Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 1 (3) (1982), S. 1–11

Asymptotische Darstellungen der hypergeometrischen Funktionen für große Werte eines Parameters

E. WAGNER

Die in bekannten Tabellenwerken (z. B. BATEMAN/ERDÉLYI: Higher transcendental functions I. New York 1953) angegebenen asymptotischen Entwicklungen der hypergeometrischen Funktion $F(a, b, c; z)$ für $|b| \to \infty$ bei festen Werten von a, c, z sind fehlerhaft. In der vorliegenden Arbeit werden asymptotische Darstellungen von F für a (komplex) $\to \infty$ bei beliebigen, festen Werten von b, c ($c \neq 0, -1, -2, \ldots$) und z ($z \neq 0$, $|\mathrm{Arg}\,(1-z)| < \pi$) hergeleitet. Aus ihnen ergeben sich durch Vertauschung von a und b entsprechende asymptotische Darstellungen von F für $|b| \to \infty$.

Находящиеся в общеизвестных таблицах (напр. БЕЙТМЕН/ЭРДЕЙИ: Высшие трансцендентные функции I. Москва 1973) асимптотические разложения гипергеометрической функции $F(a, b, c; z)$ при $|b| \to \infty$ и постоянных значениях a, c, z ошибочны. В настоящей работе выводятся асимптотические представления функции $F(a, b, c; z)$ при a (комплексно) $\to \infty$ и любых постоянных значениях b, c ($c \neq 0, -1, -2, \ldots$) и z ($z \neq 0$, $|\mathrm{Arg}\,(1-z)| < \pi$). Из них перестановкой a и b получаются соответствующие асимптотические представления функции F при $|b| \to \infty$.

Asymptotic expansions of the hypergeometric function $F(a, b, c; z)$ for $|b| \to \infty$ where a, c, z are fixed complex numbers given in well-known tables (e.g. BATEMAN/ERDÉLYI: Higher transcendental functions I. New York 1953) are incorrect. In the present paper asymptotic representations of the hypergeometric function F for a (complex) $\to \infty$ are derived where b, c ($c \neq 0, -1, -2, \ldots$) and z ($z \neq 0$, $|\mathrm{Arg}\,(1-z)| < \pi$) are fixed complex numbers. By change of a and b appropriate asymptotic representations of F for $|b| \to \infty$ are obtained.

Asymptotische Darstellungen der hypergeometrischen Funktionen $F(a, b, c; z)$ für $|b| \to \infty$ bei festen Werten der übrigen Parameter a, c und der Variablen z sind in [1] und [2] angegeben, aber man prüft anhand geeigneter funktionaler Beziehungen für F leicht nach, daß diese Darstellungen unter den dort angegebenen Voraussetzungen nicht richtig sein können. Daß die in [2] skizzierte Herleitung dieser asymptotischen Darstellungen nicht stichhaltig ist, liegt offenbar an einer ungerechtfertigten Vertauschung zweier Grenzprozesse.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst asymptotische Darstellungen von $F(a, b, c; z)$ für $|a| \to \infty$ bei festen Werten von b, c, z hergeleitet, aus denen sich wegen der bekannten Beziehung $F(a, b, c; z) = F(b, a, c; z)$ sofort asymptotische Darstellungen für $|b| \to \infty$ bei festen Werten von a, c, z ergeben.

Im folgenden verwenden wir die Bezeichnungen

$$a = a_1 + ia_2 = |a|\, e^{i\alpha} \quad \text{mit} \quad \alpha = \mathrm{Arg}\, a \in (-\pi, \pi] \tag{1}$$

(entsprechend für b, c) und

$$z = x + iy = |z|\, e^{i\omega} \quad \text{mit} \quad \omega = \mathrm{Arg}\, z \in (-\pi, \pi] \tag{2}$$

und setzen voraus, daß

$$z \neq 0 \quad \text{und} \quad |\mathrm{Arg}\,(1-z)| < \pi \tag{3}$$

ist. Unter Potenzen komplexer Zahlen sind, falls nichts anderes vereinbart ist, ihre Hauptwerte zu verstehen, so daß insbesondere gilt

$$z^a = \exp\{a_1 \ln |z| - a_2\omega + i[a_1\omega + a_2 \ln |z|]\}. \tag{4}$$

Satz 1: *Unter den Voraussetzungen* (3) *gelten bei beliebigen, festen Werten* b, c ($c \neq 0, -1, -2, \ldots$) *und* z *für* $|a| \to \infty$ *die asymptotischen Darstellungen*

$$\frac{1}{\Gamma(c)} F(a, b, c; z) = \frac{(-az)^{-b}}{\Gamma(c-b)} [1 + o(1)] + \frac{e^{\pm \pi i(b-c)}}{\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} (-az)^{b-c} [1 + o(1)]. \tag{5}$$

