Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen
Bd. 1(5) (1982), S. 29–51

О методе Галеркина для параболических уравнений с операторами локального типа

П. Оя

Es wird die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung der Anfangswertaufgabe $u'(t) + A(t)\,u(t) + (Mu)\,(t) = f(t)$, $u(0) = u_0$, betrachtet, wobei $A(t)$ eine Schar linearer Operatoren und M ein Operator vom lokalen Typ ist. $A(t)$ repräsentiert den üblichen Hauptteil parabolischer Gleichungen und M steht in den Anwendungen insbesondere für ein nacheilendes Argument oder für einen Integraloperator. Es werden Räume von Anfangsdaten und Räume von Lösungen beschrieben, zwischen denen das Problem jeweils einen Isomorphismus herstellt. Zum Konvergenzbeweis der entsprechenden Galerkinverfahren werden zweiseitige Abschätzungen in starken Normen, die die Ableitungen nach t enthalten, hergeleitet. Es wird die Frage beantwortet, wie sich Fehler bei der Koeffizientenberechnung im Galerkinverfahren auf die Stabilität des Verfahrens auswirken: die Differenz zwischen den Lösungen der gestörten und der eigentlichen Galerkinaufgabe wird zweiseitig gegen die Störung abgeschätzt, und zwar in denselben Normen, in denen die Konvergenz bewiesen ist.

Изучается существование и единственность решения задачи Коши $u'(t) + A(t)\,u(t) + (Mu) \times (t) = f(t)$, $u(0) = u_0$, где $A(t)$ — семейство линейных операторов — представляет собой обычную главную часть параболических уравнений, а M является оператором локального типа, что в приложениях соответствует, в частности, уравнениям с запаздывающим аргументом или интегральным оператором. Описаны пространства входных данных и решений, между которыми задача осуществляет изоморфизм. При изучении метода Галеркина для этих задач устанавливается двусторонние оценки сходимости в сильных нормах, содержащих производные по t. Решается проблема устойчивости составления приближенной задачи метода Галеркина относительно погрешностей, возникающих при вычислении коэффициентов в приближенной задаче как скалярных произведений: отклонение решения возмущенной задачи от решения задачи Галеркина двусторонне оценивается через эти погрешности в нормах, в которых доказана сходимость метода.

The existence and the uniqueness of solution are investigated for the Cauchy problem $u'(t) + A(t)\,u(t) + (Mu)\,(t) = f(t)$, $u(0) = u_0$, with a family of linear operators $A(t)$ and a local type operator M. In the applications M represents, in particular, the retardation of the argument or an integral operator. It is shown that this Cauchy problem produces an isomorphism between some natural spaces of given data and solutions. The convergence of the Galerkin method takes place in strong norms containing derivatives by t. The rate of convergence is characterized by two-sided estimates. The influence of perturbations, arising in the course of calculating the coefficients of the approximate problem as scalar products, on the approximate solutions is given also by two-sided estimates in the same norms in which the convergence is proved.

Введение

Обычное параболическое уравнение $u'(t) + A(t)\,u(t) = f(t)$ по своей природе имеет локальный характер, но многие прикладные проблемы сводятся к уравнениям, где имеется еще дополнительный операторный член $(Mu)\,(t)$, значение которого в некоторой точке t может зависеть от поведения функции u не только в окрестности t, но и вне ее. Сюда относятся, например, уравнения с запаздывающим по t аргументом, а также уравнения с интегральными операторами. Для соответствующих задач Коши $u'(t) + A(t)\,u(t) + (Mu)(t) = f(t)$, $u(0) = u_0$, изучена существование и единственность решения [1—4], имеется результаты о сходимости и скорости сходимости метода Галеркина [5—8], а также об устойчивости метода Галеркина [9]. Однако, эти результаты явным образом не дают столь полного представления о свойствах задач и метода Галеркина их решения, как оно есть для задач без дополнительного оператора M [10—15]. Это и побудило нас провести настоящее исследование, которое следует своими методами и идеями работам [12, 14, 15].

§ 1. Разрешимость задачи Коши

1. Пусть V и H — сепарабельные вещественные гильбертовы пространства, причем V непрерывно вложено в H и плотно в нем. Отождествляя H с его двойственным пространством и обозначая через V' пространство, двойственное к V, получаем $V \subset H \subset V'$, где каждое пространство плотно в последующем. Если $f \in V'$ и $v \in V$, то (f, v) обозначает значение функционала f на v и совпадает со скалярным произведением в H для $f \in H$. Если это не вызывает недоразумений, для пространств $L^p(0, T; X)$ $(p = 2, \infty)$ и $C([0, T]; X)$, где X — гильбертово пространство, используем сокращенную запись $L^p(X)$, $C(X)$.

Пусть задано семейство линейных непрерывных операторов $A(t) \in \mathscr{L}(V, V')$, $t \in [0, T]$, со свойствами (см., например, [11]):
$\forall\, u, v \in V$ функция $t \to \big(A(t)u, v\big)$ измерима и

$$\big(A(t), u, v\big) \leqq a\, \|u\|_V\, \|v\|_V \qquad \forall\, u, v \in V; \tag{1.1}$$

существует $\alpha > 0$ такое, что

$$\big(A(t)\, v, v\big) \geqq \alpha\, \|v\|_V^2 \qquad \forall\, v \in V. \tag{1.2}$$

Пусть задан еще оператор $M \in \mathscr{L}\big(L^\infty(0, T; H), L^\infty(0, T; H)\big)$, удовлетворяющий условию

$$\|r_t M v\|_{L^\infty(0,T;H)} \leqq \mu\, \|r_t v\|_{L^\infty(0,T;H)} \qquad \forall\, v \in L^\infty(0, T; H),\ t \in (0, T), \tag{1.3}$$

где r_t означает „срезку“ начиная с t:

$$(r_t v)(s) = \begin{cases} v(s) & \text{п. в. для } 0 < s < t, \\ 0 & \text{п. в. для } t < s < T. \end{cases}$$

Операторы, удовлетворяющие условию (1.3), называются *операторами локального типа* или *вольтерровыми операторами*, некоторые примеры можно найти в [2].

Рассмотрим задачу

$$u'(t) + A(t)\, u(t) + (Mu)(t) = f(t), \qquad u(0) = \xi, \tag{1.4}$$

где $f \in L^2(0, T; V')$ и $\xi \in H$ — заданы, производную $u'(t)$ понимаем в смысле распределении.

2. *Покажем, что решение u задачи* (1.4), *если оно существует и* $u \in L^2(0, T; V)$, $u' \in L^2(0, T; V')$, *удовлетворяет оценке*

$$c_1(\|\xi\|_H^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;V')})^{1/2} \leqq (\|u\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|u'\|^2_{L^2(0,T;V')})^{1/2} \leqq c_2(\|\xi\|_H^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;V')})^{1/2}, \tag{1.5}$$

где (*положительные*) *постоянные* c_1 *и* c_2 *не зависят от* f *и* ξ.

Заменой неизвестной функции $u(t) = e^{\lambda t}w(t)$, $\lambda > 0$, задача (1.4) преобразуется к виду

$$e^{\lambda t}w'(t) + \lambda e^{\lambda t}w(t) + e^{\lambda t}A(t)\,w(t) + \big(M(e^{\lambda t}w)\big)(t) = f(t), \quad w(0) = \xi,$$

от которой после умножения уравнения на $e^{-\lambda t}$ получаем задачу (новую неизвестную функцию обозначим опять через $u(t)$, новый свободный член через $f(t)$)

$$u'(t) + A(t)\,u(t) + e^{-\lambda t}\big(M(e^{\lambda t}u)\big)(t) + \lambda u(t) = f(t), \qquad u(0) = \xi. \tag{1.6}$$

Понятно, что если мы докажем неравенство (1.5) для задачи (1.6), оно будет доказано также для задачи (1.4) (возможно, с другими постоянными c_1 и c_2). Равенство

$$\big(u'(t), u(t)\big) + \big(A(t)\,u(t), u(t)\big) + \lambda\big(u(t), u(t)\big) + \big(M(e^{\lambda t}u)\,(t), e^{-\lambda t}u(t)\big) = \big(f(t), u(t)\big)$$

