Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 1 (3) (1982), S. 23–52

# Сильные решения двумерной стохастической системы навье-стокса и соответствующие уравнения Колмогорова

М. И. Вишик и А. И. Комеч

Es wird die Existenz eines stochastischen Prozesses bewiesen, der Lösung eines zweidimensionalen Navier-Stokesschen Systems mit weißem Rauschen und periodischen Randbedingungen ist. Die entsprechende Kolmogoroffsche Vorwärtsgleichung wird in der Klasse der exponentiell fallenden Maße gelöst. Ferner wird für die entsprechende Kolmogoroffsche Rückwärtsgleichung eine verallgemeinerte Lösung konstruiert. Diese einer Hölder-Bedingung genügende Lösung wird durch ein Wienersches Kurvenintegral gegeben. Sie wird mit Hilfe der Greenschen Identität für die Lösung der Kolmogoroffschen Vorwärts- und Rückwärtsgleichung definiert. Für kleine Zeitintervalle ist die verallgemeinerte Lösung der Kolmogoroffschen Rückwärtsgleichung eine Lösung im klassischen Sinne.

Строится случайный процесс, удовлетворяющий двумерной стохастической системе Навье-Стокса с белым шумом при периодических краевых условиях. Для соответствующего прямого уравнения Колмогорова построено решение задачи Коши в классе экспоненциально убывающих мер. Построено обобщенное решение соответствующего обратного уравнения Колмогорова. Оно выражается интегралом Винера по траекториям и удовлетворяет условию Гельдера. Обобщенное решение определяется с помощью интегрального тождества Грина для решений прямого и обратного уравнений Колмогорова. На малом промежутке времени обобщенное решение обратного уравнения Колмогорова является классическим.

A random process governed by a two-dimensional, stochastic Navier-Stokes system with a white noise under periodic boundary conditions is constructed. The solution of the corresponding Kolmogorov forward equation is obtained in the class of exponentially decreasing measures. Furthermore, the generalized solution of the corresponding Kolmogorov backward equation is also constructed. This solution possesses a probabilistic representation as path integral and satisfies a Hölder condition. The generalized solution is defined by the Green identity for the solution of the Kolmogorov forward and backward equations. On any small interval of time this generalized solution of the Kolmogorov backward equation is the classical one.

## Введение

Рассматривается двумерная стохастическая система Навье-Стокса при периодических краевых условиях с периодом $2\pi$ по $x^1$ и $x^2$:

$$\begin{cases} \dot{u}(t, x) + (u, \nabla)\, u = -\nabla p(t, x) + \nu \Delta u + f(x) - \dot{w}_{t_0}(t, x), \\ (\nabla, u) = 0, \qquad t_0 < t < t_1. \end{cases} \tag{1}$$

Предполагается, что все функции в (1) периодические с периодом $2\pi$ по $x^1$ и $x^2$, так что систему (1) можно рассматривать как систему на торе $T^2 \equiv \mathbf{R}^2/2\pi\mathbf{Z}^2$. В (1) через $u(t, x) \equiv \big(u^1(t, x), u^2(t, x)\big)$ обозначена скорость течения жидкости, $\nu > 0$ — ее вязкость, $p(t, x)$ — давление, $f(x) \equiv \big(f^1(x), f^2(x)\big)$ — плотность внешних сил, $f(x) \in H \equiv [L_2(T^2)]^2$. Далее, $w_{t_0}(t, x) \equiv w(t - t_0, x)$, где $w(\tau, x) \equiv \big(w^1(\tau, x), w^2(\tau, x)\big)$

— винеровский случайный процесс в $H^1 \equiv [H^1(T^2)]^2$ (см. [1—2]), имеющий конечный средний вихрь:

$$E\,\|\mathrm{rot}\, w(\tau,\cdot)\|^2 = \tau\cdot S_1 < +\infty,\quad \tau > 0,\quad \mathrm{rot}\, w \equiv \frac{\partial w^2}{\partial x^1} - \frac{\partial w^1}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Через $\|\cdot\|$ обозначается норма в $L_2(T^2)$. Обозначим:

$$\mathscr{H}^s \equiv \{u(x) \in [H^s(T^2)]^2 \colon (\nabla, u(x)) = 0,\ x \in T^2\}.$$

Для системы (1) ставится задача Коши

$$u|_{t=t_0} = u_0(x),\qquad x \in T^2. \tag{3}$$

Здесь начальное поле скоростей $u_0(x) \in \mathscr{H}^1$ является случайной функцией с распределением $\mu_0(du_0)$ Предполагается, что для некоторого $\alpha > 0$

$$E^\alpha_{0,1} \equiv E\exp(\alpha\,\|z_0\|^2) = \int \exp(\alpha\,\|z_0\|^2)\,\mu_0(du_0) < +\infty,\quad z_0 \equiv \mathrm{rot}\, u_0. \tag{4}$$

Для простоты изложения предполагается, что $f(\cdot)$, $u_0(\cdot)$ $w(\tau,\cdot)$ имеют нулевые средние по тору $T^2$.

В §§ 1—3 настоящей работы построен измеримый случайный процесс $u(t) \equiv u(t, x)$ со значениями в $\mathscr{H}^1$, удовлетворяющий стохастической задаче Коши (1), (4). Доказывается, что такой процесс существует и единственен.

Далее в работе изучаются задачи Коши для прямого и обратного уравнений Колмогорова [17], связанные со стохастической системой (1). А именно, рассматриваются меры $\mu(t, du)$ на $\mathscr{H}^1$, $t_0 \leq t \leq t_1$, которые являются распределениями случайной функции $u(t,\cdot)$, удовлетворяющей (1), (3). Показано, что для этих мер выполняется прямое уравнение Колмогорова (44), соответствующее (1) (см. [1, 3—5]). При этом начальная мера $\mu(t_0, du_0) = \mu_0(du_0)$ может быть любой мерой на $\mathscr{H}^1$ удовлетворяющей условию (4). Для мер $\mu(t, du)$ получен аналог формулы Грина.

Наряду с прямым уравнением рассматривается также обратное уравнение Колмогорова, соответствующее системе (1). Это уравнение имеет вид параболического бесконечномерного уравнения в вариационных производных второго порядка

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t, u) + \langle b(u), D_u\Phi(t, u)\rangle + \frac{1}{2}\langle\langle Q, D_u{}^2\Phi(t, u)\rangle\rangle = 0,\\ t_0 < t < t_1,\qquad u \in H^2.\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь $\Phi(t, u) \in C([t_0, t_1] \times \mathscr{H}^1)$, $D_u\Phi(t, u)$ и $D_u{}^2(t, u)$ — соответственно первый и второй дифференциалы функционала $\Phi$ по $u$, $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ — скалярное произведение в $\mathscr{H} \otimes \mathscr{H}$ ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ — в $\mathscr{H} \equiv \mathscr{H}^0$), а также некоторые его расширения. Кроме того, $b(u) \equiv \Pi\big(-(u, \nabla)\, u + \nu\Delta u + f\big)$ при $u \in \mathscr{H}^2$, где $\Pi$ — ортогональный проектор в $H \equiv [L_2(T^2)]^2$ на $\mathscr{H}$.

Изучаются обобщенные решения $\Phi(t, u)$ уравнения (5), понимаемые в смысле интегрального тождества

$$\int \Phi(t, u)\,\mu(t, du) = \int \Phi(t_1, u)\,\mu(t_1, du),\qquad t_0 \leq t \leq t_1. \tag{6}$$

В этом тождестве меры $\mu(t, du)$ пробегают класс решений прямого уравнения Колмогорова, удовлетворяющих некоторым естественным оценкам. Для классических решений уравнения (5) тождество (6) справедливо ввиду формальной сопряженности (5) и прямого уравнения Колмогорова.

Доказаны существование и единственность обобщенного решения $\Phi(t, u)$ задачи Коши для уравнения (5) при начальном условии

$$\Phi(t_1, u) = \psi(u), \qquad u \in \mathscr{H}^1. \tag{7}$$

Предполагается, что

$$\psi(u) \in C(\mathscr{H}^1), \qquad |\psi(u)| \leqq C \cdot \exp(\gamma_0 \|u\|_1^2), \quad \text{где} \quad \gamma_0 < \varkappa\nu/S_1, \tag{8}$$

$\varkappa > 0$ — некоторая положительная константа. Обобщенное решение $\Phi(t, u)$ представляется интегралом Винера:

$$\Phi(t, u_0) \equiv E\psi\big(u(t_1 - t, u_0)\big), \qquad t < t_1, \qquad u_0 \in \mathscr{H}^1. \tag{9}$$

Здесь $u(\tau, u_0)$ — случайный процесс, удовлетворяющий системе Навье-Стокса (1) и выходящий из точки $u_0$: $u(0, u_0) = u_0$ п.н.

Для решения $\Phi(t, u)$ $\forall t < t_1$ выполняется условие Гельдера по $u \in \mathscr{H}^1$ с показателем $\beta_t > 0$, $\beta_t \geqq C\beta/\big(1 + (t_1 - t)\big)$, если $\psi(u)$ удовлетворяет такому же условию Гельдера с показателем $\beta > 0$.

В § 6 сформулирована теорема о существовании классического решения задачи Коши (5), (7). Предполагается, что начальный функционал $\psi(u)$ удовлетворяет, кроме (8), следующим условиям:

$$\|D\psi(u)\|_{\mathscr{H}^1} + \|D_u^2\psi(u)\|_{\mathscr{H}^{(2)}} + \|D_u^3\psi(u)\|_{\mathscr{H}^{(3)}} \leqq C \exp(\gamma_0 \|u\|_1^2), \quad u \in \mathscr{H}^1. \tag{10}$$

Здесь $\|\cdot\|_{\mathscr{H}^{(k)}}$ при $k = 2, 3$ — норма в пространстве $k$-линейных форм на $\mathscr{H}$. Это классическое решение $\Phi(t, u)$ существует при малых $t_1 - t$: $\gamma_0 + C\,\dfrac{t_1 - t}{\nu} < \varkappa\,\dfrac{\nu}{S_1}$, где $C > 0$, и дается также формулой Винера (9). $\Phi(t, u)$ удовлетворяет тождеству (6).

Отметим, что впервые задача Коши для бесконечномерного параболического уравнения (5) в случае, когда $b(u)$ ограниченный оператор, рассматривалась в работах Ю. Л. Далецкого [6].

## § 1. Сильные решения стохастической системы Навье-Стокса

В этом параграфе мы приведем точную постановку задачи (1), (3) и сформулируем теорему о ее разрешимости. Сначала введем необходимые функциональные пространства. Пусть $s \in \mathbf{R}$.

Определение 1.1: $H^s$ — *пространство функций* $u(x) \in [H^s(T^2)]^2$ *с нулевым средним:*

$$\langle u(x), 1\rangle = 0, \quad \text{т. е.} \quad \langle u^1(x), 1\rangle = 0, \qquad \langle u^2(x), 1\rangle = 0. \tag{1.1}$$

Определение 1.2: $\mathscr{H}^s$ — *пространство соленоидальных векторных полей* $u(x) \in H^s$, т. е.

$$\big(\nabla, u(x)\big) \equiv \frac{\partial u^1(x)}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2(x)}{\partial x^2} = 0, \qquad x \in T^2. \tag{1.2}$$

Зафиксируем в $\mathscr{H} \equiv \mathscr{H}^0$ ортонормированный базис из функций

$$e_k'(x) \equiv \frac{1}{2\pi}\, k^{\perp} \cos kx, \quad e_k''(x) \equiv \frac{1}{2\pi}\, k^{\perp} \sin kx, \quad k \in \mathbf{Z}^2 \setminus 0, \tag{1.3}$$

где $k_1 \geqq 0$ и $k_2 > 0$ при $k_1 = 0$. Здесь $k^\perp = (k_2 - k_1)/|k|$. Любая функция $u(x) \in \mathscr{H}^s$ $\forall s \in \mathbf{R}$ раскладывается в сходящийся в $\mathscr{H}^s$ ряд

$$u(x) = \sum_k [\hat{u}'(k)\, e_k'(x) + \hat{u}''(k)\, e_k''(x)]. \tag{1.4}$$

Норма в $\mathscr{H}^s$ задается формулой

$$\|u\|_s^2 = \sum_k (1 + |k|)^{2s} [|\hat{u}'(k)|^2 + |\hat{u}''(k)|^2], \qquad u \in \mathscr{H}^s. \tag{1.5}$$

Нормы в $H^s$ и в $H^s(T^2)$ также будем обозначать через $\|\cdot\|_s$. Через $\|\cdot\|$ обозначается норма в $H \equiv H^0$, в $\mathscr{H} \equiv \mathscr{H}^0$ и в $L_2(T^2)$.

Обозначим для $u(x) = (u^1(x), u^2(x)) \in H^s$

$$z(x) \equiv \operatorname{rot} u(x) \equiv \frac{\partial u^2(x)}{\partial x^1} - \frac{\partial u^1(x)}{\partial x^2} \in H^{s-1}(T^2). \tag{1.6}$$

Тогда из (1.1)—(1.6) видно, что $\exists\, C_s, C_s^1 > 0$, при которых

$$C_s \|u\|_s \leqq \|\operatorname{rot} u\|_{s-1} \leqq C_s^1 \|u\|_s, \qquad u \in \mathscr{H}^s. \tag{1.7}$$

Введем пространство $U$ траекторий системы (1). Для этого обозначим через $\mathscr{C}^{(\delta)}$, где $0 < \delta < \frac{1}{2}$, пространство функций $u(t, x) \in C(t_0, t_1; \mathscr{H})$ с конечной полунормой

$$\|u\|_{\mathscr{C}^{(\delta)}} \equiv \sup_{t_0 \leq s < t \leq t_1} \frac{\|u(t, \cdot) - u(s, \cdot)\|}{|t - s|^\delta} < +\infty. \tag{1.8}$$

Определим также пространство $\mathscr{L}_2{}^2$ функций $u(t, x) \in L_2(t_0, t_1; \mathscr{H}^2) \equiv \mathscr{L}_2{}^2$ с конечной нормой

$$\|u\|_{\mathscr{L}_2{}^2} \equiv \left( \int_{t_0}^{t_1} \|u(t, \cdot)\|_2^2\, dt \right)^{1/2}. \tag{1.9}$$

Определение 1.3: $U \equiv U(t_0, t_1) \equiv \mathscr{C}^{(\delta)} \cap \mathscr{L}_2{}^2$ — *пространство функций* $u(t, x)$ *с конесной нормой*

$$\|u\|_U \equiv \|u\|_{\mathscr{C}^{(\delta)}} + \|u\|_{\mathscr{L}_2{}^2} < +\infty. \tag{1.10}$$

Будем искать решение $u(t, x)$ системы (1) в пространстве $U$, а относительно давления $p(t, x)$ предположим, что

$$p(t, x) = \frac{\partial q}{\partial t}(t, x), \quad \text{где} \quad q(t, x) \in C(t_0, t_1; H^1(T^2)); \tag{1.11}$$

производная по $t$ понимается в смысле обобщенных функций.