In den Fällen

1. $y > 0$ *und* $a_1 \geqq 0$,
2. $z < 0$ *und* $a_2 < 0$,
3. $y < 0$ *und* $a_1 < 0$,
4. $0 < z < 1$ *und* $a_2 \geqq 0$

ist im Exponenten das Pluszeichen und $\arg(-az)$ *aus dem Intervall* $\left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *zu nehmen. In den restlichen Fällen*

5. $y > 0$ *und* $a_1 < 0$,
6. $z < 0$ *und* $a_2 \geqq 0$,
7. $y < 0$ *und* $a_1 \geqq 0$,
8. $0 < z < 1$ *und* $a_2 < 0$

ist im Exponenten das Minuszeichen und $\arg(-az)$ *aus dem Intervall* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ *zu nehmen.*

Beweis: Ausgehend von der bekannten Integraldarstellung

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = \frac{1}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a}\, dt \quad (c_1 > b_1 > 0) \tag{6}$$

führen wir den Beweis unter den einschränkenden Bedingungen

$$c_1 > b_1 > 0 \tag{7}$$

zuerst für $y > 0$ (d. h. $0 < \omega < \pi$) und dann für $z < 0$ ($\omega = \pi$). Anschließend wird unter Verwendung bekannter Funktionalgleichungen für die hypergeometrischen Funktionen gezeigt, daß die Zusatzvoraussetzung (7) weggelassen und der Gültigkeitsbereich von (5) auf alle komplexen z, die (3) genügen, ausgeweitet werden kann. Zur Abkürzung bezeichnen wir den Integranden in (6) mit $f = f(a, b, c; z, t)$.

1. Schritt: *Beweis von* (5) *für* $y > 0$, $a_1 \geqq 0$ *unter den Bedingungen* (7):
Es sei φ ein Winkel, der den Bedingungen

$$|\varphi| \leqq \pi/4 \tag{8}$$

und

$$\omega - \operatorname{Arg}(z-1) < \varphi < 0 \quad \text{für} \quad a_2 \geqq 0 \tag{9}$$

bzw.

$$0 < \varphi < \omega \quad \text{für} \quad a_2 < 0 \tag{10}$$

genügt, R eine Konstante mit

$$R > \max(1/|z|, |z-1|/|z|), \tag{11}$$

sowie

$$\eta = -\lambda e^{i\varphi}/z, \qquad \delta = \lambda(z-1)\, e^{i\varphi}/z, \qquad \lambda = |a|^{-3/4}. \tag{12}$$

Dann gilt für den in Abb. 1 dargestellten Integrationsweg nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\int_0^1 f\, dt = \sum_{\nu=1}^{5} \int_{\mathfrak{C}_\nu} f\, dt. \tag{13}$$

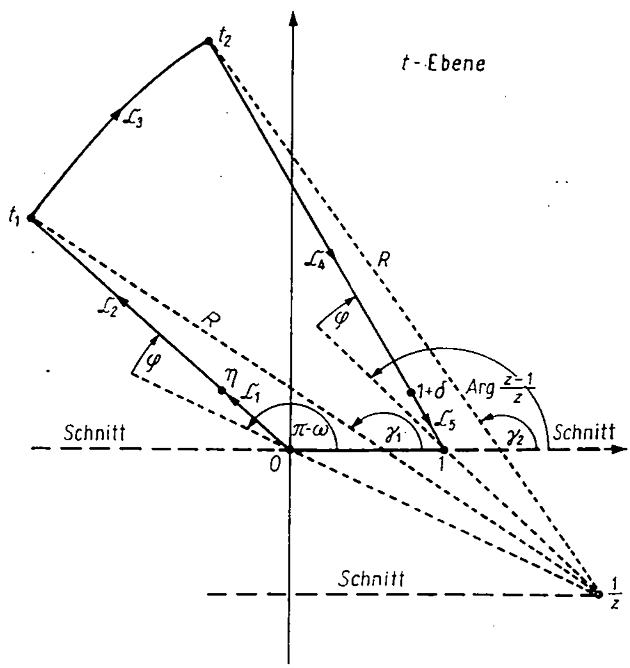

Abb. 1

1.1. *Asymptotische Darstellung des Integrals über $\mathfrak{C}_1$*

Wegen

$$0 \leqq |t| \leqq |\eta| = \lambda/|z| = o(1)$$

und

$$0 \leqq |at^2| \leqq |a|\,|\eta|^2 = |a|^{-1/2}/|z|^2 = o(1)$$

gilt gleichmäßig für alle $t \in \mathfrak{C}_1$ und $|a| \to \infty$

$$(1-t)^{c-b-1} \sim 1$$

und

$$(1-tz)^{-a} = \exp\{-a \operatorname{Log}(1-tz)\} = \exp\{atz + O(at^2)\} \sim \exp(atz).$$

