Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 1 (4) (1982), S. 25–30

Differentiationsalgebren mit einem kubischen Element

L. Berg

Um eine neue Möglichkeit zur Multiplikation gewisser Distributionen zu zeigen, wird mit Hilfe von Matrixdarstellungen die Existenz nichttrivialer assoziativer Differentiationsalgebren mit einem Element h nachgewiesen, das der kubischen Gleichung $2h^3 - 3h^2 + h = 0$ genügt und als Heavisidesche Sprungfunktion interpretiert werden kann. Eine dieser Algebren wird durch Adjunktion eines Integrals von h erweitert.

Показывается новая возможность для умножения некоторых обобщённых функций. С помощью матричных представлений доказывается существование нетривиальных ассоциативных дифференциальных алгебр с элементом h удовлетворяющим кубическому уравнению $2h^3 - 3h^2 + h = 0$ и которое можно интерпретировать как функцию скачка Хевисайда. Одна из этих алгебр расширяется присоединением интеграла функции h.

There are shown new possibilities for the multiplication of some distributions, namely, by means of matrix representations we prove the existence of nontrivial associative differential algebras with an element h satisfying the cubic equation $2h^3 - 3h^2 + h = 0$, which can be interpreted as Heaviside's jump function. One of these algebras is extended by adjunction of an integral of h.

Assoziative Differentiationsalgebren mit einem idempotenten Element h, dessen Ableitung $\delta = h'$ nicht das Nullelement ist, wurden in [1] *Distributionenalgebren* genannt. Eine Übersicht über die bisherigen Ergebnisse dazu findet man in [4]. Die Eigenschaft der Idempotenz, $h^2 = h$, wurde gewählt, um h als *Heavisidesche Sprungfunktion*

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0, \\ 1 & \text{für} \quad t > 0 \end{cases}$$

interpretieren zu können. Einer solchen Interpretation setzten sich aber verschiedene Schwierigkeiten entgegen. Um diese Schwierigkeiten zu beseitigen, wurden in [3] allgemeinere Differentiationsalgebren untersucht, ohne die Gleichung $h^2 = h$ zu fordern.

Im folgenden weisen wir die Existenz weiterer Differentiationsalgebren dieser Art nach. Da die Funktion $h(t)$, wenn man ihr für $t = 0$ wie V. K. Ivanov [5] den Wert 1/2 zuschreibt, die kubische Gleichung

$$2h^3 = 3h^2 - h \tag{1}$$

erfüllt, werden wir nichttriviale assoziative Differentiationsalgebren konstruieren, die ein Element h mit der Eigenschaft (1) enthalten. Benutzen wir wieder die Bezeichnung $\delta = h'$, so folgt aus (1) durch Differentiation

$$\delta = 3h\,\delta + 3\,\delta h - 2h^2\,\delta - 2h\,\delta h - 2\,\delta h^2. \tag{2}$$

Eine Differentiationsalgebra mit (2) und $\delta \neq 0$ ist stets *nichtkommutativ*, da im Fall $h\,\delta = \delta h$ aus $\delta = 6h\delta - 6h^2\,\delta$ nach Multiplikation mit h wegen (1) die Gleichungen $3h^2\,\delta = 2h\,\delta$, $\delta = 2h\,\delta$, $3h\,\delta = 4h\,\delta$ und $h\,\delta = 0$ folgen, so daß auch $\delta = 0$ wird.

Einführung einer Normalform

Um die Gleichung (2) zu vereinfachen, suchen wir Differentiationsalgebren, in denen es zu jedem Element $f \neq h$ drei Elemente f_1, f_2, f_3 gibt mit der *Vertauschungsrelation*

$$hf = f_1 + f_2 h + f_3 h^2. \tag{3}$$

Die rechte Seite von (3) kann dann als *Normalform* für ein beliebiges Element der Algebra dienen. Man könnte jetzt versuchen, die Konstruktion einer solchen Algebra analog zu dem in [2] behandelten quadratischen Fall durchzuführen. Wir wollen hier jedoch anders vorgehen.