дает после интегрирования в пределах от 0 до t

$$\frac{1}{2}\,\|u(t)\|_H^2 + \int_0^t (Au, u)\,dt + \lambda \int_0^t (u, u)\,dt = \frac{1}{2}\,\|\xi\|_H^2 + \int_0^t (f, u)\,dt - \int_0^t \big(M(e^{\lambda t}u), e^{-\lambda t}u\big)\,dt.$$

Возьмем слева на отрезке $[0, T]$ супремум от первой слагаемой, а затем от других двух (они монотонны по t) вместе, в итоге

$$\frac{1}{2}\,\|u\|^2_{L^\infty(H)} + \int_0^T (Au, u)\,dt + \lambda \int_0^T \|u\|_H^2\,dt \leqq 2\left(\frac{1}{2}\,\|\xi\|_H^2 + \int_0^T \|f\|_{V'}\,\|u\|_V\,dt + \sup_{0\leqq t\leqq T}\left(-\int_0^t \big(M(e^{\lambda t}u), e^{-\lambda t}u\big)\,dt\right)\right).$$

Оценим сначала отдельно последний член справа, пусть временно $e^{\lambda t}u(t) \doteq v(t)$. Имеем

$$\sup_{0\leqq t\leqq T}\left(-\int_0^t \big(M(e^{\lambda t}u), e^{-\lambda t}u\big)\,dt\right) \leqq \int_0^T \|(Mv)\,(t)\|_H\, e^{-\lambda t}\,\|u(t)\|_H\,dt.$$

Для первого множителя под интегралом получим оценку

$$\|(Mv)\,(\tau)\|_H \leqq \|r_\tau Mv\|_{L^\infty(H)} \leqq \mu\,\|r_\tau v\|_{L^\infty(H)} = \mu\,\|r_\tau(e^{\lambda t}u)\|_{L^\infty(H)} \leqq \mu e^{\lambda\tau}\,\|r_\tau u\|_{L^\infty(H)} \leqq \mu e^{\lambda\tau}\,\|u\|_{L^\infty(H)}.$$

Итак,

$$\sup_{0\leqq t\leqq T}\left(-\int_0^t \left(M(e^{\lambda t}u),\, e^{-\lambda t}u\right) dt\right) \leqq \mu\sqrt{T}\,\|u\|_{L^\infty(H)}\,\|u\|_{L^2(H)}.$$

Теперь основное неравенство принимает вид

$$\frac{1}{2}\,\|u\|^2_{L^\infty(H)} + \alpha\,\|u\|^2_{L^2(V)} + \lambda\,\|u\|^2_{L^2(H)}$$

$$\leqq 2\left(\frac{1}{2}\,\|\xi\|_H{}^2 + \varepsilon\,\|u\|^2_{L^2(V)} + \frac{1}{\varepsilon}\,\|f\|^2_{L^2(V')} + \mu\sqrt{T}\left(\eta\,\|u\|_{L^\infty(H)} + \frac{1}{\eta}\,\|u\|^2_{L^2(H)}\right)\right)$$

при любых $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$. Если мы выбираем ε и η так, что $2\varepsilon < \alpha$ и $2\mu\sqrt{T}\eta < 1/2$, а также $\lambda \geqq 2\mu\sqrt{T}/\eta$, то получим оценку

$$\|u\|^2_{L^\infty(H)} + \|u\|^2_{L^2(V)} \leqq c(\|\xi\|_H{}^2 = \|f\|^2_{L^2(V')})^{1/2} \tag{1.7}$$

(через c будем обозначать различные постоянные). Далее, из равенства $u' = f - Au - \lambda u - e^{-\lambda t}M(e^{\lambda t}u)$ получим (здесь d — норма вложения $V \subset H$)

$$\|u'\|_{L^2(V')} \leqq \|f\|_{L^2(V')} + a\,\|u\|_{L^2(V)} + \lambda d^2\,\|u\|_{L^2(V)} + \left(\int_0^T e^{-2\lambda t}\,\|M(e^{\lambda t}u)\|^2_{V'}\,dt\right)^{1/2}.$$

Используя уже полученную оценку для $\|M(e^{\lambda t}u)\|_H$, имеем

$$\|M(e^{\lambda t}u)\,(t)\|_{V'} \leqq d\,\|M(e^{\lambda t}u)\,(t)_H \leqq \mu d\sqrt{T}\,e^{\lambda t}\,\|u\|_{L^\infty(H)},$$

значит,

$$\left(\int_0^T e^{-2\lambda t}\,\|M(e^{\lambda t}u)\|_{V'}{}^2\,dt\right)^{1/2} \leqq \mu d\sqrt{T}\,\|u\|_{L^\infty(H)}.$$

Таким образом, мы получили оценку для производной

$$\|u'\|_{L^2(V')} \leqq \|f\|_{L^2(V')} + c(\|u\|^2_{L^2(V)} + \|u\|^2_{L^\infty(H)})^{1/2},$$

или

$$\|u'\|_{L^2(V')} \leqq c(\|\xi\|_H{}^2 + \|f\|^2_{L^2(V')})^{1/2}.$$

Окончательно доказана оценка

$$\|u\|^2_{L^\infty(H)} + \|u\|^2_{L^2(V)} + \|u'\|^2_{L^2(V')} \leqq c(\|\xi\|_H{}^2 + \|f\|^2_{L^2(V')}),$$

она содержит в себе (первую норму слева можно опустить) и оценку (1.5) сверху.

Докажем оценку (1.5) снизу для решения задачи (1.4). В этом случае, так как

$$\|Mu\|_{L^2(V')} \leqq \mu d\sqrt{T}\,\|u\|_{L^\infty(H)},$$

то

$$\|f\|_{L^2(V')} \leqq \|u'\|_{L^2(V')} + a\,\|u\|_{L^2(V)} + \mu d\sqrt{T}\,\|u\|_{L^\infty(H)}.$$

Наряду с этим $\|\xi\|_H \leqq \|u\|_{L^\infty(H)}$, значит,

$$\|\xi\|_H{}^2 + \|f\|^2_{L^2(V')} \leqq c(\|u\|^2_{L^\infty(H)} + \|u\|^2_{L^2(V)} + \|u'\|^2_{L^2(V')}).$$

Фактически $u \in C([0, T];\, H)$, поэтому первая норма справа оценивается через другие две [11; стр. 33]; этим завершается доказательство неравенства (1.5). ∎

Замечание 1: Вместо неравенства (1.2) можно требовать (в этом пункте и в дальнейшем) от семейства $A(t)$, что для некоторых $\alpha > 0$ и λ_0 выполняется неравенство

$$\big(A(t)\,v, v\big) + \lambda_0 \|v\|_H{}^2 \geqq \alpha \|v\|_V{}^2 \qquad \forall\, v \in V.$$

В таком случае для семейства $A(t) + \lambda_0 I$ выполняется (1.2), а в то же время (чтобы не изменять задачу (1.4)) оператор $M - \lambda_0 I$ остается оператором локального типа в пространстве $L^\infty(0, T; H)$, лишь постоянная μ в неравенстве (1.3) заменяется на $\mu + \lambda_0$.

Замечание 2: Наряду с операторами A и M можно в уравнение (1.4) включить любой оператор $B \in \mathscr{L}\big(L^2(0, T; V), L^2(0, T; H)\big)$, порожденный семейством $B(t) \in \mathscr{L}(V, H)$, $t \in [0, T]$, которое удовлетворяет условиям:

$$\forall\, u, v \in V \text{ функция } t \to \big(B(t), u, v\big) \text{ измерима и}$$

$$\big(B(t)\, u, v\big) \leqq b\, \|u\|_V\, \|v\|_H \qquad \forall\, u, v \in V.$$

Действительно, тогда

$$\big((A(t) + B(t) + \lambda_0 I)\, v, v\big) \geqq \alpha \|v\|_V{}^2 - b \|v\|_V \|v\|_H + \lambda_0 \|v\|_H{}^2$$

$$\geqq \alpha \|v\|_V{}^2 - \left(\frac{\alpha}{2} \|v\|_V{}^2 + \frac{b^2}{2\alpha} \|v\|_H{}^2\right) + \lambda_0 \|v\|_H{}^2 \geqq \frac{\alpha}{2} \|v\|_V{}^2,$$

если $\lambda_0 \geqq b^2/(2\alpha)$, значит, семейство $A(t) + B(t) + \lambda_0 I$ удовлетворяет условию (1.2) с нижней гранью $\alpha/2$.