Исключим давление $p(t, x)$ из (1). Для этого введем ортогональный проектор $\Pi$ в $H$ на $\mathscr{H}$. Любая функция $u \in H$ допускает разложение

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^2 \setminus 0} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1.12}$$

где $a_k, b_k \in \mathbf{R}^2$, и ряд (1.12) сходится в $H$. Очевидно,

$$\Pi u(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^2 \setminus 0} \big(\tilde{\Pi}(k)\, a_k \cos kx + \tilde{\Pi}(k)\, b_k \sin kx\big), \tag{1.13}$$

где $\tilde{\Pi}(k)\, a \equiv a - \left(a, \frac{k}{|k|}\right) \frac{k}{|k|}$ для $a \in \mathbf{R}^2$ и $k \in \mathbf{Z}^2 \setminus 0$. Соленоидальность правой части (1.13) вытекает из тождества

$$\left(\tilde{\Pi}(k)\, a, k\right) = 0 \quad \text{при} \quad a \in \mathbf{R}^2, \qquad k \in \mathbf{Z}^2 \setminus 0. \tag{1.14}$$

Из (1.13) и (1.5) видно, что для $v(x) \in H$

$$\Pi v(x) = 0 \Leftrightarrow \exists\, p(x) \in H^1(T^2) \colon v(x) = \nabla p(x). \tag{1.15}$$

Отметим, что производные по $t$ в (1) понимаются в смысле обобщенных функций. Это значит, что (1) эквивалентно интегральному тождеству

$$\begin{aligned} &u(t, x) - u(t_0, x) + \int_{t_0}^{t} (u, \nabla)\, u(\tau, x)\, d\tau \\ &= -\nabla\big(q(t, x) - q(t_0, x)\big) + \nu \int_{t_0}^{t} \Delta u(\tau, x)\, d\tau + (t - t_0)\, f(x) + w_{t_0}(t, x) \\ &\forall\, t \in (t_0, t_1), \end{aligned} \tag{1.16}$$

где использовано условие (1.11), а интегралы понимаются в смысле Бохнера [7], как интегралы от векторных функций со значениями в $H$. Покажем, что эти интегралы сходятся. Для интеграла в правой части это очевидно, поскольку $u \in U \subset \mathscr{L}_2{}^2 \equiv L_2(t_0, t_1; \mathscr{H}^2)$. Интеграл в левой части сходится ввиду оценки

$$\|(u, \nabla)\, u\| \leqq C\, \|u\|_2{}^2, \qquad u \in \mathscr{H}^2, \tag{1.16'}$$

которая следует из доказываемой ниже оценки (1.18). Действительно, из (1.16′) вытекает, что

$$\big(u(t), \nabla\big)\, u(t) \in L_1(t_0, t_1; H), \tag{1.16''}$$

поскольку $u \in U \subset \mathscr{L}_2{}^2$. Наконец, применяя к (1.16) оператор $\Pi$, мы получаем ввиду (1.15) и (1.11) уравнение без давления

$$\begin{aligned} \Pi\Big(&u(t, x) - u(t_0, x) + \int_{t_0}^{t} (u, \nabla)\, u(\tau, x)\, d\tau + \nu \int_{t_0}^{t} \Delta u(\tau, x)\, d\tau - (t - t_0)\, f(x) \\ &- w_{t_0}(t, x)\Big) = 0, \qquad t_0 < t < t_1. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Покажем, что обратно, из (1.17) следует (1) и (1.11).

Предложение 1.1: *Если $u \in U$ удовлетворяет уравнению* (1.17), *где* $w_{t_0}(t, x) \in C(t_0, t_1; H)$, *то $u$ есть решение системы* (1) *с некоторым $p(t, x)$ для которого выполняется условие* (1.11).

Доказательство: Заметим, что все слагаемые в (1.17) под знаком $\Pi$ принадлежат $C(t_0, t_1; H)$. Действительно, для всех слагаемых, кроме третьего, это непосредственно вытекает из определений (1.8)—(1.10), поскольку $f \in H$, а для третьего слагаемого это следует из (1.16″). Поэтому в силу (1.17) выражение под знаком $\Pi$ в (1.17) равно $-\nabla q(t, \cdot)$ согласно (1.15), где $q(t, \cdot) \in H^1(T^2)$. При этом можно выбрать $q(t, x) \in C\big(t_0, t_1; H^1(T^2)\big)$, поскольку $\nabla q \in C(t_0, t_1; H)$ ∎

Предложение 1.2: *Справедливы оценки*

$$\|(u, \nabla)\, u\| \leqq C\, \|u\|^{1/2}\, \|u\|_1\, \|u\|_2{}^{1/2}, \qquad u \in \mathscr{H}^2; \tag{1.18}$$

$$\|(u, \nabla)\, v\|_{-1} \leqq C\, \|u\|^{1/2}\, \|u\|_1{}^{1/2}\, \|v\|^{1/2}\, \|v\|_1{}^{1/2}, \qquad u, v \in \mathscr{H}^1. \tag{1.19}$$

Доказательство: По неравенству Ладыженской ([8, 9]) при $n = 2$

$$\|u\|_{L_4} \leqq C\,\|u\|^{1/2}\,\|u\|_1^{1/2}, \quad \text{где} \quad L_4 \equiv [L_4(T^2)]^2. \tag{1.20}$$

С другой стороны, из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$\|(u, \nabla)\,u\| \leqq C\,\|u\|_{L_4}\cdot\|\nabla u\|_{L_4}. \tag{1.21}$$

Применяя здесь (1.20), получаем (1.18).

Для доказательства (1.19) заметим, что

$$(u, \nabla)\,v \equiv \sum_{k=1}^{2} u_k\,\frac{\partial v}{\partial x^k} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k}\,(u_k v), \qquad u, v \in \mathscr{H}^1, \tag{1.22}$$

поскольку $\sum \dfrac{\partial}{\partial x^k}\,u_k(x) \equiv \big(\nabla, u(x)\big) = 0,\ x \in T^2$. Поэтому аналогично (1.21) имеем:

$$\|(u, \nabla)\,v\|_{-1} \leqq C\sum_k \|u_k v\| \leqq C_1\,\|u\|_{L_4}\cdot\|v\|_{L_4}. \tag{1.23}$$

Отсюда и из (1.20) следует (1.19) ∎

Далее, дифференцируя (1.17) по $t$, получим ввиду (1.16′) эквивалентное уравнение

$$\dot u + \Pi(u, \nabla)\,u = \nu\Delta u + \Pi f + \frac{\partial}{\partial t}\big(\Pi w_{t_0}(t, x)\big), \qquad t_0 < t < t_1, \tag{1.24}$$

где производные по $t$ понимаются в смысле обобщенных функций. Оператор $\Pi$ проектирует $H$ на $\mathscr{H}$ и $H^s$ на $\mathscr{H}^s$ при любом $s \in \mathbf{R}$. Поэтому из (1.24) видно, что, без ограничения общности, можно считать $f(x)$ и $w_{t_0}(t, x)$ соленоидальными функциями, т. е.

$$f(x) \in \mathscr{H}, \qquad w_{t_0}(t, x) \in C(t_0, t_1; \mathscr{H}^1). \tag{1.25}$$

В дальнейшем будем предполагать условия (1.25) выполненными.

Введем обозначение:

$$b(u) \equiv -\Pi(u, \nabla)\,u + \nu\Delta u + f, \qquad u \in \mathscr{H}^2. \tag{1.26}$$

Тогда (1.24) с учетом (1.25) можно записать в виде операторного уравнения

$$\dot u(t) = b\big(u(t)\big) + \dot w_{t_0}(t), \qquad t_0 < t < t_1. \tag{1.27}$$

Предложение 1.3: *Оператор $u \to b(u)$ непрерывно действует из $\mathscr{H}^2$ в $\mathscr{H}$ и удовлетворяет оценке*

$$\|b(u)\| \leqq C(\|u\|_2^2 + 1), \qquad u \in \mathscr{H}^2. \tag{1.27′}$$

Доказательство: Оценка (1.27′) вытекает из (1.16′) и из того, что $f \in \mathscr{H}$. Непрерывность $b(\cdot)$ следует из этой оценки, так как $b(u)$ — квадратичный (неоднородный) оператор ∎

Итак, в силу предложения 1.1 уравнение (1) для $u \in U$ при условии (1.11) эквивалентно (1.27). Сформулируем статистическую постановку задачи (1.27), (3). Для этого построим винеровский процесс $w(\tau, x)$ в $\mathscr{H}^1$ по заданному оператору $Q$ (см. [1—3]).

Пусть $Q$ — линейный самосопряженный ядерный неотрицательный оператор в $\mathscr{H}$:

$$Q^* = Q \geqq 0, \qquad S = \operatorname{Sp} Q < +\infty. \tag{1.28}$$

Определим оператор $K \equiv \operatorname{rot} Q \operatorname{rot}^*: H^1(T^2) \to H^{-1}(T^2)$, где $\operatorname{rot}^*: H^1(T^2) \to H(T^2)$ — сопряженный оператор к $\operatorname{rot}: H(T^2) \to H^{-1}(T^2)$. Наложим на $Q$ дополнительное условие ядерности оператора $K$:

$$S_1 \equiv \operatorname{Sp} K = \operatorname{Sp} \operatorname{rot} Q \operatorname{rot}^* < +\infty. \tag{1.29}$$

Введем обозначения:

$$\mathscr{C}^s(t_0, t_1) \equiv C(t_0, t_1; \mathscr{H}^s), \quad \mathscr{C}^s \equiv C(0, t_1 - t_0; \mathscr{H}^s), \qquad s \in \mathbf{R}.$$

Предложение 1.4: *Пусть линейный оператор $Q$ в $\mathscr{H}$ удовлетворяет условиям* (1.28)—(1.29). *Тогда на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{B}, P)$ существует случайный винеровский процесс $w(\tau) \equiv w(\tau, \omega)$, $\tau \geqq 0$, $\omega \in \Omega$, с корреляционным оператором $Q$; $w(\cdot) \in \mathscr{C}^1$ п.н., и отображение $\omega \to w(\cdot, \omega)$ измеримо, как отображение $(\Omega, \mathscr{B}) \to (\mathscr{C}^1, \mathscr{B}(\mathscr{C}^1))$.*

*По определению винеровского процесса* [11—12] *$w(\tau)$ — гауссовский процесс с корреляциями вида*

$$E\langle w(\tau_1), v_1\rangle \langle w(\tau_2), v_2\rangle \equiv \min(\tau_1, \tau_2) \langle Qv_1, v_2\rangle \quad \forall \tau_1, \tau_2 > 0, \quad \forall v_1, v_1 \in \mathscr{H}. \tag{1.30}$$

Доказательство предложения 1.4 проводится методами [2].

Обозначим через $\lambda(dw)$ борелевскую вероятностную меру на $\mathscr{C}^1$ — распределение процесса $w(\tau)$. Отметим, что, поскольку $\lambda(dw)$ — гауссовская мера, она однозначно определяется по корреляциям (1.30) и, стало быть, по оператору $Q$. Заметим также, что из условия (1.29) следует, что для меры $\lambda(dw)$ конечен момент (ср. (2))

$$\int \|\operatorname{rot} w(\tau)\|^2 \lambda(dw) = \tau \cdot S_1 < +\infty, \qquad \tau > 0. \tag{1.31}$$

Пусть, с другой стороны, $\mu_0(du_0)$ — вероятностная борелевская мера на $\mathscr{H}^1$, удовлетворяющая условию (4):

$$E^\alpha_{0,1} \equiv \int \exp(\alpha \|z_0\|^2) \mu_0(du_0) < +\infty, \qquad z_0 \equiv \operatorname{rot} u_0, \tag{1.32}$$

при некотором $\alpha > 0$. Рассмотрим вероятностное пространство

$$(\mathscr{H}^1 \times \mathscr{C}, \mathscr{B}(\mathscr{H}^1 \times \mathscr{C}^1), \qquad \mu_0 \times \lambda). \tag{1.33}$$

Определим на этом пространстве случайные функции $u_0$ и $w$ по формулам

$$u_0(x, \omega) \equiv u_0(x), \quad w(\tau, x, \omega) \equiv w(\tau, x) \qquad \forall w \equiv (u_0(x), w(\tau, x)) \in \mathscr{H}^1 \times \mathscr{C}^1. \tag{1.34}$$

Тогда $u_0$ имеет распределение $\mu_0(du_0)$, а $w(\tau, x)$ — распределение $\lambda(dw)$. Поэтому из условия (1.32) вытекает (4), а из (1.31) — условие (2), где $E$ — оператор математического ожидания на пространстве (1.33).

Итак, пусть $u_0(x)$ в (3)-случайная функция из (1.34), а $w_{t_0}(t, x)$ в (1) и (1.27) — случайная функция $w(t - t_0, x)$, где $w(\tau, x)$ определено в (1.34). Отметим, что случайные функции $u_0$ и $w$ на пространстве (1.33) независимы. В §§2, 3 будет доказана следующая теорема о разрешимости стохастической задачи Коши (1), (3).

Теорема 1.1: *Пусть мера $\mu_0(du_0)$ удовлетворяет условию* (1.32) *при некотором $\alpha > 0$, винеровская мера $\lambda$ построена по оператору $Q$, для которого выполняются условия* (1.28)—(1.29), *и $f(x) \in H \equiv [L_2(T^2)]^2$. Тогда:*

1. *Задача Коши* (1.27), (3) *имеет единственное решение $u(t, x) \equiv u(t, u_0, w) \in U$ при всех $(u_0, w) \in \mathscr{H}^1 \times \mathscr{C}^1$, кроме множества $\mu_0 \times \lambda$ — меры 0.*

2. *Отображение* $(u_0, w) \to u(t, u_0, w)$ *измеримо по Борелю, как отображение* $\mathscr{H}^1 \times \mathscr{C}^1 \to U$.

3. *Если* $\alpha < \varkappa\nu/S_1$, *где* $\varkappa > 0$ — *некоторая константа и* $S_1 = \operatorname{Sp} K$ (см. (1.29)), *то справедлива оценка*

$$E\left(\exp\left(\alpha\,\|z(s)\|^2\right) + \int_{t_0}^{t} \|\nabla z(t)\|^2 \exp\left(\alpha\,\|z(t)\|^2\right) dt\right) \leqq C\,e^{a(s-t_0)}E^{\alpha}_{0,1}. \tag{1.35}$$

*Здесь* $z(t) \equiv \operatorname{rot} u(t)$, $u(t) \equiv u(t, \cdot)$, $a = C(\|f\|^2 + \alpha S_1)$.

Доказательство этой теоремы проводится в §§ 2 и 3.

Из теоремы 1.1 вытекает следующая лемма 1.1, используемая в дальнейшем. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} \dot S(\tau) &= b\big(S(\tau)\big) + \dot w(\tau), \qquad 0 \leqq \tau \leqq t_1 - t_0,\\ S(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Лемма 1.1: 1. *Задача Коши* (1.36) $\forall u_0 \in \mathscr{H}^1$ *имеет единственное решение* $S(\tau) \equiv S(\tau, u_0, w) \in U(0, t_1 - t_0)$ *при всех* $w \in \mathscr{C}^1 \equiv C(0, t_1 - t_0; \mathscr{H}^1)$, кроме множества $\lambda$ — меры 0.

2. *Отображение* $w \to S(\tau, u_0, w)$ *измеримо по Борелю, как отображение* $\mathscr{C}^1 \to U(0, t_1 - t_0)$.

3. *Если* $0 < \alpha < \varkappa\nu/S_1$, *то справедлива оценка при* $0 \leqq \tau \leqq t_1 - t_0$

$$\begin{aligned} &\int \left(\exp\left(\alpha\,\|z(\tau, u_0, w)\|^2\right) + \int_0^{\tau} \|\nabla z(s, u_0, w)\|^2 \exp\left(\alpha\,\|z(s, u_0, w)\|^2\right) ds\right) \lambda(dw)\\ &\leqq C\,e^{a\tau}\cdot e^{\alpha\|z_0\|^2}, \end{aligned} \tag{1.37}$$

*где* $z(\tau, u_0, w) \equiv \operatorname{rot} S(\tau, u_0, w)$ *и* $z_0 \equiv \operatorname{rot} u_0$.

4. *Если* $\varepsilon > 0$ *и*

$$\varepsilon\cdot\tau < \varkappa\nu/S_1, \tag{1.38}$$

*то имеет место оценка*

$$\int \exp\left(\varepsilon \int_0^{\tau} \|z(s, u_0, w)\|^2\, ds\right) \lambda(dw) \leqq C\,e^{a\tau}\cdot e^{\varepsilon\tau\|z_0\|^2}. \tag{1.39}$$

Доказательство: Возьмем в теореме 1.1 $\mu_0 = \delta_{u_0}$:

$$\delta_{u_0}(B) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } u_0 \in B,\\ 0, & \text{если } u_0 \notin B, \end{cases} \qquad \forall B \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1). \tag{1.40}$$

Применим теорему 1.1 к такой мере $\mu_0$ и положим

$$S(\tau, u_0, w) \equiv u(\tau - t_0, u_0, w), \qquad \text{п. в. } w \in \mathscr{C}^1, \tag{1.41}$$

где $u(t, u_0, w)$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$, — процесс, определенный на (1.33) и построенный в теореме 1.1. Тогда утверждения 1.—3. леммы 1.1 вытекают из соответствующих утверждений теоремы 1.1, поскольку мера $\mu_0 \times \lambda$ сосредоточена на $\{u_0\} \times \mathscr{C}^1$. В частности, оценка (1.37) получается из (1.35), поскольку $E^{\alpha}_{0,1} = \exp(\alpha\,\|z_0\|^2$ для меры $\mu_0 = \delta_{u_0}$.

