Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 1 (4) (1982), S. 59–71

Zur Regularität verallgemeinerter Lösungen von quasilinearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Gebieten mit Ecken

E. MIERSEMANN

Es wird die Regularität der Lösungen einer Klasse quasilinearer elliptischer Gleichungen zweiter Ordnung in zweidimensionalen Gebieten mit Ecken untersucht. Als Anwendung wird das Minimalflächenproblem behandelt.

Исследуется вопрос о гладкости решения для некоторых квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка для двумерных областей с угловыми точками. Результаты применяются к проблеме минимальной поверхности.

There are studied regularity properties of a class of quasilinear elliptic equations of second order in two-dimensional domains with corners. As an application of these, there is considered the minimal surface problem.

1. Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir das Verhalten der schwachen Lösung in den Ecken für die folgende Klasse nichtlinearer elliptischer Differentialgleichungen in einem beschränkten und einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^2$:

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} a_i(u_x)\, \varphi_{x_i}\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$u = \Phi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Der Rand $\partial\Omega$ soll der Einfachheit halber stückweise glatt sein. Es ist

$$a = \big(a_1(p), a_2(p)\big), \qquad p = (p_1, p_2),$$

ein streng monotones und koerzitives C^1-Vektorfeld, man vergleiche dazu die Definition im Abschnitt 2. Den allgemeinen Fall eines lokalen streng monotonen Vektorfeldes behandeln wir im Kapitel 3 im Zusammenhang mit nichtgleichmäßig elliptischen Gleichungen. Mit u_x oder Du bezeichnen wir den Vektor (u_{x_1}, u_{x_2}). Wir setzen $|D^2u| = \sum_{i,j=1}^{2} |u_{x_ix_j}|$.

Es zeigt sich nun, daß die Lösung u zur Klasse $C^{1,\alpha}(\bar\Omega) \cap H^2(\Omega)$ gehört, wenn die Innenwinkel γ_i der Ecken die Bedingung $0 < \gamma_i < \pi$ erfüllen und $|f|$ und $|D^2\Phi|$ noch einer gewissen Abschätzung in den Ecken genügen. Dasselbe ist richtig für das nichtparametrische Minimalflächenproblem, wenn die „bounded-slope"-Bedingung erfüllt ist. In dieser Arbeit nehmen wir an, daß Φ die Spur einer $H_p^2(\Omega)$-Funktion ist, $p > 2$. Ist einmal $u \in C^{1,\alpha}(\bar\Omega) \cap H^2(\Omega)$ gezeigt, dann folgen weitergehende Regularitätsaussagen aus der linearen Theorie für elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Gebieten mit Ecken nach AZZAM [2] und KONDRAT'EV [9, 11, 12].

Grundlegende Ergebnisse für lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung in nichtglatten Gebieten stammen von KONDRAT'EV [9]. In diesen Arbeiten wird die Zugehörigkeit der Lösung zu gewissen Sobolevschen Hilberträumen untersucht. FILLIPOV [5] bewies Differenzierbarkeitseigenschaften für die Lösung der gemischten Randwertaufgabe für den Laplaceoperator in dreidimensionalen Gebieten mit Kanten. Die Arbeit von AZZAM [2] vereinfacht die Untersuchungen im Falle linearer elliptischer Gleichungen zweiter Ordnung wesentlich. In ihr wird die Barrieremethode benutzt. Wir werden nun zeigen, daß diese Methode es gestattet, auch die Klasse (1.1) von quasilinearen elliptischen Gleichungen in eckigen Gebieten zu behandeln. Entscheidend ist dabei die Barrierekonstruktion von Lemma 2.2. Dieses Lemma ist eine Verschärfung von Ergebnissen von AZZAM [2, 3] sowie von AZZAM und KREYSZIG [4]. Aber gerade diese Verschärfung benötigen wir bei quasilinearen Aufgaben.

2. Gleichmäßig elliptische Gleichungen

Es sei $p = (p_1, \dots, p_N)$ und $a(p) = \big(a_1(p), \dots, a_N(p)\big)$. In dieser Arbeit ist $N = 2$. Über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

Definition (HARTMAN und STAMPACCHIA [7]): Das Vektorfeld $a(p)$ heißt *streng monoton und koerzitiv von der Klasse C^1*, wenn gilt:

$$a_i(p) \in C^1(\mathbf{R}^N) \tag{2.1}$$

$$\big(a_i(p) - a_i(q)\big)(p_i - q_i) \geqq \nu\, |p - q|^2 \tag{2.2}$$

für alle $p, q \in \mathbf{R}^N$ mit einer von p, q unabhängigen positiven Konstanten ν.

$$\left|\frac{\partial a_i}{\partial p_j}(p)\right| \leqq M \tag{2.3}$$

für alle $p \in \mathbf{R}^N$ mit einer von p unabhängigen Konstanten $M < \infty$.

Für ein solches Vektorfeld gilt (s. etwa bei KINDERLEHRER und STAMPACCHIA [8, S. 100]) die Ungleichung

$$a_{ij}(p)\, \xi_i \xi_j \geqq \nu\, |\xi|^2 \quad \text{für alle } p, \xi \in \mathbf{R}^N. \tag{2.4}$$

Dabei wurde gesetzt $a_{ij} = \dfrac{\partial a_i}{\partial p_j}$. In diesem Abschnitt nehmen wir an, daß das Vektorfeld $a(p)$ die Bedingungen (2.1)—(2.3) erfüllt. Es ist bekannt (HARTMANN und STAMPACCHIA [7]; siehe auch KINDERLEHRER und STAMPACCHIA [8]), daß die Aufgabe (1.1) unter den Voraussetzungen (2.1)—(2.3) eine eindeutige bestimmte Lösung $u \in H^1(\Omega)$ besitzt, wenn gilt: $f \in H^{-1}(\Omega)$ und $\Phi \in H^1(\Omega)$. Die Lösung ist genügend regulär, wenn das für $\partial\Omega$, f und Φ zutrifft (STAMPACCHIA [17], LADYZHENSKAYA und URAL'TSEVA [13]). Da wir es hier mit dem Fall $N = 2$ zu tun haben, folgt die Regularität nach MORREY [16, Chapter 5.4].

