Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 1 (5) (1982), S. 1–15

Die Methode der Grenzschichtverbesserung für eine Klasse entarteter gewöhnlicher Differentialgleichungen

S. Meyer

In der Arbeit wird die Methode von Višik und Ljusternik zur asymptotischen Lösung von Randwertaufgaben mit kleinem Parameter bei den höchsten Ableitungen der Differentialgleichung auf eine Klasse von Randwertaufgaben für nichtselbstadjungierte gewöhnliche Differentialgleichungen der Ordnung $2m$ verallgemeinert, bei denen die Koeffizienten Nullstellen ganzzahliger Ordnung in einem Randpunkt besitzen. Dabei hat ein Teil der entstehenden Grenzschichtgleichungen Singularitäten. Im Kapitel 3 der Arbeit wird der Index der Differentialoperatoren dieser Grenzschichtgleichungen in einem gewissen Raumpaar auf der positiven Halbachse berechnet. Im Kapitel 4 wird das erste Näherungsglied eines asymptotischen Lösung für kleine Parameterwerte konstruiert.

В работе обобщается метод Вишика и Люстерника для асимптотического решения краевых задач с малым параметром у старших производных дифференциального уравнения на один класс краевых задач для несамосопряжённых обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2m$, у которых коэффициенты имеют нули целого порядка в одной краевой точки. При этом часть возникающих уравнений пограничного слоя имеет сингулярности. Во главе 3 работы вычисляется индекс дифференциальных операторов этих уравнений пограничного слоя в некоторой паре пространств на положительной полуоси. В четвёртой главе сконструируется первый член асимптотического решения для малых значений параметра.

In this paper we generalize Višik's and Ljusternik's method for asymptotic solution of boundary value problems with a small parameter in the highest derivatives of the differential equation for a class of boundary value problems for non-self-adjoint ordinary differential equations of the order $2m$, in which the coefficients have a zero of integer order in a boundary point. A part of the arising boundary layer equations having singularities. In Chapter 3 of this paper we calculate the index of the differential operators of this boundary layer equations in a certain pair of spaces of the positive half-axis. In Chapter 4 we construct the first term of an asymptotic solution for small parameter values.

1. Einleitung

Von Višik und Ljusternik wurde in [1] die Methode der Grenzschichtverbesserung zur asymptotischen Lösung von Randwertaufgaben (RWA) für lineare Differentialgleichungen (DGL) mit einem kleinen Parameter bei den höchsten Ableitungen entwickelt. Dabei wird die Ausgangsaufgabe in mehrere einfachere RWA aufgespalten. Aus den Lösungen dieser RWA läßt sich für kleine Parameterwerte eine Näherungslösung des Ausgangsproblems gewinnen. Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist eine Modifizierung dieser Methode für eine Klasse von Differentialgleichungen, bei denen die Koeffizienten des Hauptteils auf einem Teil des Randes Nullstellen besitzen, und zwar betrachten wir im reellen Hilbertraum $L^2(0, T)$ die Gleichung

$$A^\varepsilon u = \varepsilon^\beta A_{2m} u + A_{2m-(l+1)} u = f, \tag{1.1}$$

wobei die Operatoren A_{2m} und $A_{2m-(l+1)}$ die Gestalt

$$A_{2m} = (-1)^m \left[\left(x \frac{d}{dx}\right)^l + a_{2m-1}(x) \left(x \frac{d}{dx}\right)^{l-1} + \cdots + a_{2m-l}(x)\right] \frac{d^{2m-1}}{dx^{m2-1}} \quad (1.2)$$

und

$$A_{2m-(l+1)} = \sum_{i=l+1}^{2m} a_{2m-i}(x) \frac{d^{2m-i}}{dx^{2m-i}} \quad (1.3)$$

besitzen, m eine natürliche Zahl und l, die Ordnung der Nullstelle, eine ungerade Zahl ist, die der Ungleichung $1 \leqq l \leqq m$ genügt. Wir setzen $k_1 = m - \frac{l+1}{2}$. Die Koeffizienten $a_k(x)$ $(k = 0, \ldots, 2m - 1)$ seien reellwertig und hinreichend glatt auf $[0, T]$, $T > 0$. Zusätzlich gelte noch für alle $x \in [0, T]$ $(-1)^{k_1} a_{2m-(l+1)}(x) > 0$. Für den Parameter ε möge $0 < \varepsilon \ll 1$ und $\beta > 0$ gelten.

Bemerkung 1.1: Der Übersichtlichkeit der Ausführungen wegen wird in dieser Arbeit nur das erste Näherungsglied einer asymptotischen Lösung konstruiert und der Fall ungerader l betrachtet. Approximationen höherer Ordnung für die Lösung und der Fall gerader l sind in [2] untersucht worden. Der Spezialfall $m = l = 1$ wurde in [3] dargelegt.

Dem Operator A^ε ordnen wir das charakteristische Polynom

$$\lambda^l + a_{2m-1}(0) \lambda^{l-1} + \cdots + a_{2m-l}(0) = 0 \quad (1.4)$$

mit den Wurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ zu. Im weiteren gelte stets

$$\operatorname{Re} \lambda_j \neq -1/2, \qquad j = 1, \ldots, l. \quad (1.5)$$

Mit l_1 bezeichnen wir die Anzahl der Wurzeln λ_j, die der Bedingung $\operatorname{Re} \lambda_j > -1/2$ genügen und setzen

$$\tilde{m} = m - (l - l_1). \quad (1.6)$$

Den Operator A^ε definieren wir auf der linearen Menge

$$\begin{aligned} D(A^\varepsilon)_0 = \Big\{ & u \in W_2^{2m-l}(0, T) \colon \left(x \frac{d}{dx}\right)^i \frac{d^{2m-l}u}{dx^{2m-l}} \in L^2(0, T) \\ & (i = 1, \ldots, l), \quad u^{(k)}(T) = 0 \ (k = 0, \ldots, m - 1), \\ & u^{(k)}(0) = 0 \ (k = 0, \ldots, \tilde{m} - 1)\Big\}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Bemerkung 1.2: Die lineare Menge

$$D(A^\varepsilon) = \left\{u \in W_2^{2m-l}(0, T) \colon \left(x \frac{d}{dx}\right)^i \frac{d^{2-ml}u}{dx^{2m-l}} \in L^2(0, T), \quad (i = 1, \ldots, l)\right\}$$

ist mit der kanonischen Norm

$$\|u\|_{D(A^\varepsilon)} = \|u\|_{W_2^{2m-l}(0,T)} + \varepsilon^\beta \sum_{i=1}^{l} \left\|\left(x \frac{d}{dx}\right)^i \frac{d^{2m-l}u}{dx^{2m-l}}\right\|_{L^2(0,T)}$$

ein Banachraum. Dabei ist $D(A^\varepsilon)_0$ ein abgeschlossener Teilraum von $D(A^\varepsilon)$ und $A^\varepsilon \colon D(A^\varepsilon) \to L^2(0, T)$ wegen der Glattheit der Koeffizienten linear und stetig.

Die Gleichung (1.1), betrachtet auf $D(A^\varepsilon)_0$, ist ein Spezialfall der in [4] untersuchten RWA. In [4] wurde bewiesen, daß A^ε unter der Voraussetzung (1.5) sowie bei schwachen Glattheitsforderungen an die Koeffizienten ein Fredholmoperator im Raumpaar $(D(A^\varepsilon)_0, L^2(0, T))$ ist.

Bemerkung 1.3: Ist $l_1 = l$ und somit $\tilde{m} = m$, so geben wir wie im nichtentarteten Fall im Punkt $x = 0$ m Randbedingungen (Rb) vor. Ist $\tilde{m} - 1 < 0$, so werden im Punkt $x = 0$ keine Rb gestellt.

