(1, M_1^{p_i}, (M_1^{p_i})^2\big)$

mit dem Matrizen-Zeilenindex $i = 1, 2, 3$. Die Vandermondesche Matrix auf der rechten Seite ist bekanntlich genau dann regulär, wenn $M_1^{p_1}$, $M_1^{p_2}$, $M_1^{p_3}$ paarweise verschieden sind. Dann sind beide Matrizen-Faktoren in der Gleichung

$$(1, M_1^{p_i}, M_2^{p_i}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ -15 & 90 & 30\varepsilon \\ 90(2+\varepsilon) & 360\varepsilon & 90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \|Riem\|^2 \\ \|Ric\|^2 \\ \|R\|^2 \end{pmatrix} = 0$$

regulär, so daß man schließen kann:

$$\text{Spaltenvektor} = 0 \Rightarrow \|Riem\|^2 = 0 \Rightarrow Riem = 0 \;\blacksquare$$

Für ΛT^* finden sich Aussagen ähnlichen Typs bei V. K. Patodi [13].

§ 6. Ergebnisse zum Huygensschen Prinzip

In diesem Paragraphen setzen wir durchweg $n = 6$ und lorentzsche Signatur der Metrik g voraus. Im Gegensatz zur spektralen Geometrie sind jetzt Ausdrücke $|Tensor|^2$ nicht automatisch definit, und die Terme mit ΔR fallen nicht automatisch weg. Beiden Umständen muß durch zusätzliche Annahmen begegnet werden, die aber immer noch reichhaltige Klassen von Metriken einschließen werden.

Theorem 6.1: *Es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*

(1) $g = g' + g''$, $\quad n' \equiv \dim g' \geqq 2$, $\quad g''$ *flach*;

(2) $|S'|^2$ *positiv definit für* $n' \geqq 3$,
$|Weyl'|^2$ *positiv definit für* $n' \geqq 4$;

(3) $\Delta' R' \leqq 0$ *oder M wird von einer n''-parametrigen Schar geschlossener n'-dimensionaler Untermannigfaltigkeiten M' mit g' als induzierter Metrik überdeckt;*

(4) *p ist größer oder gleich der aus der Tabelle*

$E =$ ↓ $\quad n' = \rightarrow$	2	3	4	5	6
$\otimes T^*$	2	4	6	10	15
ΠT^*	2	3	5	6	8
$\Pi T^*/g$	2	3	4	6	7

entnommenen Schranke.

Wenn dann der reine Laplacian Δ dem HP genügt, so ist (M, g) flach.

Beweis: Aus dem HP folgt unter Benutzung von Satz 4.5 und Satz 3.5:

$$a_2 \, |Riem'|^2 + a_1 \, |Ric'|^2 + a_0 R'^2 + a\Delta' R' = 0 \tag{6.1}$$

mit

$$(a_2, a_1, a_0, a) = \left(1 - 15 M_1{}^p, -1, \frac{5}{2}, 6\right).$$

Die Transformation (3.28) ergibt

$$b_1 = b_2 < b_0 = 5n'^2 - 7n' + 6 - 60 M_1{}^p.$$

Die Bedingung $b_0 < 0$ ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} &10p > 5n'^2 - 7n' + 6 && \text{für } \otimes T^*, \\ &10(p+3)^2 > 45n'^2 - 49n' + 132 && \text{für } \Pi T^*, \\ &2(p+2)^2 > 5n'^2 - 7n' + 14 && \text{für } \Pi T^*/g, \end{aligned}$$

und dies ist — wie man leicht nachrechnet — wiederum äquivalent zu (4). Nimmt man noch die Bedingungen (2) und $\Delta' R' \leqq 0$ hinzu, so wird die linke Seite von (6.1) negativ definit, und wir können schließen:

$$\begin{aligned} &R' = 0, \quad S' = 0 \ \text{ für } n' \geqq 3, \quad Weyl' = 0 \ \text{ für } n' \geqq 4 \\ &\Rightarrow Riem' = 0 \Rightarrow Riem = 0. \end{aligned}$$

Nimmt man anstelle von $\Delta' R' \leqq 0$ die Bedingung mit den Untermannigfaltigkeiten M' hinzu, so integriere man (6.1) über die M' und behandle

$$a_2 \, \|Riem'\|^2 + a_1 \, \|Ric'\|^2 + a_0 \, \|R'\|^2 = 0 \tag{6.2}$$

auf entsprechende Weise weiter ∎

Theorem 6.2: *Es seien $|S|^2$, $|Weyl|^2$ positiv definit. Wenn dann der Laplacian mit verschwindender Cottoninvariante $\Delta - \frac{1}{5} RI$ für ein $p \geqq 1$ dem HP genügt, so ist (M, g) flach.*