Für das Vektorfeld $a(p)$ ist der folgende Vergleichssatz richtig (s. zum Beispiel [6, S. 119]).

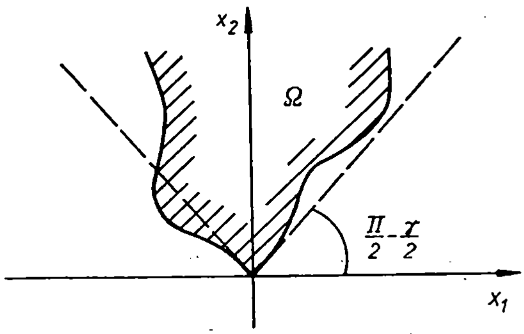
Lemma 2.1: *Für $v, w \in H^1(\Omega)$ gelte $v \leqq w$ auf $\partial\Omega$ und*

$$\int_\Omega a_i(v_x)\, \varphi_{x_i}\, dx \leqq \int_\Omega a_i(w_x)\, \varphi_{x_i}\, dx$$

für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ mit $\varphi \geqq 0$. Dann hat man $v \leqq w$ in Ω fast überall.

Die Ungleichung $v \leqq w$ auf $\partial\Omega$ ist im Sinne von $H^1(\Omega)$ zu verstehen, man vergleiche [8, 14].

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die betrachtete Ecke von Ω in (0, 0) liegt und daß das Gebiet folgendermaßen in der x-Ebene angeordnet ist:



Mit γ bezeichnen wir den Innenwinkel der Ecke und nehmen stets an, daß $0 < \gamma < \pi$ zutrifft.

Die Gleichung (1.1) ist gegenüber Translationen invariant. Bei einer orthogonalen Transformation U mit $x = Ux'$ geht das Vektorfeld $a(p)$ über in $\bar{a}(p') = U^* a(Up')$. Die Konstanten ν und M bleiben dieselben.

Es sei

$$\Omega_\varrho = \Omega \cap B_\varrho(0), \qquad 0 < \varrho < \varrho_0$$

mit

$$B_\varrho(0) = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 \leqq \varrho^2\}.$$

Wir wählen ϱ_0 so klein, daß in Ω_{ϱ_0} keine weitere Ecke von Ω liegt.

2.1. Randbedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega$

Zunächst behandeln wir die Aufgabe (1.1) mit $\Phi = 0$. Wenn $f \in L_2(\Omega)$ zutrifft, dann gilt (s. [8, Chapter 4]):

$$u \in H^2(\Omega_{\varrho_1} \setminus \Omega_\varepsilon), \qquad \varrho_0 > \varrho_1 > \varepsilon > 0.$$

Wie Azzam [2, 3] sowie Azzam und Kreyszig [4] betrachten wir die Funktion

$$W = Ar^{1+\mu} \sin \lambda\theta \qquad (A = \text{const} > 0;\ 0 < \mu < 1)$$

mit $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ und $\theta = \operatorname{arc\,tan} \dfrac{x_2}{x_1}$. Die Funktion W ist positiv in $\bar{\Omega}_{\varrho_0} \setminus \{0\}$, wenn $|\lambda - 1|$ und ϱ_0 genügend klein sind.

Wir wollen nun

$$LW = a_{ij}(W_x)\, W_{x_i x_j}$$

nach oben abschätzen. Unter den allgemeinen Voraussetzungen (2.3), (2.4) für die Koeffizienten a_{ij} gilt folgendes für unsere Untersuchungen grundlegende Lemma.

Lemma 2.2: *Es gibt ein $d = d(\nu, M, \gamma) > 0$, so daß für jedes λ mit $0 < \lambda - 1 < d$ positive Zahlen $\eta(\lambda)$, $\mu_0(\lambda)$ existieren mit*

$$LW \leqq -A\eta r^{\mu-1}$$

für alle $0 < \mu \leqq \mu_0(\lambda)$.

Beweis: Nach elementarer Rechnung erhalten wir

$$W_{x_i x_j} = Ar^{\mu-1} V_{ij}$$

mit

$$V_{11} = \sin\lambda\theta\{-\lambda^2\sin^2\theta - (1-\mu^2)\cos^2\theta + 1 + \mu\} + R_{11},$$
$$V_{12} = V_{21} = \sin\lambda\theta\{\lambda^2\sin\theta\cos\theta - (1-\mu^2)\sin\theta\cos\theta\} + R_{12},$$

und

$$V_{22} = \sin\lambda\theta\{-\lambda^2\cos^2\theta - (1-\mu^2)\sin^2\theta + 1 + \mu\} + R_{22}.$$

Für die R_{ij} gelten die Abschätzungen

$$|R_{11}| \leqq 2\lambda\mu, \qquad |R_{12}| \leqq \lambda\mu, \qquad |R_{22}| \leqq 2\lambda\mu.$$

Wir setzen $\lambda = 1 + \tau$ $(\tau > 0)$ und bekommen:

$$V_{11} = \sin\lambda\theta\{-2\tau\sin^2\theta - \tau^2\sin^2\theta + \mu^2\cos^2\theta + \mu\} + R_{11},$$
$$V_{12} = \sin\lambda\theta\{2\tau\sin\theta\cos\theta + \tau^2\sin\theta\cos\theta + \mu^2\sin\theta\cos\theta\} + R_{12},$$
$$V_{22} = \sin\lambda\theta\{-2\tau\cos^2\theta - \tau^2\cos^2\theta + \mu^2\sin^2\theta + \mu\} + R_{22}.$$