3. Пусть в пространстве V задана полная линейно независимая система $\{w_k\}_1^\infty$, следовательно, она полна также в пространствах H и V'. Линейные оболочки систем $\{w_k\}_1^n$, снабженные нормами из V и H, обозначим через V_n и H_n, а если будем рассматривать их как пространства, двойственные к V_n, — через V_n'. Итак,

$$\|v\|_{V_n'} = \sup_{w \in V_n, \|w\|_V = 1} (v, w) \leqq \sup_{w \in V, \|w\|_V = 1} (v, w) = \|v\|_{V'} \qquad \forall\, v \in V_n.$$

Пусть P_n — ортопроектор в H, проектирующий на H_n. Оператор P_n ограничен единицей и как оператор из V' в V_n'. Расширение P_n по непрерывности на V' будем также обозначать через P_n, при этом $\|P_n\|_{V' \to V_n'} \leqq 1$.

Рассмотрим спроектированную задачу

$$u_n'(t) + P_n A(t)\, u_n(t) + P_n(M u_n)\,(t) \overset{e}{=} P_n f(t), \qquad u_n(0) = P_n \xi. \tag{1.8}$$

Спроектированная задача, соответствующая задаче (1.6), имеет вид

$$u_n'(t) + P_n A(t)\, u_n(t) + e^{-\lambda t} P_n M(e^{\lambda t} u_n)\,(t) + \lambda u_n(t) = P_n f(t), \quad u_n(0) = P_n \xi.$$

Точно такими же рассуждениями, как мы доказали оценку (1.5), доказывается, что решение u_n задачи (1.8), если оно существует и $u_n \in L^2(0, T; V_n)$, $u_n' \in L^2(0, T; V_n')$, удовлетворяет оценке

$$c_1(\|P_n \xi\|_H{}^2 + \|P_n f\|^2_{L^2(V_n')})^{1/2} \leqq (\|u_n\|^2_{L^2(V)} + \|u_n'\|^2_{L^2(V_n')})^{1/2}$$
$$\leqq c_2(\|P_n \xi\|_H{}^2 + \|P_n f\|^2_{L^2(V_n')})^{1/2}, \tag{1.9}$$

причем постоянные c_1 и c_2 те же самые, что и в (1.5). Сосредоточим на минутку наше внимание на критические моменты в доказательстве. Семейство $P_n A(t)$ удовлетворяет условиям (1.1) и (1.2) в пространствах V_n, H_n, V_n' с теми же постоянными a и α. Оператор $P_n M$ в пространстве $L^\infty(H_n)$ удовлетворяет тем же условиям, что и M в $L^\infty(H)$. Норма вложения $V_n \subset H_n$ не превышает d. Наконец, норма $\|u_n\|_{C(H_n)}$ оценивается через $(\|u_n\|^2_{L_2(V_n)} + \|u_n'\|^2_{L^2(V_n')})^{1/2}$ постоянной, которая зависит только от нормы вложения $V_n \subset H_n$ и T.

Неравенство (1.9) можно записать и в другом виде, именно, для любого $v_n \in L^2(V_n)$, если $v_n' \in L^2(V_n')$, выполняется неравенство

$$c_1\big(\|v_n(0)\|_H{}^2 + \|v_n' + P_nAv_n + P_nMv_n\|^2_{L^2(V_n')}\big)^{1/2} \leqq (\|v_n\|^2_{L^2(V)} + \|v_n'\|^2_{L^2(V_n')})^{1/2}$$

$$\leqq c_2\big(\|v_n(0)\|_H{}^2 + \|v_n' + P_nAv_n + P_nMv_n\|^2_{L^2(V_n')}\big)^{1/2}. \tag{1.10}$$

4. *Докажем, что спроектированная задача* (1.8) *имеет единственное решение* $u_n \in L^2(V_n)$, $u_n' \in L^2(V_n')$.

Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1: *Интегральное уравнение*

$$u(t) = \int_0^t (Ku)(\tau)\,d\tau + g(t),$$

где $g \in C([0, T]; X)$, $K \in \mathscr{L}\big(L^\infty(0, T; X), L^\infty(0, T; X)\big)$, X — *гильбертово пространство, имеет в пространстве* $C([0, T]; X)$ *единственное решение.*

Доказательство: Введем оператор T по формуле $(Tu)(t) = \int_0^t (Ku)(\tau)\,d\tau$, определим также (нелинейный) оператор G соотношением $Gu = Tu + g$. Тогда интегральное уравнение записывается в виде $u = Tu + g$, или $u = Gu$, т. е. мы должны показать, что G имеет единственную неподвижную точку в $C(X)$. Непосредственно проверяется, что T, следовательно, и G, отображает пространство $C(X)$ в себя. Покажем, что некоторая степень G является сжимающей. По индукции доказывают, что $G^nu = T^nu + T^{n-1}g + \dots + Tg + g$, откуда $G^nu - G^nv = T^n(u - v)$ для $u, v \in C(X)$. Теперь, обозначив через μ норму оператора K в $L^\infty(X)$, получим оценку

$$\|G^nu - G^nv\|_{C(X)} = \left\| \int_0^t \dots K \int_0^t K(u-v)\,dt \dots dt \right\|_{C(X)}$$

$$\leqq \max_{0 \leqq t \leqq T} \int_0^t \dots \mu \int_0^t \mu\, \|u - v\|_{C(X)}\,dt \dots dt$$

$$= \frac{\mu^n T^n}{n!} \|u - v\|_{C(X)}.$$

Если число n достаточно велико, то $\mu^nT^n/(n!) < 1$, значит, G^n является сжимающим. Следовательно, G имеет единственную неподвижную точку в $C(X)$. Лемма доказана ∎

Спроектированная задача (1.8) равносильна интегральному уравнению

$$u_n(t) = P_n\xi - \int_0^t (P_nAu_n + P_nMu_n)\,dt + \int_0^t P_nf\,dt,$$

решение которого ищется в пространстве $C(H_n)$. Чтобы применить лемму 1, определим оператор K следующим образом:

$$Ku = -(P_nAu + P_nMu), \qquad u \in L^\infty(H_n).$$

Поскольку пространства V_n, H_n и V_n' конечномерны, для выбранного n они имеют эквивалентные нормы и, таким образом, оператор K определен на $L^\infty(H_n)$, а также $K \in \mathscr{L}(L^\infty(H_n), L^\infty(H_n))$. В качестве свободного члена g возмем

$$g(t) = P_n\xi + \int_0^t P_n f\, dt.$$

В силу эквивалентности норм в пространствах H_n и V_n' имеем $P_n f \in L^2(H_n)$, значит, и $g \in L^2(H_n)$. С другой стороны, $g' = P_n f \in L^2(H_n)$, следовательно, $g \in C(H_n)$. Опираясь на лемму 1, можно теперь сказать, что задача (1.8) при любом n имеет единственное решение $u_n \in L^2(V_n)$, причем $u_n' \in L^2(V_n')$, и выполняется неравенство (1.9).

5. *Приступим к доказательстве единственной разрешимости задачи* (1.4).

Рассмотрим линейные оболочки счстем $\{w_k\}_1{}^n$ еще как подпространства V'. В силу их конечномерности существуют постоянные k_n (пусть они будут минимальными) такие, что

$$\|v\|_{V'} \leqq k_n \|v\|_{V_n'} \quad \forall\, v \in V_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1.11}$$

Выберем теперь полную в V координатную систему $\{w_k\}$ такую, что последовательность k_n ограничена, при заданных пространствах $V \subset H$ это всегда возможно (см. [16]). Из неравенств $\|P_n\xi\|_H \leqq \|\xi\|_H$, $\|P_n f\|_{L^2(V_n')} \leqq \|f\|_{L^2(V')}$ и оценки (1.9) вытекает, что последовательность $\|u_n\|^2_{L^2(V)} + \|u_n'\|^2_{L^2(V_n')}$ где u_n — решение задачи (1.8), ограничена. Значит, при выбранной координатной системе u_n ограничена в (гильбертовом) пространстве $E = \{v: v \in L^2(V), v' \in L^2(V')\}$, если в E использовать норму

$$\|v\|_E = (\|v\|^2_{L^2(V)} + \|v'\|^2_{L^2(V')})^{1/2}.$$

Следовательно, некоторая подпоследовательность u_n, $n \in N' \subset N$ (через N' обозначим множество индексов подпоследовательности), слабо в E сходится к некоторому элементу $u \in E$.