Оценку (1.39) выведем из (1.37) при $\alpha = \varepsilon\cdot\tau$. Для этого, во-первых, заметим, что

$$E_\lambda \exp\left(\varepsilon\int_0^{\tau} \|z(s)\|^2\, ds\right) \leqq E_\lambda\left(1 + \sum_1^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!}\left(\int_0^{\tau} \|z(s)\|^2\, ds\right)^k\right), \tag{1.42}$$

где $z(s) \equiv z(s, u_0, w)$, а $E_\lambda$ обозначает оператор усреднения по мере $\lambda(dw)$. Но по неравенству Гельдера при $k \geqq 2$

$$\left(\int_0^\tau \|z(s)\|^2 \, ds\right)^k \leqq \tau^{k/k'} \int_0^\tau \|z(s)\|^{2k} \, ds. \tag{1.43}$$

Здесь $\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k'} = 1$, откуда $\tau^{k/k'} = \tau^{k\left(1-\frac{1}{k}\right)} = \tau^{k-1}$. Поэтому из (1.42)—(1.43) вытекает:

$$E_\lambda \exp\left(\varepsilon \int_0^\tau \|z(s)\|^2 \, ds\right) \leqq E_\lambda \left(1 + \frac{1}{\tau} \sum_1^\infty \frac{\varepsilon^k \tau^k}{k!} \int_0^\tau \|z(s)\|^{2k} \, ds\right)$$

$$\leqq \max\left(1, \frac{1}{\tau}\right) \int_0^\tau E_\lambda \exp\left(\varepsilon\tau \|z(s)\|^2\right) ds. \tag{1.44}$$

Однако при условии (1.38) получаем из (1.37) с $\alpha = \varepsilon\tau$:

$$E_\lambda \exp\left(\varepsilon\tau \|z(s)\|^2\right) \leqq C \, e^{\alpha s} \cdot e^{\varepsilon\tau \|z_0\|^2} \quad \text{при} \quad 0 \leqq s \leqq \tau.$$

Отсюда и из (1.44) вытекает (1.39) ∎

В заключение этого параграфа приведем важную оценку вариации траекторий системы (1.27).

Предложение 1.5: *Пусть $u_1(t)$, $u_2(t) \in U(t_0, t_1)$ удовлетворяют системе* (1.27) *при одном и том же $w_{t_0}(t, x) \in C^0(t_0, t_1)$. Тогда для „вариации" $r(t) \equiv u_2(t) - u_1(t)$ справедлива оценка*

$$\|r(t)\|^2 + \nu \int_{t_0}^t \|\nabla r(s)\|^2 \, ds \leqq \|r(t_0)\|^2 \exp\left(\frac{B}{\nu} \int_{t_0}^t \|\nabla u_1(s)\|^2 \, ds\right), \quad t \in (t_0, t_1), \tag{1.45}$$

*где $B > 0$ не зависит от $u_1(t)$, $u_2(t)$, а также от $\nu > 0$ и $t > t_0$.*

Доказательство оценки (1.45) имеется в [8] (стр. 165).

Следствие 1.1: *Если $u_1(t)$, $u_2(t) \in U(t_0, t_1)$ удовлетворяют* (1.27) *и* (3) *с одинаковыми $u_0$ и $w_{t_0}$, то $u_1(t) = u_2(t)$ при всех $t \in (t_0, t_1)$.*

## § 2. Галеркинские приближения стохастической системы Навье-Стокса

Будем строить процесс $u(t, x)$, удовлетворяющий (1.27) и (3), методом Галеркина.

Обозначим через $V_m$ линейную оболочку функций $e_k'(x)$ и $e_k''(x)$ из (1.3) при $0 < |k| \leqq m$. Пусть $\Pi_m$ — ортогональный проектор в $H \equiv H^0$ на $V_m$. Линейную оболочку $\cos kx$ и $\sin kx$, $0 < |k| \leqq m$ также будем обозначать через $V_m$, а ортогональный проектор на нее в $L_2(T^2)$ — через $\Pi_m$.

*Галеркинской аппроксимацией* системы (1.27) назовем конечномерную систему Ито в $V_m$:

$$\dot u_m(t) = b_m\big(u_m(t)\big) + \dot w_{t_0,m}(t), \qquad t > t_0, \tag{2.1}$$

где $b_m(u_m) \equiv \Pi_m b(u_m)$ и $w_{t_0,m}(t) \equiv \Pi_m w_{t_0}(t)$. В качестве начального условия возьмем

$$u_m(t_0) = u_{0,m} \equiv \Pi_m u_0. \tag{2.2}$$

Введем $\sigma$-алгебры $\Sigma_\tau \equiv \sigma(u_0, w(s), 0 \leqq s \leqq \tau)$, $\tau \geqq 0$. Тогда $u_{0,m} \in V_m$ измерима относительно $\Sigma_0$, а $w_{t_0,m}(t)$ — винеровский процесс в $V_m$ относительно $\{\Sigma_{t-t_0}\}_{t \geqq t_0}$ [11—13]. Отметим, что случайные функции $u_{0,m}$ и $w_{t_0,m}$ на пространстве (1.33) независимы. Поскольку $\Pi_m$ — ортогональный проектор в $L_2(T^2)$, то из (1.32) вытекает:

$$E \exp(\alpha \|z_{0,m}\|^2) = E \exp(\alpha \|\Pi_m z_0\|^2) \leqq E_{0,1}^\alpha < +\infty \quad \forall m \in \mathbf{N}, \tag{2.3}$$

где $z_0 \equiv \operatorname{rot} u_0$, $z_{0,m} \equiv \operatorname{rot} u_{0,m} = \operatorname{rot} \Pi_m u_0 = \Pi_m z_0$.

Разрешимость галеркинской задачи Коши (2.1), (2.2) устанавливает следующая лемма.

Лемма 2.1: 1. *Решение задачи* (2.1), (2.2) $\forall m \in \mathbf{N}$ *существует с вероятностью* 1 *при всех* $t > t_0$, $u_m(t) \equiv u_m(t, \omega) \in C(t_0, t_1; V_m)$ *при* $\mu_0 \times \lambda$ — *п. в.* $\omega = (u_0, w) \in \Omega \equiv \mathscr{H}^1 \times \mathscr{C}^1$.

2. *Отображение* $\omega \to u_m(t, \omega)$ *измеримо по Борелю, как и отображение* $\Omega \to C(t_0, t_1; V_m)$; *отображение* $(t, \omega) \to u_m(t, \omega)$ *измеримо по Борелю, как отображение* $(t_0, t_1) \times \Omega \to V_m$.

3. *Для любого* $q > 0$ *справедлива оценка*

$$E \|u_m\|^q_{\mathscr{C}^{(\delta)}} \leqq C_q < +\infty \qquad \forall m \in \mathbf{N}, \tag{2.4}$$

*где* $C_q$ *не зависят от* $m$.

4. *Если* $\alpha < \varkappa\nu/S_1$, *где* $\varkappa > 0$ — *некоторая константа, то* $\forall t > t_0$ *выполняется оценка, подобная* (1.35):

$$E\left(\exp\left(\alpha \|z_m(s)\|^2\right) + \int_{t_0}^{s} \|\nabla z_m(t)\|^2 \exp\left(\alpha \|z_m(t)\|^2\right) dt\right)$$
$$\leqq C\, e^{a(s-t_0)} E_{0,1}^\alpha, \qquad m \in \mathbf{N}; \tag{2,5}$$

*здесь* $z_m(t) \equiv \operatorname{rot} u_m(t)$, $C$ *не зависит от* $m$, $a = C_1(\|f\|^2 + \alpha S_1)$, $C_1 > 0$ *не зависит от* $m$.

Пункты 1. и 2. этой леммы доказываются аналогично соответствующим утверждениям из [1, 3]. Оценка (2.4) также доказывается методами [1. 3].

Доказательство оценки (2.5): Получим из (2.1) эволюционное уравнение для $z_m(t) \equiv \operatorname{rot} u_m(t)$. Поскольку $\operatorname{rot} \Pi_m = \Pi_m \operatorname{rot}$, то, применяя оператор rot к (2.1), выводим:

$$\dot{z}_m(t) = \Pi_m \operatorname{rot} b\big(u_m(t)\big) + \dot{\zeta}_m(t), \tag{2.6}$$

где $\zeta_m(t) \equiv \operatorname{rot} w_{t_0,m}(t)$. Далее, из определения (1.26) следует, что для $u \in V_m$

$$\operatorname{rot} b(u) = -\Pi \operatorname{rot} [(u, \nabla) u] + \nu \Delta z + g, \quad z \equiv \operatorname{rot} u, \quad g \equiv \operatorname{rot} f, \tag{2.7}$$

поскольку $\operatorname{rot} \Pi = \Pi \operatorname{rot}$. Наконец, из условия соленоидальности $(\nabla, u) = 0$ вытекает тождество (теорема Гельмгольца [14])

$$\operatorname{rot} [(u, \nabla) u] \equiv \frac{\partial}{\partial x^1} [(u, \nabla) u^2] - \frac{\partial}{\partial x^2} [(u, \nabla) u^1] = (u, \nabla) \operatorname{rot} u, \tag{2.8}$$
$$u \in V_m.$$

Окончательно из (2.7) и (2.8) выводим, что уравнение (2.6) приобретает вид

$$\dot{z}_m(t) = -\Pi_m(u_m, \nabla) z_m + \nu\Delta z_m + g_m + \dot{\zeta}_m(t), \qquad g_m \equiv \Pi_m g. \tag{2.9}$$

Оценка (2.5) получается применением формулы Ито для вычисления $d \exp(\alpha \|z_m(t)\|^2)$ в силу уравнения (2.9). А именно, $\zeta_m(t) \equiv \operatorname{rot} \Pi_m w_{t_0}(t)$ является винеровским процессом относительно потока $\sigma$-алгебр $\{\Sigma_{t-t_0}\}_{t \geq t_0}$. Поскольку $\zeta_m(t) = \Pi_m \operatorname{rot} w_{t_0}(t_0)$, то корреляционный оператор процесса $\zeta_m(t)$ равен $\Pi_m K \Pi_m$, где $K = \operatorname{rot} Q \operatorname{rot}^*$ (см. (1.29)). Кроме того, $z_m(0) \equiv \operatorname{rot} u_m(0) = \operatorname{rot} u_{0,m}$ измерим относительно $\Sigma_0$. Следовательно, по формуле Ито ([11—13]) получаем:

$$d \exp\left(\alpha \|z_m(t)\|^2\right) = \exp\left(\alpha \|z_m(t)\|^2\right) \Big\{2\alpha\langle z_m(t), (dz_m(t)\rangle$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\left(2\alpha\langle z_m(t), dz_m(t)\rangle\right)^2 + 2\alpha\langle dz_m(t), dz_m(t)\rangle\right]\Big\}. \tag{2.10}$$

Но в силу (2.9) имеем:

$$\langle z_m(t), dz_m(t)\rangle = -\nu\langle \nabla z_m(t), \nabla z_m(t)\rangle + \langle z_m(t), g_m\rangle + \langle z_m(t), d\zeta_m(t)\rangle, \tag{2.11}$$

поскольку $\langle z_m, \Pi_m(u_m, \nabla) z_m\rangle = \langle z_m, (u_m, \nabla) z_m\rangle = 0$. Последнее равенство известно как закон сохранения вихря [14] и доказывается интегрированием по частям: для $u_m, z_m \in V_m$

$$\langle z_m, (u_m, \nabla) z_m\rangle = \int \left(u_m(x), \nabla \frac{z_m{}^2(x)}{2}\right) dx = -\int \left(\nabla, u_m(x)\right) \cdot \frac{z_m{}^2(x)}{2}\, dx = 0,$$

так как $\left(\nabla, u_m(x)\right) \equiv 0$. Далее, по правилам Ито [11] под выражением $\langle z_m(t), dz_m(t)\rangle^2$ понимается дифференциальная форма $\langle z_m(t), \Pi_m K \Pi_m z_m(t)\rangle\, dt$. Формально

$$\langle z_m(t), dz_m(t)\rangle^2 = \langle z_m(t), \Pi_m K \Pi_m z_m(t)\rangle\, dt. \tag{2.12}$$

Аналогично, под $\langle dz_m(t), dz_m(t)\rangle$ подразумевается $\operatorname{Sp} \Pi_m K \Pi_m \cdot dt$. Формално

$$\langle dz_m(t), dz_m(t)\rangle = \operatorname{Sp} \Pi_m K \Pi_m \cdot dt. \tag{2.13}$$

Введем обозначение:

$$J(t) = \exp\left(\alpha \|z_m(t)\|^2\right). \tag{2.14}$$

Тогда, подставляя (2.11)—(2.13) в (2.10), получаем:

$$dJ(t) = J(t)\, \{2\alpha[-\nu\langle \nabla z_m(t), \nabla z_m(t)\rangle + \langle z_m(t), g_m\rangle]\, dt$$
$$+ 2\alpha\langle z_m(t), d\zeta_m(t)\rangle + [2\alpha^2\langle z_m(t), \Pi_m K \Pi_m z_m(t)\rangle + \alpha \operatorname{Sp} \Pi_m K \Pi_m]\, dt\}. \tag{2.15}$$

Определим марковский момент

$$\tau_{\mathcal{N}} \equiv \tau_{\mathcal{N}}(\omega) \equiv \inf\{\tau \geqq t_0 \colon \|z_m(\tau, \omega)\| \geqq \mathcal{N}\}, \qquad \text{п. в.} \qquad \omega \in \Omega \equiv \mathscr{H}^1 \times \mathscr{C}^1, \tag{2.16}$$

и положим $t_{\mathcal{N}}(s) \equiv t_{\mathcal{N}}(s, \omega) \equiv \min(s, \tau_{\mathcal{N}})$, $s \geqq t_0$. Обозначим для $z_m \in V_m$

$$L(z_m) = -2\alpha\nu\langle \nabla z_m, \nabla z_m\rangle + \langle z_m, g_m\rangle + 2\alpha^2\langle z_m, \Pi_m K \Pi_m z_m\rangle$$
$$+ \alpha \operatorname{Sp} \Pi_m K \Pi_m. \tag{2.17}$$

Тогда из (2.15) получим, интегрируя по $t$ от $t_0$ до $t_{\mathcal{N}}(s)$ (см. [13]):

$$J\big(t_{\mathcal{N}}(s)\big) = J(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t_{\mathcal{N}}(s)} J(t)\, L\big(z_m(t)\big)\, dt + \int\limits_{t_0}^{t_{\mathcal{N}}(s)} J(t)\, \langle z_m(t), d\zeta_m(t)\rangle, \qquad s > t_0. \tag{2.18}$$

Возьмем математическое ожидание от обеих частей (2.18). Так как математическое ожидание от интеграла Ито равно нулю, то получаем:

$$EJ\big(t_{\mathcal{N}}(s)\big) = EJ(t_0) + E\int\limits_{t_0}^{t_{\mathcal{N}}(s)} J(t)\, L\big(z_m(t)\big)\, dt. \tag{2.19}$$

Отсюда при помощи неравенства Гронуолла выведем оценку (2.5). Для этого нужно оценить выражение $L(z_m)$, входящее в правую часть (2.19).