Mit $\xi_1 = -\sin\theta$, $\xi_2 = \cos\theta$ ist

$$a_{ij}V_{ij} = -2\tau a_{ij}\xi_i\xi_j\sin\lambda\theta + Q.$$

Dabei gilt

$$|Q| \leqq 6M\lambda\mu + 4M(\tau^2 + \mu^2 + \mu) \quad \text{mit } M \text{ von (2.3)}.$$

Auf Grund von (2.4) folgt für $0 < \tau < \dfrac{\pi - \gamma}{\pi + \gamma}$ die Ungleichung

$$a_{ij}V_{ij} \leqq -2\tau\nu\sin\lambda\theta + 6M\lambda\mu + 4M(\tau^2 + \mu^2 + \mu).$$

Mit $\tau_0 = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\pi-\gamma}{\pi+\gamma}$ und $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\gamma}{2}$ setzen wir $c_0 = \sin(1 + \tau_0)\,\theta_0$. Es ist $c_0 > 0$. Aus der obigen Ungleichung erhalten wir schließlich

$$a_{ij}V_{ij} \leqq -c_1\tau + c_2\mu$$

für alle $0 < \mu < 1$ und für alle $0 < \tau < \min\left(\tau_0, \dfrac{\nu c_0}{4M}\right)$. Dabei ist $c_1 = \nu c_0$ und $c_2 = 6M(1 + \tau_0) + 8M$ ∎

Lemma 2.3: *In einer Umgebung der Ecke gelte*

$$|f| \leqq c\,|x|^{\varkappa-1}, \qquad \varkappa > 0. \tag{2.6}$$

Dann hat man für ein μ $(0 < \mu < 1)$ die Ungleichung

$$|u| \leqq c\,|x|^{1+\mu} \quad \textit{für alle } x \in \Omega_{\varrho_1},\ \varrho_1 > 0 \textit{ genügend klein.} \tag{2.7}$$

Mit c bezeichnen wir positive Konstanten, die bei verschiedenen Ungleichungen verschieden sein können.

Beweis: Wir wählen ϱ_1 so klein, daß (2.6) in Ω_{ϱ_1} zutrifft. Aus bekannten Regularitätssätzen folgt

$$u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega_{\varrho_1} \setminus \Omega_\varepsilon}) \quad (\varrho_1 > \varepsilon > 0) \quad \text{für ein } \alpha,\ 0 < \alpha < 1$$

(s. z. B. bei STAMPACCHIA [17]). Für die Funktion W, man vergleiche (2.5), gilt dann $-W \leqq u \leqq W$ auf $\partial\Omega_{\varrho_1}$, wenn A genügend groß ist. Die Ungleichung (2.7) folgt aus Lemma 2.1 und Lemma 2.2. Im Lemma 2.2 ist μ so klein zu wählen, daß $\mu \leqq \varkappa$ zutrifft ∎

H^2-Regularität: Unter Benutzung von Abschätzungen in Gebieten, die die Ecke nicht enthalten, können wir mittels einer Lokalisierungsmethode (s. KONDRAT'EV [9]) den folgenden Satz beweisen.

Theorem 2.1: *Unter den Voraussetzungen* $0 < \gamma < \pi$ und (2.6) *gilt*

$$u \in H^2(\Omega_{\varrho_0}), \qquad \varrho_0 = \frac{1}{4}\varrho_1.$$

Beweis: Es sei

$$D_n = \left\{(r, \theta) \in \Omega_{\varrho_1} \,\middle|\, \frac{\varrho_0}{2^{n+1}} \leqq r \leqq \frac{\varrho_0}{2^n}\right\} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$D_n' = D_{n-1} \cup D_n \cup D_{n+1}, \qquad D_n'' = D_{n-2} \cup D_n' \cup D_{n+2}.$$

Weiterhin setzen wir

$$\Omega_n = \Omega_{\varrho_0/2^n}.$$

Bei der Variablentransformation $x_i = \frac{y_i}{2^n}$ gehen die Gebiete D_n in $D_0^{(n)}$, D_n' in $D_0^{(n)\prime}$, D_n'' in $D_0^{(n)\prime\prime}$ und Ω_n in $\Omega_0^{(n)}$ über. Wenn die Ecke durch zwei Geradenstücke begrenzt wird, dann sind die neuen Gebiete unabhängig von n, $n > n_0$. Die Gleichung

$$\int_{\Omega_{n-2}} a_i(u_x)\, \varphi_{x_i}\, dx = \int_{\Omega_{n-2}} f\varphi\, dx \quad \text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega_{n-2}) \tag{2.8}$$

geht bei der obigen Transformation über in

$$\int_{\Omega_0^{(n-2)}} a_i(w_y)\, \varphi_{y_i}\, dy = \frac{1}{2^n} \int_{\Omega_0^{(n-2)}} f\varphi\, dy \tag{2.9}$$

$$\text{für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega_0^{(n-2)}) \quad \text{mit } w(y) = 2^n u(y).$$

Es gilt (s. z. B. bei KINDERLEHRER und STAMPACCHIA [8, Chapter 4]) die Ungleichung

$$\|D^2 w\|^2_{L_2(D_0)} \leqq c\left(\|w\|^2_{H^1(D_0')} + \frac{1}{2^{2n}}\, \|f\|^2_{L_2(D_0')}\right). \tag{2.10}$$

Den oberen Index (n) lassen wir nun weg. Die Konstante c hängt aber auch noch von n ab. Auf Grund unserer Regularitätsannahme für die Randstücke kann man c unabhängig von n ($n > n_0$) wählen: Wenn die Ecke durch zwei Geradenstücke begrenzt wird, ist das offensichtlich. Im allgemeinen Fall muß man in bekannter Weise das Eckgebiet auf dasjenige Gebiet abbilden, das durch die beiden Tangenten begrenzt wird, und dann für die transformierte Gleichung die Abschätzung (2.10) herleiten. Anschließend führt man die Rücktransformation durch und kann die Abhängigkeit der Konstanten c von n durch diese Transformation kontrollieren. Man vergleiche hierzu auch bei KONDRAT'EV [10, S. 426ff.].