Каждому элементу $w \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L^2(V_n)$ поставим в соответствие линейный функционал φ_w по формуле

$$\varphi_w(v) = (v', w) + (Av, w) + (Mv, w), \qquad v \in E;$$

скобки тут означают двойственность между пространствами $L^2(V')$ и $L^2(V)$, она совпадает со скалярным произведением в $L^2(H)$, если оба элементы принадлежат в $L^2(H)$. Проверим ограниченность этих функционалов:

$$|\varphi_w(v)| \leqq \|v'\|_{L^2(V')} \|w\|_{L^2(V)} + a\, \|v\|_{L^2(V)} \|w\|_{L^2(V)} + \mu \sqrt{T}\, \|v\|_{L^\infty(H)} \|w\|_{L^2(H)};$$

поскольку $\|v\|_{L^\infty(H)} = \|v\|_{C(H)}$ оценивается через $\|v\|_E$, то получим неравенство $|\varphi_w(v)| \leqq c\, \|v\|_E$ $\forall\, v \in E$, где c не зависит от v. Таким образом, $\varphi_w(u_n) \to \varphi_w(u)$, $n \in N'$. Для выбранного φ_w (т. е. для выбранного $w \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L^2(V_n)$) при достаточно больших $n \in N'$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi_w(u_n) &= (u_n', w) + (Au_n, w) + (Mu_n, w)\\ &= (u_n', w) + (P_nAu_n, w) + (P_nMu_n, w) = (P_nf, w) = (f, w).\end{aligned}$$

С другой стороны, $\varphi_w(u) = (u' + Au + Mu, w)$, значит, $(u' + Au + Mu, w) = (f, w)$ $\forall\, w \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L^2(V_n)$. Поскольку множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L^2(V_n)$ всюду плотно в $L^2(V)$, то

$u' + Au + Mu = f$ (равенство в пространстве $L^2(V')$), т. е. u является решением дифференциального уравнения в задаче (1.4).

Чтобы справиться с начальным условием, поставим каждому элементу $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ в соответствие линейные функционалы следующим образом:

$$\psi_w(v) = \big(v(0), w\big), \qquad v \in E,$$

скобки тут означают скалярное произведение в H. Покажем ограниченность функционалов ψ_w:

$$|\psi_w(v)| \leqq \|v(0)\|_H \, \|w\|_H \leqq \|w\|_H \, \|v\|_{C(H)} \qquad \forall v \in E,$$

но $\|v\|_{C(H)}$ оценивается через $\|v\|_E$. Значит, и $\psi_w(u_n) \to \psi_w(u)$, $n \in N'$. Также для выбранного ψ_w при достаточно больших $n \in N'$ имеем $\psi_w(u_n) = (P_n\xi, w) = (\xi, w)$, а так как $\psi_w(u) = \big(u(0), w\big)$, то $\big(u(0), w\big) = (\xi, w) \quad \forall w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ всюду плотно в H, значит, $u(0) = \xi$.

Итак, мы показали, что u является решением задачи (1.4). Единственность же решения вытекает из неравенства (1.5). Подытожим основной результат этого параграфа.

Теорема 1: *Пусть выполнены* (1.1)—(1.3). *Тогда задача* (1.4) *осуществляет изоморфизм между пространством исходных данных* $L^2(0, T; V') \times H$ *и пространством решений* $E = \{u : u \in L^2(0, T; V),\ u' \in L^2(0, T; V')\}$ *с нормой* $\|u\|_E = (\|u\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|u'\|^2_{L^2(0,T;V')})^{1/2}$.

Замечание 3: Теорема 1, а также оценка (1.10) (следовательно, и теоремы 2 и 6) справедливы и в предположении, что $M \in \mathscr{L}\big(L^\infty(0, T; H), L^\infty(0, T; V')\big)$ и выполняется аналог условия (1.3). При этом нужно провести дополнительные рассуждения, которые мы предпочитаем развить в случае уравнения с самосопряженным главным оператором A (пункты 5—7 в § 3), поскольку там появляются некоторые технические трудности, отсутствующие здесь.

§ 2. Сходимость метода Галеркина

Сходимость и скорость сходимости метода Галеркина в ситуации § 1 характеризуется следующим образом.

Теорема 2: *Пусть выполнены* (1.1)—(1.3). *Тогда для решений* u *и* u_n *задач* (1.4) *и* (1.8) *имеют место сходимости*

$$\begin{aligned} &\|u_n - u\|_{L^2(0,T;V)} \to 0, \\ &\|u_n' - P_n u'\|_{L^2(0,T;V_n')} \to 0, \\ &\|u_n - u\|_{C([0,T];H)} \to 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

с оценками

$$e_n(u) \leqq (\|u_n - u\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|u_n' - P_n u'\|^2_{L^2(0,T;V_n')})^{1/2} \leqq c\bar{e}_n(u), \tag{2.2}$$

$$\|u_n - u\|_{C([0,T];H)} \leqq c\bar{e}_n(u), \tag{2.3}$$

где

$$e_n(u) = \inf_{v_n \in E_n} (\|v_n - u\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|v_n' - P_n u'\|^2_{L^2(0,T;V_n')})^{1/2},$$

$$\bar{e}_n(u) = \inf_{v_n \in E_n} (\|v_n - u\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|v_n' - u'\|^2_{L^2(0,T;V')})^{1/2},$$

$$E_n = \{v_n : v_n \in L^2(0, T; V_n), \ v_n' \in L^2(0, T; V_n')\},$$

c обозначает различные постоянные. Если последовательность k_n в неравенстве (1.11) *ограничена, то дополнительно имеет место сходимость*

$$\|u_n' - u'\|_{L^2(0,T;V')} \to 0 \tag{2.4}$$

с оценкой

$$\bar{e}_n(u) \leqq (\|u_n - u\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|u_n' - u'\|^2_{L^2(0,T;V')})^{1/2} \leqq c\bar{e}_n(u). \tag{2.5}$$

Доказательство: Поскольку $\|P_n\|_{V' \to V_n'} \leqq 1$, то $e_n(v) \leqq \bar{e}_n(v) \ \forall v \in E$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что $\bar{e}_n(v) \to 0 \ \forall v \in E$ и справедливы оценки (2.2), (2.3) и (2.5).

Пусть Q_n — ортопроектор в V, проектирующий на V_n. В силу полноты системы $\{w_k\}$ в V имеем $\|v - Q_n v\|_V \to 0 \quad \forall v \in V$. Тогда для $v \in E_V = \{v : v \in L^2(V), v' \in L^2(V)\}$ имеем

$$\bar{e}_n(v) \leqq \|v - Q_n v\|_E \leqq (\|v - Qv\|^2_{L^2(V)} + d^2 \|v' - Q_n v'\|^2_{L^2(V)})^{1/2} \to 0$$

(здесь, как и раньше, $d = \|I\|_{V \to H}$). Но множество E_V всюду плотно в E (см. [11: стр. 24]), значит, $\bar{e}_n(v) \to 0 \quad \forall v \in E$.

