Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 1 (4) (1982), S. 31 – 36

Über zufällige Störungen einer Basis aus Exponentialfunktionen im Raum $L_2[-\pi, \pi]$

K.-D. KÜRSTEN

Für das Theorem von PALEY und WIENER und einer Reihe nachfolgender Autoren über die Basiseigenschaften des gestörten Systems $\{\exp(i(n+s_n)t): n \in \mathbf{Z}\}$ im Raum $L_2[-\pi, \pi]$ wird der Grenzfall $|s_n| = 1/4$ untersucht. Es wird bewiesen, daß das gestörte System fast sicher keine Riesz-Basis ist, wenn $\{s_n\}$ aus $[-1/4, 1/4]^{\mathbf{Z}}$, versehen mit natürlichen Produktmaßen, genommen wird.

Для теоремы Палея и Винера и ряда последующих авторов о базисных свойствах возмущенной системы $\{\exp(i(n+s_n)t): n \in \mathbf{Z}\}$ в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$ исследуется граничный случай $|s_n| = 1/4$. Доказывается, что возмущенная система почти достоверно не является базисом Рисса, когда $\{s_n\}$ берётся из $[-1/4, 1/4]^{\mathbf{Z}}$, снабжённое естественным мерам произведения.

We investigate the limit case $|s_n| = 1/4$ for the theorem of PALEY and WIENER and some later authors on the basis properties of the perturbed system $\{\exp(i(n+s_n)t): n \in \mathbf{Z}\}$ in the space $L_2[-\pi, \pi]$. We prove, that the perturbed system almost sure is no Riesz basis, if $\{s_n\}$ is taken from $[-1/4, 1/4]^{\mathbf{Z}}$ equipped with natural product measures.

1. Einleitung

Eine Basis im Hilbertraum $\{x_n\}$ wird *Riesz-Basis* genannt, falls die Reihe $\sum a_n x_n$ genau dann konvergiert, wenn $\sum |a_n|^2 < \infty$. Jede Riesz-Basis ist unbedingte Basis und man kann ihre Elemente folglich mit einer beliebigen abzählbaren unendlichen Indexmenge numerieren. KÖTHE und TOEPLITZ [8] zeigten, daß umgekehrt jede normierte unbedingte Basis im Hilbertraum auch Riesz-Basis ist (s. auch [12]). In den Arbeiten [2, 3, 4, 6, 7, 9, 13] wurden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß $\{\exp(ir_n t): n \in \mathbf{Z}\}$ Riesz-Basis in $L_2[-\pi, \pi]$ ist. Das Resultat von M. I. KADEZ [6] besagt, daß für $|r_n - n| \leqq d$ $\{\exp(ir_n t): n \in \mathbf{Z}\}$ Riesz-Basis ist, wenn nur $d < 1/4$. In gewisser Weise ist dieses Resultat das bestmögliche, denn bereits N. LEVINSON [10] gab ein Beispiel für eine Familie $\{r_n; n \in \mathbf{Z}\}$ mit $|n - r_n| \leqq 1/4$ an, für die $\{\exp(ir_n t)\}$ keine Riesz-Basis dieses Raumes ist. Hier soll untersucht werden, ob $\{\exp(i(n+s_n)t): n \in \mathbf{Z}\}$ Riesz-Basis im Raum $L_2[-\pi, \pi]$ ist, wobei die Familie $\{s_n; n \in \mathbf{Z}\}$ zufällig aus $[-1/4, 1/4]^{\mathbf{Z}}$ gewählt wird. Es erweist sich, daß $\{\exp(i(n+s_n)t): n \in \mathbf{Z}\}$ für bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaße, wie z. B. das Produkt von auf Eins normierten Lebesque-Maßen oder das Produkt von Maßen μ mit $\mu(1/4) = \mu(-1/4) = 1/2$, fast sicher keine Riesz-Basis ist. Es sei noch darauf hingewiesen, daß nach [3] beliebige beschränkte, rein imaginäre Störungen keinen Einfluß darauf haben, ob eine Riesz-Basis vorliegt. Deshalb ist es natürlich, sich auf die Betrachtung reeller Störungen $\{s_n\}$ zu beschränken. Im folgenden wird der Raum $L_2[-\pi, \pi]$ immer kurz mit L_2 bezeichnet.