Zunächst bestimmen wir drei Zahlen x, y, z, so daß für das Element δ

$$h\,\delta = x\,\delta + y\,\delta h + z\,\delta h^2 \tag{4}$$

gilt, oder, in anderer Schreibweise, $h\,\delta = \delta(x + yh + zh^2)$. Hieraus folgt durch Multiplikation mit h von links $h^2\,\delta = \delta(x + yh + zh^2)^2$ und somit nach Anwendung von (1) und der daraus folgenden Beziehung

$$4h^4 = 7h^2 - 3h$$

die Darstellung

$$h^2\,\delta = x^2\,\delta + \left(2xy - yz - \frac{3}{4}\,z^2\right)\delta h + \left(y^2 + \frac{7}{4}\,z^2 + 2xz + 3yz\right)\delta h^2.$$

Durch Multiplikation von (4) mit h von rechts ergibt sich etwas einfacher

$$h\,\delta h = \left(x - \frac{1}{2}\,z\right)\delta h + \left(y + \frac{3}{2}\,z\right)\delta h^2.$$

Setzen wir die Darstellungen für $h\,\delta$, $h^2\delta$ und $h\,\delta h$ in (2) ein, so gelangen wir durch Koeffizientenvergleich zu dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 3x - 2x^2 \\ 3 &= 2x - 3y - z + 4xy - 2yz - \frac{3}{2}\,z^2 \\ -2 &= 2y + 4xz + 6yz + 2y^2 + \frac{7}{2}\,z^2. \end{aligned}\right\}$$

Die erste Gleichung hat die Lösungen $x = 1/2$ und $x = 1$. Die zweite Gleichung lautet, nach y aufgelöst,

$$y = -\frac{3z^2 + 2z - 4x + 6}{4z - 8x + 6}. \tag{5}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die dritte Gleichung ein, so erhalten wir

$$z^4 + 2z^3 - 7z^2 - 8z + 12 = 0 \quad \text{im Fall } x = 1/2,$$

$$z^4 - 2z^3 - 7z^2 + 8z + 12 = 0 \quad \text{im Fall } x = 1.$$

Hieraus findet man in Verbindung mit (5) leicht die folgenden 8 Lösungen:

Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
x	1	1	1	1	1/2	1/2	1/2	1/2
y	$-7/2$	-3	1/2	1	-2	$-3/2$	2	5/2
z	3	2	-1	-2	2	1	-2	-3

(6)

Wählt man für x, y, z eine dieser 8 Möglichkeiten, so kann man sich durch fortlaufende Differentiation von (4) davon überzeugen, daß in einer Differentiationsalgebra mit (4) die Vertauschungsformel (3) gilt, wenn f ein beliebiges Polynom in δ und den Ableitungen von δ ist, wobei die f_i auf der rechten Seite von (3) dann ebenfalls Polynome in δ und den Ableitungen von δ sind.

Einführung einer Matrixdarstellung

Es bleibt noch die *Existenz* von Differentiationsalgebren mit (4) und (6) zu zeigen. Zu diesem Zweck wählen wir wie in [1] für die Elemente f der Algebra die Matrixdarstellung $f = (f_{nm})$, wobei die Indizes n, m alle ganzen Zahlen durchlaufen und die Elemente f_{nm} reelle oder komplexe Zahlen sind. Führen wir noch die Hilfsmatrix $\sigma = (\sigma_{nm})$ mit $\sigma_{n,n+1} = 1$ für alle n und $\sigma_{nm} = 0$ für $m \neq n + 1$ ein, so läßt sich die Differentiation als *innere Differentiation* bezüglich $-\sigma$ darstellen:

$$f' = f\sigma - \sigma f.$$

Für h wählen wir eine Diagonalmatrix $h = \operatorname{diag}(H_n)$, wobei die Diagonalelemente H_n Werte aus der Menge $\{0, 1/2, 1\}$ annehmen. Dann ist die Gleichung (1) erfüllt. Der Kürze halber benutzen wir für h die Schreibweise

$$h = \begin{bmatrix} H_{n_1} & H_{n_2} & \dots & H_{n_k} \\ H_{n_1+1} & H_{n_2+1} & \dots & H_{n_k+1} \end{bmatrix},$$

wenn es zu jedem Diagonalelement H_n mit $H_{n+1} \neq H_n$ ein n_i mit $1 \leqq i \leqq k$ gibt, so daß $H_n = H_{n_i}$, $H_{n+1} = H_{n_i+1}$ gilt und umgekehrt. Für die zugehörige Ableitung benutzen wir die Schreibweise