Bemerkung 1.4: Unter Benutzung der Beziehung

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^k = \sum_{r=1}^{k} b_r^k x^r \frac{d^r}{dx^r} \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, l \tag{1.8}$$

und durch mehrfache Anwendung der Leibniz'schen Formel läßt sich die Gleichung (1.1) für $u \in D(A^\varepsilon)$ in der Gestalt

$$\begin{aligned} A^\varepsilon u = \varepsilon^\beta\Big[&(-1)^m \left(x^l u^{(m)}\right)^{(m)} + \left(x^{l-1} b_{2m-1}(x)\, u^{(m)}\right)^{(m-1)} \\ &+ \left(x^{l-2} \cdot b_{2m-2}(x)\, u^{(m-1)}\right)^{(m-1)} + \cdots + \left(x b_{2m-(l-1)}(x)\, u^{(k_1+1)}\right)^{(k_1+1)} \\ &+ \left(b_{2m-l}(x)\, u^{(k_1+1)}\right)^{(k_1)}\Big] + \left(\left(\varepsilon^\beta b_{2m-(l+1)}(x) + a_{2m-(l+1)}(x)\right) u^{(k_1)}\right)^{(k_1)} \\ &+ \left(\left(\varepsilon^\beta b_{2m-(l+2)}(x) + c_{2m-(l+2)}(x)\right) u^{(k_1)}\right)^{(k_1-1)} \\ &+ \left(\left(\varepsilon^\beta b_2(x) + c_2(x)\right) u'\right)' + \left(\varepsilon^\beta b_1(x) + c_1(x)\right) u' + a_0(x)\, u = f(x) \end{aligned}$$

schreiben. Dabei gehen in die neuen Koeffizienten $b_{2m-r}(x)$ $(r = 1, \ldots, 2m - 1)$ und $c_{2m-r}(x)$ $(r = l + 2, \ldots, 2m - 1)$ die Koeffizienten $a_i(x)$ und ihre Ableitungen ein. Wenn die Koeffizienten von (1.9) für alle hinreichend kleinen ε den Abschätzungen

$$\begin{aligned} &(-1)^{m-k}\, \varepsilon^\beta\left[x^{l-2k} b_{2m-2k}(x) - 1/2\left(x^{l-(2k-1)} b_{2m-(2k-1)}(x)\right)'\right] \geqq 0 \\ &\text{für } k = 1, \ldots, \frac{l+1}{2} - 1, \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$(-1)^{k_1}\left[\varepsilon^\beta b_{2m-(l+1)}(x) + a_{2m-(l+1)}(x) - 1/2\varepsilon^\beta\left(b_{2m-l}(x)\right)'\right] \geqq 0, \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} &(-1)^{m-k}\left[\varepsilon^\beta b_{2m-2k}(x) + c_{2m-2k}(x) - 1/2\left(\varepsilon^\beta b_{2m-(2k-1)}(x) + c_{2m-(2k-1)}(x)\right)'\right] \geqq 0 \\ &\text{für} \quad k = \frac{l+1}{2} + 1, \ldots, m - 1, \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$a_0(x) - 1/2\left(\varepsilon^\beta b_1(x) + c_1(x)\right)' \geqq 0 \tag{1.13}$$

und

$$(-1)^{k_1+1}\, b_{2m-l}(0) \geqq 0 \tag{1.14}$$

genügen, wobei in wenigstens einer der Beziehungen (1.11)—(1.13) die strenge Ungleichung erfüllt sei, so zeigt man mittels partieller Integration und Verwendung der Friedrichsschen Ungleichung für $\frac{l-1}{2} \leqq l_1 \leqq l$ die Gültigkeit der Abschätzung

$$(A^\varepsilon u, u) \geqq a^2\, \|u\|^2_{L^2(0,T)} \qquad \left(u \in D(A^\varepsilon)_0\right) \tag{1.15}$$

mit positivem, von ε unabhängigem a^2 (vgl. [2]). Aus (1.15) folgt die eindeutige Lösbarkeit der homogenen Gleichung zu (1.1) in $D(A^\varepsilon)_0$. Nach der Fredholmschen Alternative ist dann die inhomogene Gleichung für jede rechte Seite $f \in L^2(0, T)$ eindeutig lösbar in $D(A^\varepsilon)_0$.

Analog lassen sich Eindeutigkeitsaussagen für die Gleichung $A_{2m-(l+1)} w = f$, wobei der Operator $A_{2m-(l+1)}$ durch (1.3) definiert ist, gewinnen (vgl. [2]). Dazu schreiben wir diese Gleichung in der Gestalt:

$$A_{2m-(l+1)}w = \left(a_{2m-(l+1)}(x)\, w^{(k_1)}\right)^{(k_1)} + \left(c_{2m-(l+2)}(x)\, w^{(k_1)}\right)^{(k_1-1)} + \cdots + c_1(x)\, w' + a_0(x) w$$
$$= f(x). \tag{1.16}$$

Wenn die Koeffizienten die Bedingungen

$$(-1)^{k_1} a_{2m-(l+1)}(x) > 0, \tag{1.17}$$

$$(-1)^{m-k}\left[c_{2m-2k}(x) - 1/2\left(c_{2m-(2k-1)}(x)\right)'\right] \geqq 0 \qquad \left(k = \frac{l+1}{2} + 1, \ldots, m-1\right) \tag{1.18}$$

und

$$a_0(x) - 1/2\left(c_1(x)\right)' \geqq 0 \tag{1.19}$$

erfüllen, so gilt für Funktionen $w \in D(A^\varepsilon)$, welche Rb der Gestalt $w^{(k)}(0) = w^{(k)}(T) = 0$ für $k = 0, \ldots, k_1 - 1$ genügen, eine Abschätzung der Form

$$(A_{2m-(l+1)}w, w) \geqq b^2 \|w\|^2_{L^2(0,T)} \quad \text{mit} \quad b^2 > 0.$$

Daraus folgt leicht die eindeutige Lösbarkeit der RWA

$$A_{2m-(l+1)}w = f, \quad w^{(k)}(0) = w^{(k)}(T) = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, \ldots, k_1 - 1$$

im Paar von Sobolevräumen $\left(W_2^{2m}(0, T), W_2^{l+1}(0, T)\right)$.

Die Konstruktion einer Näherungslösung fordert einige Vorbetrachtungen.

2. Darstellung des Operators A^ε in der Nähe der Randpunkte

Wir betrachten die Taylorentwicklung des Koeffizienten $a_k(x)$ in einer Umgebung des Punktes $x = 0$:

$$a_k(x) = a_{k00} + \sum_{j=1}^{P} a_{k0j} x^j + a_{k0(P+1)}(\theta x)\, x^{P+1}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Die drei Indizes in den Koeffizienten a_{k0j} haben folgende Bedeutung: k zeigt an, daß es sich um die Taylorentwicklung des Koeffizienten $a_k(x)$ handelt, 0 weist darauf hin, daß die Funktion in einer Umgebung U_0 des Nullpunktes entwickelt wird, und j bedeutet, daß a_{k0j} der Koeffizient bei der j-ten Potenz in der Taylorentwicklung ist.

Hilfssatz 2.1: *Wenn in einer Umgebung U_0 des Punktes $x = 0$ für eine natürliche Zahl P gilt:*

$$a_{2m-i}(x) \in C^{P+1}(U_0) \qquad (l = 1, \ldots, l)$$
$$a_{2m-i}(x) \in C^{P+1-(i-(l+1))}(U_0) \qquad \left(i = l+1, \ldots, 2m;\ P + 1 > i - (l+1)\right),$$

so gestattet die homogene Gleichung $A^\varepsilon v = 0$ (vgl. Formel (1.1)) in U_0 die Darstellung

$$\varepsilon^{(2m-(l+1))\gamma_0} A^\varepsilon v = \sum_{k=0}^{P} \varepsilon^{k\gamma_0} M_{0k} v + \varepsilon^{(P+1)\gamma_0} R_{0(P+1)} v = 0 \tag{2.1}$$

mit

$$M_{00}v = (-1)^m \left[\left(s \frac{d}{ds}\right)^l + a_{(2m-1)00}\left(s \frac{d}{ds}\right)^{l-1} + \cdots + a_{(2m-l)00}\right]$$
$$\times \frac{d^{2m-l}v}{ds^{2m-l}} + a_{(2m-(l+1))00} \frac{d^{2m-(l+1)}v}{ds^{2m-(l+1)}}, \tag{2.2}$$

$$M_{0r}v = (-1)^m \left[a_{(2m-1)0r}s^r \left(s\frac{d}{ds}\right)^{l-1} + \cdots + a_{(2m-l)0r}s^r\right] \frac{d^{2m-l}v}{ds^{2m-l}}$$

$$+ \sum_{i=l+1}^{2m} a_{(2m-i)0(r-(i-(l+1)))}s^{r-(i-(l+1))} \frac{d^{2m-i}v}{ds^{2m-i}} \quad (r = 1, \ldots, P) \tag{2.3}$$

und

$$R_{0(P+1)}v = (-1)^m \left[a_{(2m-1)0(P+1)}(\theta\varepsilon^{\gamma_0}s)\, s^{P+1} \left(s\frac{d}{ds}\right)^{l-1}\right.$$

$$\left. + \cdots + a_{(2m-l)0(P+1)}(\theta\varepsilon^{\gamma_0}s)\, s^{P+1}\right] \frac{d^{2m-l}v}{ds^{2m-l}}$$

$$+ \sum_{i=l+1}^{2m} a_{(2m-i)0(P+1-(i-(l+1)))}(\theta\varepsilon^{\gamma_0}s)\, s^{P+1-(i-(l+1))} \frac{d^{2m-i}v}{ds^{2m-i}}. \tag{2.4}$$