Из определения $L(z_m)$ в (2.17) вытекает, что

$$L(z_m) \leqq -2\alpha\nu\, \|z_m\|^2 + C\, \|g_m\|_{-1} \cdot \|z_m\|_1 + 2\alpha^2 S_1\, \|z_m\|^2 + \alpha S_1. \tag{2.20}$$

По неравенству фридрихса $\|z_m\| \leqq C_1\, \|\Delta z_m\|$, поэтому

$$-2\alpha\nu\, \|\nabla z_m\|^2 + 2\alpha^2 S_1\, \|z_m\|^2 \leqq (-2\alpha\nu + 2\alpha^2 S_1 C_1{}^2)\, \|\nabla z_m\|^2 = -\varepsilon\, \|\nabla z_m\|^2, \tag{2.21}$$

где $\varepsilon \equiv 2\alpha\nu - 2\alpha^2 S_1 C_1{}^2 = 2\alpha S_1 C_1{}^2 \left(\dfrac{\nu}{S_1 C_1{}^2} - \alpha\right) > 0$, если взять $\varkappa \equiv \dfrac{1}{C_1{}^2}$ в теореме 1.1. Действительно, тогда $\dfrac{\nu}{S_1 C_1{}^2} - \alpha = \varkappa\dfrac{\nu}{S_1} - \alpha > 0$ по условию этой теоремы. Кроме того, солгасно неравенству Фридрихса

$$C\, \|g_m\|_{-1} \cdot \|z_m\|_1 \leqq C_2\, \|f\| \cdot \|\nabla z_m\|^2 \leqq \frac{\varepsilon}{2}\, \|\nabla z_m\|^2 + \frac{C_2{}^2}{2\varepsilon}\, \|f\|^2, \tag{2.22}$$

поскольку $\|g_m\|_{-1} = \|\Pi_m \operatorname{rot} f\|_{-1} \leqq C\, \|f\|$.

Подставляя (2.12)—(2.22) в (2.20), получаем:

$$L(z_m) \leqq -\frac{\varepsilon}{2}\, \|\nabla z_m\|^2 + a, \qquad a \equiv \frac{C_2{}^2}{2\varepsilon}\, \|f\|^2 + \alpha S_1. \tag{2.23}$$

Наконец, подставляя (2.23) в (2.19), выводим интегральное неравенство:

$$EJ\big(t_{\mathcal{N}}(s)\big) + \frac{\varepsilon}{2}\, E\int\limits_{t_0}^{t_{\mathcal{N}}(s)} J(t)\, \|\nabla z_m(t)\|^2\, dt \leqq EJ(t_0) + aE\int\limits_{t_0}^{t_{\mathcal{N}}(s)} J(t)\, dt, \qquad s > t_0. \tag{2.24}$$

Чтобы применить к (2.24) лемму Гронуолла, необходимо, грубо говоря, переставить в правой части оператор $E$ с интегралом по $t$.

Для этого заметим прежде всего что при $t < t_{\mathcal{N}}(s) \equiv \min(\tau_{\mathcal{N}}, s)$ имеем:

$$t = \min(\tau_{\mathcal{N}}, t) \equiv t_{\mathcal{N}}(t). \tag{2.25}$$

Поэтому

$$E\int\limits_{t_0}^{t_{\mathcal{N}}(s)} J(t)\, dt = E\int^{t_{\mathcal{N}}(s)} J\big(t_{\mathcal{N}}(t)\big)\, dt = E\int\limits_{t_0}^{s} \Theta\big(t_{\mathcal{N}}(s) - t\big)\, J\big(t_{\mathcal{N}}(t)\big)\, dt. \tag{2.26}$$

Применим к последнему интегралу теорему Фубини [18]:

$$E\int_{t_0}^{s}\Theta\big(t_{\mathcal{N}}(s)-t\big)\,J\big(t_{\mathcal{N}}(t)\big)\,dt=\int_{t_0}^{s}E\Theta\big(t_{\mathcal{N}}(t)-t\big)\,J\big(t_{\mathcal{N}}(t)\big)\,dt. \tag{2.27}$$

Теорема Фубини применима в (2.27) по следующим причинам. Во-первых, подынтегральная функция ограничена: при $\tau\in(t_0,s)$ и п. в. $\omega\in\Omega\equiv\mathscr{H}^1\times\mathscr{C}^1$ (см. (1.33))

$$0\leqq\Theta\big(t_{\mathcal{N}}(s)-t\big)\,J\big(t_{\mathcal{N}}(t)\big)\equiv\Theta\big(t_{\mathcal{N}}(s,\omega)-t\big)\,J\big(t_{\mathcal{N}}(t,\omega)\big)\leqq\exp\left(\alpha\mathcal{N}^2\right).$$

Во-вторых, эта функция измерима по Борелю по совокупности $(t,\omega)\in(t_0,s)\times\Omega$. Действительно, измеримость $t_{\mathcal{N}}(s)\equiv\min\big(\tau_{\mathcal{N}}(\omega),s\big)$ по Борелю по $\omega\in\Omega$ вытекает из измеримости $\tau_{\mathcal{N}}(\omega)$, доказанной в [15]; измеримость $J\big(t_{\mathcal{N}}(t,\omega)\big)$ $=\exp\big(\alpha\,\|z_m(t_{\mathcal{N}}(t,\omega),\omega)\|^2\big)$ следует из измеримости $t_{\mathcal{N}}(t,\omega)$ по $(t,\omega)$ и из озмеримости $z_m(t,\omega)$ по $(t,\omega)$ (см. п. 2. леммы 2.1). Итак, из (2.26)—(2.27) получаем, учитывая, что $\Theta\leqq 1$:

$$E\int_{t_0}^{t_{\mathcal{N}}(s)}J(t)\,dt\leqq\int_{t_0}^{s}EJ\big(t_{\mathcal{N}}(t)\big)\,dt. \tag{2.28}$$

Подставляя эту оценку в (2.24), выводим, наконец, интегральное неравенетво, к которому применима лемма Гронуолла:

$$EJ\big(t_{\mathcal{N}}(s)\big)+\frac{\varepsilon}{2}\,E\int_{t_0}^{t_{\mathcal{N}}(s)}J(t)\,\|\nabla z_m(t)\|^2\,dt\leqq EJ(t_0)+a\int_{t_0}^{s}EJ\big(t_{\mathcal{N}}(t)\big)\,dt. \tag{2.29}$$

Отсюда по неравенству Гронуолла

$$EJ\big(t_{\mathcal{N}}(s)\big)\leqq EJ(t_0)\,e^{a(s-t_0)}. \tag{2.30}$$

Но из определения (2.14) вытекает в силу (2.3), что

$$EJ(t_0)\leqq E^{\alpha}_{0,1}<+\infty. \tag{2.31}$$

Поэтому, подставляя (2.31) и (2.30) в правую часть (2.29), будем иметь оценку вида (2.5):

$$EJ\big(t_{\mathcal{N}}(s)\big)+\frac{\varepsilon}{2}\int_{t_0}^{t_{\mathcal{N}}(s)}J(t)\,\|\nabla z_m(t)\|^2\,dt\leqq E^{\alpha}_{0,1}+aE^{\alpha}_{0,1}\int_{t_0}^{s}e^{a(t-t_0)}\,dt. \tag{2.32}$$

Из (2.32) оценка (2.5) получается при $\mathcal{N}\to\infty$. Действительно, из (2.30) согласно неравенству Чебышева вытекает оценка

$$P\big(t_{\mathcal{N}}(s)<s\big)\exp\left(\alpha\mathcal{N}^2\right)\leqq EJ\big(t_{\mathcal{N}}(s)\big)\leqq E^{\alpha}_{0,1}\exp\big(a(s-t_0)\big),\quad s>t_0. \tag{2.33}$$

Следовательно,

$$P\big(t_{\mathcal{N}}(s)<s\big)\xrightarrow[\mathcal{N}\to\infty]{}0. \tag{2.34}$$

С другой стороны, $t_{\mathcal{N}}(s)$ не убывает при увеличении $\mathcal{N}$. Поэтому из (2.34) следует, что

$$t_{\mathcal{N}}(s)\xrightarrow[\mathcal{N}\to\infty]{}s\quad\text{п. н.} \tag{2.35}$$

Наконец, из (2.32) в силу (2.35) при $\mathcal{N}\to\infty$ по лемме фату получается (2.5). Лемма 2.1 доказана. ∎

## § 3. Предельный переход

В этом параграфе доказывается теорема 1.1. Чтобы построить процесс $u(t, x)$, удовлетворяющий (1) и (4), докажем, что распределения процессов $u_m(t, x)$, для которых выполняются (2.1) и (2.2), сходятся при $m \to \infty$.

Из теоремы вложения Дубинского [3] выводится следующее утверждение.

Предложение 3.1: *Вложение* $U(t_0, t_1) \subset C^0(t_0, t_1)$ *компактно.*

Доказательство: Пусть $u_k(t)$ — органиченная последовательность в $U(t_0, t_1)$. Это значит согласно (1.8)—(1.10), что

$$\left(\int_{t_0}^{t_1} \|u_k(t)\|_2^2\, dt\right)^{1/2} + \sup_{t_0 \le s < t \le t_1} \frac{\|u_k(t) - u_k(s)\|}{|t - s|^\delta} \le M < +\infty, \qquad k \in \mathbf{N}, \tag{3.1}$$

где $M$ не зависит от $k$. Возьмем в теореме 4.1 из [3] (стр. 123) $E_0 = \mathscr{H}^2$, $E = E_1 = \mathscr{H}$. Тогда $\{u_k\}$ в силу (3.1) — органиченная последовательность в $L_2(t_0, t_1; E_0)$ и равностепенно непрерывная в $C(t_0, t_1; E_1)$.. Следовательно, согласно указанной выше теореме из [3] последовательность $\{u_k\}$ предкомпактна в $C(t_0, t_1; E_1) \equiv C^0(t_0, t_1)$ ∎

Отображение $\omega \to u_m(\cdot, \omega)$ измеримо по Борелю из $\Omega$ в $C^0(t_0, r_1)$ согласно п. 2. леммы 2.1. Поэтому можно определить распределение случайной функции $u_m$, как борелевскую меру $P_m$ на $C^0(t_0, t_1)$:

$$P_m(B) \equiv \mu_0 \times \lambda\big(\{\omega \in \Omega\colon u_m(\cdot, \omega) \in B\}\big) \qquad \forall B \in \mathscr{B}\big(C^0(t_0, t_1)\big). \tag{3.2}$$

Предложение 3.2: *Совокупность мер* $\{P_m\}$, $m \in \mathbf{N}$, *слабо компактна на* $C^0(t_0, t_1)$,

Доказательство: Из оценок (2.4), (2.5) получаются заменой переменных $u(\cdot) = u_m(\cdot, \omega)$ соответствующие оценки для мер $P_m$:

$$\int \left(\int_{t_0}^{t_1} \|\nabla z(t)\|^2 \exp\left(\alpha \|z(t)\|^2\right) dt + \|u\|^q_{\mathscr{C}^{(\delta)}}\right) P_m(du) \le C_q < +\infty, \quad m \in \mathbf{N}, \tag{3.3}$$

где $z \equiv \operatorname{rot} u$ и $C_q$ не зависит от $m$. Отсюда при $q = 1$ вытекает согласно определению (1.10):

$$\int \|u\|_U P_m(du) \le C < +\infty, \qquad m \in \mathbf{N}, \tag{3.4}$$

где $C$ не зависит от $m$. Из (3.4) согласно неравенству Чебышева получаем, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое $M > 0$, что

$$P_m(\{u \in U\colon \|u\|_U < M\}) \ge 1 - \varepsilon. \tag{3.5}$$

Но $\{u \in U\colon \|u\|_U < M\}$ — предкомпакт в $\mathscr{C}^0(t_0, t_1)$ согласно предложению 3.1. Следовательно, по теореме Прохорова [16] меры $P_m$ слабо компактны на $\mathscr{C}^0(t_0, t_1)$ ∎

Итак, существует подпоследовательность $m' \to \infty$, для которой

$$P_{m'} \xrightarrow[m' \to \infty]{C_b'(\mathscr{C}^0(t_0, t_1))} P. \tag{3.6}$$

Здесь $P$ — борелевская мера на $\mathscr{C}^0(t_0, t_1)$. Введем отображение $\mathscr{A}$, связывающее меру $P$ с мерами $\mu_0$ и $\lambda$ (см. ниже (3.10)). Для этого представим (1.27) в виде

$$\mathscr{A}u(t) \equiv u(t) - u(t_0) + \int_{t_0}^{t} b\big(u(\tau)\big)\, d\tau = w_{t_0}(t), \qquad t_0 < t < t_1.$$

Тогда задачу Коши (1.27), (3) можно кратко записать так:

$$\mathfrak{A}u = \big(u_0, w_{t_0}(\cdot)\big), \quad \text{где} \quad \mathfrak{A}u \equiv \big(u(t_0), \mathscr{A}u(t_0 + \cdot)\big). \tag{3.7}$$

**Предложение 3.3:** *Отображение* $\mathfrak{A}\colon U \to \mathscr{H}\times\mathscr{C}^0$ *непрерывно.*

**Доказательство:** Непрерывность отображения $u \to u(t_0)$ из $U$ в $\mathscr{H}$ вытекает из определений (1.8) и (1.10). Оператор $\mathscr{A}\colon U \to \mathscr{C}^0$ квадратичный (неоднородной). Поэтому его непрерывность следует из его ограниченности. Ограниченность $\mathscr{A}$ выводится из (1.27'). А именно, в силу (1.27') $b\big(u(\tau)\big) \in L_1(t_0, t_1; \mathscr{H})$ при $u \in U$. Поэтому $\int\limits_{t_0}^{t} b\big(u(\tau)\big)\,d\tau \in \mathscr{C}^0(t_0, t_1)$. Более того, в силу (1.27')

$$\max_{t\in[t_0,t_1]} \left\| \int\limits_{t_0}^{t} b\big(u(\tau)\big)\,d\tau \right\| \leqq C \int\limits_{t_0}^{t_1} \big(\|u(\tau)\|_2^2 + 1\big)\,d\tau \leqq C_1(\|u\|_U^2 + 1) \ \blacksquare$$

**Предложение 3.4:** 1. *Мера $P$ в (3.6) является вероятностной (как и $P_m$); $P$ сосредоточена на $U \in \mathscr{B}(\mathscr{C}^0)$ и удовлетворяет оценкам*

$$\int \|z\|^q_{\mathscr{C}^{(\delta)}} P(du) < +\infty \qquad \forall q > 0, \tag{3.8}$$

$$\int \left(\exp\big(\alpha\,\|z(s)\|^2\big) + \int\limits_{t_0}^{s} \|\nabla z(t)\|^2 \exp\big(\alpha\,\|z(t)\|^2\big)\,dt\right) P(du)$$

$$\leqq C\, e^{a(s-t_0)} E^{\alpha}_{0,1}, \qquad s \in (t_0, t_1). \tag{3.9}$$

2. *При отображении $\mathfrak{A}\colon U \to \mathscr{H}\times\mathscr{C}^0$, определенном в (3.7), мера $P$ переходит в $\mu_0 \times \lambda$:*[1])

$$\mathfrak{A}^*P = \mu_0 \times \lambda. \tag{3.10}$$

Это предложение доказывается аналогично теореме 2.1 из [1]. При этом оценки (3.8) и (3.9) вытекают из равномерных по $m$ оценок (2.4), (2.5). Тождество (3.10) доказывается, как в [1], предельным переходом $m \to \infty$ в аналогичных тождествах для галеркинских мер $P_m$.

Докажем, используя (3.10), что задача Коши (1.27), (3) разрешима с вероятностью 1. Подобное утверждение доказано в [1]. Однако мы приведем здесь доказательство, поскольку оно содержит конструкцию, используемую ниже.

**Предложение 3.5:** *Существует такое множество $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{H}^1\times\mathscr{C}^1$, что*

$$\mathscr{F}_1 \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1\times\mathscr{C}^1), \qquad \mu_0\times\lambda(\mathscr{F}_1) = 1 \quad \text{и} \quad \mathscr{F}_1 \subset \mathfrak{A}U. \tag{3.11}$$

**Доказательство:** Поскольку $U$ — сепарабельное банахово пространство, то по теореме Рисса ([16], стр. 374) $\forall \mathscr{N} > 0$ найдется такой компакт $K_{\mathscr{N}} \Subset U$, что

$$P(K_{\mathscr{N}}) \geqq 1 - 1/\mathscr{N}. \tag{3.12}$$

Положим

$$U_0 = \bigcup_{1}^{\infty} K_{\mathscr{N}}. \tag{3.13}$$

---

[1]) Мера $\mu_0$ продолжается до борелевской меры на $\mathscr{H}$, поскольку $\mathscr{B}(\mathscr{H}^1) = \mathscr{H}^1 \cap \mathscr{B}(\mathscr{H})$; аналогично, $\lambda$ — борелевская мера на $\mathscr{C}^0$.