2. Untersuchung des Systems $\{\exp(i(n+s)t)\}$

Der folgende Satz über Operatoren im Hilbertraum gestattet es Systeme der Gestalt $\{\exp(i(n \pm s)\,t)\}$ zu untersuchen.

Satz: *Sei P ein Orthogonalprojektor und sei U ein unitärer Operator im Hilbertraum L_2. Wir bezeichnen $P' = Id - P$, wobei Id der identische Operator ist. Dann gilt:*

a) *Die beiden Operatoren $T = UP + U^{-1}P'$ und $S = U^{-1}P + UP'$ sind gleichzeitig Isomorphismen genau dann, wenn $\|U^2PU^{-2} - P\| < 1$.*

b) *Wenn $\|U^2PU^{-2} - P\| = 1$, dann ist wenigstens eine der Neigungen*

$$\delta\big(UP(L_2);\, U^{-1}P'(L_2)\big) \qquad \textit{oder}$$
$$\delta\big(U^{-1}P(L_2);\, UP'(L_2)\big)$$

gleich Null. Dabei ist die Neigung von Unterräumen X und X' eines normierten Raumes als

$$\delta(X; X') = \inf\{\|x - x'\|;\, x \in X,\, x' \in X',\, \|x\| = \|x'\| = 1\}$$

definiert.

Beweis: a) Seien S und T Isomorphismen. Dann sind die Operatoren

$$USS^*U^{-1} = P + U^2P'U^{-2} = P - U^2PU^{-2} + Id \qquad \text{und}$$
$$UTT^*U^{-1} = U^2PU^{-2} - P + Id$$

streng positiv. Es gibt also eine positive Zahl c, so daß

$$P - U^2PU^{-2} \geqq (c-1)\,Id, \qquad (c-1)\,Id \leqq U^2PU^{-2} - P \leqq (1-c)\,Id.$$

Daraus folgt $\|U^2PU^{-2} - P\| < 1$.

Sei jetzt die Ungleichung $\|U^2PU^{-2} - P\| < 1$ erfüllt. Da diese Ungleichung äquivalent zu $\|(U^{-1})^2\,P(U^{-1})^{-2} - P\| < 1$ ist, reicht es aus zu zeigen, daß T ein Isomorphismus ist. Wegen

$$\|TT^* - Id\| = \|UPU^{-1} + U^{-1}P'U - Id\|$$
$$= \|U^2PU^{-2} + P' - Id\| = \|U^2PU^{-2} - P\| < 1$$

ist TT^* ein Isomorphismus und folglich ist T surjektiv. Angenommen, x gehöre zum Kern von T und $x \neq 0$. Dann gilt:

$$UPx + U^{-1}P'x = 0, \qquad U^2Px = -P'x \neq 0,$$
$$\|(U^2PU^{-2} - P)\,(U^2Px)\| = \|U^2Px + PP'x\| = \|U^2Px\|.$$

Folglich erhält man im Widerspruch zur Voraussetzung $\|U^2PU^{-2} - P\| \geqq 1$. Durch diesen Widerspruch ist nachgewiesen, daß Kern $(T) = \{0\}$ und damit auch, daß T ein Isomorphismus ist.

b) Wir bezeichnen den Orthogonalprojektor U^2PU^{-2} mit Q und die Bildräume von P bzw. Q mit M bzw. N. Außerdem sei $Q' = Id - Q$. Die Norm $\|P - Q\|$ wird in [1] Öffnung zwischen M und N genannt und es wird die Identität

$$\|P - Q\| = \max\left(\sup\{\|P'x\| : x \in N,\, \|x\| = 1\},\quad \sup\{\|Q'x\| : x \in M,\, \|x\| = 1\}\right)$$

bewiesen. Ist $\sup\{\|P'x\| : x \in N,\, \|x\| = 1\} = 1$, so gibt es eine Folge (x_k) in N mit $\|x_k\| = 1$ und $\lim \|P'x_k\| = 1$. Aus $\|P'x_k\|^2 + \|Px_k\|^2 = 1$ folgt dann

$$\lim \|P'x_k - Qx_k\| = \lim \|P'x_k - x_k\| = \lim \|Px_k\| = 0.$$

Folglich gilt natürlich auch

$$\lim \left\| \frac{P'x_k}{\|P'x_k\|} - U^2PU^{-2}x_k \right\| = 0,$$

woraus unmittelbar folgt $\delta\big(UP(L_2);\, U^{-1}P'(L_2)\big) = 0$. Falls $\sup \{\|Q'x\| : x \in M, \|x\| = 1\} = 1$, so findet man eine Folge (x_k) mit $\|x_k\| = \|Px_k\| = 1$, für die $\lim \|Q'x_k - Px_k\| = 0$. Daraus folgt $\delta\big(U^{-1}P(L_2);\, UP'(L_2)\big) = 0$. Damit ist der Beweis des Satzes beendet ∎