Setzt man noch $atz = -\tau$, so erhält man

$$\int_{\mathfrak{C}_1} f\, dt \sim \int_0^{-az\eta} \left(\frac{\tau}{-az}\right)^{b-1} e^{-\tau}(-az)^{-1}\, d\tau. \tag{14}$$

Aus (9) und (10) folgt

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{\tau}{-az}\right) = \operatorname{Arg}\tau - \alpha - \operatorname{Arg}(-z) = \varphi + \pi - \omega \in (0, \pi),$$

so daß man schreiben kann

$$\int_{\mathfrak{C}_1} f\,dt \sim a^{-b}(-z)^{-b} \int_0^{-az\eta} e^{-\tau}\tau^{b-1}\,d\tau. \tag{15}$$

Bekanntlich strebt das Integral auf der rechten Seite für $|a| \to \infty$ wegen

$$-az\eta = |a|^{1/4}\, e^{i(\alpha+\varphi)}$$

und der aus den Bedingungen (8), (9), (10) sich ergebenden Ungleichungen

$$\frac{-\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \alpha + \varphi \leqq \frac{\pi}{2} + \varphi < \frac{\pi}{2} \quad \text{für} \quad a_2 \geqq 0$$

bzw.

$$\frac{-\pi}{2} < \frac{-\pi}{2} + \varphi \leqq \alpha + \varphi < \varphi \leqq \frac{\pi}{4} \quad \text{für} \quad a_2 < 0$$

gegen $\Gamma(b)$, so daß man erhält

$$\int_{\mathfrak{C}_1} f\,dt \sim \Gamma(b)\, a^{-b}(-z)^{-b} = \Gamma(b)\,(-az)^{-b} \qquad \left(\frac{-3\pi}{2} < \arg(-az) < \frac{\pi}{2}\right). \tag{16}$$

1.2. *Asymptotische Darstellung des Integrals über* $\mathfrak{C}_5$

Es ist

$$\int_{\mathfrak{C}_5} f\,dt = \int_0^{-\delta} (1-\tau)^{b-1}\,\tau^{c-b-1}(1 - z + \tau z)^{-a}\,d\tau \tag{17}$$

mit geradlinig verlaufendem Integrationsweg von 0 bis $-\delta$. Wegen

$$0 \leqq |\tau| \leqq |\delta| = |a|^{-3/4}\,|z - 1|/|z| = o(1)$$

erhält man wie unter 1.1. gleichmäßig für alle τ

$$(1-\tau)^{b-1}\,\tau^{c-b-1}(1 - z + z\tau)^{-a} \sim \tau^{c-b-1}(1-z)^{-a} \exp\left(\frac{-az\tau}{1-z}\right) \qquad (|a| \to \infty) \tag{18}$$

und daraus

$$\int_{\mathfrak{C}_5} f\,dt \sim (1-z)^{-a} \int_0^{-\frac{az\delta}{1-z}} \left(\frac{1-z}{az}\,u\right)^{c-b-1} e^{-u} \left(\frac{1-z}{az}\right) du. \tag{19}$$

Aus (9) und (10) folgt

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{1-z}{az}\,u\right) = \operatorname{Arg}(1-z) - \alpha - \omega + \operatorname{Arg} u = \operatorname{Arg}(1-z) - \omega + \varphi \in (-\pi, 0),$$

und unter Berücksichtigung von

$$\frac{-az\,\delta}{1-z} = a\lambda e^{i\varphi} = |a|^{1/4}\, e^{i(\varphi+\alpha)} \to \infty \quad \text{mit} \quad \alpha + \varphi \in \begin{cases} \left[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{2} + \varphi\right] & \text{für} \quad a_2 \geqq 0, \\ \left[\frac{-\pi}{2} + \varphi, \frac{\pi}{4}\right] & \text{für} \quad a_2 < 0, \end{cases}$$

wobei $\frac{\pi}{2} + \varphi < \frac{\pi}{2}$ für $a_2 \geqq 0$ und $\frac{-\pi}{2} + \varphi > \frac{-\pi}{2}$ für $a_2 < 0$ ist, ergibt sich wie unter 1.1.

$$\int_{\mathfrak{C}_4} f\,dt \sim \Gamma(c-b)\,(1-z)^{c-b-a}\,a^{b-c}z^{b-c} \tag{20}$$

bzw.

$$\int_{\mathfrak{C}_4} f\,dt \sim \Gamma(c-b)\,e^{i\pi(b-c)}(1-z)^{c-b-a}\,(-az)^{b-c}\quad \left(\arg(-az) \in \left(\frac{-3\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)\right). \tag{21}$$