Beweis: Die in § 5 für definite Metriken ausgeführten Schlüsse können sinngemäß auf

$$a_2 \, |Riem|^2 + a_1 \, |Ric|^2 + a_0 R^2 = 0 \tag{6.3}$$

mit

$$(a_2, a_1, a_0) = \left(1 - 15 M_1{}^p, -1, \frac{1}{10}\right)$$

übertragen werden, wobei jetzt $n = 6$, $p \geqq 1$ ∎

Zu den beiden Theoremen sind noch einige Bemerkungen angebracht:

1. Theorem 6.2 ist so gemeint, daß $E = \Lambda T^*$ mit erfaßt ist; bei Theorem 6.1 ist dagegen ΛT^* nicht mit erfaßt. Die Aussage von Theorem 6.1 gilt aber sinngemäß auch noch, wenn man anstelle der Bedingung (4) einsetzt:

$$E = \Lambda T^*; \ n' = 2; \ p = 2, 3, 4.$$

2. Die Definitheitsbedingungen in den Theoremen 6.1, 6.2 erscheinen zunächst recht „speziell". Wir können aber einfach zu handhabende Klassen von Metriken

angeben, welche diese Bedingungen erfüllen:

Nach Satz 3.3 gilt:

g statisch $\Rightarrow |S|^2$, $|Weyl|^2$ *positiv definit;*

g' statisch und $n' \geqq 3 \Rightarrow |S'|^2$ *positiv definit;*

g' statisch und $n' \geqq 4 \Rightarrow |Weyl'|^2$ *positiv definit.*

Außerdem gilt natürlich:

g' definit und $n' \geqq 3 \Rightarrow |S'|^2$ *positiv definit;*

g' definit und $n' \geqq 4 \Rightarrow |Weyl'|^2$ *positiv definit.*

(Man bemerkt hier noch: *g' definit* $\Rightarrow$ *g'' lorentzsch, g' statisch* $\Rightarrow$ *g'' definit.*)

3. Für $p = 0$ ergibt sich eine Nullstelle von b_1 bzw. von b_1, b_0 gleichzeitig:

$$180U_2 \doteq \begin{cases} |Weyl|^2 + \frac{12}{5} R^2 + 6\Delta R & \text{für } L = \Delta, \\ |\mathrm{Weyl}|^2 & \text{für } L = \Delta - \frac{1}{5} RI. \end{cases}$$

Aus der letzten Bemerkung ergeben sich zwanglos die beiden folgenden Sätze.

Satz 6.1: *Es sei* $|Weyl|^2$ *positiv definit und* ($\Delta R \geqq 0$ *oder M geschlossen*). *Wenn dann* Δ *für* $p = 0$ *dem HP genügt, so ist* (M, g) *konform-flach und hat verschwindende Skalarkrümmung.*

Satz 6.2: *Es sei* $|Weyl|^2$ *positiv definit. Wenn dann* $\Delta - \frac{1}{5} RI$ *für* $p = 0$ *dem HP genügt, so ist* (M, g) *konform-flach.*

Zu den in Bemerkung 2 angesprochenen statischen Metriken sind die retardierten Metriken verwandt (siehe § 3, insbesondere Satz 3.4). Für diese kann man Aussagen von der Bauart

L huygenssch $\Rightarrow$ *g ist pp-Wellen-Metrik speziellen Typs*

erhalten:

Satz 6.3: *Es sei g retardiert* und $\Delta R \leqq 0$ *oder M geschlossen und p sei größer oder gleich der aus der Tabelle*

$\otimes T^*$	15
ΠT^*	8
$\Pi T^*/g$	7

entnommenen Schranke. Wenn dann Δ *dem HP genügt, so ist g eine pp-Wellen-Metrik vom Robinsonschen Typ* (3.22).

Der Beweis verläuft bis zu der Stelle

$$|Riem|^2 = |Ric|^2 = R^2 = 0$$

analog zu dem von Theorem 6.1 für den Fall $n' = 6$. Weiter wird mit den Sätzen 4.7 und 3.4 geschlossen:

$$0 = 12U_2(x, x) = K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta} \Rightarrow R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu}_{\cdot\cdot\cdot\lambda} = 0 \Rightarrow \text{Behauptung } \blacksquare$$

Satz 6.4: *Es sei g retardiert und* $E^p \neq \Lambda^3 T^*$. *Wenn dann* $\Delta - \frac{1}{5} RI$ *dem HP genügt, so ist g eine pp-Wellen-Metrik vom Robinsonschen Typ* (3.22).

Der Beweis verläuft bis zu der Stelle

$$|Riem|^2 = |Ric|^2 = R^2 = 0$$

analog zu dem von Theorem 6.2. Weiter wird wie beim Beweis von Satz 6.3 geschlossen ∎

Satz 6.5: *Es sei g retardiert und* $E^p = \Lambda^3 T^*$. *Wenn dann* $\Delta - \frac{1}{5} RI$ *dem HP genügt, so ist g eine pp-Wellen-Metrik vom Kundtschen Typ* (3.20).