Wir wollen jetzt $\|Dw\|_{L_2(D_0')}$ abschätzen. Es sei $\zeta(r) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ mit $0 \leqq \zeta \leqq 1$ und

$$\zeta(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{\varrho_0}{4} \leqq r \leqq 2\varrho_0 \\[2ex] 0 & \text{für } r < \frac{\varrho_0}{8} \text{ und } r > 4\varrho_0. \end{cases}$$

Wir setzen $\varphi = \zeta^2 w$ in (2.9) ein. Wegen

$$\int_{D_0''} a_i(0)\,(\zeta^2 w)_{y_i}\,dy = 0,$$

(das folgt nach partieller Integration) erhalten wir

$$\int_{D_0''} \big(a_i(w_y) - a_i(0)\big)\,\zeta^2 w_{y_i}\,dy = \int_{D_0''} 2\big(a_i(0) - a_i(w_y)\big)\,\zeta\zeta_{y_i} w\,dy + \frac{1}{2^n}\int_{D_0''} f\zeta^2 w\,dy$$

Auf Grund der Voraussetzungen (2.1)—(2.3) ist

$$\nu \int_{D_0''} \zeta^2\,|Dw|^2\,dy \leqq 2M \int_{D_0''} \zeta\,|Dw|\,|D\zeta|\,|w|\,dy + \frac{1}{2}\int_{D_0''} |f|\,|w|\,\zeta^2\,dy.$$

In bekannter Weise folgt dann mittels der Ungleichung

$$2ab \leqq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon}\,b^2 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

die Abschätzung

$$\int_{D'} |Dw|^2\,dy \leqq c\left(\int_{D''} |w|^2\,dy + \frac{1}{2^{2n}}\int_{D_0''} |f|^2\,dy\right). \tag{2.11}$$

Die Rücktransformation von (2.10) liefert, wenn wir (2.11) in (2.10) einsetzen, die Ungleichung

$$\int_{D_n} |D^2 u|^2\,dx \leqq c\left(2^{4n}\int_{D_n''} |u|^2\,dx + \int_{D_n''} |f|^2\,dx\right).$$

Nach Lemma 2.3 und der Voraussetzung (2.6) hat man in D_n''

$$|u| \leqq c\,2^{-n(1+\mu)}, \qquad |f| \leqq c\,2^{-n(\varkappa-1)}.$$

Wegen meas $D_n'' \leqq c\,2^{-2n}$ gilt schließlich

$$\int_{D_n} |D^2 u|^2\,dx \leqq c(2^{-2\mu n} + 2^{-2\varkappa n}) \ \blacksquare$$

$C^{1,\alpha}$-Regularität: In der Gleichung (2.8) ersetzen wir φ durch $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ $(k = 1, 2)$ mit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{n-2})$. Nach partieller Integration erhalten wir

$$\int_{\Omega_{n-2}} a_{ij}(u_x)\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)_{x_j} \varphi_{x_i}\,dx = -\int_{\Omega_{n-2}} f\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\,dx.$$

Bei der Variablentransformation $x_i = y_i/2^n$ geht diese Gleichung über in

$$\int_{D_0'} a'_{ij} v_{y_j} \varphi_{y_i}\,dy = \int_{D_0'} g\,\frac{\partial\varphi}{\partial y_k}\,dy$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty(D_0')$. Dabei haben wir gesetzt:

$$v = \frac{\partial u}{\partial y_k}, \qquad g = -\frac{1}{2^{2n}}\,f.$$

Die Funktion u in den neuen Koordinaten bezeichnen wir wieder mit $u(y)$, und a'_{ij} sind die Koeffizienten a_{ij} nach der Transformation. Sie erfüllen (2.2) und (2.3) mit denselben Konstanten ν und M.

Lemma 2.4: *Es sei $g \in L_q(D_0')$, $q > 2$. Dann gilt*

$$\|v\|_{C^\alpha(\bar{D}_0)} \leqq c(\|v\|_{L_2(D_0')} + \|g\|_{L_q(D_0')}) \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Die Konstanten c und α sind unabhängig von g, v und n, $n > n_0$.

Beweis: Das Lemma folgt aus einem Satz über die inneren Abschätzungen (s. z. B. bei GILBARG und TRUDINGER [6, Theorem 8.24, S. 192]) und der Abschätzung für Randgebiete [6, Theorem 8.29, S. 195]. Diesen Satz kann man zunächst nur für die tangentialen Ableitungen anwenden, da $u \in H_0^1(\Omega)$ gilt. Für diese Ableitung kann man die Morreysche Ungleichung zeigen, und über die Eulersche Gleichung läßt sich auch für die Normalableitung diese Ungleichung herleiten (man vergleiche dazu etwa bei KINDERLEHRER und STAMPACCHIA [8, Chapter 4]). Es gilt also

$$\int_{D_0' \cap B_\varrho(x)} |Dv|^2 \, dy \leqq K\varrho^{2\lambda}.$$

Wichtig ist nun, daß die Konstante K die Gestalt hat:

$$K = \text{const} \, (\|v\|_{L_2(D_0')} + \|g\|_{L_q(D_0')})^2.$$

Das ergibt sich, wenn man die Abhängigkeit der Konstanten von v und g bei KINDERLEHRER und STAMPACCHIA [8, Chapter 2] verfolgt. Die Ungleichung des Lemmas erhält man aus einem bekannten Satz von Morrey.