1.3. *Abschätzung des Integrals über* $\mathfrak{C}_2$

Für $t \in \mathfrak{C}_2$ ist

$$t^{b-1} = O(|t|^{b_1-1}) = O\big(\max(1, \lambda^{b_1-1})\big)$$

und, da $\mathfrak{C}_2$ wegen (9) und (10) nicht durch $t = 1$ geht,

$$(1-t)^{c-b-1} = O(1).$$

Mit der Parameterdarstellung $t = -\lambda e^{i\varphi}\tau/z$, $1 \leqq \tau \leqq |t_1|\;|z|/\lambda$ erhält man

$$|(1-tz)^{-a}| = \exp\{-|a|\,[\cos\alpha \ln|1+\lambda e^{i\varphi}\tau| - \sin\alpha \operatorname{Arg}(1+\lambda e^{i\varphi}\tau)]\}. \tag{22}$$

Man sieht leicht, daß unter der Einschränkung (8) $\ln|1+\lambda e^{i\varphi}\tau|$ eine monoton wachsende Funktion von τ und $\operatorname{Arg}(1+\lambda e^{i\varphi}\tau)$ monoton wachsend für $\varphi > 0$ und monoton fallend für $\varphi < 0$ ist, so daß

$$\ln|1+\lambda e^{i\varphi}\tau| \geqq \ln|1+\lambda e^{i\varphi}|$$

und

$$\operatorname{Arg}(1+\lambda e^{i\varphi}\tau)\begin{cases} \leqq \operatorname{Arg}(1+\lambda e^{i\varphi}) & \text{für } \varphi < 0\\ \geqq \operatorname{Arg}(1+\lambda e^{i\varphi}) & \text{für } \varphi > 0\end{cases}$$

ist. Für $|a| \to \infty$ strebt $\lambda \to 0$, und es gilt

$$\ln|1+\lambda e^{i\varphi}| = \lambda\cos\varphi + O(\lambda^2),$$

$$\operatorname{Arg}(1+\lambda e^{i\varphi}) = \arctan\frac{\lambda\sin\varphi}{1+\lambda\cos\varphi} = \lambda\sin\varphi + O(\lambda^2).$$

Beachtet man noch, daß wegen (9) und (10) α und φ entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, so folgt aus (22) die Abschätzung

$$|(1-tz)^{-a}| \leqq \exp\{-|a|^{1/4}\cos(\alpha+\varphi) + o(1)\} \leqq \exp\{-|a|^{1/4}\sin|\varphi| + o(1)\}.$$

Daraus folgt

$$\int_{\mathfrak{C}_2} f\,dt = O\big(\max(1, \lambda^{b_1-1})\big)\exp\{-|a|^{1/4}\sin|\varphi|\} = o\left(\int_{\mathfrak{C}_1} f\,dt\right). \tag{23}$$

1.4. *Abschätzung des Integrals über* $\mathfrak{C}_4$:

Wie unter 1.3. sieht man, daß für $t \in \mathfrak{C}_4$

$$t^{b-1} = O(1), \qquad (1-t)^{c-b-1} = O\big(\max(1, \lambda^{c_1-b_1-1})\big)$$

und

$$|(1-tz)^{-a}| = |(1-z)^{-a}|\,|(1+\lambda e^{i\varphi}\tau)^{-a}| \leqq |(1-z)^{-a}| \exp\{-|a|^{1/4}\sin|\varphi| + o(1)\}$$

gilt, so daß man wegen (20)

$$\int_{\mathfrak{C}_4} f\,dt = o\Big(\int_{\mathfrak{C}_1} f\,dt\Big) \tag{24}$$

erhält.

1.5. *Abschätzung des Integrals über* $\mathfrak{C}_3$

Der Integrationsweg $\mathfrak{C}_3$ ist ein Kreisbogen mit einem hinreichend großen, von a, b und c unabhängigen Radius R (vgl. (11)) und dem Mittelpunkt $1/z$, so daß auf $\mathfrak{C}_3$

$$t^{b-1} = O(1) \quad \text{und} \quad (1-t)^{c-b-1} = O(1) \tag{25}$$

ist. Mit der Parameterdarstellung (vgl. Abb. 1)

$$t = 1/z + Re^{i\gamma}, \qquad 0 < \gamma_2 \leqq \gamma \leqq \gamma_1 < \pi \qquad (\gamma_\nu = \operatorname{Arg}(t_\nu - 1/z))$$

ist

$$|(1-tz)^{-a}| = \exp\{-|a|\,[\cos\alpha \ln|Rz| - (-\pi+\gamma+\omega)\sin\alpha]\}. \tag{26}$$