Sei $\{e_n : n \in \mathbf{Z}\} \in \{-1, 1\}^{\mathbf{Z}}$. Wir bezeichnen mit P den Orthogonalprojektor auf die abgeschlossene lineare Hülle der Elemente $\{\exp(int) : n \in \mathbf{Z}, e_n = 1\}$ im L_2. Weiterhin bezeichnen wir mit U_s den Multiplikationsoperator mit der Funktion $\exp(ist)$ im Raum L_2 und wie oben sei $P' = Id - P$. Das System $\{\exp\big(i(n + e_ns)\,t\big);\, n \in \mathbf{Z}\}$ ist genau dann Riesz-Basis des L_2, wenn die Abbildung, die durch die Formel

$$T\big(\sum a_n \exp(int)\big) = \sum a_n \exp\big(i(n + e_ns)\,t\big)$$

definiert ist, d. h. der Operator $T = U_sP + U_{-s}P'$ ein Isomorphismus des Raumes L_2 ist. Dadurch erhält man aus obigem Satz die folgenden Schlußfolgerungen.

Schlußfolgerung 1: *Die beiden Systeme* $\{\exp\big(i(n + e_ns)\,t\big) : n \in \mathbf{Z}\}$ *und* $\{\exp\big(i(n - e_ns)\,t\big) : n \in \mathbf{Z}\}$ *sind genau dann gleichzeitig Riesz-Basen im* L_2, *wenn* $\|U_{2s}PU_{-2s} - P\| < 1$. *Dabei ist* P *der oben mit Hilfe von* $\{e_n\}$ *definierte Projektionsoperator.*

Die folgende Schlußfolgerung stellt einen Spezialfall des Resultates von M. I. Kadez [6] dar.

Schlußfolgerung 2: *Ist* $|s| < 1/4$, *so ist* $\{\exp\big(i(n + e_ns)\,t\big) : n \in \mathbf{Z}\}$ *Riesz-Basis im Raum* L_2.

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß $\|U_{2s}PU_{-2s} - P\| < 1$. Zur Abkürzung verwenden wir die Bezeichnungen $U_{-2s} = U$ und $\cos(2s\pi) = a$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\|U_{2s}PU_{-2s} - P\| = \|PU - UP\| = \|PUP' - P'UP\|,\\
&\|PUP'x - P'UPx\|^2 = \|PUP'x\|^2 + \|P'UPx\|^2\\
&= \|P(U - aId)\,P'x\|^2 + \|P'(U - aId)\,Px\|^2\\
&\leqq \|U - aId\|^2\,(\|Px\|^2 + \|P'x\|^2) = \|U - aId\|^2\,\|x\|^2,\\
&\|U - aId\|^2 = \sup\{|\exp(-2ist) - a|^2 : t \in [-\pi, \pi]\}\\
&= \sup\{|\cos^2(2st) - 2a\cos(2st) + a^2 + \sin^2(2st)| : t \in [-\pi, \pi]\} = 1 - a^2\\
&\quad < 1.
\end{aligned}$$

Damit ist die Schlußfolgerung 2 bewiesen ∎

Schlußfolgerung 3: *Die Neigung zwischen den abgeschlossenen linearen Hüllen der Systeme* $\{\exp\big(i(n + 1/4)\,t\big) : n \in \mathbf{Z}, n < 0\}$ *und* $\{\exp\big(i(n - 1/4)\,t\big) : n \in \mathbf{Z}, n \geqq 0\}$ *ist gleich Null.*