Тогда $U_0 \in \mathscr{B}(U)$, а из (3.12) вытекает, что

$$P(U_0) = 1. \tag{3.14}$$

Согласно предложению 3.3 отображение $\mathfrak{A}\colon U \to \mathscr{H}\times\mathscr{C}^0$ непрерывно, поэтому $\mathfrak{A}(K_{\mathscr{N}})$ — компакт в $\mathscr{H}\times\mathscr{C}^0$ и

$$\mathscr{F}_0 \equiv \mathfrak{A}U_0 = \bigcup_1^\infty \mathfrak{A}(K_{\mathscr{N}}) \in \mathscr{B}(\mathscr{H}\times\mathscr{C}^0). \tag{3.15}$$

Из (3.10) и (3.15) следует, что

$$\mu_0 \times \lambda(\mathscr{F}_0) \geqq P(U_0) = 1. \tag{3.16}$$

Наконец, положим $\mathscr{F}_1 \equiv \mathscr{F}_0 \cap (\mathscr{H}^1\times\mathscr{C}^1)$. Тогда по теореме II.2.1 из [3] имеем: $\mathscr{F}_1 \in \mathscr{B}(\mathscr{H}^1\times\mathscr{C}^1)$, поскольку $\mathscr{H}^1\times\mathscr{C}^1 \subset \mathscr{H}\times\mathscr{C}^0$ — непрерывное вложение метрических пространств. Кроме того, $\mu_0\times\lambda(\mathscr{H}^1\times\mathscr{C}^1) = 1$, так как $\mu_0(\mathscr{H}^1) = 1$ и $\lambda(\mathscr{C}^1) \equiv 1$. Поэтому из (3.16) вытекает, что $\mu_0\times\lambda(\mathscr{F}_1) = 1$. Итак, (3.11) доказано ∎

Чтобы построить процесс $u(t,\omega)$, удовлетворяющий (1.27), (3) и измеримый на вероятностном пространстве (1.33), докажем следующие два предложения.

Предложение 3.6: *Отображение* $\mathfrak{A}\colon U \to \mathscr{H}\times\mathscr{C}^0$ *инъективно.*

Доказательство: Пусть $u_1, u_2 \in U$ и

$$\mathfrak{A}u_1 = \mathfrak{A}u_2. \tag{3.17}$$

Но тогда ввиду (3.7) $u_1$ и $u_2$ удовлетворяют (1.27) и (3) при одних и тех же $(u_0, w_{t_0})$. Поэтому $u_1 = u_2$ согласно следствию 1.1. Итак, $\mathfrak{A}$ инъективно ∎

Положим

$$U_1 = \mathfrak{A}^{-1}(\mathscr{F}_1). \tag{3.18}$$

Предложение 3.7: *Отображение* $\mathfrak{A}^{-1}\colon \mathscr{F}_1 \to U_1$ *измеримо по Борелю, если* $\mathscr{B}(U_1) \equiv \mathscr{B}(U) \cap U_1$, $\mathscr{B}(\mathscr{F}_1) \equiv \mathscr{B}(\mathscr{H}^1\times\mathscr{C}^1) \cap \mathscr{F}_1$.

Доказательство: Отображение $\mathfrak{A}^{-1}$ определено на $\mathscr{F}_1$, так как $\mathscr{F}_1 \subset \mathfrak{A}U$ в силу (3.11). Измеримость $\mathfrak{A}^{-1}$ означает, что $\mathfrak{A}(B) \in \mathscr{B}(\mathscr{F}_1)$ $\forall B \in \mathscr{B}(U_1)$. Достаточно проверить это свойство лишь для $B$, замкнутых в $U_1$: $B = B_1 \cap U_1$, где $B_1$ замкнуто в $U$.

Пусть $K_{\mathscr{N}}$ — компакты из доказательства предложения 3.5. Тогда $B_1 \cap K_{\mathscr{N}}$ — компакт в $U$ и, следовательно, $\mathfrak{A}(B_1 \cap K_{\mathscr{N}})$ — компакт в $\mathscr{H}\times\mathscr{C}^0$. Кроме того, $\mathfrak{A}(U_1) = \mathscr{F}_1 \in \mathscr{B}(\mathscr{H}\times\mathscr{C}^0)$ ввиду (3.11). Поэтому

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(B \cap K_{\mathscr{N}}) &= \mathfrak{A}(B_1 \cap K_{\mathscr{N}}) \cap \mathfrak{A}(U_1) \in \mathscr{B}(\mathscr{H}\times\mathscr{C}^0) \cap \mathscr{F}_1 \\ &= \mathscr{B}(\mathscr{H}^1\times\mathscr{C}_1) \cap \mathscr{F}_1 \equiv \mathscr{B}(\mathscr{F}_1).\end{aligned} \tag{3.19}$$

С другой стороны, $\mathfrak{A}U_1 = \mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_0 \equiv \mathfrak{A}U_0$, и отображение $\mathfrak{A}\colon U \to \mathscr{H}\times\mathscr{C}^0$ инъективно по предложению 3.6. Следовательно, $U_1 \subset U$, а отсюда ввиду (3.13) вытекает, что

$$B = \bigcup_{\mathscr{N}=1}^\infty B \cap K_{\mathscr{N}}. \tag{3.20}$$

Поэтому из (3.19) получаем:

$$\mathfrak{A}B = \bigcup_{\mathscr{N}=1}^\infty \mathfrak{A}(B \cap K_{\mathscr{N}}) \in \mathscr{B}(\mathscr{F}_1) \ \blacksquare$$

**Доказательство теоремы 1.1:** Определим искомый случайный процесс $u(\omega)$ на $\Omega \equiv \mathscr{H}^1 \times \mathscr{C}^1$ формулой

$$u\big((u_0, w)\big) = \begin{cases} \mathfrak{A}^{-1}\big((u_0, w)\big), & \text{если} \quad (u_0, w) \in \mathscr{F}_1, \\ 0, & \text{если} \quad (u_0, w) \notin \mathscr{F}_1. \end{cases} \tag{3.21}$$

Проверим, что так определенный процесс $u$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 1.1.

Действительно, утверждение 1. теоремы 1.1 следует из (3.21), поскольку $\mu_0 \times \lambda(\mathscr{F}_1) = 1$, и из предложения 3.6. Далее, так как $\mathscr{F}_1 \in \mathscr{B}(\Omega)$, то из предложения 3.7 вытекает измеримость по Борелю отображения $\Omega \to U$, переводящего $\omega = (u_0, w)$ в $u(\omega)$. Наконец, оценка (1.35) вытекает из (3.9), поскольку распределение процесса $u$ совпадает с мерой $P$. Действительно, из (3.18) следует ввиду (3.10), что $P(U_1) = \mu_0 \times \lambda(\mathscr{F}_1) = 1$ согласно (3.11). Поэтому из (3.21) и (3.10), получаем, что $\forall B \in \mathscr{B}(U)$

$$\mu_0 \times \lambda\big(\{\omega \in \Omega\colon u(\omega) \in B\}\big) = \mu_0 \times \lambda\big(\{\omega \in \mathscr{F}_1\colon \mathfrak{A}^{-1}(\omega) \in B\}\big)$$
$$= \mu_0 \times \lambda(\mathscr{F}_1 \cap \mathfrak{A}B) = \mu_0 \times \lambda\big(\mathfrak{A}(U_1 \cap B)\big) = P(U_1 \cap B) = P(B) \ \blacksquare$$

## § 4. Прямое уравнение Колмогорова. Тождество Грина — Фояша

Для $s \in (t_0, t_1)$ обозначим через $\gamma_s$ оператор следа:

$$\gamma_s u(\cdot) = u(s, \cdot), \qquad u \in U. \tag{4.1}$$

Из определения 1.3 вытекает, что $\gamma_s\colon U \to \mathscr{H}$ — непрерывный оператор. Обозначим через $\mu(s, \cdot)$ борелевские меры на $\mathscr{H}$, являющиеся сужениями меры $P$, построенной в § 3 (см. (3.6)):

$$\mu(s, B) \equiv (\gamma_s{}^*P)(B) \equiv P(\gamma_s{}^{-1}B) \qquad \forall B \in \mathscr{B}(\mathscr{H}), \qquad s \in [t_0, t_1]. \tag{4.2}$$

Из (3.9) следует, что меры $\mu(t, \cdot)$ удовлеворяют оценке

$$\int \exp(\alpha \|z\|^2)\, \mu(s, du) + \int_{t_0}^{s} \Big(\int \|\nabla z\|^2 \exp(\alpha \|z\|^2)\, \mu(t, du)\Big)\, dt$$
$$\leq C\, e^{a(s-t_0)} E^{\alpha}_{0,1}, \qquad s \in (t_0, t_1), \tag{4.3}$$

где $z \equiv \mathrm{rot}\, u$. Поэтому меры $\mu(s, \cdot)$ сосредоточены на $\mathscr{H}^1$ при всех $s \in (t_0, t_1)$ и на $\mathscr{H}^2$ при п. в. $s \in (t_0, t_1)$. Отметим, что $\mathscr{B}(\mathscr{H}^1) \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ по теореме II.2.1 из [3], поэтому $\mu(s, \cdot)$ — борелевские меры на $\mathscr{H}^1$ при всех $s \in (t_0, t_1)$.

В [1] было показано, что эти меры удовлетворяют прямому уравнению Колмогорова, соответствующему (1):

$$\frac{\partial \chi}{\partial t}(t, v) = \int \exp(i\langle u, v\rangle)\, \Big[i\langle b(u), v\rangle - \frac{1}{2}\langle Qv, v\rangle\Big]\, \mu(t, du), \tag{4.4}$$

п. в. $t \in (t_0, t_1)$.

Здесь $\chi(\cdot, v)$ — характеристический функционал меры $\mu(t, du)$:

$$\chi(t, v) \equiv \int \exp(i\langle u, v\rangle)\, \mu(t, du). \tag{4.4'}$$

Производная $\dfrac{\partial \chi}{\partial t}$ в (4.4) понимается при фиксированном $v \in \mathscr{H}$ в смысле обобщенных функций от $t \in (t_0, t_1)$.

Определение 4.1: *Решением прямого уравнения Колмогорова* (4.4) на интервале $[t_0, t_1]$ будем называть семейство борелевских мер $\mu(t, du)$ на $\mathscr{H}$, $t \in [t_0, t_1]$, обладающих следующими свойствами:

1. $\chi(\cdot, v) \in C(t_0, t_1)$ при каждом фиксированном $v \in \mathscr{H}^1$, где $\chi$ — функционал (4.4').

2. При каждом фиксированном $v \in \mathscr{H}^1$ выполняется уравнение (4.4), в котором $\dfrac{\partial\chi}{\partial t}$ понимается в смысле обобщенных функций от $t$, а правая часть предполагается суммируемой функцией от $t \in (t_0, t_1)$.

3. Выполняются оценки (4.3) с некоторым $\alpha > 0$.

Из сказанного выше (см. (1.4)—(4.4)) вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 4.1: *Задача Коши для прямого уравнения Колмогорова* (4.4) *при начальном условии*

$$\mu(t_0, du) = \mu_0(du) \tag{4.5}$$

*имеет решение* $\mu(t, du)$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$, *если начальная мера* $\mu_0$ *удовлетворяет условию* (1.32) *при некотором* $\alpha > 0$.

Выведем для решений уравнения (4.4) аналог тождества Грина. Напомним, что $\Pi_m$ — ортогональный проектор в $\mathscr{H}$ на $V_m$. Обозначим через $\mathscr{C}^\infty_{0,m}(t_0, t_1)$ пространство функционалов $\Phi(t, u)$ на $[t_0, t_1]\times\mathscr{H}^1$, цилиндрических по $u$:

$$\Phi(t, u) \equiv \Phi(t, \Pi_m u), \text{ причем } \Phi|_{[t_0,t_1]\times V_m} \in C_0^\infty([t_0, t_1]\times V_m).$$

Тогда для $\Phi(t, u) \in \mathscr{C}^\infty_{0,m}(t_0, t_1)$ справедливо представление Фурье:

$$\Phi(t, u) = \int_{V_m} \exp(i\langle u, v\rangle)\,\tilde\Phi(t, v)\, d^{\mathscr{N}}v, \qquad t \in (t_0, t_1), \qquad u \in \mathscr{H}^1. \tag{4.6}$$

Здесь $d^{\mathscr{N}}v = dv^1 \dots dv^{\mathscr{N}}$, $\mathscr{N} = \mathscr{N}(m)$ — размерность $V_m$, $v^k$ — декартовы координаты ма $V_m$, а $\tilde\Phi(t, v)$ — преобразование Фурье от $\Phi(t, \cdot)|_{V_m}$:

$$\tilde\Phi(t, v) = (2\pi)^{-m} \int_{V_m} \exp(-i\langle v, u\rangle)\,\Phi(t, u)\, d^{\mathscr{N}}u, \quad t \in (t_0, t_1), \quad v \in V_m. \tag{4.7}$$

Поскольку $\Phi(t, \cdot)|_{V_m} \in C_0^\infty(V_m)$, то $\tilde\Phi(t, v)|_{V_m} \in S(V_m)$. Поэтому из (4.6) получаем следующие представления для дуфференциалов Фреше от $\Phi(t, u)$ по $u$:

$$\mathscr{D}_u\Phi(t, u) = i \int_{V_m} v \cdot \exp(i\langle u, v\rangle)\,\tilde\Phi(t, v)\, d^{\mathscr{N}}v,$$

$$\mathscr{D}_u{}^2\Phi(t, u) = i^2 \int_{V_m} v \otimes v \cdot \exp(i\langle u, v\rangle)\,\tilde\Phi(t, v)\, d^{\mathscr{N}}v. \tag{4.8}$$

Так как $\tilde\Phi(t, \cdot)|_{V_m} \in S(V_m)$, то из (4.8) следует, что

$$\mathscr{D}_u\Phi(t, u) \in V_m, \quad \mathscr{D}_u{}^2\Phi(t, u) \in V_m \otimes V_m \quad \forall\,(t, u) \in (t_0, t_1)\times\mathscr{H}^1. \tag{4.9}$$

Лемма 4.1: *Пусть меры* $\mu(t, du)$, $t_0 \leqq t \leqq t_1$, *на* $\mathscr{H}^1$ *являются решением прямого уравнения Колмогорова* (4.4) *в смысле определения* 4.1. *Тогда* $\forall\, m \in \mathbf{N}$ *и* $\forall\, \Phi(t, u)$

$\in \mathscr{C}^{\infty}_{0,m}(t_0, t_1)$ *выполняется тождество Грина-Фояша:*

$$\int \Phi(t_1, u)\,\mu(t_1, du) - \int \Phi(t, u)\,\mu(t, du)$$
$$= \int_t^{t_1} \Big\{ \int \Big[ \partial_\tau \Phi(\tau, u) + \langle b(u), \mathscr{D}_u \Phi(\tau, u)\rangle + \frac{1}{2} \langle\langle Q, \mathscr{D}_u{}^2 \Phi(\tau, u)\rangle\rangle \Big]$$
$$\times\ \mu(\tau, du) \Big\}\, d\tau, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{4.10}$$

*Выражение, стоящее в фигурных скобках в* (4.10), — *суммируемая функция от* $t \in (t_0, t_1)$, *причем по определению* (ср. (4.8))

$$\langle\langle Q, \mathscr{D}_u{}^2 \Phi(t, u)\rangle\rangle \equiv i^2 \int_{V_m} \langle Qv, v\rangle \exp\,(i\langle u, v\rangle)\, \tilde{\Phi}(t, v)\, d\mathscr{N} v. \tag{4.11}$$

Доказательство: По определению 4.1 из уравнения (4.4) следует, что $\forall\, v \in \mathscr{H}$

$$-\int \chi(\tau, v) \frac{\partial \tilde{\Phi}(\tau, v)}{\partial \tau}\, d\tau = \int \Big\{ \int e^{i\langle u, v\rangle} \Big[ i\langle b(u), v\rangle - \frac{1}{2} \langle Qv, v\rangle \Big]$$
$$\times\ \mu(\tau, du)\, \tilde{\Phi}(\tau, v)\, d\tau. \tag{4.12}$$

Устремляя $\tilde{\Phi}(\tau, v) \to 0$ при $\tau \in [t, t_1]$, получим из (4.12) (аналогично [9]) тождество

$$\chi(t_1, v)\, \tilde{\Phi}(t_1, v) - \chi(t, v)\, \tilde{\Phi}(t, v) - \int_t^{t_1} \chi(\tau, v) \frac{\partial \tilde{\Phi}(\tau, v)}{\partial \tau}\, d\tau$$
$$= \int \Big\{ \int e^{i\langle u, v\rangle} \Big[ i\langle b(u), v\rangle - \frac{1}{2} \langle Qv, v\rangle \Big] \mu(\tau, du) \Big\}\, \tilde{\Phi}(\tau, v)\, d\tau. \tag{4.13}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках в правой части (4.13), измеримо по $(\tau, v) \in (t, t_1) \times V_m$. Действительно, оно совпадает с $\dfrac{\partial \chi}{\partial t}(t, v)$ при $dt \times d\mathscr{N} v$ — п. в. $(t, v)$ в силу (4.4), а $\chi(t, v)$ непрерывна на $(t_0, t_1) \times V_m$ ввиду оценок (4.3). Представим $\chi$ в левой части (4.13) в виде (4.4′) и проинтегрируем обе части (4.13) по $v \in V_m$. Переставим интегрирование по $v$ с интегрированиями по $\tau$ и $u$, что возможно в силу оценок (4.3) и отмеченной выше измеримости по $(\tau, v)$. Тогда из (4.13) ввиду (4.6) и (4.8) получается (4.10) ∎

Отметим, что тождество (4.10) справедливо для более широкого класса функционалов $\Phi(t, u)$, чем $C^{\infty}_{0,m}(t_0, t_1)$.