Aus Abb. 1 ist unter Berücksichtigung von (9) und (10) zu ersehen, daß

$$\gamma \leqq \gamma_1 < \pi - \omega \quad \text{für} \quad a_2 \geqq 0$$

und

$$\gamma \geqq \gamma_2 > \operatorname{Arg}(z-1) - \omega \quad \text{für} \quad a_2 < 0$$

ist, so daß die Abschätzungen

$$(-\pi+\gamma+\omega)\sin\alpha \leqq \begin{cases} -\mu_1 \sin\alpha & \text{für} \quad 0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ \big(\mu_2 + \operatorname{Arg}(1-z)\big)\sin\alpha & \text{für} \quad \dfrac{-\pi}{2} \leqq \alpha < 0 \end{cases} \tag{27}$$

mit

$$\mu_1 = \pi - \gamma_1 - \omega > 0 \quad \text{und} \quad \mu_2 = \gamma_2 + \omega - \operatorname{Arg}(z-1) > 0 \tag{28}$$

gelten. Aus (25), (26) und (27) folgt

$$\int_{\mathfrak{C}_3} f\,dt$$

$$= \begin{cases} O(\exp\{-|a|\,[\cos\alpha \ln|Rz| + \mu_1 \sin\alpha]\}) & \text{für} \quad 0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ O(\exp\{-|a|\,[\cos\alpha \ln|Rz| - (\mu_2 + \operatorname{Arg}(1-z))\sin\alpha]\}) & \text{für} \quad \dfrac{-\pi}{2} \leqq \alpha < 0, \end{cases}$$

so daß wegen (11), (16), (20) und (28)

$$\int_{\mathfrak{C}_2} f\,dt = \begin{cases} o\left(\int\limits_{\mathfrak{C}_1} f\,dt\right) & \text{für} \quad a_2 \geqq 0 \\ o\left(\int\limits_{\mathfrak{C}_4} f\,dt\right) & \text{für} \quad a_2 < 0 \end{cases} \tag{29}$$

gilt.

Zusammenfassend erhält man aus (6), (13), (16), (21), (23), (24) und (29) die Behauptung von Satz 1 im 1. Fall unter den einschränkenden Bedingungen (7).

2. Schritt: *Beweis von* (5) *für* $a_1 \geqq 0$, $z < 0$ *unter den Bedingungen* (7):

Man geht wieder von der Integraldarstellung (6) aus und ersetzt den Integrationsweg durch ein komplexes Kurvenintegral in der t-Ebene gemäß Abb. 2. R, δ und η wählen wir wie in (11) und (12), φ sei konstant mit

$$-\frac{\pi}{4} \leqq \varphi < 0 \quad \text{für} \quad a_2 \geqq 0, \tag{30}$$

$$0 < \varphi \leqq \frac{\pi}{4} \quad \text{für} \quad a_2 < 0. \tag{31}$$

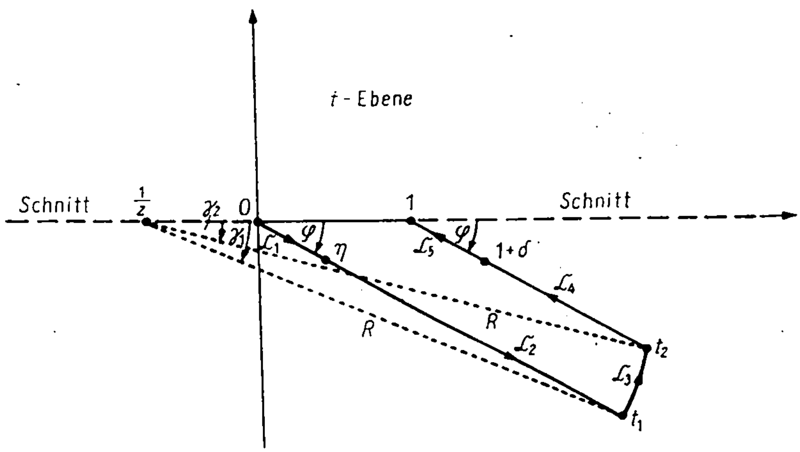

Abb.2

2.1. Man überzeugt sich leicht, daß man wie unter 1.1, mit nur geringfügigen Modifikationen, die asymptotische Darstellung

$$\int_{\mathfrak{C}_1} f\,dt \sim \Gamma(b)\, a^{-b}(-z)^{-b} = \Gamma(b)\,(-az)^{-b} \qquad \left(\frac{-\pi}{2} \leqq \arg(-az) = \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right) \tag{32}$$

erhält.

2.2. Wie unter 1.2. erhält man auch jetzt die asymptotische Gleichung (19), aber hier ist

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{1-z}{az}\,u\right) = \operatorname{Arg}(1-z) - \operatorname{Arg}(-az) + \operatorname{Arg} u \pm \pi = \varphi \pm \pi,$$

wobei das $+$ für $a_2 \geqq 0$ und das Minuszeichen für $a_2 < 0$ steht, so daß aus (19)

$$\int_{\mathfrak{C}_4} f\,dt \sim e^{\pm \pi i(b-c)}(1-z)^{c-b-a}\,(-az)^{b-c} \qquad \left(\frac{-\pi}{2} \leqq \arg(-az) = \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right) \tag{33}$$

mit $+$ für $a_2 < 0$ und dem Minuszeichen für $a_2 \geqq 0$ folgt.