Dabei sind

$$a_{(2m-i)0r} \quad (i = 1, \ldots, l;\ r = 0, \ldots, P)$$

und

$$a_{(2m-i)0(r-(i-(l+1)))} \quad (i = l+1, \ldots, 2m;\ r = 0, \ldots, P)$$

Konstanten, wobei $a_{(2m-i)0(r-(i-(l+1)))} = 0$ *ist für* $r < i - (l+1)$, $s = \varepsilon^{-\gamma_0}x$ *und* $\gamma_0 = \beta$.

Beweis: Wir entwickeln die Koeffizienten $a_{2m-i}(x)$ für $i = 1, \ldots, l$ ($a_{2m-i}(x)$ für $i = l+1, \ldots, 2m$) in $x = 0$ nach Taylor mit dem Restglied der Ordnung $P + 1$ $(P + 1 - (i - (l + 1))$, wenn $P + 1 > i - (l + 1)$ ist), multipliziert die Gleichung $A^\varepsilon v = 0$ mit $\varepsilon^{(2m-(l+1))\gamma_0}$, setzt anstelle der Koeffizienten ihre Taylorentwicklungen in die Gleichung ein, substituiert $x = \varepsilon^{\gamma_0}s$ und setzt $\gamma_0 = \beta$. Ordnen nach gleichen ε-Potenzen liefert nun die Beziehungen (2.1)—(2.4) ∎

Hilfssatz 2.2: *Wenn in einer Umgebung* U_T *des Punktes* $x = T$ *für eine natürliche Zahl* P *gilt:*

$$a_{2m-i}(x) \in C^{P+1-i}(U_T) \qquad (i = 1, \ldots, l;\ P + 1 > i),$$
$$a_{2m-i}(x) \in C^{P+1-(i-(l+1))}(U_T) \qquad (i = l+1, \ldots, 2m;\ P + 1 > i - (l+1)),$$

so gestattet die homogene Gleichung $A^\varepsilon v = 0$ *(vgl. Formel (1.1)) in* U_T *die Darstellung*

$$\varepsilon^{(2m-(l+1))\gamma_T}A^\varepsilon v = \sum_{k=0}^{P} \varepsilon^{k\gamma_T}M_{Tk}v + \varepsilon^{(P+1)\gamma_T}R_{T(P+1)}v = 0 \tag{2.5}$$

mit

$$M_{T0}v = (-1)^{3m}T^l \frac{d^{2m}v}{dt^{2m}} + (-1)^{2m-(l+1)}\, a_{(2m-(l+1))T0} \frac{d^{2m-(l+1)}v}{dt^{2m-(l+1)}}, \tag{2.6}$$

$$M_{Tr}v = (-1)^{3m+r}\, C_l^r T^{l-r} t^r \frac{d^{2m}v}{dt^{2m}} + \sum_{i=1}^{l} (-1)^{(3m-i)} A_{(2m-i)T(r-i)}t^{r-i} \frac{d^{2m-i}v}{dt^{2m-i}}$$

$$+ \sum_{i=l+1}^{2m} (-1)^{2m-i}\, a_{(2m-i)T(r-(i-(l+1)))}t^{r-(i-(l+1))} \frac{d^{2m-i}v}{dt^{2m-i}} \quad (r = 1, \ldots, P) \tag{2.7}$$

und

$$R_{T(P+1)}v = \sum_{i=1}^{l} (-1)^{3m-i}\, A_{(2m-i)T(P+1-i)}\big(\theta(T - \varepsilon^{\gamma_T}t)\big)\, t^{P+1-i} \frac{d^{2m-i}v}{dt^{2m-i}}$$

$$+ \sum_{i=l+1}^{2m} (-1)^{2m-i}\, a_{(2m-i)T(P+1-(i-(l+1)))}\big(\theta(T - \varepsilon^{\gamma_T}t)\big)\, t^{P+1-(i-(l+1))} \frac{d^{2m-i}v}{dt^{2m-i}}. \tag{2.8}$$

Dabei sind C_l^r die Binomialkoeffizienten,

$$A_{(2m-i,T(r-i)}\quad \textit{für}\quad i = 1, \ldots, l;\quad r = 0, \ldots, P$$

und

$$a_{(2m-i)T(r-(i-(l+1)))}\quad \textit{für}\quad i = l+1, \ldots, 2m;\quad r = 0, \ldots, P$$

Konstanten, wobei $A_{(2m-i)T(r-i)} = 0$ ist im Falle $r < i$ und $a_{(2m-i)T(r-(i-(l+1)))} = 0$ ist im Falle $r < i - (l+1)$. Ferner gilt $t = \varepsilon^{-\gamma_T}(T - x)$ mit $\gamma_T = \beta(l+1)^{-1}$.

Beweis: Benutzt man die Beziehung (1.8) und faßt Ableitungen gleicher Ordnung zusammen, so läßt sich die Gleichung $A^\varepsilon v = 0$ in der Form

$$A^\varepsilon v = (-1)^m \varepsilon^\beta \left[x^l \frac{d^{2m}v}{dx^{2m}} + \sum_{i=1}^{l} A_{2m-i}(x)\, x^{l-i} \frac{d^{2m-i}v}{dx^{2m-i}}\right] + \sum_{i=l+1}^{2m} a_{2m-i}(x) \frac{d^{2m-i}v}{dx^{2m+i}} = 0$$

schreiben, wobei die Koeffizienten $A_{2m-i}(x)$ für $i = 1, \ldots, l-1$ durch die Ausdrücke $A_{2m-i}(x) = \sum_{j=0}^{i} b_{l-i}^{l-j} a_{2m-j}(x)$ (b_{l-i}^{l-j} sind Konstanten) und $A_{2m-l}(x) = a_{2m-l}(x)$ gegeben sind. Entwickelt man $x^l = \left(T - (T - x)\right)^l$, $A_{2m-i}(x)\, x^{l-i}$ für $i = 1, \ldots, l$ ($a_{2m-i}(x)$ für $i = l+1, \ldots, 2m$) in $x = T$ nach Taylor mit dem Restglied der Ordnung $P + 1 - i$ für $i = 1, \ldots, l$ ($P + 1 - \left(i - (l+1)\right)$ für $i = l+1, \ldots, 2m$) und wiederholt die Überlegungen des Beweises von Hilfssatz 2.1, wobei jetzt $\gamma_T = \beta(l+1)^{-1}$ gesetzt wird, so erhält man (2.5)—(2.8) ∎

Bemerkung 2.1: Gilt für einen gewissen Index $i = 1, \ldots, l$ $P + 1 \leq i$ (für einen gewissen Index $i = l+2, \ldots, 2m$ $P + 1 \leq i - (l+1)$), so geht der Koeffizient für dieses i in den Ausdruck (2.4) oder (2.8) ein, ohne daß er in die Taylorreihe entwickelt werden muß.