Beweis: Wir betrachten für

$$e_n = \begin{cases} +1, & \text{wenn } n < 0 \\ -1, & \text{wenn } n \geqq 0 \end{cases}$$

und für $s = 1/4$ die Systeme $\{\exp\big(i(n + e_ns)\,t\big) : n \in \mathbf{Z}\}$ und $\{\exp\big(i(n - e_ns)\,t\big) : n \in \mathbf{Z}\}$. Der Multiplikationsoperator $U_{1/2}$ bildet das zweite dieser Systeme in das erste ab, wobei $\exp(-it/4)$ ein Element des ersten Systems ist, welches nicht als Bildelement auftritt. Folglich können nicht beide Systeme gleichzeitig Basis sein. Schlußfolgerung 3 folgt nun unmittelbar aus Schlußfolgerung 1 und aus dem bewiesenen Satz ∎

3. Ein Kriterium

Um ein Kriterium dafür formulieren zu können, daß ein System keine Riesz-Basis bildet, führen wir den Begriff der endlichen Darstellbarkeit für linear unabhängige Systeme ein. In der Definition und im darauffolgenden Lemma kann jedes der betrachteten Systeme jeweils aus Elementen eines beliebigen normierten Raumes bestehen. In der Anwendung handelt es sich jedoch immer um den Raum L_2.

Definition: Ein linear unabhängiges System $\{a_n : n \in A\}$ ist in dem System $\{b_m : m \in B\}$ *endlich darstellbar*, falls für jede positive Zahl ε und für jede endliche Teilmenge $M \subset A$ eine solche Abbildung p von M in B gefunden werden kann, daß für den linearen Operator

$$T : \operatorname{lin}\{a_n : n \in M\} \to \operatorname{lin}\{b_m : m \in p(M)\},$$

der durch $T(a_n) = b_{p(n)}$ gegeben wird, und für jedes x aus dem Quellenraum von T gilt:

$$(1 - \varepsilon)\,\|x\| \leqq \|Tx\| \leqq (1 + \varepsilon)\,\|x\|.$$

Zur Abkürzung bezeichnen wir im Weiteren das System $\left\{\exp\left(i(n + 1/4)\,t\right): n \in \mathbf{Z}, n < 0\right\} \cup \left\{\exp\left(i(n - 1/4)\,t\right): n \in \mathbf{Z}, n \geqq 0\right\}$ von Elementen des Hilbertraumes L_2 als System I.

Lemma: *Ist das System I in einem System $\{b_m\}$ endlich darstellbar, so ist $\{b_m\}$ keine Riesz-Basis.*

Beweis: Unter dem *Träger eines Elementes* x aus der linearen Hülle eines Vektorsystems wollen wir die Menge der Elemente aus der Indexmenge des Systems verstehen, für die die Koeffizienten in einer bestimmten Darstellung von x als Linearkombination von Elementen des Vektorsystems ungleich Null sind. Für linear unabhängige Systeme ist der Träger jeweils eindeutig bestimmt.

Aus Resultaten von E. R. LORCH [11] und M. M. GRINBLUM [5] (s. auch [12]) folgt, daß es für jede unbedingte Basis $\{b_m\}$ eine solche positive Zahl c gibt, daß der Abstand beliebiger zweier normierter Elemente aus der linearen Hülle von $\{b_m\}$ mit disjunkten Trägern größer als c ist. Wir zeigen, daß diese Bedingung nicht erfüllt sein kann, falls das System I in $\{b_m\}$ endlich darstellbar ist:

Nach Schlußfolgerung 3 existieren normierte Elemente x_k aus der linearen Hülle von $\left\{\exp\left(i(n + 1/4)\,t\right): n < 0\right\}$ und y_k aus der linearen Hülle von $\left\{\exp\left(i\,(n - 1/4)\,t\right): n \geqq 0\right\}$ mit $\lim \|x_k - y_k\| = 0$. Wählt man eine Nullfolge positiver Zahlen (ε_k), setzt M_k gleich der Vereinigung der Träger von x_k und von y_k und bezeichnet mit T_k die jeweils zu ε_k und M_k nach der Definition der endlichen Darstellbarkeit existierenden Operatoren, so folgt $\lim \|T_k x_k\| = \lim \|T_k y_k\| = 1$ und $\lim \|T_k x_k - T_k y_k\| = 0$. Außerdem sind die Träger von $T_k x_k$ und von $T_k y_k$, zumindest für $\varepsilon_k < 1$, jeweils disjunkt. Also kann nach dem oben zitierten Kriterium $\{b_m\}$ keine unbedingte und erst recht keine Riesz-Basis sein ∎