Beim Beweis kann nur Satz 3.4, nicht aber Satz 4.7 angewendet werden, da jetzt gerade der Ausnahmefall $E^p = \Lambda^{\frac{n}{2}} T^*$ vorliegt ∎

Die beim Beweis von Theorem 5.3 angewendeten Schlußweisen können sinngemäß auf das Problem des HP übertragen werden:

Theorem 6.3: *Es sei* $|Riem|^2$ *definit und* ($\Delta R = 0$ *oder M geschlossen*). *Wenn dann der kanonische Laplacian* $\varepsilon\delta d - d\delta \equiv \Delta + \varepsilon Z$ *für drei paarweise verschiedene Stufen* $p = p_1, p_2, p_3$ *dem HP genügt, so ist* (M, g) *flach. Dabei sei* $\Lambda^p T^*$ *nur für* $p = 0, 1, 2, 3$ *betrachtet.*

Die vorliegende Arbeit wurde von Herrn Prof. Dr. P. GÜNTHER gefördert und ist aus dem von ihm geleiteten Seminar hervorgegangen. Der Autor möchte ihm hiermit seinen Dank aussprechen. Herrn Dipl.-Math. W. QUAPP sei für einige Kontrollrechnungen gedankt und Herrn Dr. J. EICHHORN für nützliche Hinweise.

LITERATUR

[1] BEL, L.: La radiation gravitationelle. In: Colloque de Royaumont 1959. Ed. CNRS: Paris 1962.

[2] BERGER, M.: Le spectre des variétés Riemanniennes. Rev. Roumaine Math. Phys. Appl. 13 (1968), 915–931.

[3] COURANT, R., und D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik. Springer-Verlag: Berlin 1968.

[4] GILKEY, P. B.: Curvature and the eigenvalues of the Laplacian for elliptic complexes. Advances Math. 10 (1973), 344–382.

[5] GILKEY, P. B.: The spectral geometry of real and complex manifolds. AMS Proc. Symp. Pure Math. 27 (1975), 265–280.

[6] GÜNTHER, P.: Über die Darbouxsche Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten. Math. Nachr. 22 (1960), 285–321.

[7] GÜNTHER, P.: Einige Sätze über huygenssche Differentialgleichungen. Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math.-nat. R. 14 (1965), 497–507.

[8] GÜNTHER, P., and R. SCHIMMING: Curvature and Spectrum of Compact Riemannian Manifolds. J. Diff. Geom. 12 (1977), 599–618.

[9] HADAMARD, J.: Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations. Yale University Press: New Haven 1923.

[10] HALL, G. S.: The classification of the Ricci tensor in general relativity theory. J. Phys. A 9 (1976), 541–545.

[11] McKEAN, H. P., Jr., and I. M. SINGER: Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. J. Diff. Geom. 1 (1967), 43–69.

[12] KRAMER, D., H. STEPHANI, and M. A. H. MACCALLUM: Exact solutions of Einstein's field equations. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980.

[13] Patodi, V. K.: Curvature and the eigenforms of the Laplace operator. J. Diff. Geom. 5 (1971), 233–249.
[14] Schimming, R.: Riemannsche Metriken mit ebener Symmetrie und das Huygenssche Prinzip. Dissertation A. Leipzig 1971.
[15] Schimming, R.: Riemannsche Räume mit ebenfrontiger und mit ebener Symmetrie. Math. Nachr. 59 (1974), 129–162.
[16] Schimming, R.: Bedingungen reiner Strahlung in der allgemeinen Relativitätstheorie. Wiss. Schriftenr. TH Karl-Marx-Stadt 1975, 5. TMP Heft 3, 424–432.
[17] Schimming, R.: Lineare Differentialoperatoren zweiter Ordnung mit metrischem Hauptteil und die Methode der Koinzidenzwerte in der Riemannschen Geometrie. Beiträge zur Analysis 15 (1981), 77–91.
[18] Schimming, R.: Cauchyproblem und Wellenlösungen der Bachschen Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie. Dissertation B. Leipzig 1979
[19] Trautman, A.: Foundations and current problems of general relativity. In: Lectures on general relativity, Brandeis summer institute in theoretical physics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York 1965.
[20] Шимминг, Р.: Гюйгенсовы гиперболические уравнения второго порядка для многокомпонентных полей. Укр. мат. ж. 29 (1977), 351–363.

Manuskripteingang: 20. 03. 1981

VERFASSER:

Dr. sc. Rainer Schimming
Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität
DDR-2200 Greifswald, Friedrich-Ludwig-Jahn-Str. 15a