Оценки (2.2) и (2.5) снизу вытекают из определения величин $e_n(u)$ и $\bar{e}_n(u)$. Докажем оценку (2.2) сверху. Пусть u_{n_0} — ортогональная проекция в пространстве E решения u задачи (1.4) на подпространство E_n. Тогда $\bar{e}_n(u) = \|u_{n_0} - u\|_E$. Из неравенств

$$\|u_n - u\|_{L^2(V)} \leqq \|u_n - u_{n_0}\|_{L^2(V)} + \|u_{n_0} - u\|_{L^2(V)},$$

$$\|u_n' - P_n u'\|_{L^2(V_n')} \leqq \|u_n' - u'_{n_0}\|_{L^2(V_n')} + \|u'_{n_0} - P_n u'\|_{L^2(V')}$$

$$\leqq \|u_n' - u'_{n_0}\|_{L^2(V_n')} + \|u'_{n_0} - u'\|_{L^2(V')}$$

получаем

$$\|u_n - u\|^2_{L^2(V)} + \|u_n' - P_n u'\|^2_{L^2(V_n')}$$
$$\leqq 2(\bar{e}_n^2(u) + \|u_n - u_{n_0}\|^2_{L^2(V_n)} + \|u_n' - u'_{n_0}\|^2_{L^2(V_n')}).$$

Учитывая, что $u_n(0) = P_n\xi = P_n u(0)$ и $u_n' + P_n A u_n + P_n M u_n = P_n f = P_n u' + P_n A u + P_n M u$, оценим две последние нормы справа при помощи неравенства (1.10):

$$\|u_n - u_{n_0}\|^2_{L^2(V_n)} + \|u_n' - u'_{n_0}\|^2_{L^2(V_n')}$$
$$\leqq c_2^2\big(\|u_n(0) - u_{n_0}(0)\|_H^2 + \|u_n' + P_n A u_n + P_n M u_n - u'_{n_0}$$
$$- P_n A u_{n_0} - P_n M u_{n_0}\|^2_{L^2(V_n')}\big)$$
$$= c_2^2\big(\|P_n(u(0) - u_{n_0}(0))\|_H^2 + \|P_n(u' - u'_{n_0}) + P_n A(u - u_{n_0})$$
$$+ P_n M(u - u_{n_0})\|^2_{L^2(V_n')}\big)$$
$$\leqq c_2^2\big(\|u(0) - u_{n_0}(0)\|_H^2 + (\|u' - u'_{n_0}\|_{L^2(V')}$$
$$+ a\,\|u - u_{n_0}\|_{L^2(V)} + \|M(u - u_{n_0})\|_{L^2(V')})^2\big).$$

Здесь $\|u(0)-u_{n_0}(0)\|_H \leqq \|u-u_{n_0}\|_{C(H)}$, а последняя оценивается через $\bar{e}_n(u)$. Имеем также

$$\|M(u-u_{n_0})\|_{L^2(V')} \leqq d\,\|M(u-u_{n_0})\|_{L^2(H)} \leqq d\sqrt{T}\mu\,\|u-u_{n_0}\|_{C(H)},$$

значит, и этот член оценивается через $\bar{e}_n(u)$; этим завершается доказательство оценки (2.2) сверху.

Далее, в неравенстве

$$\|u_n-u\|_{C(H)} \leqq \|u_n-u_{n_0}\|_{C(H_n)} + \|u_{n_0}-u\|_{C(H)}$$

нормы справа уже оценены через $\bar{e}_n(u)$ и, таким образом, доказана и оценка (2.3).

При установлении оценки (2.5) сверху нужно лишь заметить, что

$$\begin{aligned}\|u_n'-u'\|_{L^2(V')} &\leqq \|u_n'-u_{n_0}'\|_{L^2(V')} + \|u_{n_0}'-u'\|_{L^2(V')}\\ &\leqq k_n\,\|u_n'-u_{n_0}'\|_{L^2(V_n')} + \|u_{n_0}'-u'\|_{L^2(V')},\end{aligned}$$

а остальное рассуждение проводится как в доказательстве оценки (2.2) сверху.

Теорема доказана ∎.

§ 3. Задача с самосопряженным главным оператором

В этом параграфе мы наложим на семейство $A(t)$ более строгие ограничения и покажем, что задача Коши (1.4) осуществляет изоморфизм между более узкими пространствами решений и исходных данных. Докажем также сходимость метода Галеркина с двусторонними оценками в более сильных нормах.

1. Предположим, что, вдобавок условиям (1.1) и (1.2), оператор $A(t)$, $t\in[0,T]$, — самосопряжен, положительно определен в H с областью определения $D(A(t))$ (допускается ее зависимость от t), для любых $u, v\in V$ функция $t\to(A(t)\,u, v)$ дифференцируема в смысле распределений, её производная измерима и удовлетворяет оценке

$$\big(A'(t)\,v, v\big) \leqq b\,\|v\|_V^2 \qquad \forall v\in V,\ t\in[0,T]. \tag{3.1}$$

В задаче (1.4) допустим, что $f\in L^2(0,T;H)$ и $\xi\in V$. В § 1 мы показали, что задача (1.4) имеет единственное решение $u\in L^2(0,T;V)$, $u'\in L^2(0,T;V')$.

2. *Докажем сейчас, что решение задачи* (1.4), *для которого* $u', Au\in L^2(0,T;H)$ (*в сделанных предположениях из этого следует, что* $u\in C([0,T];V)$) *удовлетворяет оценке*

$$\begin{aligned}&c_1(\|\xi\|_V^2+\|f\|^2_{L^2(0,T;H)})^{1/2}\\ &\leqq (\|u'\|^2_{L^2(0,T;H)}+\|Au\|^2_{L^2(0,T;H)}+\|u\|^2_{L^\infty(0,T;V)})^{1/2} \leqq c_2(\|\xi\|_V^2+\|f\|^2_{L^2(0,T;H)})^{1/2},\end{aligned} \tag{3.2}$$

(*положительные*) *постоянные* c_1 *и* c_2 *не зависят от* f *и* ξ.

Как и в § 1, заменой неизвестной функции от задачи (1.4) перейдем к равносильной задаче (1.6). Оценка (3.2) снизу непосредственно устанавливается для решения задачи (1.4); мы приступим к доказательству оценки (3.2) сверху для решения задачи (1.6).

Запишем квадрат нормы от обеих частей уравнения (1.6) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\|f\|_H^2 &= \|u'\|_H^2+\|Au\|_H^2+\|e^{-\lambda t}M(e^{\lambda t}u)+\lambda u\|_H^2+2(u',Au)\\ &\quad+2\big(u',e^{-\lambda t}M(e^{\lambda t}u)\big)+2\lambda(u',u)+2\big(Au,e^{-\lambda t}M(e^{\lambda t}u)\big)+2\lambda(Au,u).\end{aligned}$$

В одну сторону соберем члены

$$\|u'\|_H^2 + \|Au\|_H^2 + \|e^{-\lambda t}M(e^{\lambda t}u) + \lambda u\|_H^2 + 2(u', Au) + 2\lambda(u', u)$$
$$+ 2\lambda(Au, u),$$

эту сумму будем оценивать вниз, а остальные члены, нуждающиеся в оценке сверху, в другую сторону. Имеем

$$2\bigl(u'(t), A(t)\,u(t)\bigr) = \bigl(A(t)u(t), u(t)\bigr)' - \bigl(A'(t)\,u(t), u(t)\bigr)$$
$$\geqq \bigl(A(t)\,u(t), u(t)\bigr)' - b\,\|u(t)\|_V^2,$$

а также

$$2\lambda\bigl(A(t)\,u(t), u(t)\bigr) \geqq 2\lambda\alpha\,\|u(t)\|_V^2,$$

и для подовления отрицательного члена $-b\,\|u(t)\|_V^2$ используем величину $2\lambda\alpha\,\|u(t)\|_V^2$; это возможно, если λ достаточно велико. Далее, интегрируем рассматриваемое равенство в пределах от 0 до t, берем супремум по t на отрезке $[0, T]$ (вместе от монотонно по t возрастающих, отдельно от других — это касается членов, оцениваемых вниз) и получим

$$\|u'\|^2_{L^2(H)} + \|Au\|^2_{L^2(H)} + \|e^{-\lambda t}M(e^{\lambda t}u) + \lambda u\|^2_{L^2(H)}$$
$$+ \sup_{0\leqq t\leqq T}\bigl(A(t)\,u(t), u(t)\bigr) + \lambda\,\|u\|^2_{L^\infty(H)}$$
$$\leqq 3\bigl(\|f\|^2_{L^2(H)} + (A(0)\,u(0), u(0)) + \lambda\,\|u(0)\|_H^2\bigr)$$
$$+ 2\sup_{0\leqq t\leqq T}\left(-\int_0^t \bigl(e^{-\lambda t}u', M(e^{\lambda t}u)\bigr)\,dt\right)$$
$$+ 2\sup_{0\leqq t\leqq T}\left(-\int_0^t \bigl(e^{-\lambda t}Au, M(e^{\lambda t}u)\bigr)\,dt\right). \tag{3.3}$$