4. Zufällige Störungen der Basis exp (int) im L_2

Theorem: *Sei auf* $[-1/4, 1/4]^{\mathbf{Z}}$ *ein Produktmaß* m *von Wahrscheinlichkeitsmaßen* μ_n *gegeben, wobei die Maße* μ_n *folgender Bedingung genügen: Für jedes* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $\delta > 0$, *so daß für jedes* $n \in \mathbf{Z}$ $\mu_n([1/4 - \varepsilon, 1/4]) > \delta$ *und* $\mu_n([-1/4, -1/4 + \varepsilon]) > \delta$. *Dann ist das System* $\{\exp(i(n + s_n)t) : n \in \mathbf{Z}\}$ *für* m*-fast alle* $\{s_n\} \in [-1/4, 1/4]^{\mathbf{Z}}$ *keine Riesz-Basis des* L_2.

Bemerkung: Die Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn μ_n jeweils das Doppelte des Lebesgue-Maßes ist oder wenn $\mu_n(1/4) = \mu_n(-1/4) = 1/2$.

Beweis des Theorems: Sei (ε_j) eine Nullfolge positiver Zahlen für die folgende Bedingung erfüllt ist: Wenn

$$1/4 - \varepsilon_j \leqq s_n \leqq 1/4 \quad \text{für} \quad -j \leqq n < 0 \quad \text{und} \quad -1/4 \leqq s_n \leqq -1/4 + \varepsilon_j$$
$$\text{für} \quad 0 \leqq n < j,$$

dann gilt für den linearen Operator T, der durch

$$T\bigl(\exp(i(n + 1/4)t)\bigr) = \exp\bigl(i(n + s_n)t\bigr) \quad \text{für} \quad -j \leqq n < 0 \quad \text{und}$$
$$T\bigl(\exp(i(n - 1/4)t)\bigr) = \exp\bigl(i(n + s_n)t\bigr) \quad \text{für} \quad 0 \leqq n < j$$

auf der linearen Hülle der aufgeführten Elemente gegeben wird, und für jedes x aus dieser linearen Hülle, folgendes:

$$(1 - 1/j)\,\|x\| \leqq \|Tx\| \leqq (1 + 1/j)\,\|x\|.$$

Solch eine Nullfolge gibt es, da die Abbildung $\mathbf{R} \ni s \to \exp(ist) \in L_2$ stetig ist und da das System I linear unabhängig ist. Jetzt werden folgende Mengen E und E_j betrachtet:

$$E = \bigl\{\{s_n\} \in [-1/4, 1/4]^{\mathbf{Z}} : \text{Für jedes } j \in \mathbf{N} \text{ gibt es ein } k \in \mathbf{Z}, \text{ so daß}$$
$$s_n \in [1/4 - \varepsilon_j, 1/4] \quad \text{für} \quad k - j \leqq n < k \quad \text{und}$$
$$s_n \in [-1/4, -1/4 + \varepsilon_j] \quad \text{für} \quad k \leqq n < k + j\bigr\};$$
$$E_j = \bigl\{\{s_n\} \in [-1/4, 1/4]^{\mathbf{Z}} : \text{Für jedes } k \in \mathbf{Z} \text{ gibt es ein } l \text{ mit } 0 \leqq l < j, \text{ so daß}$$
$$s_{2kj-l-1} \notin [1/4 - \varepsilon_j, 1/4] \text{ oder } s_{2kj+l} \notin [-1/4, -1/4 + \varepsilon_j]\bigr\}.$$

Ist $\{s_n\}$ für kein j Element von E_j, so ist $\{s_n\}$ Element von E, also

$$[-1/4, 1/4]^{\mathbf{Z}} = E \cup \Bigl(\bigcup_{j \in \mathbf{N}} E_j\Bigr).$$

Für $\{s_n\} \in E$ ist das System I in $\{\exp(i(n + s_n)t) : n \in \mathbf{Z}\}$ endlich darstellbar. Die darstellenden Operatoren T kann man durch

$$T\bigl(\exp(i(n + 1/4)t)\bigr) = \exp\bigl(i(n + k + s_{n+k})t\bigr), \quad \text{wenn} \quad n < 0 \quad \text{und}$$
$$T\bigl(\exp(i(n - 1/4)t)\bigr) = \exp\bigl(i(n + k + s_{n+k})t\bigr), \quad \text{wenn} \quad n \geqq 0$$

(für endlich viele n) geben, wobei k für genügend großes j entsprechend der Definition von E so genommen wird, daß

$$s_{n+k} \in [1/4 - \varepsilon_j, 1/4] \quad \text{für} \quad -j \leqq n < 0 \quad \text{und daß}$$
$$s_{n+k} \in [-1/4, -1/4 + \varepsilon_j] \quad \text{für} \quad 0 \leqq n < j.$$

Für $\{s_n\} \in E$ ist nach dem Lemma also $\{\exp(i(n + s_n)\,t): n \in \mathbf{Z}\}$ keine Riesz-Basis des L_2.