Ist die Ecke durch zwei Geradenstücke begrenzt, dann ist c in Lemma 2.4 unabhängig von n. Im allgemeinen Fall argumentieren wir wie beim Beweis von Theorem 2.1 ∎

Theorem 2.2: *Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.1 gilt:*

$$u \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}_{\varrho_0}) \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Beweis: Es ist

$$v = \frac{\partial u}{\partial y_k} = \frac{1}{2^n} \frac{\partial u}{\partial x_k}, \qquad \|v\|_{C(D_0)} = \frac{1}{2^n} \|u_{x_k}\|_{C(D_n)}, \quad \int_{D_0'} \|v\|^2 \, dy = \int_{D_n'} \|u_{x_k}\|^2 \, dx$$

und

$$\int_{D_0'} |g|^q \, dy = \frac{1}{2^{2qn-2n}} \int_{D_n'} |f|^q \, dx.$$

Aus Lemma 2.4 erhalten wir

$$\frac{1}{2^n} \|u_{x_k}\|_{C(D_n)} \leqq c \left\{ \left(\int_{D_n'} |u_{x_k}|^2 \, dx \right)^{1/2} + \frac{1}{2^{2n-2n/q}} \left(\int_{D_n'} |f|^q \, dx \right)^{1/q} \right\}.$$

Aus (2.11) folgt (es war $w(y) = 2^n u(y)$) die Ungleichung

$$\int_{D_n'} |Du|^2 \, dx \leqq c \left\{ 2^{2n} \int_{D_n''} |u|^2 \, dx + \frac{1}{2^{2n}} \int_{D_n''} |f|^2 \, dx \right\}.$$

Auf Grund von Lemma 2.3 ist

$$\|u_{x_k}\|_{C(D_n)} \leqq c(2^{-\mu n} + 2^{-\varkappa n}) \qquad (k = 1, 2).$$

Wieder nach Lemma 2.4 folgt nach Rücktransformation für $x, \bar{x} \in D_n$; die Abschätzung

$$|u_{x_k}(x) - u_{x_k}(\bar{x})| \leqq c(2^{-\mu n + \lambda n} + 2^{-\varkappa n + \lambda n})\ |x - \bar{x}|^\lambda.$$

In Lemma 2.3 können wir annehmen, daß $\lambda \leqq \min(\mu, \varkappa)$ zutrifft, da $\varrho_0 \leqq 1$ gewählt werden kann ∎

Mit ω bezeichnen wir den Winkel, der aus γ bei derjenigen linearen Transformation entsteht, die die Gleichung $a_{ij}(0)\, u_{x_i x_j} = 0$ in die Laplacegleichung transformiert. Hier ist $a_{ij}(0) = \frac{\partial a_i}{\partial p_j}(p)|_{p=0}$.

Theorem 2.3: *Es sei* $a(p) \in C^{m+2}$, $f \in C^{m,\alpha}(\bar{\Omega}_{\varrho_1})$ $(0 < \alpha < 1;\ m = 0, 1, \ldots)$ *und* $0 < \omega < \pi/(2 + m)$. *Dann gilt*

$$u \in C^{m+2,\alpha}(\bar{\Omega}_{\varrho_0})$$

für die Lösung u von (1.1) *bei* $\Phi = 0$.

Beweis: Aus Theorem 2.2 folgt $u_x(0) = 0$ und daß die Koeffizienten der Eulerschen Gleichung hölderstetig sind für $0 < \gamma < \pi$. Das Theorem 2.3 erhält man dann aus Resultaten für lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Gebieten mit Ecken (AZZAM [2]) und aus der Regularität von u in $\overline{\Omega_{\varrho_1} \setminus \Omega_\varepsilon}$, $\varrho_1 > \varepsilon > 0$ ∎

2.2. Das Problem bei vorgeschriebenen Randwerten

Wir setzen neben (2.6) für Φ in (1.1) voraus:

$$\Phi \in H_p^2(\Omega) \qquad (p > 2). \tag{2.12}$$

Auf Grund eines Sobolewschen Einbettungssatzes (s. z. B. bei ADAMS [1, S. 98]) ist $\Phi \in C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$, $0 < \beta < 1$. In bekannter Weise stellt man die Aufgabe

$$v \in H_0^1(\Omega): \int_\Omega a_i\big((v + \Phi)_x\big)\, \varphi_{x_i}\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx \quad \text{für alle} \quad \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.13}$$

Die Lösung $u = v + \Phi$ ist unabhängig von der speziellen Wahl von Φ, das heißt, für $\bar{\Phi}$ mit $\bar{\Phi} = \Phi$ auf $\partial\Omega$ erhält man dieselbe Lösung u. Das folgt sofort aus (2.2).

Anstelle der Barrierefunktion von Lemma 2.2 betrachten wir hier

$$W = Ar^{1+\mu} \sin \lambda\theta + \Phi_{x_i}(0)\, x_i + \Phi(0). \tag{2.14}$$

Dann hat man auch für die Funktion (2.14) das Lemma 2.2. Auf Grund der Voraussetzung (2.12) gilt

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \Phi_{x_i}(0)\, x_i + O(|x|^{1+\beta}), \qquad 0 < \beta < 1.$$

Auf $\partial\Omega \cap B_\varrho(0)$ ist $W \geqq \Phi$ für festes $A > 0$, wenn wir $\mu < \beta$ und $\varrho > 0$ genügend klein wählen. Wir nehmen jetzt A so groß an, daß auch noch $W \geqq u$ auf $\partial B_\varrho(0) \cap \Omega$ zutrifft. Das läßt sich machen, da u in $\overline{\Omega_{\varrho_1} \setminus \Omega_\varepsilon}$ $(\varrho_1 > \varepsilon > 0)$ zur Klasse $C^{1,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ gehört. Aus Lemma 2.1 folgt

$$u \leqq c\, |x|^{1+\mu} + \Phi_{x_i}(0)\, x_i + \Phi(0), \qquad x \in \Omega_\varrho.$$