$$\delta = [\Delta_{n_1}\, \Delta_{n_2} \dots \Delta_{n_k}]$$

mit $\Delta_{n_i} = H_{n_i} - H_{n_i+1}$, die folgendes besagen soll: In der Matrixdarstellung $\delta = (\delta_{nm})$ ist $\delta_{n,n+1} = \Delta_{n_i}$, wenn $H_n = H_{n_i}$, $H_{n+1} = H_{n_i+1}$ ist, während alle übrigen $\delta_{nm} = 0$ sind. Mit diesen Bezeichnungen läßt sich eine Multiplikation mit h in der folgenden einfachen Weise beschreiben:

$$h\,\delta = [H_{n_1} \cdot \Delta_{n_1} \dots H_{n_k} \cdot \Delta_{n_k}], \quad \delta h = [\Delta_{n_1} \cdot H_{n_1+1} \dots \Delta_{n_k} \cdot H_{n_k+1}].$$

Der größte Wert, den k ohne Wiederholung der Paare H_{n_i}, H_{n_i+1} annehmen kann, ist 6 mit

$$h = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \delta = [1\ 1/2\ \ -1/2\ \ 1/2\ \ -1/2\ \ -1],$$

da es keinen weiteren Wechsel zwischen den 3 Werten 0, 1/2, 1 gibt. Die auf der rechten Seite von (2) auftretenden Elemente lauten dann

$$h\,\delta = [1\ \ 1/4\ \ 0\ \ 1/2\ \ -1/4\ \ 0], \qquad \delta h = [0\ \ 0\ \ -1/4\ \ 1/4\ \ -1/2\ \ -1],$$
$$h^2\,\delta = [1\ \ 1/8\ \ 0\ \ 1/2\ \ -1/8\ \ 0], \qquad \delta h^2 = [0\ \ 0\ \ -1/8\ \ 1/8\ \ -1/2\ \ -1],$$
$$h\,\delta h = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 1/4\ \ -1/4\ \ 0],$$

und man verifiziert leicht die Gleichung (2).

Die Gleichung (4) ist erfüllt, wenn gilt:

$$\text{a)}\quad 1 = x,$$
$$\alpha)\quad \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,x,$$
$$\text{b)}\quad 0 = -\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\,y - \frac{1}{8}\,z,$$
$$\beta)\quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\,y + \frac{1}{8}\,z,$$
$$\text{c)}\quad -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{2}\,z,$$
$$\gamma)\quad 0 = -x - y - z.$$

Die mit einem lateinischen Buchstaben gekennzeichneten Gleichungen stehen jeweils zu den Gleichungen mit dem entsprechenden griechischen Buchstaben im Widerspruch. Unter den widerspruchsfreien Gleichungen gibt es 8 mögliche Kombinationen, und zwar

1	2	3	4	5	6	7	8
a	a	a	a	α	α	α	α
b	b	β	β	b	b	β	β
c	γ	c	γ	c	γ	c	γ

Hierzu gehören die folgenden Elemente h:

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad h_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad h_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix},$$
$$h_5 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad h_6 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad h_7 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix},$$
$$h_8 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die zu h_i mit $1 \leqq i \leqq 8$ gehörenden Werte x, y, z findet man in der Tabelle (6) unter der Nummer i. Hieraus geht hervor, daß es zu jedem dieser 8 Wertetripel wirklich nichttriviale Differentiationsalgebren gibt, und zwar diejenigen, die analog zu [1] von dem zugehörigen h_i erzeugt werden.

Einführung eines Integrals

Damit die Differentiationsalgebren außer den Vielfachen von h auch weitere gewöhnliche Funktionen enthalten, versuchen wir, sie durch *Adjunktion* eines Elementes t mit den Eigenschaften

$$t' = h, \qquad ht = t \tag{7}$$

zu erweitern, d. h. eines Integrals von h, das als Splinefunktion interpretiert werden kann. In [3] wurde dieses Element mit t_+ bezeichnet und an Stelle der zweiten Gleichung von (7) die Eigenschaft $t_+h = t_+$ verlangt, was aber nur auf eine Änderung der Schreibweise hinausläuft. Aus (7) folgt durch Differentiation

$$\delta t = h - h^2, \tag{8}$$

so daß δt als Funktion interpretiert werden kann, die im Nullpunkt den Wert 1/4 annimmt und sonst überall verschwindet. Aus (8) folgt mit Hilfe von (1) die Beziehung

$$h\,\delta t = \delta t h = \frac{1}{2}\,\delta t,$$

die sich mit der vorhergehenden Interpretation in Übereinstimmung befindet. Analog zu [3] ist $\delta t^2 = 0$.