В § 1 установлена оценка

$$\|M(e^{\lambda t}u)\,(\tau)\|_H \leqq \mu e^{\lambda\tau}\,\|u\|_{L^\infty(H)},$$

значит, последние слагаемые справа оценены через

$$2\mu\sqrt{T}\,(\|u'\|_{L^2(H)} + \|Au\|_{L^2(H)})\,\|u\|_{L^\infty(H)}$$
$$\leqq \mu\sqrt{T}\left(\varepsilon(\|u'\|^2_{L^2(H)} + \|Au\|^2_{L^2(H)}) + \frac{2}{\varepsilon}\,\|u\|^2_{L^\infty(H)}\right).$$

Допустим, что мы выбрали ε так, что $3\mu\sqrt{T}\,\varepsilon < 1$, а также $\lambda > 6\mu\sqrt{T}/\varepsilon$. Так как норму слева с оператором M можно опустить, а $\bigl(A(0)\,u(0), u(0)\bigr) \leqq a\,\|\xi\|_V^2$ и $\|u(0)\|_H \leqq d\,\|\xi\|_V$, то оценка (3.2) сверху установлена. Отметим, что норму $\|u\|_{L^\infty(V)}$ в (3.2) можно и опустить (с возможным изменением постоянной c_1), она оценивается через $(\|u'\|^2_{L^2(H)} + \|Au\|^2_{L^2(H)})^{1/2}$ ∎

3. Как и раньше, зададимся полной в V координатной системой $\{w_k\}$. Вместо (1.8) рассмотрим теперь следующую спроектированную задачу

$$u_n'(t) + P_nA(t)\,u_n(t) + P_n(Mu_n)\,(t) = P_nf(t), \quad u_n(0) = Q_n\xi, \tag{3.4}$$

где Q_n — ортопроектор в V, проектирующий на V_n. Выбор проектора Q_n в начальном условии вместо P_n оправдывается тем, что в случае проектора P_n для решений

u_n и u задач (1.8) и (1.4) соответственно выполняется оценка

$$\|P_n\xi - \xi\|_H \leqq \|u_n - u\|_{C(H)} \leqq c(\|u_n - u\|^2_{L^2(V)} + \|u_n' - u'\|^2_{L^2(V')})^{1/2}$$

и нельзя ожидать оценок сходимости в более сильных нормах чем в § 2.

Так как пространства H_n и V_n', следовательно, и $L^2(H_n)$ и $L^2(V_n')$ совпадают и имеют эквивалентные (неравномерно по n) нормы, то для решения u_n задачи (3.4) (в § 1 показано, что оно существует, единственно и $u_n \in L^2(V_n)$, $u_n' \in L^2(V_n')$) имеют место включения $P_nAu_n, u_n' \in L^2(H_n)$. Такими же выкладками, как при установлении оценки (3.2), получим оценку

$$\begin{aligned} & c_1(\|Q_n\xi\|^2_{V_n} + \|P_nf\|^2_{L^2(H_n)})^{1/2} \\ & \leqq (\|u_n'\|^2_{L^2(H_n)} + \|P_nAu_n\|^2_{L^2(H_n)} + \|u_n\|^2_{L^\infty(V_n)})^{1/2} \\ & \leqq c_2(\|Q_n\xi\|^2_{V_n} + \|P_nf\|^2_{L^2(H_n)})^{1/2} \end{aligned} \tag{3.5}$$

с теми же постоянными c_1 и c_2. Неравенства (3.5) допускают еще следующую запись: для любого v_n такого, что $P_nAv_n, v_n' \in L^2(H_n)$, имеет место

$$\begin{aligned} & c_1\big(\|v_n(0)\|^2_{V_n} + \|v_n' + P_nAv_n + P_nMv_n\|^2_{L^2(H_n)}\big)^{1/2} \\ & \leqq (\|v_n'\|^2_{L^2(H_n)} + \|P_nAv_n\|^2_{L^2(H_n)} + \|v_n\|^2_{L^\infty(V_n)})^{1/2} \\ & \leqq c_2\big(\|v_n(0)\|^2_{V_n} + \|v_n' + P_nAv_n + P_nMv_n\|^2_{L^2(H_n)}\big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Поскольку энергетическим пространством оператора $P_nA(t)$, действующего в H_n, является V_n (с точностью до равномерной по t и n эквивалентности норм), то, как и в неравенстве (3.2), можно здесь опустить норму $\|v_n\|_{L^\infty(V_n)}$.

4. Так как $\|P_nf\|_{L^2(H_n)} \leqq \|f\|_{L^2(H)}$ и $\|Q_n\xi\|_{V_n} \leqq \|\xi\|_V$, то из оценки (3.5) сверху вытекает, что последовательность решений задач (3.4) u_n ограничена в пространстве $F = \{v: v \in L^2(V),\ v' \in L^2(H)\}$ с нормой $\|v\|_F = (\|v\|^2_{L^2(V)} + \|v'\|^2_{L^2(H)})^{1/2}$. Выделим подпоследовательность u_n, $n \in N'$, сходящуюся слабо в F к элементу $u \in F$. Покажем, что u есть решение задачи (1.4). Точно также, как в § 1.5, доказывается, что u удовлетворяет дифференциальному уравнению задачи (1.4). Чтобы установить выполненность начального условия, введем, как и раньше, функционалы ψ_w, соответствующие элементам $w \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$: $\psi_w(v) = \big(v(0), w\big)$, $v \in F$. При проверке их непрерывности на F нужно лишь дополнительно оценить $\|v\|_{C(H)}$ через $\|v\|_F$. Таким образом, $\psi_w(u_n) \to \psi_w(u)$, $n \in N'$, т. е. $\big(u_n(0), w\big) \to \big(u(0), w\big)$, $n \in N'$. Но $u_n(0) = Q_n\xi \to \xi$ в V, значит, и в H, следовательно, $\big(u_n(0), w\big) = (\xi, w)$. Остальное ясно.

Мы показали, что в данном случае решение u задачи (1.4) содержится в F, значит, $u' \in L^2(H)$. Тогда $Au \in L^2(H)$ и имеет место (3.2). Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 3: *Если выполнены условия* (1.1), (1.2), *оператор* $A(t)$, $t \in [0, T]$, *— самосопряжен и положительно определен в* H, *имеет место* (3.1), *то задача* (1.4) *осуществляет изоморфизм между пространством исходных данных* $L^2(0, T; H) \times V$ *и пространством решений* $E_A = \{u: u', Au \in L^2(0, T; H)\}$ *с нормой* $\|u\|_{E_A} = (\|u'\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|Au\|^2_{L^2(0,T;H)})^{1/2}$.

5. Предположим сейчас, что $A(t)$, $t \in [0, T]$, — самосопряжен, положительно определен в H с областью определения $D(A)$, не зависящей от t. Пусть $A(t)$ сильно непрерывно дифференцируем по t на $D(A)$. Энергетическим пространством $H_{A(t)}$ оператора $A(t)$ является V (точнее, V как множество совпадает с $H_{A(t)}$,

их нормы равномерно по t эквивалентны) и выполняются условия (1.1) и (1.2) (см. [14]). Можно также показать, что производная $A'(t)$ удовлетворяет условию (см. [14])

$$\left(A'(t)\,v, v\right) \leqq b\,\|v\|_V^2 \quad \forall v \in D(A).$$

Поскольку операторы $A(t)\,A^{-1}(0)$ и $A(0)\,A^{-1}(t)$ равномерно по t ограничены в H (см. [14]), то нормы $\|A(t)\,v\|_H$, $v \in D(A)$, равномерно по t эквивалентны, значит,

$$a_1\,\|A(t)\,v\|_H \leqq \|A(0)\,v\|_H \leqq a_2\,\|A(t)\,v\|_H \qquad \forall v \in D(A). \tag{3.7}$$