Wenn wir A durch $-A$ ersetzen, bekommen wir für genügend großes A die Ungleichung

$$|u - \Phi_{x_i}(0)\, x_i - \Phi(0)| \leqq c\, |x|^{1+\mu}$$

in einer Umgebung der Ecke. Daraus schließt man auf

$$|u - \Phi| \leqq c\, |x|^{1+\mu}, \quad \mu > 0 \text{ hinreichend klein.} \tag{2.15}$$

Auf die Gleichung (2.13) wenden wir nun das Verfahren vom Beweis der H^2-Regularität aus Teil 2.1 an und erhalten aus der Gleichung (2.13) nach der Transformation $x_i = y_i/2^n$ die Beziehung

$$\int_{\Omega_0} a_i(w_y)\, \varphi_{y_i}\, dy = \frac{1}{2^n} \int_{\Omega_0} f\varphi\, dy \tag{2.16}$$

für alle $\varphi \in \mathring{H}^1(\Omega_0)$ mit $w = 2^n v(y) + 2^n \Phi(y)$. Wir setzen $w_1 = 2^n v(y)$ und $w_2 = 2^n \Phi(y)$. Aus (2.16) folgt (man vergleiche etwa wieder [8, S. 144f.])

$$\|D^2 w_1\|^2_{L_2(D_0)} \leqq c \left\{ \|D^2 w_2\|^2_{L_2(D_0')} + \|w_1\|^2_{H^1(D_0')} + \frac{1}{2^{2n}} \|f\|^2_{L_2(D_0')} \right\}.$$

Nach Rücktransformation erhalten wir

$$\int_{D_n} |D^2 v|^2\, dx \leqq c \left\{ \int_{D_n'} |D^2 \Phi|^2\, dx + 2^{2n} \int_{D_n'} |Dv|^2\, dx + 2^{4n} \int_{D_n'} |v|^2\, dx \right\}.$$

Nun wird der zweite Summand auf der rechten Seite weiter abgeschätzt. Es sei $\zeta(r)$ die Funktion vom Beweis des Theorem 2.1. In die Gleichung (2.16) können wir einsetzen

$$\varphi = \zeta^2 (w - w_2).$$

Es ist

$$\int_{D_0''} a_i(w_y)\, \zeta^2 (w - w_2)_{y_i}\, dy + 2 \int_{D_0''} a_i(w_y)\, \zeta\zeta_{y_i} (w - w_2)\, dy = 0$$

und

$$\int_{D_0''} a_i(w_{2y})\, [\zeta^2 (w - w_2)]_{y_i}\, dy = - \int_{D_0''} a_{ij}(w_{2y})\, w_{2y_i y_j} \zeta^2 (w - w_2)\, dy$$

$$= \int_{D_0''} a_i(w_{2y})\, \zeta^2 (w - w_2)_{y_i}\, dy + 2 \int_{D_0''} a_i(w_{2y})\, \zeta\zeta_{y_i} (w - w_2)\, dy.$$

Aus diesen Gleichungen folgt auf Grund der Voraussetzungen (2.1)—(2.3)

$$\nu \int_{D_0''} \zeta^2 |Dw_1|^2\, dy \leqq c \left\{ \int_{D_0''} |Dw_1|\, \zeta\, |w_1|\, dy + \int_{D_0''} |D^2 w_2|\, |w_1|\, dy + \frac{1}{2^{2n}} \int_{D_0''} |f|\, |w_1|\, dy \right\}.$$

Also gilt

$$\int_{D_0'} |Dw_1|^2\, dy \leqq c \left\{ \int_{D_0''} |w_1|^2\, dy + \int_{D_0''} |D^2 w_2|^2\, dy + \frac{1}{2^{2n}} \int_{D_0''} |f|^2\, dy \right\}.$$

Nach Rücktransformation erhalten wir

$$2^{2n} \int_{D_n'} |Dv|^2\, dx \leqq c \left\{ 2^{4n} \int_{D_n''} |v|^2\, dx + \int_{D_n''} |D^2 \Phi|^2\, dx + \int_{D_n''} |f|^2\, dx \right\}.$$

Damit ist der folgende Satz bewiesen.

Theorem 2.4: *Unter den Voraussetzungen:*

a) $0 < \gamma < \pi$;

b) $\Phi \in H_p^2(\Omega)$ für $p > 2$;

c) $|D^2\Phi| \leqq c\,|x|^{\varkappa-1}$ und $|f| \leqq c\,|x|^{\varkappa-1}$ $(\varkappa > 0)$ *in einer Umgebung der Ecke*

gilt $u \in H^2(\Omega_\varrho)$ *für die Lösung* u *von* (1.1), $\varrho > 0$ *genügend klein.*

Theorem 2.5: *Unter den Voraussetzungen von Theorem* 2.4 *ist* $u \in C^{1,\alpha}(\Omega_\varrho)$ *für* $0 < \alpha < 1$ *und hinreichned kleines* $\varrho > 0$.

Beweis: Wir setzen $u = v + \Phi$ und schließen dann wie beim Beweis von Theorem 2.2.

Wir können jetzt wieder die Ergebnisse für lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung verwenden und erhalten das Theorem 2.3 auch für die Gleichung (1.1) unter der zusätzlichen Annahme $\Phi \in C^{m+2,\alpha}(\bar{\Omega}_{\varrho_1})$. Hier ist $a_{ij}(0) = a_{ij}(\Phi_x(0))$.