3. Untersuchung gewisser RWA auf der positiven Halbachse $\mathbf{R}_+^1$

Wir betrachten auf $\mathbf{R}_+^1$ Gleichungen der Gestalt (2.2):

$$M_{00}v(s) = (-1)^m \left[\left(s\frac{d}{ds}\right)^l + a_{2m-1}\left(s\frac{d}{ds}\right)^{l-1} + \cdots + a_{2m-l}\right] \frac{d^{2m-l}v}{ds^{2m-l}} + a_{2m-(l+1)} \frac{d^{2m-(l+1)}v(s)}{ds^{2m-(l+1)}} = g(s), \tag{3.1}$$

wobei zur Abkürzung der Schreibweise $a_{(2m-r)00} = a_{2m-r}$ ($r = 1, \ldots, l+1$) gesetzt wurde. Mittels elementarer Umformungen erhält man aus (3.1)

$$M_{00}v(s) = \frac{d^{2m-(l+1)}}{ds^{2m-(l+1)}} N_{00}v(s) = g(s) \tag{3.2}$$

mit

$$N_{00}v(s) = (-1)^m \left[s^l \frac{d^{l+1}v(s)}{ds^{l+1}} + B_{2m-1}s^{l-1} \frac{d^l v(s)}{ds} + \cdots + B_{2m-l} \frac{dv(s)}{ds}\right] + a_{2m-(l+1)}v(s) = h(s). \tag{3.3}$$

Dabei sind B_{2m-k} ($k = 1, \ldots, l$) wiederum konstante Koeffizienten. Auf der Halbachse $\mathbf{R}_+^1$ wird ein Raumpaar konstruiert, in welchem M_{00} ein Noetherscher Operator ist, und der Index dieses Operators berechnet. Die positive Halbachse stellen wir in der Form $\mathbf{R}_+^1 = [0, T] \cup (T, \infty)$ dar. Es erweist sich als zweckmäßig, auf $[0, T]$ die Darstellung (3.1) und auf (T, ∞) die Darstellung (3.2) des Operators M_{00} zu verwenden.

Definition 3.1: Es sei

$$R(D^k) = \left\{g \in L^2(\mathrm{R}_+^1) : g = D^k h = \frac{d^k h}{ds^k} \text{ für wenigstens ein } h \in W_2{}^k(\mathrm{R}_+^1)\right\}. \tag{3.4}$$

Im Bildraum $R(D^k)$ führen wir eine neue Norm durch die Beziehung

$$|||g|||_{R(D^k)} = \|h\|_{W_2{}^k(R_+^1)} = \|D^{-k} g\|_{W_2{}^k(R_+^1)} \tag{3.5}$$

ein, wobei der Operator D^{-k} durch den Ausdruck

$$D^{-k} g(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{(k-1)!} \displaystyle\int_0^s (s - s_1)^{k-1} g(s_1)\, ds_1 & \text{für } 0 \leqq s \leqq T, \\ \dfrac{-1}{(k-1)!} \displaystyle\int_s^\infty (s - s_1)^{k-1} g(s_1)\, ds_1 & \text{für } T < s < \infty \end{cases} \tag{3.6}$$

definiert ist. Das Definitionsgebiet von D^{-k} ist $R(D^k)$ und das Bild fällt mit $W_2{}^k(R_+^1)$ zusammen.

Der Operator $M_{00}(N_{00})$ sei auf der linearen Menge

$$D(M_{00})\,(0, T) = \{v \in W_2{}^{2m-l}(0, T) : (sD)^i\, D^{2m-l} v \in L^2(0, T),\ i = 1, \ldots, l\} \tag{3.7}$$

$$(D(N_{00})\,(T, \infty) = \{v \in W_2{}^{2m-(l+1)}(T, \infty) : s^{l-i} D^{l+1-i} v \in W_2{}^{2m-(l+1)}(T, \infty),\ i = 1, \ldots, l\} \tag{3.8}$$

definiert. Dann ist

$$\begin{aligned} D(M_{00})\,(T, \infty) &= D(D^{m2-(l+1)} N_{00})\,(T, \infty) \\ &= \{v \in W_2{}^{2m-(l+1)}(T, \infty) : \\ &\quad D^{2m-(l+1)}(s^{l-i} D^{l+1-i} v) \in R(D^{2m-(l+1)})\,(T, \infty)\}. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.1: Für $D(D^{2m-(l+1)}) = W_2{}^{2m-(l+1)}(0, T)$ ist $R(D^{2m-(l+1)})\,(0, T) = L^2(0, T)$. Zur Abkürzung der Schreibweise setzen wir $R(D^{2m-(l+1)})\,(T, \infty) = R(T, \infty)$.

Bemerkung 3.2: Aus [4] folgt: Genügen die Wurzeln von (1.4) der Bedingung (1.5), so ist $M_{00} : D(M_{00})\,(0, T) \to L^2(0, T)$ ein Noetherscher Operator mit dem Index

$$\varkappa(M_{00})_{/D(M_{00})(0,T) \to L^2(0,T)} = 2m - l + l_1, \tag{3.9}$$

wobei l_1 die Anzahl der Wurzeln λ_j des Polynoms (1.4) ist, die der Bedingung $\operatorname{Re} \lambda_j > -1/2$ genügen. In [4] wurde auch gezeigt, daß $M_{00} : D(M_{00})\,(0, T) \to L^2(0, T)$ gilt. Dann ist

$$\varkappa(M_{00})_{/D(M_{00})(0,T) \to L^2(0,T)} = \dim \ker M_{00/D(M_{00})(0,T)}.$$

Satz 3.1: *Sei* $(-1)^{k_1} a_{2m-(l+1)} > 0$. *Dann ist* M_{00} *im Raumpaar* $\big(D(M_{00})\,(T, \infty), R(T, \infty)\big)$ *ein Noetherscher Operator mit dem Index*

$$\varkappa(M_{00})_{/D(M_{00})(T,\infty) \to R(T,\infty)} = \frac{l+1}{2}. \tag{3.10}$$

Dabei gilt $M_{00} : D(M_{00})\,(T, \infty) \xrightarrow{\text{auf}} R(T, \infty)$ *und somit* $\varkappa(M_{00})_{/D(M_{00})(T,\infty) \to R(T,\infty)} = \dim \ker M_{00/D(M_{00})(T,\infty)}$.

Beweis: 1. Schritt: *Aufspaltung von N_{00} in Hauptteil und Operator mit kleiner Norm:* Die Gleichung (3.3) multiplizieren wir mit $\tau^{1/2}$, substituieren $\tau = (l+1)\, s^{\frac{1}{l+1}}$ und setzen $v_1(\tau) = v(s)\,\tau^{1/2}$, $h_1(\tau) = h(s)\,\tau^{1/2}$. Für die Ableitungen $\frac{d^k v(s)}{ds^k}$ $(k = 1, \ldots, l+1)$ gilt wegen $\frac{d\tau}{ds} = s^{-\frac{l}{l+1}} = (l+1)^l\,\tau^{-1}$:

$$\frac{d^k v(s)}{ds^k} = \sum_{r=0}^{k} q_{rk}\tau^{-1/2-lk-r}\,\frac{d^{k-r}v_1(\tau)}{d\tau^{k-r}} \qquad (k = 1, \ldots, l+1), \tag{3.11}$$

wobei $q_{0(l+1)} = (l+1)^{l(l+1)}$ ist. Die Substitution $\tau = (l+1)\, s^{\frac{1}{l+1}}$, nach der Variablen s aufgelöst, ergibt $s = \frac{1}{(l+1)^{l+1}}\,\tau^{l+1}$ und

$$s^k = \frac{1}{(l+1)^{k(l+1)}}\,\tau^{k(l+1)} \quad (k = 1, \ldots, l+1). \tag{3.12}$$

Wir setzen (3.11) und (3.12) für $k = 1, \ldots, l+1$ in die mit $\tau^{1/2}$ multiplizierte Gleichung (3.3) ein und erhalten nach elementaren Umformungen:

$$K_{00}v_1(\tau) = K_1v_1(\tau) + K_2v_1(\tau) = h_1(\tau), \tag{3.13}$$

wobei $K_1v_1 = (-1)^m\,\frac{d^{l+1}v_1}{d\tau^{l+1}} + a_{2m-(l+1)}v_1$ und

$$\begin{aligned} K_2v_1 = (-1)^m \Bigg[& \sum_{r=1}^{l+1} \tilde{q}_{r(l+1)}\,\tau^{-r}\,\frac{d^{l+1-r}v_1}{d\tau^{l+1-r}} \\ & + \sum_{r=0}^{l} \tilde{q}_{rl}\tau^{-1-r}\,\frac{dv_1{}^{l-r}v_1}{d\tau^{l-r}} + \sum_{r=0}^{l-1} \tilde{q}_{r(l-1)}\tau^{-2-r}\,\frac{d^{l-1-r}v_1}{d\tau^{l-1-r}} \\ & + \cdots + \sum_{r=0}^{2} \tilde{q}_{r2}\tau^{-(l-1)-r}\,\frac{d^{2-r}v_1}{d\tau^{2-r}} + \sum_{r=0}^{1} \tilde{q}_{r1}\tau^{-l-r}\,\frac{d^{1-r}v_1}{d\tau^{1-r}} \Bigg]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

ist. Die Koeffizienten $\tilde{q}_{rk}$ $(r = 0, \ldots, k;\ k = 1, \ldots, l+1)$ sind konstant. Sei $T_1 \geqq T$ eine hinreichend große Zahl, die im weiteren ausgewählt wird. Die Substitution $\tau = (l+1)\, s^{\frac{1}{l+1}}$ überführt das Intervall (T_1, ∞) in das Intervall (T_2, ∞) mit $T_2 = (l+1)\, T_1^{\frac{1}{l+1}}$.