2.3. Man überprüft leicht, daß die unter 1.3. und 1.4. angegebenen Rechnungen auch für $z < 0$ gültig sind, so daß die Beziehungen (23) und (24) gelten.

2.4. Auf $\mathfrak{C}_3$ gilt offenbar (25). Mit der Parameterdarstellung $t = 1/z + Re^{i\gamma}$ ist

$$|(1 - tz)^{-a}| = \exp\{-|a|\,[\cos\alpha \ln|Rz| - \gamma\sin\alpha]\}.$$

Der Parameter γ genügt den Ungleichungen (vgl. Abb. 2)

$$\varphi < \gamma_1 \leqq \gamma \leqq \gamma_2 < 0 \quad \text{für} \quad a_2 \geqq 0 \quad \text{bzw.} \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$0 < \gamma_2 \leqq \gamma \leqq \gamma_1 < \varphi \quad \text{für} \quad a_2 < 0 \quad \text{bzw.} \quad \alpha \in \left[\frac{-\pi}{2}, 0\right),$$

so daß man

$$|(1 - tz)^{-a}| \leqq \exp\{-|a|\,[\cos\alpha \ln|Rz| - \gamma_2\sin\alpha]\} \tag{34}$$

erhält. Aus (25), (33) und (34) ergibt sich für ein hinreichend großes R

$$\int_{\mathfrak{C}_3} f\,dt = O(\exp\{-|a|\,[\cos\alpha \ln|Rz| - \gamma_2\sin\alpha]\}) = o\Big(\int_{\mathfrak{C}_5} f\,dt\Big).$$

Zusammenfassend erhält man aus (6), (13), (23), (24), (32), (33) und (34) die Formel (5) in den Fällen 2 und 6, aber zunächst nur unter den einschränkenden Bedingungen $a_1 \geqq 0$ und (7).

3. Schritt: *Beweis von* (5) *im Fall* 5 *unter den Bedingungen* (7):
Dazu gehen wir von der bekannten Funktionalgleichung

$$F(a, b, c; z) = (1 - z)^{c-a-b}\, F(c - a, c - b, c; z) \tag{35}$$

aus. Aus $a_1 < 0$ und (7) folgen $c_1 > c_1 - b_1 > 0$ und $c_1 - a_1 > 0$, so daß in die rechte Seite der Gleichung (35) die für diesen Fall bereits bewiesene Formel (5) eingesetzt werden kann. Man erhält

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = (1 - z)^{c-a-b}\left\{\frac{[-(c - a)\,z]^{b-c}}{\Gamma(b)}\,[1 + o(1)] + \frac{e^{-\pi b i}}{\Gamma(c - b)}\,(1 - z)^{a-c+b}\,[-(c - a)\,z]^{-b}\,[1 + o(1)]\right\}. \tag{36}$$

Unter Berücksichtigung von

$$[-(c - a)\,z]^{b-c} \sim (az)^{b-c} = e^{-\pi i(b-c)}(-az)^{b-c} \qquad \left(\arg(-az) \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

und

$$e^{-\pi b i}[-(c - a)\,z]^{-b} \sim e^{-\pi b i}(az)^{-b} = (-az)^{-b} \qquad \left(\arg(-az) \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

folgt aus (36) sofort die Gültigkeit von (5) im Fall 5 unter den Bedingungen (7).

4. Schritt: *Beweis von* (5) *unter den Bedingungen* (7) *in den Fällen* 2 *und* 6 *für* $a_1 < 0$:
Wie im 3. Schritt erhält man durch Einsetzen von (5) in die rechte Seite von (35) wieder die Gleichung (5), wobei für $a_2 > c_2$ das Minuszeichen steht und $\arg(-az) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ist, während für $a_2 \leqq c_2$ das Pluszeichen und $\arg(-az)$ aus dem Intervall $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ zu nehmen ist. Ist a_2 beschränkt, so muß $a_1 \to -\infty$ streben.

Dabei strebt

$$\arg(-az) \to \begin{cases} \pi & \text{für} \quad a_2 > c_2 \\ -\pi & \text{für} \quad a_2 \leqq c_2, \end{cases}$$

so daß in beiden Fällen

$$e^{\pm \pi i (b-c)} (-az)^{b-c} \sim |az|^{b-c}$$

ist. Demnach ist die Trennung beider Fälle statt durch c_2 auch durch jede andere Konstante, insbesondere also auch durch 0 möglich. Damit ist der Beweis von (5) für die Fälle 2 und 6 unter den Bedingungen (7) erbracht.

5. Schritt: *Beweis von* (5) *unter den Bedingungen* (7) *in den restlichen Fällen* 3, 4, 7 *und* 8:
Bekanntlich ist

$$F(a, b, c; z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b, c; \frac{z}{z-1}\right). \tag{37}$$

Die Funktion $w = z/(z-1)$ bildet die untere z-Halbebene in die obere w-Halbebene und das Intervall $0 < z < 1$ auf die negativ-reelle Achse der w-Ebene ab. Deshalb folgt die Gültigkeit von (5) in den Fällen 3, 4, 7 und 8 aus ihrer Gültigkeit in den Fällen 5 bzw. 6 bzw. 1 bzw. 2, indem man (5) in die rechte Seite von (37) einsetzt. Auf diese einfache Rechnung kann hier verzichtet werden.