Пусть теперь $M \in \mathscr{L}\left(L^\infty(0, T; V), L^\infty(0, T; H)\right)$ и выполнено условие

$$\|r_t M v\|_{L^\infty(0,T;H)} \leqq \mu\,\|r_t v\|_{L^\infty(0,t;V)} \qquad \forall v \in L^\infty(0, T; V), \quad t \in (0, \mathrm{T}). \tag{3.8}$$

Попробуем установить оценку (3.2) для решения u задачи (1.4), если u', $Au \in L^2(H)$. Вместо оценки (3.3) запишем

$$\|u'\|^2_{L^2(H)} + \|Au\|^2_{L^2(H)} + \alpha\,\|u\|^2_{L^\infty(V)} \leqq 2\left(\|f\|^2_{L^2(H)} + \|\xi\|^2_{H_{A(0)}} + \lambda\,\|\xi\|_H^2\right.$$
$$+ 2\sup_{0\leqq t\leqq T}\left(-\int_0^t\left(e^{-\lambda t}u', M(e^{\lambda t}u)\right)dt\right)$$
$$\left.+ 2\sup_{0\leqq t\leqq T}\left(-\int_0^t\left(e^{-\lambda t}Au, M(e^{\lambda t}u)\right)dt\right)\right);$$

мы опустили слева норму с оператором M и не оценили супремум от $\lambda\,\|u(t)\|_H^2$. Как и в § 1, получим здесь, что $\|M(e^{\lambda\sigma}u)\,(\tau)\|_H \leqq \mu e^{\lambda t}\,\|u\|_{L^\infty(V)}$, а последние два супремума справа оценим через

$$2\mu\sqrt{T}\,\left(\|u'\|_{L^2(H)} + \|Au\|_{L^2(H)}\right)\,\|u\|_{L^\infty(V)}$$
$$\leqq \frac{1}{3}\left(\|u'\|^2_{L^2(H)} + \|Au\|^2_{L^2(H)}\right) + 6\mu^2 T\,\|u\|^2_{L^\infty(V)}.$$

Тогда на отрезке $[0, T_0]$, где $\alpha > 12\mu^2 T_0$, оценка (3.2) установлена. Аналогично докажем на $[0, T_0]$ для решения u_n задачи (3.4) оценку (3.5), причем постоянные c_1 и c_2 опять те же самые, что и в оценке решения исходной задачи.

6. По предположению, для любого $v \in D(A)$ функция $t \to A'(t)\,v$ непрерывна из $[0, T]$ в H. Из этого вытекает, что при любом $x \in H$ норма $\|A'(t)\,A^{-1}(0)\,x\|_H$ ограничена на $[0, T]$ и, в силу принципа равномерной ограниченности, операторы $A'(t)\,A^{-1}(0)$ равномерно по t ограничены в H; пусть $\|A'(t)\,v\|_H \leqq b_1\,\|A(0)\,v\|_H$ $\forall v \in D(A)$. Функция $t \to \left(A(t)\,u, v\right)$ при любых $u \in D(A)$, $v \in H$ непрерывно дифференцируема, значит, $\left(A(t)\,u, v\right) - \left(A(0)\,u, v\right) = t\left(A'(\theta)\,u, v\right)$, где $\theta \in (0, t)$ (θ зависит от u и v). Но

$$\|A(t)\,u - A(0)\,u\|_H = \sup_{\|v\|_H=1}\left|\left(A(t)\,u, v\right) - \left(A(0)\,u, v\right)\right|$$
$$\leqq t b_1\,\|A(0)\,u\|_H \quad \forall u \in D(A).$$

Выберем теперь координатную систему $\{w_k\}$ полную в $D(A)$ такую, что $\|P_n A(0)\,v\|_H \geqq \frac{1}{2}\,\|A(0)\,v\|_H \quad \forall v \in H_n$ (см. [16]). Тогда на отрезке $[0, T_0]$

имеем

$$\|P_nAu_n\|_{L^2(H_n)} \geqq \|P_nA(0)\,u_n\|_{L^2(H_n)} - \|P_nAu_n - P_nA(0)\,u_n\|_{L^2(H_n)}$$

$$\geqq \frac{1}{2}\,\|A(0)\,u_n\|_{L^2(H)} - T_0b_1\,\|A(0)\,u_n\|_{L^2(H)} \geqq \left(\frac{1}{2} - T_0b_1\right)a_1\,\|Au_n\|_{L^2(H)};$$

допустим, что мы выбрали T_0 уже столь малое, что $T_0 < 1/(2b_1)$, для уобства изложения считаем также, что $T/T_0 = m$ — целое число. Таким образом, из оценки (3.5) следует, что последовательность решений u_n задач (3.4) ограничена в пространстве $E_A[0, T_0] = \{v\colon v', Av \in L^2(0, T_0; H)\}$ с нормой $\|v\|_{E_A[0,T_0]} = (\|v'\|^2_{L^2(0,T_0;H)} + \|Av\|^2_{L^2(0,T_0;H)})^{1/2}$. Значит, некоторая ее подпоследовательность $u_n(n \in N')$ сходится слабо в $E_A[0, T_0]$ к элементу $u^1 \in E_A[0, T_0]$. Как и в пункте 4, показывается, что u^1 является решением задачи (1.4) на $[0, T_0]$; мы должны лишь, чтобы применить оператор M, продолжить u^1 нулем на весь отрезок. Итак, нами установлена существование решения на отрезке $[0, T_0]$. Опишем процесс продолжения решения на весь отрезок $[0, T]$. Задаче

$$u'(t) + A(t)\,u(t) + (Mu)\,(t) = f(t) - (Mu')\,(t),\ t \in [T_0, 2T_0],\ u(T_0) = u^1(T_0) \tag{3.9}$$

построим решение $u^2 \in E_A[T_0, 2T_0]$, причем для предельного перехода придется выбрать полную в $D(A)$ координатную систему такую, что $\|P_nA(T_0)\,v\|_H \geqq \frac{1}{2}\,\|A(T_0)\,v\|_H\ \forall\, v \in H_n$. Тогда для решений приближенных задач получим оценку

$$\|P_nAu_n\|_{L^2(H_n)} \geqq \left(\frac{1}{2} - T_0b_1\right)\|A(T_0)\,u_n\|_{L^2(H_n)} \geqq \left(\frac{1}{2} - T_0b_1\right)\frac{a_1}{a_2}\,\|Au_n\|_{L^2(H)};$$

а это позволяет установить ограниченность u_n в $E_A[T_0, 2T_0]$, значит, и существование ее слабой предельной точки u^2 — решения задачи (3.9). Аналогично получаем решение $u^3 \in E_A[2T_0, 3T_0]$ задачи

$$u'(t) + A(t)\,u(t) + (Mu)\,(t)$$
$$= f(t) - (Mu^1)\,(t) - (Mu^2)\,(t),\ t \in [2T_0, 3T_0],\ u(2T_0) = u^2(2T_0),$$

и т. д., пока через m шагов дойдем до конца отрезка $[0, T]$. Решением задачи (1.4) на всем отрезке $[0, T]$ является $u = u^1 + \cdots + u^m$; мы считаем, что решения $u^i(i = 1, \ldots, m)$ продолжены нулем вне своей естественной области определения. Единственность же решения вытекает из оценки (3.2) сверху, которая пока установлена на подотрезках длиной T_0.

Поскольку оценка (3.2) снизу установлена на всем отрезке $[0, T]$, а существование и единственность решения в $E_A[0, T]$ доказаны при любых $f \in L^2(0; T; H)$, и $\xi \in V$, то, по теореме Банаха, имеет место и оценка (3.2) сверху (возможно, с другой постоянной c_2, чем она была установлена для отрезка длиной T_0). В итоге доказана:

Теорема 4: *Пусть оператор $A(t)$, $t \in [0, T]$, — самосопряжен, положительно определен в H с областью определения $D(A)$, не зависящей от t. Пусть $A(t)$ — сильно непрерывно дифференцируем по t на $D(A)$, а оператор $M \in \mathscr{L}\big(L^\infty(0, T; V), L^\infty(0, T; H)\big)$ удовлетворяет условию (3.8). Тогда задача (1.4) осуществляет изоморфизм между пространствами, указанными в теореме 3.*

Замечание 4: В предположениях § 3 (теоремы 3—5, пункт 7) также можно в уравнение (1.4) включить оператор B, описанный в замечании 2. Тогда, при установлении оценки (3.2) сверху, переносим член Bu в правую часть уравнения.