2. Schritt: *Konstruktion einer stetigen Rechtsinversen für M_{00}:* Wir konstruieren zunächst für den Operator K_1 eine stetige Rechtsinverse, die $W_2^{2m-(l+1)}(T_2, \infty)$ in $W_2^{2m}(T_2, \infty)$ abbildet. Dazu führen wir die Fouriertransformierte und ihre Inverse durch die Beziehungen

$$F[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, e^{ix\xi}\, dx = \tilde{u}(\xi), \qquad F^{-1}[\tilde{u}] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\xi)\, e^{-ix\xi}\, d\xi = u(x)$$

ein. Wir setzen die Gleichung

$$K_1v_1(\tau) = h_2(\tau) \tag{3.15}$$

mit Null auf die gesamte Achse $\mathbf{R}^1$ fort, führen die Fouriertransformation in der fortgesetzten Gleichung durch und erhalten:

$$[(-1)^m (-i\xi)^{l+1} + a_{2m-(l+1)}] F[v_1] = F[h_2].$$

Man zeigt leicht, daß für $(-1)^{k_1} a_{2m-(l+1)} > 0$ und alle reellen $\xi \neq 0$ das Polynom $P(\xi) = (-1)^m (-i\xi)^{l+1} + a_{2m-(l+1)}$ nicht verschwindet und

$$(K_1^r)^{-1} = F^{-1}[F[Sh_2] [P(\xi)]^{-1}],$$

wobei S durch die Beziehung

$$Sh_2 = \begin{cases} h_2(\tau) & \text{für } \tau \geqq T_2 \\ 0 & \text{für } \tau < T_2 \end{cases}$$

definiert ist, eine stetige Rechtsinverse für K_1 darstellt. Führt man noch den Einschränkungsoperator E von $\mathbf{R}^1$ auf $T_2 \leqq \tau < \infty$ ein, so läßt sich unter Benutzung der Äquivalenz der Normen in den Räumen $H^s(\mathbf{R}^1)$ und $W_2^s(\mathbf{R}^1)$ für natürliches s und der Parsevalschen Gleichung die Ungleichung

$$\|E(K_1^r)^{-1} h_2\|_{W_2^{2m}(T_2,\infty)} \leqq c \|h_2\|_{W_2^{2m-(l+1)}(T_2,\infty)} \tag{3.16}$$

beweisen, d. h. $K_1\colon W_2^{2m}(T_2, \infty) \xrightarrow{\text{auf}} W_2^{2m-(l+1)}(T_2, \infty)$. Der Operator K_2 ist für hinreichend große T_2 im Raumpaar $\left(W_2^{2m}(T_2, \infty), W_2^{2m-(l+1)}(T_2, \infty)\right)$ ein stetiger Operator mit kleiner Norm, da alle Summanden in (3.14) Faktoren der Gestalt τ^{-k} $(k > 0)$ enthalten, d. h., es gilt:

$$\|K_2 v_1\|_{W_2^{2m-(l+1)}(T_2,\infty)} \leqq b(T_2^{-1}) \|v_1\|_{W_2^{2m}(T_2,\infty)},$$

wobei $b(T_2^{-1})$ für große T_2 eine hinreichend kleine Zahl ist. Wir wählen nun T_2 so groß, daß $c \|K_2\| < 1$ wird. Dabei bezeichnet c die Konstante aus Formel (3.16). Dann ist

$$(K_{00}^r)^{-1} = E(K_1^r)^{-1} (I + K_2 E(K_1^r)^{-1})^{-1}\colon W_2^{2m-(l+1)}(T_2, \infty) \to W_2^{2m}(T_2, \infty)$$

stetige Rechtsinverse des Operators K_{00}. Die Funktion $v_1(\tau) = (K_{00}^r)^{-1} h_1(\tau)$ ist partikuläre Lösung der Gleichung (3.13). Wegen (3.16) ist die Gleichung (3.15) korrekt auflösbar. Nach [5, § 16] ist dann auch (3.13) korrekt auflösbar und es gilt

$$\|v_1\|_{W_2^{2m}(T_2,\infty)} \leqq c_1 \|h_1\|_{W_2^{2m-(l+1)}(T_2,\infty)} \tag{3.17}$$

mit $c_1 = c(1 - c \|K_2\|)^{-1}$. Aus (3.17) folgt

$$\left\|\frac{d^k v_1}{d\tau^k}\right\|_{L^2(T_2,\infty)} \leqq c_1 \|h_1\|_{W_2^{2m-(l+1)}(T_2,\infty)} \qquad (k = 0, \ldots, 2m). \tag{3.18}$$

Gehen wir in der Ungleichung (3.18) für $k = 0, \ldots, 2m$ wieder zur Variablen s über, so erhält man
für $k = 0$:

$$\|v\|_{L^2(T_1,\infty)} \leqq c_1 \|h\|_{W_2^{2m-(l+1)}(T_1,\infty)}, \tag{3.19}$$

für $k = 1, \ldots, 2m$:

$$\left\|\frac{d^k v}{ds^k}\right\|_{L^2(T_1,\infty)} \leqq c_2 \|h\|_{W_2^{2m-(l+1)}(T_1,\infty)}$$

und somit

$$\|v\|_{W_2^{2m-(l+1)}(T_1,\infty)} \leqq c_3 \|h\|_{W_2^{2m-(l+1)}(T_1,\infty)}. \tag{3.20}$$

Verwendet man die Leibniz'sche Formel, geht zur Veränderlichen τ über und benutzt (3.17), so läßt sich für $i = 0, \ldots, l$, $k = 0, \ldots, 2m - (l + 1)$ die Abschätzung

$$\left\| \frac{d^k}{ds^k} \left(s^{l-i} \frac{d^{l+1-i} v}{ds^{l+1-i}} \right) \right\|_{L^2(T_1,\infty)} \leqq c_4 \|h_1\|_{W_2^{2m-(l+1)}(T_2,\infty)} \leqq c_5 \|h\|_{W_2^{2m-(l+1)}(T_1,\infty)} \tag{3.21}$$

beweisen. Aus (3.20) (3.21) und (3.5) folgt nun für v, betrachtet in der kanonischen Norm des Banachraumes $D(M_{00})\,(T_1, \infty)$:

$$|v|_{D(M_{00})(T_1,\infty)} = \|v\|_{W_2^{2m-(l+1)}(T_1,\infty)} + \sum_{i=1}^{l} \|s^{l-i} D^{l+1-i} v\|_{W_2^{2m-(l+1)}(T_1,\infty)}$$
$$\leqq c_6 \|h\|_{W_2^{2m-(l+1)}(T_1,\infty)} = c_6 \,|||g|||_{R(T_1,\infty)}. \tag{3.22}$$

Nach der in [6] S. 482 beschriebenen Methode kann die Lösung $v(s)$ auf das gesamte Intervall (T, ∞) fortgesetzt werden. Wegen (3.22) gilt:
$M_{00}\colon D(M_{00})\,(T, \infty) \xrightarrow{\text{auf}} R(T, \infty)$.