3. Nichtgleichmäßig elliptische Gleichungen

Die Ergebnisse von Teil 2 können wir nicht unmittelbar auf das nichtparametrische Minimalflächenproblem in Gebieten mit Ecken anwenden, da hier die Voraussetzung (2.2) nicht erfüllt ist. Für die folgende Definition vergleiche man bei LEWY und STAMPACCHIA [15] sowie bei KINDERLEHRER und STAMPACCHIA [8, Chapter 3].

Definition: *Ein* C^1-Vektorfeld $a(p) = (a_1(p), \ldots, a_N(p))$, $p = (p_1, \ldots, p_N)$, heißt *lokal stark monoton*, wenn für jede kompakte Menge $C \subset \mathbf{R}^N$ eine Konstante $\nu = \nu(C) > 0$ existiert mit $(a_i(p) - a_i(q))\,(p_i - q_i) \geqq \nu\,|p - q|^2$ für alle $p, q \in C$.

Lemma 3.1 (KINDERLEHRER und STAMPACCHIA [8, S. 97]): *Sei* $a(p)$ *ein lokales stark monotones* C^1*-Vektorfeld auf* $\mathbf{R}^N$ *und sei* M *eine Konstante,* $0 < M < \infty$. *Dann existiert ein stark monotones und koerzitives* C^1*-Vektorfeld* $\bar{a}(p)$ *mit* $\bar{a}(p) = a(p)$ *für* $|p| < M$, *und für* $|p| > 3M$ *gilt* $\bar{a}(p) \leqq K\,|p|$ *mit einer Konstanten* K $(0 < K < \infty)$.

Nach [8] kann man ein solches Vektorfeld folgendermaßen konstruieren. Es sei $\psi(t) \in C^\infty(\mathbf{R}^+)$ mit $\psi \geqq 0$ und

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leqq t \leqq 2M \\ 0 & \text{für } t \geqq 3M. \end{cases}$$

Weiter sei $g(t) \in C^\infty(\mathbf{R}^+)$, nichtfallend mit

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leqq t \leqq M \\ 1 & \text{für } t \geqq 3M \end{cases}$$

und $g(t) \geqq c_0 > 0$ für $t \geqq 2M$. Das Vektorfeld

$$\bar{a}(p) = \psi(|p|)\,\mathrm{a}(p) + Kg(|p|)\,p$$

ist dann stark monoton und koerzitiv, wenn K genügend groß gewählt würde.

Sei $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega)$ eine Lösung von (1.1) mit $\bar{a}(p)$ anstelle von $a(p)$. Gilt dann

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} |Du| \leqq L$$

mit einer Konstanten $L < \infty$, die nur von Φ, f und Ω abhängt, nicht aber von den Elliptizitätskonstanten, dann ist u auch Lösung des ursprünglichen Problems für $a(p)$, wenn man nur $M > L$ gewählt hatte (STAMPACCHIA [17]).

Wir betrachten die Aufgabe

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} a_i(u_x)\, \varphi_{x_i}\, dx = 0 \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{3.1}$$

$$u = \Phi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega, \quad \Phi \in H_p^2(\Omega) \qquad (p > 2).$$

Wobei jetzt $a(p)$ lediglich ein lokales stark monotones C^1-Vektorfeld ist.

Definition (s. z. B. bei Gilbarg und Trudinger [6, S. 225]): Es sei $\Gamma = (\partial\Omega, \Phi)$. Wir sagen, Γ erfüllt die *bounded slope-Bedingung,* wenn für jeden Punkt $P \in \Gamma$ zwei Ebenen $\pi_P^-(x)$, $\pi_P^+(x)$ existieren, die folgenden Bedingungen genügen:

a) $\pi_P^-(P) = \Phi(P) = \pi_P^+(P)$.

b) $\pi_P^-(x) \leqq \Phi(x) \leqq \pi_P^+(x)$ für alle $x \in \partial\Omega$.

c) $|D\pi_P^\pm| \leqq L$ für alle $P \in \Gamma$ mit einer von P unabhängigen Konstanten $L < \infty$.

Theorem 3.1: *Es seien folgende Voraussetzungen erfüllt:*

1. *Für die Innenwinkel γ_l in den Ecken von Ω gelte $0 < \gamma_l < \pi$.*
2. *Für Γ sei die „bounded slope"-Bedingung erfüllt.*
3. *In den Ecken $x^{(l)}$ sei $|D^2\Phi| \leqq c\,|x - x^{(l)}|^{\varkappa-1}$ $(\varkappa > 0)$.*

Dann besitzt die Aufgabe (3.1) *eine eindeutig bestimmte Lösung*

$$u \in C^{1,\lambda}(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega), \qquad 0 < \lambda < 1.$$

Beweis: Anstelle des Vektorfeldes $a(p)$ betrachten wir $\bar{a}(p)$ mit $M > L$, man vergleiche Lemma 3.1. Nach Theorem 2.4 und Theorem 2.5 gilt $u \in H^2(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$ für die Lösung u von (3.1) mit $\bar{a}(p)$ anstelle von $a(p)$. Aus der „bounded slope"-Bedingung folgt dann bekanntlich aus Lemma 2.1 die Ungleichung

$$\max_{x \in \partial\Omega} |Du| \leqq L.$$

In (3.1) setzen wir $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ für φ ein $\big(\varphi \in C_0^\infty(\Omega)\big)$ und erhalten nach partieller Integration

$$\int_\Omega \bar{a}_{ij}(u_x) \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)_{x_j} \varphi_{x_i}\, dx = 0.$$

Wegen $u \in H^2(\Omega)$ gilt (s. z. B. bei Gilbarg und Trudinger [6, S. 168])

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right| \leqq \max_{x \in \partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|.$$