## § 5. Обобщенные решения обратного уравнения Колмогорова

Из тождества Грина (4.10) видно, что формально сопряженным к прямому уравнению Колмогорова (4.4) является уравнение

$$\mathscr{L}\Phi(t, u) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \langle b(u), \mathscr{D}_u \Phi(t, u)\rangle + \frac{1}{2} \langle\langle Q, \mathscr{D}_u{}^2 \Phi(t, u)\rangle\rangle = 0$$
$$\forall\, u \in \mathscr{H}^2, \qquad t \in (t_0, t_1). \tag{5.1}$$

Оно называется *обратным уравнением Колмогорова, соответствующим системе Навье-Стокса* (1), (1.27). Ниже в § 6 будут сформулированы результаты о классических решениях уравнения (5.1). В данном параграфе будут построены обобщенные решения этого уравнения. Чтобы определить, что такое обобщенные решения уравнения (5.1), заметим следующее. Тождество (4.10) доказано нами для цилиндрических функционалов $\Phi \in \mathscr{C}^\infty_{0,m}(t_0, t_1)$ $\forall m \in \mathbf{N}$. Однако оно справедливо для гораздо более широкого класса функционалов $\Phi$, в частности, для классических решений $\Phi(t, u)$ уравнения (5.1), построенных ниже в § 6 (см. лемму 6.1). Для этих классических решений тождество (4.10) в силу (5.1) принимает вид

$$\int \Phi(t_1, u)\,\mu(t_1, du) - \int \Phi(t, u)\,\mu(t, du) = 0, \qquad t \in [t_0, t_1]. \tag{5.2}$$

Это тождество и берется за основу определения обобщенных решений уравнения (5.1). Точнее, рассмотрим обратную задачу Коши для (5.1) с начальним условием

$$\Phi(t_1, u) = \psi(u), \qquad u \in \mathscr{H}^1. \tag{5.3}$$

Пусть начальный функционал $\psi(u)$ обладает следующими свойствами: для некоторого $\gamma_0 \in \mathbf{R}$

$$\psi\colon \mathscr{H}^1 \to \mathbf{C} \text{ измерим по Борелю и } \|\psi\|_{\gamma_0} \equiv \sup_{u \in \mathscr{H}^1} \left|\exp\left(-\gamma_0 \|z\|^2\right) \psi(u)\right| < +\infty, \tag{5.4}$$

где $z \equiv \mathit{rot}\, u$.

Определение 5.1: *Обобщенным решением* обратной задачи Коши (5.1), (5.3) называется функционал $\Phi(t, u)$ на $[t_0, t_1] \times \mathscr{H}^1$, обладающий следующими свойствами:

1. Выполняется интегральное тождество (5.2) $\forall t \in [t_0, t_1]$ для любого решения $\mu(s, du)$ уравнения (4.4) на интервале $[t, t_1]$, удовлетворяющего оценкам (4.3) (с $t_0 = t$) при некотором $\alpha > \gamma_0$.

2. $\Phi(t, \cdot)$ при каждом $t \in [t_0, t_1]$ измерим по Лебегу относительно любой конечной борелевской меры на $\mathscr{H}^1$ и удовлетворяет (5.3) при п. в. $u \in \mathscr{H}^1$ относительно любой такой меры.

Ввиду (5.3) тождество (5.2) эквивалентно тождеству

$$\int \psi(u)\,\mu(t_1, du) = \int \Phi(t, u)\,\mu(t, du). \tag{5.5}$$

Теорема 5.1: *Пусть $\psi(u)$ удовлетворяет условиям* (5.4), *где $0 < \gamma_0 < \varkappa\nu/S_1$. Тогда на интервале $(t_0, t_1)$ любой длины существует единственное обобщенное решение $\Phi(t, u)$ задачи* (5.1), (5.3). *Справедлива оценка*

$$\|\Phi(t, \cdot)\|_{\gamma_0} \leqq C \exp\left(a(t_1 - t)\right) \|\psi\|_{\gamma_0}, \qquad t \in [t_0, t_1], \tag{5.6}$$

*где $a > 0$ и $\|\cdot\|_{\gamma_0}$ определено в* (5.4).

Доказательство: Единственность $\Phi(t, u)$ вытекает из тождества (5.5) ввиду произвольности (по теореме 4.1) начальной меры $\mu(t, du)$ — решения прямого уравнения Колмогорова (4.4) на интервале $(t, t_1)$.

Для доказательства существования покажем, что интеграл Винера

$$\Phi(t, u_0) \equiv \int \psi\big(S(t_1 - t, u_0, w)\big)\,\lambda(dw), \qquad (t, u_0) \in (t_0, t_1) \times \mathscr{H}^1, \tag{5.7}$$

является искомым решением. Здесь $S(\tau, u_0, w) \equiv S(\tau)$, $\tau \in (0, t_1 - t_0)$, — решение задачи (1.36), построенное в лемме 1.1 при $\lambda(dw)$ — п. в. $w \in \mathscr{C}^1$. Действительно, (5.3) вытекает из (5.7) в силу начального условия из (1.36): $S(0, u_0, w) = u_0$ при $\lambda$ — п. в. $w \in \mathscr{C}^1$. Далее, проверим для $\Phi(t, u)$, определенного в (5.7), тождество (5.5). Тогда ввиду (5.3) получим (5.2).

•

Пусть $\mu(s, du)$, $t \leq s \leq t_1$, — произвольное решение прямого уравнения Колмогорова (4.4), удовлетворяющее оценкам (4.3) при некотором $\alpha > \gamma_0$. Можно считать, что $\alpha < \varkappa\nu/S_1$, поскольку $\gamma_0 < \varkappa\nu/S_1$. Применим теорему 1.1 к случаю $t_0 = t$ и $\mu_0(du_0) \equiv \mu(t, du_0)$. Тогда получим, что на пространстве (1.33) существует процесс $u(s) = \bar{S}(s, u_0, w)$, $t \leq s \leq t_1$, определенный при всех $(u_0, w) \in \mathscr{H}^1 \times \mathscr{C}^1$, кроме множества $\mu(t, du_0) \times \lambda(dw)$ — меры нуль, удовлетворяющий (1.27), (3) и оценке (1.35) с $t_0 = t$. Отметим, что процесс $\bar{S}(s, u_0, w)$ определен при п. в. $(u_0, w)$ относительно меры $\mu(t, du_0) \times \lambda(dw)$ в отличие от процесса $S(\tau, u_0, w)$, который определен для любого фиксированного $u_0 \in \mathscr{H}^1$ при $\lambda(dw)$ — п. в. $w \in \mathscr{C}^1$. Обозначим через $\bar{P}(du)$ борелевскую меру на $U(t, t_1)$ — распределение процесса $\bar{S}(s)$, $t \leq s \leq t_1$. Как указывалось в § 4 (см. теорему 4.1), сужения $\bar{\mu}(s, du) \equiv \gamma_s{}^*\bar{P}$ меры $\bar{P}$ удовлетворяют прямому уравнению Колмогорова (4.4) и оценке (4.3) с $\alpha > 0$. Поэтому из теоремы 6.2 о единственности (см. ниже § 6) выводим, что

$$\mu(s, du) = \bar{\mu}(s, du) \equiv \gamma_s{}^*\bar{P}, \qquad t \leq s \leq t_1. \tag{5.8}$$

Следовательно, взяв в (5.8) $s = t_1$, получим:

$$\int \psi(u)\, \mu(t_1, du) = \int \psi(u)\, \bar{\mu}(t_1, du) = \int \psi(u)\, (\gamma_{t_1}^*\bar{P})\, (du). \tag{5.9}$$

Сделав подстановку $u = \gamma_{t_1}v$, где $v \in U(t, t_1)$, будем иметь:

$$\int \psi(u)\, (\gamma_{t_1}^*\bar{P})\, (du) = \int \psi(\gamma_{t_1}v)\, \bar{P}(dv). \tag{5.10}$$

Применим обозначения и результаты § 3 к случаю $t_0 = t$, $\mu_0(\cdot) \equiv \mu(t_1, \cdot)$ и $P \equiv \bar{P}$. Тогда из (3.10) и (3.18) получим, что $\bar{P}(U_1) = \big(\mu(t, \cdot) \times \lambda\big)(\mathscr{F}_1) = 1$. Отсюда для отображения $\mathfrak{A}^{-1}\colon \mathscr{F}_1 \to U_1$ следует ввиду (3.10). что $(\mathfrak{A}^{-1})^* \big(\mu(t, \cdot\,) \times \lambda\big) = \bar{P}$. Поэтому, производя в (5.10) замену $v(s) = \bar{S}(s, u_0, w) \equiv \mathfrak{A}^{-1}(u_0, w)\,(s)$, где $(u_0, w) \in \mathscr{F}_1$ (см. (3.21)), получаем:

$$\int \psi(\gamma_{t_1}v)\, \bar{P}(dv) = \int \psi\big(\bar{S}(t_1, u_0, w)\big)\, \mu(t, du_0) \times \lambda(dw). \tag{5.11}$$

Применяя теорему фубини к последнему интегралу, выводим из (5.9)—(5.11), что

$$\int \psi(u)\, \mu(t_1, du) = \int \Big(\int \psi(\bar{S}(t_1, u_0, w))\, \lambda(dw)\Big)\, \mu(t, du_0). \tag{5.12}$$

При этом использована измеримость процесса $\bar{S}(s, u_0, w)$ по $(u_0, w)$, доказанная в теореме 1.1. Кроме того, в (5.12) использована (абсолютная) сходимость интеграла в правой части (5.11), которая вытекает из сходимости равного ему интеграла в лекой части (5.9). Сходимость этого последнего интеграла следует из (5.4) в силу оценок (4.3) для $\mu(s, du)$ при $s = t_1$, поскольку $\gamma_0 < \alpha$.

Заметим, что тождество (5.12) по виду напоминает (5.5). Чтобы получить (5.5) из (5.12), достаточно проверить, что

$$\int \psi\big(\bar{S}(t_1, u_0, w)\big)\, \lambda(dw) = \Phi(t, u_0) \ \text{при}\ \mu(t, du_0) \text{ — п. в. } u_0 \in \mathscr{H}^1. \tag{5.13}$$

Интеграл в (5.13) зависит от $t$, поскольку процесс $\bar{S}(s, u_0, w)$ построен по начальной мере $\mu(t, du_0)$, заданной в момент времени $s = t$. Выведем (5.13) из совпадения процессов $\bar{S}(s, u_0, w)$ и $S(s - t, u_0, w)$.

Предложение 5.1: *При* $\mu(t, \cdot)$ — *п. в.* $u_0 \in \mathscr{H}^1$

$$\bar{S}(s, u_0, w) = S(s - t, u_0, w) \quad \textit{при} \quad t \leq s \leq t_1 \quad \textit{для} \quad \lambda \text{ — п. в. } w \in \mathscr{C}^1. \tag{5.14}$$

Доказательство: Пусть $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{H}_1 \times \mathscr{C}^1$ — множество $\mu(t, \cdot) \times \lambda$ — меры 1, построенное в предложении 3.5. Определим его сечения

$$\mathscr{F}_{u_0} \equiv \{w \in \mathscr{C}^1 \colon (u_0, w) \in \mathscr{F}_1\} \qquad \forall\, u_0 \in \mathscr{H}^1. \tag{5.15}$$

Тогда, так как $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^1 \times \mathcal{C}^1)$, $\big(\mu(t, \cdot) \times \lambda\big)(\mathcal{F}_1) = 1$, то по теореме Фубини [18]

$$\exists B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^1): \mu(t, B) = 1 \quad \text{и} \quad \lambda(\mathcal{F}_{u_0}) = 1 \quad \forall u_0 \in B. \tag{5.16}$$

При $u_0 \in B$ траектория $\bar{S}(\cdot, u_0, w)$ удовлетворяет (1,27) и (3) с $t_0 = t$ при $\lambda$ — п. в. $w \in \mathcal{C}^1$ и $S(\cdot - t, u_0, w)$ также обладает этим свойством. Следовательно, при $u_0 \in B$ по теореме единственности (следствие 1.1) эти траектории совпадают при $\lambda$ — п. в. $w \in \mathcal{C}^1$. Отсюда следует доказываемое предложение, поскольку $\mu(t, B) = 1$ ∎

В силу (5.14) из (5.7) вытекает (5.13). Из (5.13) и (5.12) следует (5.5).

Проверим теперь измеримость $\Phi(t, \cdot)$ (см. п. 2. определения 5.1). Левая часть (5.13) при каждом фиксированном $t \in [t_0, t_1]$ измерима по Лебегу относительно меры $\mu(t, \cdot)$, вследствие теоремы Фубини. Поэтому в силу равенства (5.13) и $\Phi(t, \cdot)$ также $\mu(t, \cdot)$ — измерим. Отсюда легко выводится измеримость $\Phi(t, \cdot)$ относительно любой конечной борелевской меры на $\mathcal{H}^1$.

Наконец, (5.6) вытекает из (5.4) и представления (5.7) в силу оценки (1.37) при $\alpha = \gamma_0$:

$$\begin{aligned} |\Phi(t, u_0)| &\leqq \int \|\psi\|_{\gamma_0} \exp\left(\gamma_0 \|z(t_1 - t, u_0, w)\|^2\right) \lambda(dw) \\ &\leqq \|\psi\|_{\gamma_0} C\, e^{a(t_1 - t)} e^{\gamma_0 \|z_0\|^2}, \qquad z_0 \equiv rot\, u_0. \end{aligned}$$

Теорема 5.1 доказана ∎

Покажем, что если начальный функционал $\psi(u)$ удовлетворяет условию Гельдера, то обобщенное решение $\Phi(t, u)$ также обладает этим свойством при всех $t < t_1$. Однако показатель Гельдера уменьшается (вообще говоря) при $t \to -\infty$.