3. Schritt: *Berechnung von* $\dim \ker M_{00/D(M_{00})(T,\infty)}$:
Wir betrachten nun die homogene Gleichung zu (3.13). Das charakteristische Polynom zur Gleichung $K_1 v_1 = 0$ hat die Gestalt $(-1)^m \lambda^{l+1} + a_{2m-(l+1)} = 0$ und besitzt, wie man leicht nachprüft, unter unseren Voraussetzungen $\frac{l+1}{2}$ Wurzeln mit $Re\,\lambda < 0$. Die Lösungen der Gleichung $K_1 v_1 = 0$, die den Wurzeln mit $Re\,\lambda < 0$ entsprechen (und nur diese), gehören dem Raum $W_2^{2m}(T_2, \infty)$ an und fallen im Unendlichen zusammen mit ihren Ableitungen wie $\exp\,(\lambda\tau)$. Wegen (3.16) ist $K_1\colon W_2^{2m}(T_2, \infty) \xrightarrow{\text{auf}} W_2^{2m-(l+1)}(T_2, \infty)$ und somit

$$\varkappa(K_1)_{W_2^{2m}(T_2,\infty) \to W_2^{2m-(l+1)}(T_2,\infty)} = \dim \ker K_{1/W_2^{2m}(T_2,\infty)} = \frac{l+1}{2}. \tag{3.23}$$

Bekanntlich ändert sich der Index eines Noetherschen Operators bei kleinen stetigen Störungen nicht. Auf Grund von (3.17) gilt folglich
$K_{00}\colon W_2^{2m}(T_2, \infty) \xrightarrow{\text{auf}} W_2^{2m-(l+1)}(T_2, \infty)$ und

$$\dim \ker K_{1/W_2^{2m-(l+1)}(T_2,\infty)} = \dim \ker K_{00/W_2^{2m-(l+1)}(T_2,\infty)}. \tag{3.24}$$

Nach [5, Satz 15.1] ist N_{00} im Raumpaar $\big(D(M_{00})\,(T_1, \infty),\ W_2^{2m-1(l+1)}(T_1, \infty)\big)$ ebenfalls ein Noetherscher Operator, wobei der Index sich nicht ändert:

$$\varkappa(N_{00})_{/D(M_{00})(T_1,\infty) \to W_2^{2m-(l+1)}(T_1,\infty)} = \dim \ker N_{00/D(M_{00})(T_1,\infty)}$$
$$= \dim \ker K_{1/W_2^{2m-(l+1)}(T_2,\infty)}. \tag{3.25}$$

Die Funktionen aus $\dim \ker N_{00}$ können wie oben auf das gesamte Intervall (T, ∞) fortgesetzt werden. Wegen [5, Satz 15.1] ist auch M_{00} im Raumpaar $\big(D(M_{00})\,(T, \infty),\ R(T, \infty)\big)$ ein Noetherscher Operator. Da M_{00} $D(M_{00})\,(T, \infty)$ auf $R(T, \infty)$ abbildet und $\dim \ker D^{2m-(l+1)}{}_{/W_2^{2m-(l+1)}(T,\infty)} = 0$ ist, gilt wegen (3.23)—(3.25)

$$\varkappa(M_{00})_{/D(M_{00})(T,\infty) \to R(T,\infty)} = \dim \ker M_{00/D(M_{00})(T,\infty)} = \frac{l+1}{2}. \tag{3.26}$$

Weiterhin ist aus der Konstruktion ersichtlich, daß die Lösungen der Gleichung $M_{00} v = 0$, die dem Raum $D(M_{00})\,(T, \infty)$ angehören, sich für $s \to \infty$ wie $P(s)\exp \times (-c s^{1/l+1})$ verhalten, wobei $P(s)$ eine Linearkombination von s-Potenzen und $c > 0$ ist ∎

Folgerung 3.1: *Mit $D(M_{00})$ (R_+^1) bezeichnen wir den Raum aller Funktionen $v(s)$ auf R_+^1, welche auf $(0, T)$ zu $D(M_{00})$ $(0, T)$ und auf (T, ∞) zu $D(M_{00})$ (T, ∞) gehören, wobei ihre Funktionswerte und ihre Ableitungen bis zur $(2m - 1)$-ten Ordnung im Punkt $s = T$ zusammenfallen. Nach* [6, Satz 5.1] *ist M_{00} ein Noetherscher Operator im Raumpaar $\big(D(M_{00})\,(R_+^1),\ R(R_+^1)\big)$ mit dem Index*

$$\varkappa(M_{00})_{/D(M_{00})(R_+^1)\to R(R_+^1)} = \varkappa(M_{00})_{/D(M_{00})(0,T)\to R(0,T)} + \varkappa(M_{00})_{/D(M_{00})(T,\infty)\to R(T,\infty)} - 2m.$$

Aus (3.9) *und* (3.26) *folgt dann für unseren Fall*

$$\varkappa(M_{00})_{/D(M_{00})(R_+^1)\to R(R_+^1)} = 2m - l + l_1 + \frac{l+1}{2} - 2m = l_1 - \frac{l-1}{2}. \tag{3.27}$$

Bemerkung 3.3: Der Operator N_{00} ist in einer Operatorenklasse enthalten, deren Index in [7] untersucht wurde. Der Beweis aus [7] und der hier dargelegte fußen auf einer Idee aus [6].

Bemerkung 3.4: Der Gleichung (3.2) ordnen wir nun $\varkappa = l_1 - \dfrac{l-1}{2}$ *Rb* der Gestalt

$$\frac{d^r v}{ds^r}_{/s=0} = d_r \qquad (r = k_1, \ldots, \tilde{m} - 1;\ d_r \in \mathbf{R}^1) \tag{3.28}$$

zu. Die eindeutige Lösbarkeit der RWA (3.2) (3.28) im Raumpaar $\big(D(M_{00})\,(R_+^1),\ R(R_+^1)\big)$ läßt sich wie in Bemerkung 1.4 mittels Umformung der Gleichung und einer Abschätzung vom Typ (1.15) beweisen. Die für die Gültigkeit einer solchen Abschätzung erforderlichen Bedingungen bezüglich der Koeffizienten von (3.2) werden aus Platzgründen an dieser Stelle nicht angegeben, sondern wir verweisen auf [2, Kap. 3 § 3].

4. Konstruktion einer asymptotischen Lösung

Wir betrachten die Gleichung (1.1) auf dem Definitionsgebiet $D(A^\varepsilon)_0$, d. h. der Gleichung sind im Punkt $x = T$ die Rb

$$u^{(k)}(T) = 0 \qquad (k = 0, \ldots, m - 1) \tag{4.1}$$

und im Punkt $x = 0$ die Rb

$$u^{(k)}(0) = 0 \quad , \quad (k = 0, \ldots, \tilde{m} - 1) \qquad \text{(vgl. (1.6))} \tag{4.2}$$

zugeordnet. Ist $\dfrac{l-1}{2} < l_1 \leq l$, so suchen wir eine asymptotische Lösung der RWA (1.1) (4.1) (4.2) in der Gestalt:

$$u_\varepsilon(x) = w(x) + u_T(x) + u_0(x). \tag{4.3}$$

Ist $l_1 = \dfrac{1-1}{2}$, so suchen wir eine asymptotische Lösung in der Form:

$$u_\varepsilon(x) = w(x) + u_T(x). \tag{4.4}$$

Dabei bezeichnet

$$u_T(x) = \psi(T - x)\,\varepsilon^{k_1\gamma_T} \left[\sum_{j=0}^{k_1} \varepsilon^{j\gamma_T} \left(v_{Tj}\left(\frac{T-x}{\varepsilon^{\gamma_T}}\right) + \omega_{Tj}\left(\frac{T-x}{\varepsilon^{\gamma_T}}\right)\right)\right], \tag{4.5}$$

$$u_0(x) = \psi(x)\,\varepsilon^{k_1\gamma_0} \left[\sum_{k=0}^{k_1} \varepsilon^{k\gamma_0} \left(v_{0k}\left(\frac{x}{\varepsilon^{\gamma_0}}\right) + \omega_{0k}\left(\frac{x}{\varepsilon^{\gamma_0}}\right)\right)\right], \tag{4.6}$$

$\psi(z)$ — eine auf $[0, T]$ beliebig oft differenzierbare Funktion mit $|\psi(z)| \leqq 1$, $\psi(z) = 1$ für $z \in [0, \delta]$ und $\psi(z) = 0$ für $z \in [T - \delta, T]$ (δ hinreichend klein). Folglich schränkt $\psi(T - x)$ $\big(\psi(x)\big)$ den Einflußbereich des in eckigen Klammern stehenden Ausdruckes in (4.5) ((4.6)) auf eine Umgebung des Punktes $x = T$ $(x = 0)$ ein. Die Funktionen $w(x)$, v_{Tj}, v_{0k} werden als Lösungen gewisser RWA für die Gleichungen $A_{2m-i(l+1)}w = f$, $M_{T0}v_{Tj} = g_j$ (vgl. (2.6)), $M_{00}v_{0k} = g_k$ (vgl. (2.2)) derartig bestimmt, daß $u_\varepsilon(x)$ allen Rb (4.1) (4.2) der Ausgangsaufgabe (1.1) (4.1) (4.2) genügt. Die sogenannten Ausgleichsglieder ω_{Tj} bzw. ω_{0k} lassen sich durch v_{Tj} bzw. v_{0k} festlegen.