Um die *Existenz* einer Erweiterung mit (7) zu zeigen, betrachten wir die Differentiationsalgebren, die durch ein h der Form h_i mit $1 \leqq i \leqq 8$ erzeugt werden. Wie man nachprüfen kann, gibt es höchstens dann eine Matrix $t = (t_{nm})$ mit (7), wenn $h = h_1$ ist, und in diesem Fall genau dann eine solche Matrix, wenn

$$h = \operatorname{diag}(\ldots\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1/2 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\ldots)$$

ist. Wählen wir hier die Null als dasjenige Element mit den Indizes $n = m = 0$, so besitzt das zugehörige Integral t die Elemente

$$t_{n,n-1} = -n \quad \text{für} \quad n < 0, \qquad t_{n,n-1} = -n + 3/2 \quad \text{für} \quad n > 1,$$

und sonst $t_{nm} = 0$.

Im folgenden kennzeichnen wir in einer Matrixdarstellung das Element mit den Indizes $n = m = 0$ durch eine Unterstreichung und vereinbaren, daß alle nicht aufgeschriebenen Elemente gleich Null sind. Dann gilt

$$th = t + \begin{pmatrix} \underline{0} & \\ 0 & \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \qquad th^2 = t + \begin{pmatrix} \underline{0} & \\ 0 & \\ 0 & 3/8 \end{pmatrix},$$

und hieraus folgt

$$t = 3th - 2th^2.$$

Diese Gleichung zeigt, daß th^2 von t und th linear abhängig ist. Da $th - t \neq 0$ ist, hat man diese Differenz analog zu [3] als infinitesimales Element zu interpretieren.

Weitere Matrixdarstellungen lauten

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \underline{0} & -1/2 & 0 \\ & & -1/2 \end{pmatrix}, \qquad \delta^2 = \begin{pmatrix} & -1/2 & \\ \underline{0} & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \qquad \delta^3 = \begin{pmatrix} & & 1/4 \\ \underline{0} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

woraus $\delta^4 = 0$ folgt, während $\delta^3 \neq 0$ ist im Unterschied zu [3]. Andererseits gilt

$$\delta t = \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1/4 \end{pmatrix}, \quad t\delta = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1/4 \end{pmatrix}, \quad t^2\delta = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -3/8 \end{pmatrix}, \ldots,$$

so daß bei der Adjunktion von t die Elemente $t^k\,\delta$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$, im Gegensatz zu (8) und $\delta t^2 = 0$, als neue linear unabhängige Elemente auftreten. Zwei weitere einfache Beziehungen sind $t\delta = t\delta h = 2th\delta$.

Denkbar wäre jetzt die Adjunktion weiterer Elemente, doch müßte dann in den interessanten Fällen wie in [2] die Matrixdarstellung verlassen werden.

LITERATUR

[1] Berg, L.: Representations for distribution algebras. ZAMM 56 (1976), 177–181.
[2] Berg, L.: Construction of distribution algebras. Math. Nachr. 82 (1978), 255–262.
[3] Berg, L.: Differentationsalgebren für Distributionen. Math. Nachr. 97 (1980), 223–231.
[4] Berg, L.: On the multiplication of distributions. Proc. Int. Conf. on Generalized Functions and their Applications in Mathematical Physics. Moscow, Nov. 24–28, 1980, Ed. V. S. Vladimirow, M. K. Polivanov, A. P. Prudnikov, J. A. Brychkov, Moskau 1981, 71–79.
[5] Иванов, В. К.: Алгебра, порождаемая функцией Хевисайда и дельта-функциями. Изв. Высш. Учебн. Завед. Математика 10 (185) (1977), 65–69.

Manuskripteingang: 2. 09. 1981

VERFASSER:

Prof. Dr. Lothar Berg
Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck Universität
DDR-2500 Rostock, Universitätsplatz 1