Теорема 5.2: *Предположим, что $\psi(u)$ удовлетворяет условиям* (5.4), *где* $0 < \gamma_0 < \varkappa\nu/S_1$ *и, кроме того, условию Гельдера следующего вида:*

$$|\psi(u_1) - \psi(u_2)| \leqq C \exp\left(\frac{1}{2} \gamma_0(\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2)\right) \|u_1 - u_2\|^\beta \qquad \forall u_1, u_2 \in \mathcal{H}, \tag{5.17}$$

*где $z_i \equiv rot\, u_i$, $C > 0$ и $\beta > 0$. Тогда обобщенное решение $\Phi(t, u)$ задачи* (5.1), (5.3) *также удовлетворяет аналогичному условию Гельдера: при любом $\gamma > \gamma_0$*

$$|\Phi(t, u_1) - \Phi(t, u_2)| \leqq C_\gamma \exp\left(\frac{1}{2} \gamma(\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2)\right) \|u_1 - u_2\|^{\beta_t} \ \forall u_1, u_2 \in \mathcal{H}^1, \tag{5.18}$$

*где $\beta_t = C\beta/\big(1 + (t_1 - t)\big)$.*

Доказательство: Достаточно рассмотреть случай $\gamma < \varkappa\nu/S_1$. Из представления (5.7), учитывая (5.17), выводим:

$$\begin{aligned} |\Phi(t, u_1) - \Phi(t, u_2)| &= \left| \int \left[\psi\big(S(t_1 - t, u_1, w)\big) - \psi\big(S(t_1 - t, u_2, w)\big)\right] \lambda(dw) \right. \\ &\leqq C \int \exp\left(\frac{1}{2} \gamma_0\big(\|z(t_1 - t, u_1, w)\|^2 + \|z(t_1 - t, u_2, w)\|^2\big)\right) \|S(t_1 - t, u_1, w) \\ &\quad - S(t_1 - t, u_2, w)\|^\beta \lambda(dw). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Обозначим: $u_i(\tau) \equiv S(\tau, u_i, w)$, $0 \leqq \tau \leqq t_1 - t$, $i = 1, 2$. Тогда из предложения 1.4 получим, симметризуя правую часть оценки (1.45) по $u_1$ и $u_2$, что при $\lambda$ — п. в. $w \in \mathscr{C}^1$

$$\|S(t_1 - t, u_1, w) - S(t_1 - t, u_2, w)\|$$
$$\leqq \|u_1 - u_2\| \exp\left(\frac{B}{2\nu}\int_0^{t_1-t}\|z(s, u_1, w)\|^2\, ds\right)\cdot \exp\left(\frac{B}{2\nu}\int_0^{t_1-t}\|z(s, u_2, w)\|^2\, ds\right). \tag{5.20}$$

Заменим в (5.19) $\gamma_0$ на $\gamma_1 \in (\gamma_0, \gamma)$, а $\beta$ — на произвольное $\beta_t \in (0, \beta]$ (ниже выбор $\beta_t$ уточняется в (5.25)). Тогда, несколько увеличив $C$, получим из (5.19) неравенство

$$|\Phi(t, u_1) - \Phi(t, u_2)| \leqq C_1 \int \exp\left(\frac{1}{2}\gamma_1\left(\|z(t_1 - t, u_1, w)\|^2 + \|z(t_1 - t, u_2, w)\|^2\right)\right)$$
$$\times \|S(t_1 - t, u_1, w) - S(t_1 - t, u_2, w)\|^{\beta_t}\, \lambda(dw). \tag{5.21}$$

Действительно, это вытекает из оценки

$$C\,\|S(t_1 - t, u_1, w) - S(t_1 - t, u_2, w\|^{\beta - \beta_t}$$
$$\leqq C_1 \exp\left(\frac{1}{2}(\gamma_1 - \gamma_0)\left(\|z(t_1 - t, u_1, w)\|^2 + \|z(t_1 - t, u_2, w)\|^2\right)\right), \tag{5.22}$$

справедливой при достаточно большом $C_1$, поскольку $\beta - \beta_t > 0$ и $\gamma_1 - \gamma_0 > 0$.

По из (5.20) выводим, что при $\lambda$ — п. в. $w \in \mathscr{C}^1$

$$\|S(t_1 - t, u_1, w) - S(t_1 - t, u_2, w)\|^{\beta_t}$$
$$\leqq \|u_1 - u_2\|^{\beta_t} \exp\left(\frac{B}{2\nu}\beta_t\int_0^{t_1-t}\|z(s, u_1, w)\|^2\, ds\right)$$
$$\times \exp\left(\frac{B}{2\nu}\beta_t\int_0^{t_1-t}\|z(s, u_2, w)\|^2\, ds\right). \tag{5.23}$$

Подставляя (5.23) в (5.21), получаем:

$$|\Phi(t, u_1) - \Phi(t, u_2)| \leqq C\,\|u_1 - u_2\|^{\beta_t} \int \exp\left(\frac{1}{2}\gamma_1\|z(t_1 - t, u_1, w)\|^2\right)$$
$$\times \exp\left(\frac{1}{2}\gamma_1\|z(t_1 - t, u_2, w)\|^2\right)\cdot \exp\left(\frac{B}{2\nu}\beta_t\int_0^{t_1-t}\|z(s, u_1, w)\|^2\, ds\right)$$
$$\times \exp\left(\frac{B}{2\nu}\beta_t\int_0^{t_1-t}\|z(s, u_2, w)\|^2\, ds)\right)\lambda(dw). \tag{5.24}$$

Выберем теперь $\beta_t \in (0, \beta)$ так, чтобы выпольнялось неравенство

$$\gamma_1 + \frac{B}{\gamma}\beta_t\,(t_1 - t) \leqq \gamma. \tag{5.25}$$

Тогда

$$\frac{\gamma_1}{2\gamma}+\frac{\gamma_1}{2\gamma}+\frac{B}{2\nu}\,\frac{\beta_t(t_1-t)}{\gamma}+\frac{B}{2\nu}\,\frac{\beta_t(t_1-t)}{\gamma}\leqq 1, \tag{5.26}$$

и поэтому можно применить к интегралу в (5.24) от четырех сомножителей неравенство Гельдера с показателямы соответственно

$$p_1=\frac{2\gamma}{\gamma_1},\quad p_2=\frac{2\gamma}{\gamma_1},\quad p_3=\frac{2\nu\gamma}{B\beta_t(t_1-t)},\quad p_4=\frac{2\nu\gamma}{B\beta_t(t_1-t)}. \tag{5.27}$$

При этом получим неравенство

$$\begin{aligned}|\Phi(t,u_1)-\Phi(t,u_2)| &\leqq C\|u_1-u_2\|^{\beta_t}\big(E_\lambda\exp(\gamma\,\|z(t_1-t,u_1,w)\|^2)\big)^{1/p_1}\\ &\times\big(E_\lambda\exp(\gamma\,\|z(t_1-t,u_2,w)\|^2)\big)^{1/p_2}\cdot\left(E_\lambda\exp\left(\frac{\gamma}{t_1-t}\int_0^{t_1-t}\|z(s,u_1,w)\|^2\,ds\right)\right)^{1/p_3}\\ &\times\left(E_\lambda\exp\left(\frac{\gamma}{t_1-t}\int_0^{t_1-t}\|z(s,u_2,w)\|^2\,ds\right)\right)^{1/p_4},\end{aligned} \tag{5.28}$$

где $E_\lambda$ — усреднение по мере $\lambda(dw)$.

Теперь заметим, что для $\varepsilon\equiv\gamma/(t_1-t)$ и $\tau\equiv t_1-t$ выполняется условие (1.38), поскольку $\varepsilon\cdot\tau=\gamma<\varkappa\nu/S_1$. Поэтому из (1.49) для этих $\varepsilon$ и $\tau$ получаем:

$$\begin{aligned}&\left(E_\lambda\exp\left(\frac{\gamma}{t_1-t}\int_0^{t_1-t}\|z(s,u_1,w)\|^2\,ds\right)\right)^{1/p_3}\\ &\leqq\big(C\exp(a(t_1-t))\exp(\gamma\,\|z_1\|^2)\big)^{1/p_3}\leqq C_t\exp\left(\frac{B\beta_t(t_1-t)}{2\nu}\,\|z_1\|^2\right).\end{aligned} \tag{5.29}$$

Аналогично оценивается четвертый интеграл в (5.28). С другой стороны, из (1.37) следует, что

$$\begin{aligned}\big(E_\lambda\exp(\gamma\,\|z(t_1-t,u_1,w)\|^2)\big)^{1/p_1}&\leqq\big(C\exp(a(t_1-t))\exp(\gamma\,\|z_1\|^2)\big)^{1/p_1}\\ &\leqq C_t\exp\frac{\gamma_1}{2}\,\|z_1\|^2,\end{aligned} \tag{5.30}$$

и аналогичная оценка справедлива для второго интеграла в (5.28). Подставляя в (5.28) оценки (5.29)—(5.30) и аналогичные им для второго и четвертого множителей, получим неравенство

$$\begin{aligned}&|\Phi(t,u_1)-\Phi(t,u_2)|\\ &\leqq C\,\|u_1-u_2\|^{\beta_t}C_t\exp\left(\frac{1}{2}\left(\gamma_1+\frac{B\beta_t(t_1-t)}{\nu}\right)(\|z_1\|^2+\|z_2\|^2)\right).\end{aligned} \tag{5.31}$$

Ввиду (5.25) отсюда вытекает (5.18). Итак, оценка (5.18) доказана, а из (5.25) видно, что можно выбрать $\beta_t=C\beta/\big(1+(t_1-t)\big)$. Теорема 5.2 доказана ∎

## § 6. Классические решения обратного уравнения Колмогорова

В этом параграфе формулируются результаты о существовании классических решений задачи Коши (5.1), (5.3) для обратного уравнения Колмогорова, соответствующего системе Навье-Стокса (1). Здесь приводятся лишь идеи доказательств. Подробные доказательства будут опубликованы в другом месте.

Введем класс функционалов $\Phi(t, u)$, в котором будем искать решение задачи (5.1), (5.3). Пусть $k \in \mathrm{N}$. Обозначим через $\mathscr{H}^{(k)}$ пространство непрерывных $k$-линейных форм $B^k$ на $\mathscr{H}$ с конечной нормой

$$\|B^k\|_{\mathscr{H}^{(k)}} \equiv \sup_{v_j \in \mathscr{H} \setminus \{0\}} \frac{|B^k(v_1, \ldots, v_k)|}{\|v_1\| \cdots \|v_k\|}. \tag{6.1}$$

Определим для функционала $\Phi(u)$ на $\mathscr{H}^1$ производную по направлению $v \in \mathscr{H}^1$ в точке $u \in \mathscr{H}^1$:

$$\mathscr{D}_v\Phi(u) \equiv \left(\frac{d}{d\varepsilon}\ \Phi(u + \varepsilon v)\right)\Big|_{\varepsilon=0}, \tag{6.2}$$

если эта производная существует.

Определение 6.1: Пусть $\forall u \in \mathscr{H}^1$ и $\forall v_1, \ldots, v_k \in \mathscr{H}^1$ существуют производные $\mathscr{D}_{v_1} \ldots \mathscr{D}_{v_k}\psi(u)$. Если последнее выражение является $k$-линейной симметричной формой от $v_1, \ldots, v_k$, то будем называть эту форму *$k$-м дифференциалом по Гато от $\psi$ в точке $u$* и будем обозначать ее через

$$\mathscr{D}_u{}^k\psi(u)\,(v_1, \ldots, v_k) \equiv \mathscr{D}_{v_1} \ldots \mathscr{D}_{v_k}\psi(u). \tag{6.3}$$

Определение 6.2: Пусть $r \in \mathrm{N}, \gamma > 0$. $\mathscr{C}^{r,\gamma}(t_0, t_1)$ — *класс функционалов* $\Phi(t, u) \in C([t_0, t_1] \times \mathscr{H}^1)$, *которые удовлетворяют следующим условиям:*

1. При любом фиксированном $u \in \mathscr{H}^1$ обобщенная производная $\partial_t\Phi(t, u)$ регулярна и ограничена, т. е.

$$\partial_t\Phi(\cdot, u) \in L_\infty(t_0, t_1) \qquad \forall u \in \mathscr{H}_1. \tag{6.4}$$

2. $\forall (t, u) \in [t_0, t_1] \times \mathscr{H}^1$ существуют дифференциалы по Гато $\mathscr{D}_u{}^k\Phi(t, u)$ при $0 \leq k \leq r$; $\mathscr{D}_u{}^k\Phi(t, u)\,(\cdot, \ldots, \cdot)$ продолжается с $\mathscr{H}^1$ до непрерывной $k$-линейной формы на $\mathscr{H}$, т. е.

$$\mathscr{D}_u{}^k\Phi(t, u) \in \mathscr{H}^{(k)} \qquad \forall (t, u) \in [t_0, t_1] \times \mathscr{H}^1. \tag{6.5}$$

3. $\forall u \in \mathscr{H}^1$ и $v_1, \ldots, v_k \in \mathscr{H}$

$$\mathscr{D}_u{}^k\Phi(\,\cdot\,, u)\,(v_1, \ldots, v_k) \in L_\infty(t_0, t_1); \tag{6.6}$$

конечна норма

$$|||\Phi|||_{r,\gamma} \equiv \sup_{u \in \mathscr{H}^1} \Bigg[\exp\left(-\gamma\,\|z\|^2\right) \Bigg(\operatorname*{sup\,ess}_{t \in [t_0, t_1]} |\partial_t\Phi(t, u)|$$

$$+ \sup_{t \in [t_0, t_1]} \sum_{k=0}^{r} \|\mathscr{D}_u{}^k\Phi(t, u)\|_{\mathscr{H}^{(k)}}\Bigg] < +\infty; \qquad z \equiv \operatorname{rot} u. \tag{6.7}$$

Ниже будет сформулирована теорема о разрешимости задачи Коши для уравнения (5.1) в классе $\mathscr{C}^{2,\gamma}(t_0, t_1)$. Уточним сейчас, в каком смысле понимается уравнение (5.1) для $\Phi(t, u) \in \mathscr{C}^{2\gamma}(t_0, t_1)$.

Первое слагаемое в (5.1) $\forall u \in \mathscr{H}^1$ принадлежит $L_\infty(t_0, t_1)$ по определению (6.4).

Второе слагаемое также обладает этим свойством. Действительно, согласно предложению 1.3 $b(u) \in \mathscr{H}$ при $u \in \mathscr{H}^2$. Поэтому из (6.6) при $k = 1$ и $v_1 = b(u)$ получаем, что

$$\langle b(u), \mathscr{D}_u\Phi(t, u)\rangle \equiv \mathscr{D}_u\Phi(t, u)\,\bigl(b(u)\bigr) \in L_\infty(t_0, t_1) \quad \forall\, u \in \mathscr{H}^2. \tag{6.8}$$

Третье слагаемое в (5.1) также принадлежит $L_\infty(t_0, t_1)$ $\forall\, u \in \mathscr{H}^1$, что выводится из следующего ниже его определения. А именно, обозначим через $\lambda_k$, $k \in \mathbf{N}$, собственные числа оператора $Q$ в $\mathscr{H}$ и через $q_k(x)$ — соответствующие собственные функции:

$$Qq_k = \lambda_k q_k, \quad \langle q_k, q_j\rangle = \delta_{kj}, \quad \lambda_k \geqq 0, \quad S = \operatorname{Sp} Q \equiv \sum_1^\infty \lambda_k < +\infty.$$

Существование таких $\lambda_k$, $q_k$ и полнота $q_k$ в $\mathscr{H}$ следуют из (1.28) по теореме Гильберта-Шмидта. Определим для произвольной билинейной формы $B^2 \in \mathscr{H}^{(2)}$ выражение

$$\langle\langle Q, B^2\rangle\rangle \equiv \sum_{k=1}^\infty \lambda_k B^2(q_k, q_k). \tag{6.9}$$

Последний ряд абсолютно сходится, поскольку $\lambda_k \geqq 0$, $\sum\limits_1^\infty \lambda_k \equiv S < +\infty$, а $|B^2(q_k, q_k)| \leqq \|B^2\|_{\mathscr{H}^{(2)}} \cdot \|q_k\|^2 = \|B^2\|_{\mathscr{H}^{(2)}}$, так как $\|q_k\| = 1$. Определим третье слагаемое в (5.1) по формуле (6.9). Это возможно, поскольку $\mathscr{D}_u{}^2\Phi(t, u) \in \mathscr{H}^{(2)}$ $\forall\,(t, u) \in [t_0, t_1]\times\mathscr{H}^1$ согласно (6.5) при $k = 2$. При этом из (6.6) и (6.7) получаем:

$$\begin{gathered} \mathscr{D}_u{}^2\Phi(t, u)\,(q_k, q_k) \in L_\infty(t_0, t_1), \\ \sup_{t\in[t_0,t_1]} |\mathscr{D}_u{}^2\Phi(t, u)\,(q_k, q_k)| \leqq |||\Phi|||_{2,\gamma} \exp(\gamma\,\|z\|^2), \end{gathered} \tag{6.10}$$

где $z \equiv \operatorname{rot} u$. Поэтому из сходимости ряда $\sum\limits_1^\infty \lambda_k$ вытекает, что

$$\langle\langle Q, \mathscr{D}_k{}^2\Phi(t, u)\rangle\rangle \equiv \sum_1^\infty \lambda_k \mathscr{D}_u{}^2\Phi(t, u)\,(q_k, q_k) \in L_\infty(t_0, t_1) \quad \forall\, u \in \mathscr{H}^1. \tag{6.11}$$

Итак, ввиду (6.4), (6.8) и (6.11) можно следующим образом придать смысл уравнению (5.1).