Der Satz ist bewiesen, da $M > L$ zutrifft ∎

3.1. Das nichtparametrische Minimalflächenproblem in Gebieten mit Ecken

Wir betrachten die Aufgabe

$$\min_{v \in V} \int_\Omega \sqrt{1 + |v_x|^2}\, dx \tag{3.2}$$

mit $V = \{v \in C^1(\bar{\Omega}) \mid v = \Phi$ auf $\partial\Omega\}$. Es sei wieder $\Phi \in H_p^2(\Omega)$, $p > 2$. Falls u die

Aufgabe (3.2) löst, dann gilt

$$\int_\Omega \frac{u_{x_i}}{\sqrt{1+|u_x|^2}} \varphi_{x_i}\,dx = 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \tag{3.3}$$
$$u = \Phi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Das Vektorfeld

$$a(p) = \left(\frac{p_1}{\sqrt{1+|p|^2}},\quad \frac{p_2}{\sqrt{1+|p|^2}}\right)$$

ist lokal stark monoton.

Mit ω_l bezeichnen wir den Winkel in der Ecke *der Minimalfläche*, wenn $x^{(l)}$ die zugehörige Ecke in Ω ist mit dem Innenwinkel γ_l. Es sei

$$\Omega_\varrho^l = \Omega \cap B_\varrho(x^{(l)}), \qquad \varrho > 0.$$

Theorem 3.2: a) *Unter den Voraussetzungen* 1.—3. *von Theorem* 3.1 *besitzt die Aufgabe* (3.3) *eine eindeutig bestimmte Lösung* $u \in C^{1,\alpha}(\bar\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

b) *Diese Lösung ist auch Lösung von* (3.2).

c) *Aus* $\Phi \in C^{m+2,\alpha}(\bar\Omega_{\varrho_1}^l)$, $\varrho_1 > 0$ *genügend klein, und aus*

$$\pi/\omega_l > 2 + m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

folgt $u \in C^{m+2,\alpha}(\bar\Omega_\varrho^l)$ $(0 < \varrho < \varrho_1)$.

Beweis: Die Behauptung a) ist das Theorem 3.1. Nach STAMPACCHIA [17] löst u auch (3.2). Schließlich folgt c) aus Theorem 2.3 und der Bemerkung im Anschluß an den Beweis zu Theorem 2.4. Im Falle des Minimalflächenproblems ist nämlich

$$a_{ij}(0) \equiv a_{ij}\big(\Phi_x(0)\big) = \frac{1}{(1+|l|^2)^{1/2}}\left(\delta_{ij} - \frac{l_i l_j}{1+|l|^2}\right)$$

mit $l = \Phi_x(0)$. Der Winkel ω_l, der aus γ_l entsteht bei derjenigen Transformation, die $a_{ij}(0)\, u_{x_ix_j} = 0$ in die Laplacegleichung überführt, ist gerade der Winkel in der Ecke der Minimalfläche ∎

Bemerkung: Für das Minimalflächenproblem mit einem Hindernis (KINDERLEHRER und STAMPACCHIA [8, S. 116ff.]) folgt aus Theorem 2.1 und 2.2, daß die Lösung der entsprechenden Variationsungleichung zur Klasse $C^{1,\lambda}(\bar\Omega) \cap H^2(\Omega)$ gehört, wenn das Gebiet konvex ist und für die Innenwinkel $0 < \gamma_i < \pi$ gilt. Hier ist Ω ein zweidimensionales Gebiet mit stückweise glattem Rand.

LITERATUR

[1] ADAMS, R. A.: Sobolev Spaces. New York 1975.

[2] AZZAM, A.: Behaviour of solutions of Dirichlet problem for elliptic equations at a corner. Indian J. Pure Appl. Math. **10** (1979), 1453—1459.

[3] AZZAM, A.: On Dirichlet's problem for elliptic equations in sectionally smooth n-dimensional domains. SIAM J. Math. Anal. **11** (1980), 248—253.

[4] AZZAM, A., und E. KREYSZIG: Über das gemischte Randwertproblem für elliptische Gleichungen in n-dimensionalen Gebieten mit Kanten. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. **5** (1980), 341—346.

[5] Филлипов, А. Ф.: Гладкость обобщенных решений вблизи вершины многогранного угла. Дифференц. уравнения **9** (1973), 1889—1903.

[6] Gilbarg, D., and N. S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Berlin 1977.
[7] Hartman, P., and G. Stampacchia: On some nonlinear elliptic differential functional equations. Acta Math. **115** (1966), 153–188.
[8] Kinderlehrer, D., and G. Stampacchia: An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. New York 1980.
[9] Кондратьев, В. А.: Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. Труды Моск. матем. о-ва **16** (1967), 208–292.
[10] Кондратьев, В. А.: Краевые задачи для параболических уравнений в замкнутых областях. Труды Моск. матем. о-ва **15** (1966), 400–451.
[11] Кондратьев, В. А.: О гладкости решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в кусочно-гладкой области. Дифференц. уравнения **6** (1970), 1831–1843.
[12] Кондратьев, В. А.: Особенности решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра. Дифференц. уравнения **13** (1977), 2026–2032.
[13] Ладыженская, О. А., и Н. Н. Уральцева: Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Москва 1973.
[14] Lewy, H., and G. Stampacchia: On the regularity of the solution of a variational inequality. Comm. Pure Appl. Math. **22** (1969), 153–188.
[15] Lewy, H., and G. Stampacchia: On existence and smoothness of solutions of some noncoercive variational inequalities. Arch. Rational Mech. Anal. **41** (1971), 241–253.
[16] Morrey, C. B., Jr.: Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Berlin 1966.
[17] Stampacchia, G.: On some regular mutliple integral problems in the calculus of variations. Comm. Pure Appl. Math. **16** (1963), 383–421.

Manuskripteingang: 1. 09. 1981

VERFASSER:

Doz. Dr. Erich Miersemann
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz 10