Wir untersuchen nun, wann der Ausdruck (4.3) bzw. (4.4) für kleine ε eine Näherungslösung ist.

Satz 4.1: *Die Koeffizienten der Gleichung* (1.1) *seien hinreichend glatt und es sei* $f \in W_2^{l+1}(0, T)$. *Ferner mögen die Voraussetzungen* (1.5), (1.10)—(1.14), (1.17)—(1.19) *gelten und* RWA *der Form* (3.2) (3.28) *im Raumpaar* $\big(D(M_{00})(R_+^1), R(R_+^1)\big)$ *eindeutig lösbar sein. Dann ist* (4.3) *für* $l_1 > \dfrac{l-1}{2}$ *bzw.* (4.4) *für* $l_1 = \dfrac{l-1}{2}$ *auf dem Definitionsgebiet* $D(A^\varepsilon)_0$ *für kleine* ε *eine Näherungslösung der Gleichung* (1.1) *mit der Fehlerabschätzung*

$$\|u - u_\varepsilon\|_{L^2(0,T)} \leqq \varepsilon^{\gamma_T} a^2 \|h\|_{L^2(0,T)}, \tag{4.7}$$

wobei $h(x, \varepsilon)$ stetig von ε abhängt und a^2 die Konstante aus Formel (1.15) ist.

Beweis: 1. *Auswahl der* Rb *für die Funktionen* w, v_{Tj}, v_{0k}:

Sei $x = 0$ und $l_1 > \dfrac{l-1}{2}$. Wir betrachten eine Umgebung des Punktes $x = 0$, in der $\psi(T - x) \equiv 0$ ist und differenzieren (4.3) $(\tilde m - 1)$-fach. Beim Differenzieren wird der in eckigen Klammern stehende Ausdruck in (4.6) mit $\varepsilon^{-\gamma_0}$ multipliziert. Auf Grund der Eigenschaften von $\psi(x)$ erhält man im Punkt $x = 0$:

$$u_\varepsilon^{(s)}(0) = w^{(s)}(0) + \varepsilon^{(k_1-s)\gamma_0}\left[\sum_{k=0}^{k_1} \varepsilon^{k\gamma_0}\big(v_{0k}^{(s)}(0) + \omega_{0k}^{(s)}(0)\big)\right] = 0$$

für $s = 0, \ldots, \tilde m - 1$. Wegen $l_1 > \dfrac{l-1}{2}$ ist $\tilde m > k_1$ und wir setzen:

$$w^{(s)}(0) = 0 \qquad (s = 0, \ldots, k_1 - 1) \tag{4.8}$$

$$v_{00}^{(s)}(0) = -\varepsilon^{(s-k_1)\gamma_0} w^{(s)}(0) \qquad (s = k_1, \ldots, \tilde m - 1) \tag{4.9}$$

$$v_{0k}^{(s)}(0) = 0 \qquad (s = k_1, \ldots, \tilde m - 1;\ k = 1, \ldots, k_1) \tag{4.10}$$

$$\omega_{0k}^{(s)}(0) = -v_{0k}^{(s)}(0) \qquad (s = 0, \ldots, k_1 - 1;\ k = 0, \ldots, k_1) \tag{4.11}$$

$$\omega_{0k}^{(s)}(0) = 0 \qquad (s = k_1, \ldots, \tilde m - 1;\ k = 0, \ldots, k_1). \tag{4.12}$$

Ist $l_1 = \dfrac{l-1}{2}$, d. h. $\tilde m = k_1$, so differenzieren wir (4.4) $(k_1 - 1)$-fach: $u_\varepsilon^{(s)}(0) = w^{(s)}(0) = 0$ $(s = 0, \ldots, k_1 - 1)$. Wir erhalten k_1 Rb der Gestalt (4.8) für die Funktionen $w(x)$.

Sei $x = T$. Analoge Überlegungen wie oben liefern die Rb:

$$w^{(s)}(T) = 0 \qquad (s = 0, \ldots, k_1 - 1) \tag{4.13}$$

$$v_{T0}^{(s)}(T) = -\varepsilon^{(s-k_1)\gamma_T} w^{(s)}(T) \qquad (s = k_1, \ldots, m - 1) \tag{4.14}$$

$$v_{Tj}^{(s)}(T) = 0 \qquad (s = k_1, \ldots, m - 1;\ j = 1, \ldots, k_1) \tag{4.15}$$

$$\omega_{Tj}^{(s)}(T) = -v_{Tj}^{(s)}(T) \qquad (s = 0, \ldots, k_1 - 1;\, j = 0, \ldots, k_1) \tag{4.16}$$

$$\omega_{Tj}^{(s)}(T) = 0 \qquad (s = k_1, \ldots, m - 1;\, j = 0, \ldots, k_1) \tag{4.17}$$

2. *Die Berechnung von $w(x)$:*
Wir setzen $w(x)$ in die Gleichung (1.1) ein:

$$A^\varepsilon w = \varepsilon^\beta A_{2m} w + A_{2m-(l+1)} w = f.$$

Als Grenzgleichung (bei $\varepsilon = 0$) erhält man

$$A_{2m-(l+1)} w = f.$$

Ihr ordnen wir die Rb (4.8) und (4.13) zu. Nach Bemerkung 1.4 ist diese RWA für jede rechte Seite $f \in W_2^{l+1}(0, T)$ eindeutig lösbar. Der bei diesem Ansatz gemachte Fehler $\varepsilon^\beta A_{2m} w$ ist wegen $w \in W_2^{2m}(0, T)$ auf $(0; T)$ quadratisch summierbar und hängt stetig von ε ab.

3. *Die Berechnung von v_{0k} und v_{Tj}:*
Zur Bestimmung der Funktionen v_{0k} in einer Umgebung U_0 des Punktes $x = 0$ setzen wir

$$v_0 = \varepsilon^{k_1 \gamma_0} \sum_{k=0}^{k_1} \varepsilon^{k \gamma_0} v_{0k} \quad \text{für} \quad P = k_1$$

in die Formel (2.1) ein, benutzen die Beziehung $2k_1 = 2m - (l + 1)$:

$$A^\varepsilon v_0 = \varepsilon^{-2k_1\gamma_0} \left[\sum_{r=0}^{k_1} \varepsilon^{r\gamma_0} M_{0r} + \varepsilon^{(k_1+1)\gamma_0} R_{0(k_1+1)}\right] \varepsilon^{k_1\gamma_0} \left[\sum_{k=0}^{k_1} {}^{k\gamma_0} v_{0k}\right] = 0,$$

und ordnen nach gleichen ε-Potenzen. Man erhält bei $\varepsilon = 0$

$$M_{00} v_{00}(s) = 0 \tag{4.18}$$

und ordnet ihr die Rb (4.9) zu. Die weiteren Iterationsgleichungen besitzen die Gestalt

$$M_{00} v_{0k}(s) = - \sum_{r=1}^{k} M_{0r} v_{0(k-r)}(s) \qquad (k = 1, \ldots, k_1). \tag{4.19}$$

Ihnen ordnet man für jedes $k = 1, \ldots, k_1$ die Rb (4.10) zu. Nach Voraussetzung sind RWA der Gestalt (4.18) (4.9) bzw. (4.19) (4.10) im Raumpaar $\left(D(M_{00})\,(R_+^1),\, R(R_+^1)\right)$ eindeutig lösbar. Wir zeigen noch, daß die rechten Seiten der Iterationsgleichungen (4.19) bei jedem Iterationsschritt im $R(R_+^1)$ verbleiben. Für große s folgt dies aus der Tatsache, daß die rechten Seiten von (4.19) sich für $s \to \infty$ wie $P(s) \exp\left(-cs^{1/l+1}\right)$ verhalten, wobei $P(s)$ eine Linearkombination von s-Potenzen ist (vgl. Beweis von Satz 3.1). Folglich genügt es, $M_{0r} v \in L^2(0, T)$ nachzuweisen. Dazu schreiben wir die Formeln (2.3) in der Gestalt

$$M_{0r} v = s^r \sum_{p=1}^{l} E_{2m-p} s^{l-p} v^{(2m-p)}$$
$$+ \sum_{i=l+1}^{2m} a_{(2m-i)0(r-(i-(l+1)))} s^{r-(i-(l+1))} v^{(2m-i)} \qquad (r = 1, \ldots, k_1),$$

wobei E_{2m-p}, $a_{(2m-i)0(r-(i-(l+1)))}$ Konstanten sind und $a_{(2m-i)0(r-(i-(l+1)))} = 0$ ist für $r < i - (l + 1)$. Nun zeigt man leicht, daß für $v \in D(M_{00})\,(0, T)$ $M_{0r} v \in C[0, T] \subset L^2(0, T)$ ist. Das Restglied hat die Gestalt $R_1^0(x, \varepsilon) = \varepsilon^{\gamma_0} h^0(x, \varepsilon)$, wobei $h^0(x, \varepsilon) \in L^2(0, T)$ ist und stetig von ε abhängt.