Bezeichnet man mit δ eine positive Zahl, so daß für ein beliebiges, aber fest gewähltes $j \in \mathrm{N}$ und für jedes $n \in \mathbf{Z}$ $\mu_n([1/4 - \varepsilon_j, 1/4]) > \delta$ und $\mu_n([-1/4, -1/4 + \varepsilon_j]) > \delta$, so gilt

$$\begin{aligned} m(E_j) &= \prod_k m(\{\{s_n\} \in [-1/4, 1/4]^{\mathbf{Z}}\colon \text{Es gibt ein } l \text{ mit } 0 \leqq l < j, \text{ so daß} \\ &\qquad s_{2kj-l-1} \notin [1/4 - \varepsilon_j, 1/4] \quad \text{oder} \quad s_{2kj+l} \notin [-1/4, -1/4 + \varepsilon_j]\}) \\ &= \prod_k \big(1 - m(\{\{s_n\} \in [-1/4, 1/4]^{\mathbf{Z}}\colon \text{für jedes } l \text{ mit } 0 \leqq l < j \text{ gilt} \\ &\qquad s_{2kj-l-1} \in [1/4 - \varepsilon_j, 1/4] \quad \text{und} \quad s_{2kj+l} \in [-1/4, -1/4 + \varepsilon_j]\})\big) \\ &\leqq \prod_k (1 - \delta^{2j}) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber $m(E) = 1$. Damit ist die Behauptung bewiesen ∎

Der Autor bedankt sich herzlich bei Herrn Professor M. I. KADEZ, der ihn mit der Problemstellung vertraut machte und wertvolle Anregungen zu deren Bearbeitung gab.

LITERATUR

[1] ACHIESER, N. I., und I. M. GLASMANN: Theorie der linearen Operatoren im Hilbert-Raum. Berlin 1975.

[2] DUFFIN, R. J., and J. J. EACHUS: Some notes on an expansion theorem of Paley and Wiener. Bull. Am. Math. Soc. 48 (1942), 850—855.

[3] DUFFIN, R. J., and A. C. SCHAEFFER: A class of nonharmonic Fourier series. Trans. Am. Math. Soc. 72 (1952), 341—366.

[4] Головин, В. Д.: Об устойчивости базиса показательных функции. ДАН Арм. ССР 36 (2) (1963), 65—70.

[5] Гринблюм, М. М.: О представлении пространства типа B в виде прямой суммы подпространств. ДАН СССР 70 (5) (1950), 749—752.

[6] Кадец, М. И.: Точное значение постоянной Палея-Винера. ДАН СССР 155 (6) (1964), 1253—1254.

[7] Кацнельсон, В. Э.: О базисах из показательных функций в L^2. Функц. анализ 5 (1) (1971), 37—47.

[8] KÖTHE, G., und O. TOEPLITZ: Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen. J. Reine Angew. Math. 171 (1934), 193—226.

[9] Левин, Б. Я.: О базисах из показательных функций в L^2. Записки матем. отд. физ.-матем. ф-та Харьковского ун-та и Харьковского матем. об-ва 72 сер. 4 (1961), 39—48.

[10] LEVINSON, N.: On non-harmonic Fourier series. Ann. Math. 37 (1936), 919—936.

[11] LORCH, E. R.: Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces. Bull. Am. Math. Soc. 45 (1939), 564—569.

[12] Мильман, В. Д.: Геометрическая теория пространств Банаха. Част. 1. УМН 26 (3) (1970), 113—174.

[13] PALEY, R. E. A. C., and N. WIENER: Fourier transforms in the complex domain. New York 1934.

Manuskripteingang: 27. 03. 1981

VERFASSER:

Dr. KLAUS-DETLEF KÜRSTEN
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz 10