6. Schritt: *Eliminierung der Zusatzvoraussetzungen* (7):
Nach [3] 9.137, 18. ist

$$cF(a, b, c; z) = (c-a) F(a, b, c+1; z) + aF(a+1, b, c+1; z).$$

Wir ersetzen b durch $b+1$ und c durch $c+1$, dividieren durch $\Gamma(c+2)$ und erhalten

$$\frac{F(a, b+1, c+1; z)}{\Gamma(c+1)} = (c+1-a) \frac{F(a, b+1, c+2; z)}{\Gamma(c+2)} + a \frac{F(a+1, b+1, c+2; z)}{\Gamma(c+2)}.$$

Setzt man diese Gleichung in die durch $\Gamma(c+2)$ dividierte Gleichung 9.137, 15, aus [3]:

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = c \frac{F(a, b+1, c+1; z)}{\Gamma(c+1)} - a(c-b)\, z \frac{F(a+1, b+1, c+2; z)}{\Gamma(c+2)},$$

ein, so erhält man

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = c(c+1-a) \frac{F(a, b+1, c+2; z)}{\Gamma(c+2)} + a[c-(c-b)\, z] \frac{F(a+1, b+1, c+2; z)}{\Gamma(c+2)}. \tag{38}$$

Für $c_1 > b_1 - 1$ und $b_1 > -1$ können in die rechte Seite von (38) die asymptotischen Darstellungen (5) eingesetzt werden. Nach kurzer Rechnung ergibt sich

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = \frac{(-az)^{-b}}{\Gamma(c-b+1)} [c-b+o(1)] + \frac{e^{\pm \pi i (b-c)}}{\Gamma(b+1)} (1-z)^{c-a-b} (-az)^{b-c} [b+o(1)].$$

Sind $c - b \neq 0$ und $b \neq 0$, so ist diese Gleichung äquivalent (5). Durch n-malige Wiederholung des Verfahrens beweist man die Gültigkeit von (5) für $b_1 > -n$, $c_1 > b_1 - n$, $b \neq 0, -1, -2, \ldots, -n+1$ und $c - b \neq 0, -1, -2, \ldots, -n+1$. Da n beliebig groß sein kann, gilt (5) für jeden festen Wert von b und c, aber unter der vorläufigen Einschränkung, daß b und $c - b$ keine nichtpositiven ganzen Zahlen sind. Von dieser Einschränkung kann man sich wie folgt leicht befreien. Wenn b eine nichtpositive ganze Zahl ist, so ist F ein Polynom $(-b)$-ten Grades in z:

$$\frac{F(a,b,c;z)}{\Gamma(c)} = \sum_{\nu=0}^{-b} \frac{a(a+1)\cdots(a+\nu-1)\,b(b+1)\cdots(b+\nu-1)}{\Gamma(c)\,c(c+1)\cdots(c+\nu-1)\,\nu!} z^\nu$$

$$\sim \frac{(-az)^{-b}}{\Gamma(c-b)} \qquad (|a| \to \infty), \tag{39}$$

also ist (5) auch in diesem Fall richtig. Ist $c - b$ eine nichtpositive ganze Zahl, so folgt aus (35) und der eben hergeleiteten Darstellung (39)

$$\frac{F(a,b,c;z)}{\Gamma(c)} = (1-z)^{c-a-b} \frac{[-(c-a)\,z]^{b-c}}{\Gamma(b)}$$

$$\sim (1-z)^{c-a-b} \frac{(az)^{b-c}}{\Gamma(b)} \qquad (|a| \to \infty) \tag{40}$$

in Übereinstimmung mit (5). Offenbar können nicht gleichzeitig b und $c - b$ nichtpositive ganze Zahlen sein, denn sonst müßte auch c eine nichtpositive ganze Zahl sein, und das wurde in Satz 1 ausgeschlossen. Damit ist der Beweis von Satz 1 vollständig erbracht.