Zur Bestimmung der Funktionen v_{Tj} in einer Umgebung U_T des Punktes $x = T$ setzen wir

$$v_T = \varepsilon^{k_1\gamma_T} \sum_{j=0}^{k_1} \varepsilon^{j\gamma_T} v_{Tj} \quad \text{für} \quad P = k_1$$

in die Formel (2.5) ein, benutzen die Beziehung $2k_1 = 2m - (l + 1)$:

$$A^\varepsilon v_T = \varepsilon^{-2k_1\gamma_T} \left[\sum_{r=0}^{k_1} \varepsilon^{r\gamma_T} M_{Tr} + \varepsilon^{(k_1+1)\gamma_T} R_{T(k_1+1)} \right] \varepsilon^{k_1\gamma_T} \left[\sum_{j=0}^{k_1} \varepsilon^{j\gamma_T} v_{Tj} \right] = 0,$$

und ordnen nach gleichen ε-Potenzen. Man erhält bei $\varepsilon = 0$

$$M_{T0} v_{T0}(t) = 0 \tag{4.20}$$

und ordnet ihr die Rb (4.14) zu. Die weiteren Iterationsgleichungen besitzen die Gestalt

$$M_{T0} v_{Tj}(t) = - \sum_{r=1}^{j} M_{Tr} v_{T(j-r)}(t) \qquad (j = 1, \ldots, k_1). \tag{4.21}$$

Ihnen ordnet man für jedes $j = 1, \ldots, k_1$ die Rb (4.15) zu. Man zeigt leicht, daß RWA der Gestalt (4.20) (4.14) bzw. (4.21) (4.15) im Raumpaar $\left(W_2^{2m}(R_+^1), R(R_+^1)\right)$ eindeutig lösbar sind. Aus (2.7) und der konkreten Gestalt der Funktionen $v_{T(j-r)}$ $(r = 1, \ldots, j)$ folgt, daß die rechten Seiten der Iterationsgleichungen (4.21) bei jedem Iterationsschritt in $R(R_+^1)$ verbleiben. Das Restglied hat die Gestalt $R_1^T(x, \varepsilon) = \varepsilon^{\gamma_T} h^T(x, \varepsilon)$, wobei $h^T(x, \varepsilon) \in L^2(0, T)$ ist und stetig von ε abhängt.

4. *Die Bestimmung von* ω_{0k} und ω_{Tj}:
Die Beziehungen (4.11) und (4.12) bedeuten:

$$\omega_{0k}^{(r)} \left(\frac{x}{\varepsilon^{\gamma_0}}\right)_{/x=0} = - v_{0k}^{(r)} \left(\frac{x}{\varepsilon^{\gamma_0}}\right) \qquad (r = 0, \ldots, k_1 - 1;\ k = 0, \ldots, k_1),$$

$$\omega_{0k}^{(r)} \left(\frac{x}{\varepsilon^{\gamma_0}}\right)_{/x=0} = 0 \qquad (r = k_1, \ldots, \tilde{m} - 1;\ k = 0, \ldots, k_1).$$

Die Variablensubstitution $x\varepsilon^{-\gamma_0} = s$ liefert:

$$\omega_{0k}^{(r)}(s)_{/s=0} = - v_{0k}^{(r)}(s) \qquad (r = 0, \ldots, k_1 - 1;\ k = 0, \ldots, k_1),$$

$$\omega_{0k}^{(r)}(s)_{/s=0} = 0 \qquad (r = k_1, \ldots, \tilde{m} - 1;\ k = 0, \ldots, k_1).$$

Dann erfüllt die Funktion $\omega_{0k}(s) = - \sum_{i=0}^{k_1-1} v_{0k}^{(i)}(0) \frac{s^i}{i!}$ $(k = 0, \ldots, k_1)$ die geforderten Bedingungen. Analog erhält man aus (4.16) und (4.17) unter Benutzung der Substitution $(T - x)\, \varepsilon^{-\gamma_T} = t$ die gesuchten Funktionen in der Gestalt

$$\omega_{Tj}(t) = - \sum_{i=0}^{k_1-1} v_{Tj}^{(i)}(0) \frac{t^i}{i!} \qquad (j = 0, \ldots, k_1).$$

Für $m = 1$ treten keine Ausgleichsglieder auf.

5. *Fehlerabschätzung:*

Zur Fehlerabschätzung setzen wir

$$z_\varepsilon(x) = u(x) - u_\varepsilon(x).$$

Da sowohl $u(x)$ als auch $u_\varepsilon(x)$ den Rb (4.1) und (4.2) genügen, erfüllt auch $z_\varepsilon(x)$ diese Rb. Wie in [8] berechnen wir $A^\varepsilon z_\varepsilon$ und erhalten wegen $\gamma_T < \gamma_0$

$$A^\varepsilon z_\varepsilon = - \varepsilon^{\gamma_T} h(x, \varepsilon),$$

wobei $h(x, \varepsilon)$ sich aus den Restgliedern der beiden Iterationsprozesse zusammensetzt (folglich für alle hinreichend kleinen ε aus $L^2(0, T)$ ist und stetig von ε abhängt). Da außerdem z_ε die Rb erfüllt, ist diese Funktion Lösung der RWA (1.1) (4.1) (4.2) mit der rechten Seite $-\varepsilon^{\gamma_T} h(x; \varepsilon)$. Aus (1.15) folgt nun (4.7) ∎

LITERATUR

[1] VIŠIK, M. I., und L. A. LJUSTERNIK: Reguläre Entartung und Grenzschicht für lineare Differentialgleichungen mit kleinem Parameter. Usp. Mat. Nauk 12 (1957), 3—122 (Russ.).

[2] MEYER, S.: Ein Beitrag zur Theorie singulär gestörter Gleichungen. B-Dissertation: TH Karl-Marx-Stadt 1981.

[3] MEYER, S.: Eine asymptotische Lösungsdarstellung von nichtselbstadjungierten Randwertaufgaben für entartete gewöhnliche Differentialgleichungen 2. Ordnung mit einem kleinen Parameter bei den höchsten Ableitungen. Demonstratio Math. 14 (1981), 59—76.

[4] ELSCHNER, J., und B. SILBERMANN: Eine Klasse entarteter gewöhnlicher Differentialgleichungen und das Kollokationsverfahren zu ihrer Lösung. Czech. Math. J. 29 (1979), 551—563.

[5] KREIN, S. G.: Lineare Gleichungen im Banach-Raum. Moskau 1971 (Russ.).

[6] VIŠIK, M. I., und B. B. GRUŠIN: Randwertaufgaben für elliptische Gleichungen, die auf dem Rand des Gebietes entarten. Mat. Sb. 80 (122), 4 (12) (1969), 455—491 (Russ.).

[7] BOLLEY, P., J. CAMUS, und B. HELFFER: Sur une classe d'operateurs partiellement hypoelliptiques. J. Math. pures et appl. 55 (1976), 131—171.

[8] MEYER, S.: Eine asymptotische Zerlegung der Lösung der ersten Randwertaufgabe für eine entartete gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung mit einem kleinen Parameter bei der höchsten Ableitung. Wiss. Z. Techn. Hochschule Karl-Marx-Stadt 19 (1977), 539—549.

Manuskripteingang: 12. 06. 1981

VERFASSER:

Dr. sc. nat. SYBILLE MEYER
Sektion Mathematik der Technischen Hochschule
DDR-9010 Karl-Marx-Stadt, Reichenhainer Straße 39/41