Определение 6.3: *Классическим решением уравнения* (5.1) называется такой функционал $\Phi(t, u) \in \mathscr{C}^{2,\gamma}(t_0, t_1)$, $\gamma \in \mathbf{R}$, который удовлетворяет (5.1) в смысле $L_\infty(t_0, t_1)$ $\forall\, u \in \mathscr{H}^2$.

Замечание 6.1: Для цилиндрического функционала $\Phi(t, u) \in \mathscr{C}^\infty_{0,m}(t_0, t_1)$ данное в (6.11) определение выражения $\langle\langle Q, \mathscr{D}_u{}^2\Phi(t, u)\rangle\rangle$ совпадает с прежним его пониманием (4.11). Действительно, из (6.11) ввиду представления (4.8) для $\mathscr{D}_u{}^2\Phi(t, u)$ получаем в силу полноты $\{q_k\}$:

$$\begin{aligned} \langle\langle Q, \mathscr{D}_u{}^2\Phi(t, u)\rangle\rangle &= i \int_{V_m} \sum_1^\infty \lambda_k \langle q_k, v\rangle^2 \exp(i\langle u, v\rangle)\, \tilde{\Phi}(t, v)\, d\mathscr{N} v \\ &= i^2 \int_{V_m} \langle Qv, v\rangle \exp(i\langle u, v\rangle)\, \tilde{\Phi}(t, v)\, d\mathscr{N} v, \end{aligned} \tag{6.12}$$

что совпадает с (4.11).

Определим теперь класс начальных функционалов $\psi(u)$ в начальном условии (5.3).

Определение 6.4: $\mathscr{C}^{r,\gamma}$ — класс функционалов $\psi(u) \in C(\mathscr{H}^1)$, которые обладают следующими свойствами:

1. $\forall u \in \mathscr{H}^1$ существует $\mathscr{D}_u\psi(u)$, причем линейная форма $\mathscr{D}_u\psi(u)\,(\cdot)$ продолжается с $\mathscr{H}^1$ до непрерывной линейной формы на $\mathscr{H}^{-1}$, т. е. $\mathscr{D}_u\psi(u) \in (\mathscr{H}^{-1})' = \mathscr{H}^1$ и

$$\mathscr{D}_u\psi(\cdot)\,(v) \in C(\mathscr{H}^1) \qquad \forall v \in \mathscr{H}^{-1}. \tag{6.13}$$

2. $\forall u \in \mathscr{H}^1$ при $2 \leq k \leq r$ существуют дифференциалы по Гато $\mathscr{D}_u{}^k\psi(u)$, причем $k$-линейная форма $\mathscr{D}_u{}^k\psi(u)\,(\cdot, \ldots, \cdot)$ продолжается до непрерывной $k$-линейной формы на $\mathscr{H}$, т. е. $\mathscr{D}_u{}^k\psi(u) \in \mathscr{H}^{(k)}$ и

$$\mathscr{D}_u{}^k\psi(\cdot)\,(v_1, \ldots, v_k) \in C(\mathscr{H}^1) \qquad \forall v_1, \ldots, v_k \in \mathscr{H}. \tag{6.14}$$

3. Конечна норма

$$\|\psi\|_{r,\gamma} \equiv \sup_{u \in \mathscr{H}^1} \left[\exp\left(-\gamma \|z\|^2\right) \left(|\psi(u)| + \|\mathscr{D}_u\psi(u)\|_{\mathscr{H}^1} + \sum_{k=2}^{\infty} \|\mathscr{D}_u{}^k\psi(u)\|_{\mathscr{H}^{(k)}}\right)\right] < +\infty; \qquad z \equiv rot\, u. \tag{6.15}$$

Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 6.1: *Пусть* $\psi(u) \in \mathscr{C}^{t+1,\gamma_0}$, *где* $r \geqq 2$, $0 < \gamma_0 < \varkappa\nu/S_1$ *и пусть длина интервала* $(t_0, t_1)$ *достаточно мала:*

$$\gamma \equiv \gamma_0 + C(r)\, \frac{t_1 - t_0}{\nu} < \varkappa\, \frac{\nu}{S_1}, \tag{6.16}$$

*где* $C(r) > 0$ *— некоторое число. Тогда задача Коши* (5.1), (5.3) *имеет решение* $\Phi(t, u) \in \mathscr{C}^{r,\gamma}(t_0, t_1)$ *в смысле определения* 6.3, *удовлетворяющее оценкам*

$$|||\Phi|||_{r,\gamma} \leqq C_r\, \|\psi\|_{r,\gamma_0}. \tag{6.17}$$

Приведем здесь лишь основные идеи доказательства:

1. Решение $\Phi(t, u)$ задачи (5.1), (5.3) определяется формулой (5.7). Чтобы проверить для такого функционала $\Phi$ уравнение (5.1), рассматриваются галеркинские аппроксимации

$$\Phi_m(t, u_0) \equiv \int \psi\big(S_m(t_1 - t, \Pi_m u_0, w_m)\big)\, \lambda(dw). \tag{6.18}$$

Здесь $S_m(\tau, \Pi_m u_0, w_m)$ — решение галеркинской системы Ито (2.1) (с $t_0 = 0$), выходящее из фиксированной точки $\Pi_m u_0$ при $\tau = 0$, т. е. процесс $S_m$ является галеркинской аппроксимацией процесса $S(\tau, u_0, w)$ из (1.36). Распределение $S_m$ обозначим через $P_{u_0,m}(du)$, а распределение $S$ — через $P_{u_0}(du)$. Тогда аналогично (3.6)

$$P_{u_0,m} \xrightarrow[m\to\infty]{c_b'(\mathscr{C}^*(0,t_1-t_0))} P_{u_0}. \tag{6.19}$$

При помощи (6.19) из (6.18) выводится, что

$$\Phi_m(t, u_0) = \int \psi\big(u(t_1 - t)\big)\, P_{u_0,m}(du) \xrightarrow[m\to\infty]{} \int \psi\big(u(t_1 - t)\big)\, P_{u_0}(du) = \Phi(t, u_0). \tag{6.20}$$

2. Функционалы $\Phi_m(t, u)$, определенные по формуле (6.18), удовлетворяют конечномерному обратному уравнению Колмогорова, соответствующему системе

Ито (2.1):

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} + \langle b(\Pi_m u), \mathscr{D}_u \Phi_m(t, u)\rangle + \frac{1}{2} \langle\langle Q, \mathscr{D}_u{}^2 \Phi_m(t, u)\rangle\rangle = 0, \tag{6.21}$$

$t \in [t_0, t_1]$, $u \in \mathscr{H}^2$. Это уравнение хорошо известно [12] для случая ограниченных коэффициентов вместо $b(\Pi_m u)$. Обобщение на случай неограниченных коэффициентов $b(\Pi_m u)$, соответствующих системе Навье-Стокса (1.27), получается при помощи использования марковских моментов остановки.

3. Из уравнения (6.21) при $m \to \infty$ получается (5.1). При этом используются равномерные по $m$ оценки производных от $\Phi_m$ вида (6.17). Производные по $t$ вычисляются из представления (6.18) по формуле Ито в силу системы (2.1) и затем легко оцениваются. Дифференциалы $\Phi_m(t, u_0)$ по $u_0$ вычисляются также из (6.18) по формуле дифференцирования сложной функции. При этом решающую роль играют оценки вариаций $\mathscr{D}_{v_k} \ldots \mathscr{D}_{v_1} S_m(\tau, u_0, w_m)$ от процесса $S_m(\tau, u_0, w_m)$ по $u_0$.

4. Эти последние вариации определяются индуктивно при помощи рекуррентного соотношения (где $w_m \equiv \Pi_m w$)

$$\mathscr{D}_{v_{k-1}} \ldots \mathscr{D}_{v_1} S_m(\tau, u_0 + \varepsilon v_k, w_m) - \mathscr{D}_{v_{k-1}} \ldots \mathscr{D}_{v_1} S_m(\tau, u_0, w_m)$$

$$= \int_0^\varepsilon \mathscr{D}_{v_k} \mathscr{D}_{v_{k-1}} \ldots \mathscr{D}_{v_1} S_m(\tau, u_0 + \varrho v_k, w_m)\, d\varrho \quad \forall \varepsilon \in \mathbf{R} \text{ при } \lambda \text{ — п. в. } w \in \mathscr{C}^1. \tag{6.22}$$

Центральное место в доказательстве теоремы 6.1 и, в частности, оценок (6.17) занимает следующая лемма.

Лемма 6.1: *Пусть $k = 1, 2, \ldots$ и $\tau > 0$ достаточно мало:*

$$\frac{C_k}{\nu} \tau < \varkappa \frac{\nu}{S_1}, \tag{6.23}$$

*где $C_k > 0$ — некоторая константа, не зависящая от $m \in \mathbf{N}$. Тогда $\forall u \in V_m$ и $\forall v_1, \ldots, v_k \in V_m$ существуют производные $\mathscr{D}_{v_k} \ldots \mathscr{D}_{v_1} S_m(\tau, u_0, w_m)$ в смысле (6.22). Эти производные для фиксированных $u$ и $v_1, \ldots, v_k$ непрерывны по $\tau$ при $\lambda$ — п. в. $w \in \mathscr{C}^1$. Выполняются оценки*

$$\|\mathscr{D}_{v_k} \ldots \mathscr{D}_{v_1} S_m(\tau, u_0, w)\|^2 + \nu \int_0^\tau \|\mathscr{D}_{v_k} \ldots \mathscr{D}_{v_1} S_m(s, u_0, w)\|_1{}^2\, ds$$

$$\leqq \tilde{C}_k(\nu)\, \|v_k\|^2 \ldots \|v_1\|^2 \exp\left(\frac{C_k}{\nu} \int_0^\tau \|z_m(s)\|^2\, ds\right) \text{ при } \lambda \text{ — п. в. } w \in \mathscr{C}^1, \tag{6.24}$$

*где $\tilde{C}_k(\nu) > 0$ не зависят от $m$ и от $u, v_1, \ldots, v_k$, а $C_k$ — те же, что в (6.23).*

Приведем пример использования теоремы 6.1. Для этого сформулируем следующую лемму.

Лемма 6.2: *Построенный в теореме 6.1 функционал $\Phi(t, u)$, определяемый формулой (6.7), удовлетворяет тождеству Грина-Фояша (4.10) с мерами $\mu(s, du)$, если $\alpha > \gamma$, где $\alpha > 0$ — константа из оценки (4.3).*

Из теоремы 6.1 и леммы 6.2 выводится следующая теорема единственности.

Теорма 6.2: *Решение $\mu(s, du)$ задачи Коши* (4.4), (4.5) *в смысле определения* 4.1 *для прямого уравнения Колмогорова единственно на интервале* $(t_0, t_1)$ *любой длины, если начальная мера $\mu_0$ удовлетворяет условию* (1.32) *при некотором* $\alpha > 0$.

Доказательство: Достаточно рассмотреть случай малых $t_1 - t_0$. Возьмем $\gamma_0 > 0$, $\gamma_0 < \min\left(\alpha, \varkappa \frac{\nu}{S_1}\right)$. Тогда при достаточно малых $t_1 - t_0$ выполняется условие

$$\gamma \equiv \gamma_0 + C(2)\frac{t_1 - t_0}{\nu} < \min\left(\alpha, \varkappa\frac{\nu}{S_1}\right), \tag{6.25}$$

где $C(2)$ — константа из (6.16). Следовательно, по теореме 6.1 задача Коши (5.1), (5.3) имеет решение $\Phi(t, u) \in \mathscr{C}^{2,\gamma}(t_0, t_1)$ при любом $\psi \in \mathscr{C}^{3,\gamma_0}$. Но согласно лемме 6.2 для $\mu$ и $\Phi$ ввиду (6.25) справедливо тождество Грина-Фояша (4.10). Учитывая (5.1) и (5.3), приведем это тождество к виду (5.5). Из (5.5) при $t = t_0$ получаем:

$$\int \psi(u)\, \mu(t_1, du) = \int \Phi(t_0, u)\, \mu(t_0, du). \tag{6.26}$$

Отсюда в силу произвольности $\psi(u) \in \mathscr{C}^{3,\gamma_0}$ вытекает единственность $\mu(t_1, du)$ при заданной начальной мере $\mu(t_0, du)$ ∎

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Вишик, М. И., Комеч, А. И., и А. В. Фурсиков: Некоторые математические задачи статистической гидромеханики. Успехи мат. наук **34** (5) (1979), 135—210.

[2] Bensoussan, A.: Eiltrage optimal des systèmes linéaires. Paris 1971.

[3] Вишик, М. И., и А. В. Фурсиков: Математические задачи статистической гидромеханики. Изд-во Наука: Москва 1980.

[4] Вишик, М. И., и А. И. Комеч: О разрешимости задачи Коши для прямого уравнения Колмогорова, соответствующего стохастическому уравнению типа Навье-Стокса. — В кн: Комплексный анализ и его приложения. Изд-во Наука: Москва 1978, 126—136.

[5] Вишик, М. И., и А. И. Комеч: О задаче Коши для бесконечномерных дифференциальных уавнений второго порядка. Труды семинара им. И. Г. Петровского, вып. 4 (1978), 3—31.

[6] Далецкий, Ю. Л.: Бесконечномерные эллиптические операторы и связанные с ними параболические уравнения. Успехи мат. наук **22** (4) (1967), 3—54.

[7] Иосида, К.: Функциональный анализ. Изд-во Мир: Москва 1967.

[8] Ладыженская, О. А.: Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Физ.-мат. изд-во: Москва 1961.

[9] Лионс, Ж. Л.: Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Изд-во Мир: Москва 1961.

[10] Foias, C.: Statistical study of Navier-Stokes equations. I: Rend. Sem. Matem. Univ. Padova **48** (1972), 219—348; II: Rend. Sem. Matem. Univ. Padova **49** (1973), 9—123.

[11] Маккин, Г.: Стохастические интегралы. Изд-во Мир: Москва 1972.

[12] Гихман, И. И., и А. В. Скороход: Введение в теорию случайных процессов. Изд-во Наука: Москва 1965.

[13] Хасьминский, Р. З.: Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Изд-во Наука: Москва 1969.

[14] Серрин, Дж. (Serrin, J.): Математические методы классической механики жидкости. Изд-во Иностр. Литературы: Москва 1963.

[15] Липцер, Р. Ш., и А. И. Ширяев: Статистика случайных процессов. Изд-во Наука: Москва 1974.

[16] Гихман, И. И., и А. В. Скороход: Теория случайных процессов, т. I. Изд-во Наука: Москва 1971.
[17] Kolmogoroff, A. N.: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann. **104** (1931), 415–458.
[18] Данфорд, Н., и Дж. Т. Шварц: Линейные операторы, т. I. Изд-во Иностр. Литературы: Москва 1962.

Manuskripteingang: 17. 03. 1981

VERFASSER:

Марко Иосифович Вишик и А. И. Комеч
Институт проблем механики АН СССР
СССР-117526 Москва, пр. Вернадского д. 101