Ergänzende Bemerkungen: Ist $b \leqq 0$ und ganzzahlig oder $c - b \leqq 0$ und ganzzahlig, kann wegen $1/\Gamma(b) = 0$ bzw. $1/\Gamma(c-b) = 0$ jeweils einer der beiden Summanden in (5) gestrichen werden, und man erhält (39) bzw. (40). Auch wenn weder b noch $c - b$ gleich Null oder einer negativen ganzen Zahl sind, können leicht Bedingungen angegeben werden, unter denen einer der beiden Summanden in (5) gegenüber dem anderen vernachlässigbar ist. Offenbar kann der erste Summand weggelassen werden, wenn $(1-z)^{-a}$ für $|a| \to \infty$ exponentiell wächst. Andererseits kann der zweite Summand gestrichen werden, wenn $(1-z)^{-a}$ für $|a| \to \infty$ exponentiell gegen Null strebt. Wegen

$$|(1-z)^{-a}| = \exp\{-a_1 \ln|1-z| + a_2 \operatorname{Arg}(1-z)\} \tag{41}$$

liegt exponentielles Wachstum vor, wenn gilt

$$a_1 = O(1) \quad \text{und} \quad a_2 \to \begin{cases} +\infty, & \text{falls } y < 0, \\ -\infty, & \text{falls } y > 0, \end{cases} \tag{I}$$

oder

$$a_2 = O(1) \quad \text{und} \quad a_1 \to \begin{cases} +\infty, & \text{falls } 0 < z < 1, \\ -\infty, & \text{falls } z < 0. \end{cases} \tag{II}$$

Andererseits strebt $(1-z)^{-a}$ exponentiell gegen Null, wenn gilt:

$$a_1 = O(1) \quad \text{und} \quad a_2 \to \begin{cases} +\infty, & \text{falls } y > 0, \\ -\infty, & \text{falls } y < 0, \end{cases} \tag{III}$$

oder

$$a_2 = O(1) \quad \text{und} \quad a_1 \to \begin{cases} +\infty, & \text{falls } z < 0, \\ -\infty, & \text{falls } 0 < z < 1. \end{cases} \tag{IV}$$

Man sieht leicht, daß unter den Bedingungen (I) und (II) aus Satz 1

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} \sim \frac{(1 - z^{c-a-b} (az)^{b-c}}{\Gamma(b)} \qquad \big(\arg (az) \in (-\pi, \pi)\big) \tag{42}$$

folgt, während unter den Bedingungen (III) und (IV)

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} \sim \frac{(-az)^{-b}}{\Gamma(c-b)} \qquad \big(\arg (-az) \in (-\pi, \pi)\big) \tag{43}$$

gilt. Damit ist gleichzeitig gezeigt, daß die der Unterscheidung der einzelnen Fälle in Satz 1 dienenden Negativitäts- bzw. Nichtnegativitätsforderungen bezüglich a_1 und a_2 zu Beschränktheitsbedingungen nach oben bzw. nach unten abgeschwächt werden können. In der Formulierung des folgenden Satzes 2, der sich aus Satz 1 einfach durch Vertauschung der Parameter a und b und aus der bekannten Beziehung $F(a, b, c; z) = F(b, a, c; z)$ ergibt, wird diese Tatsache berücksichtigt. Wie üblich bedeutet $b_\nu = O_R(1)$, daß b_ν nach oben beschränkt ist, und entsprechend $b_\nu = O_L(1)$ Beschränktheit von b_ν nach unten.

Satz 2: *Unter der Voraussetzung* (3) *gelten bei festem z und beliebigen, festen Werten von a und c* ($c \neq 0, -1, -2, \ldots$) *für* $|b| \to \infty$ *die asymptotischen Darstellungen*

$$\frac{F(a, b, c; z)}{\Gamma(c)} = \frac{(-bz)^{-a}}{\Gamma(c-a)} \big(1 + o(1)\big) + \frac{e^{\pm \pi i(a-c)}}{\Gamma(a)} (1-z)^{c-a-b}(-bz)^{a-c} \big(1 + o(1)\big). \tag{44}$$

Dabei ist in folgenden Fällen das Pluszeichen und $\arg(-bz) \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *zu nehmen:*

1. $y > 0$, $\quad b_1 = O_L(1)$;
2. $z < 0$, $\quad b_2 = O_R(1)$;
3. $y < 0$, $\quad b_1 = O_R(1)$;
4. $0 < z < 1$, $\quad b_2 = O_L(1)$.

In den folgenden Fällen ist das Minuszeichen und $\arg(-bz) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ *zu nehmen:*

5. $y > 0$, $\quad b_1 = O_R(1)$;
6. $z < 0$, $\quad b_2 = O_L(1)$;
7. $y < 0$, $\quad b_1 = O_L(1)$;
8. $0 < z < 1$, $\quad b_2 = O_R(1)$.

LITERATUR

[1] ABRAMOWITZ, M., and I. A. STEGUN: Handbook of Mathematical Functions. New York 1965.

[2] BATEMAN, H., and A. ERDÉLYI: Higher Transcendental Functions. Vol. 1. New York 1953.

[3] RYSHIK, I. M., und I. S. GRADSTEIN: Summen-, Produkt- und Integraltafeln. (Übers. aus dem Russ.) 2. Aufl. Berlin 1963.

Manuskripteingang: 09. 03. 1981

VERFASSER:

Dr. sc. E. WAGNER
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
DDR-4010 Halle, Universitätsplatz 6