(1.6), затем имеем

$$\|f - Bu\|^2_{L^2(H)} \leqq 2(\|f\|^2_{L^2(H)} + b^2\,\|u\|^2_{L^2(V)})$$

и для подавления нормы $2b^2\,\|u\|^2_{L^2(V)}$ используем часть из $2\lambda\alpha\,\|u\|^2_{L^2(V)}$.

7. В предположениях пункта 5 для решения u_n задачи (3.4) оценка (3.5) снизу установлена на всем отрезке $[0, T]$, а сверху пока на отрезках длиной T_0. Разложим u_n на сумму $u_n = u_n^1 + \cdots + u_n^m$, где u_n^i совпадает с u_n на отрезке $[(i-1)\,T_0, iT_0]$ и равен нулю вне его.

На отрезке $[0, T]$ оценка (3.5) сверху доказана, фактически имеем

$$\begin{aligned}&(\|u_n^{1\prime}\|^2_{L^2(H_n)} + \|P_nAu_n^1\|^2_{L^2(H_n)} + \|u_n^1\|^2_{L^\infty(V_n)})^{1/2}\\ &\leqq c_2(\|Q_n\xi\|^2_{V_n} + \|P_nf\|^2_{L^2(0,T_0;H_n)})^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Так как

$$\begin{aligned}&u_n^{2\prime}(t) + P_nA(t)\,u_n^2(t) + P_n(Mu_n^2)\,(t)\\ &= P_nf(t) - P_n(Mu_n^1)\,(t), \qquad t \in [T_0, 2T_0],\ u_n^2(T_0) = u_n^1(T_0),\end{aligned}$$

то, применяя здесь (3.5) на отрезке $[T_0, 2T_0]$ и (3.10), имеем

$$\begin{aligned}&(\|u_n^{2\prime}\|^2_{L^2(H_n)} + \|P_nAu_n^2\|^2_{L^2(H_n)} + \|u_n^2\|^2_{L^\infty(V_n)})^{1/2}\\ &\leqq c_2\big(\|u_n^1(T_0)\|^2_{V_n} + \|P_n(f - Mu_n^1)\|^2_{L^2(0,2T_0;H_n)}\big)^{1/2}\\ &\leqq c_{22}(\|Q_n\xi\|_V^2 + \|P_nf\|^2_{L^2(0,2T_0;H_n)})^{1/2},\end{aligned}$$

c_{22} — постоянная. Аналогично оценим и последующие u_n^i на соответствующих отрезках; просуммировав эти оценки, получим (3.5) (а также (3.6)) сверху на всем отрезке $[0, T]$ (с некоторой постоянной c_2, отличной от использованной в этом пункте, но не зависящей от n, f и ξ).

8. Установим еще сходимость метода Галеркина.

Теорема 5: *Пусть выполнены предположения теоремы 3, причем $D(A(t))$ не зависит от t и имеет место (3.7), или же выполнены предположения теоремы 4. Пусть в задаче (1.4) $f \in L^2(0, T; H)$, $\xi \in V$ и координатная система $\{w_k\}$ полна в $D(A)$. Тогда для решений u и u_n задач (1.4) и (3.4) имеют место сходимости*

$$\|P_nAu_n - Au\|_{L^2(0,T;H)} \to 0,$$

$$\|u_n' - u'\|_{L^2(0,T;H)} \to 0,$$

$$\|u_n - u\|_{C([0,T];V)} \to 0.$$

Справедлива двусторонняя оценка сходимости

$$\begin{aligned}&c_1\big(\|P_nf - f\|_{L^2(0,T;H)} + \|Q_n\xi - \xi\|_V + \|P_nMu - Mu\|_{L^2(0,T;H)} + e_n(u)\big)\\ &\leqq (\|u_n' - u'\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|P_nAu_n - Au\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|u_n - u\|^2_{C([0,T];V)}\\ &\quad + \|P_nMu_n - Mu\|^2_{L^2(0,T;H)})^{1/2}\\ &\leqq c_2\big(\|P_nf - f\|_{L^2(0,T;H)} + \|Q_n\xi - \xi\|_V + \|P_nMu - Mu\|_{L^2(0,T;H)} + e_n(u)\big),\end{aligned} \tag{3.11}$$

где

$$e_n(u) = \inf_{v_n \in E_n} \left(\|v_n' - u'\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|P_n A v_n - Au\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|v_n - u\|^2_{C([0,T];V)} \right)^{1/2},$$

$$E_n = \{v_n : v_n, v_n' \in L^2(0, T; H_n)\},$$

c_1, c_2 — *некоторые (положительные) постоянные.*

Доказательство: Поскольку $e_n(v) \to 0$ при любой v такой, что v', $Av \in L^2(H)$ (см. [14], с учетом (3.7)), то достаточно доказать оценку (3.11). Оценка (3.11) снизу проверяется непосредственно, а ее доказательство сверху опирается на оценку (3.6) сверху; оно по существу приведено в [8] и лишь в деталях отличается от аналогичного доказательства в [14] для случая $M = 0$ ∎

§ 4. Устойчивость метода Галеркина

1. Чтобы поставить проблему об устойчивости метода Галеркина, предположим, что оператор $M \in \mathscr{L}\big(L^\infty(0, T; H), L^\infty(0, T; H)\big)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\left.\begin{array}{l} \text{на функциях вида } u(t) = c(t)\, u_0,\ u_0 \in H, \text{ оператор } M \\ \text{действует по правилу } (Mu)(t) = (M_0 c)(t)\, M_1(t)\, u_0, \\ \text{где } M_0 \in \mathscr{L}\big(L^\infty(0, T; \mathbf{R}), L^\infty(0, T; \mathbf{R})\big),\ M_1(t) \in \mathscr{L}(H, H). \end{array}\right\} \qquad (4.1)$$

Решение задачи (1.8), имеющее представление

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^n c_{nk}(t)\, w_k,$$

определяется из равносильной к (1.8) задачи

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n (w_k, w_i)\, c'_{nk}(t) + \sum_{k=1}^n \big(A(t)\, w_k, w_i\big)\, c_{nk}(t) + \sum_{k=1}^n \big(M_1(t)\, w_k, w_i\big)\, (M_0 c_{nk})(t) \\ &= \big(f(t), w_i\big), \\ &\sum_{k=1}^n (w_k, w_i)\, c_{nk}(0) = (\xi, w_i), \qquad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Ввиду того, что при численной реализации задачи (4.2) коэффициенты в ней, как скалярные произведения, вычисляются приближенно, решается возмущенная задача

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n \big((w_k, w_i) + \gamma_{ik}\big)\, b'_{nk}(t) + \sum_{k=1}^n \big((A(t)\, w_k, w_i) + \alpha_{ik}(t)\big)\, b_{nk}(t) \\ &+ \sum_{k=1}^n \big((M_1(t)\, w_k, w_i) + \beta_{ik}(t)\big)\, (M_0 b_{nk})(t) = \big(f(t), w_i\big) + g_{ni}(t), \\ &\sum_{k=1}^n \big((w_k, w_i) + \gamma_{ik}\big)\, b_{nk}(0) = (\xi, w_i) + \eta_{ni}, \qquad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Задачей (4.3) определяется возмущенное приближенное решение

$$v_n(t) = \sum_{k=1}^{n} b_{nk}(t)\, w_k.$$

Поставим проблему о зависимости $v_n - u_n$ от возмущений в системе (4.3).

2. Введем обозначения для матриц

$$\Gamma_n = \{\gamma_{ik}\}, \qquad A_n(t) = \{\alpha_{ik}(t)\},\ B_n(t) = \{\beta_{ik}(t)\}$$

и векторов возмущений

$$g_n(t) = \{g_{ni}(t)\}, \qquad \eta_n = \{\eta_{ni}\},$$

а также

$$\Lambda_n = \{(w_i, w_k)\}, \quad M_n = \{(w_i, w_k)_{V_n'}\}, \quad N_n = \{(w_i, w_k)_V\}.$$

Пусть λ_n, μ_n, ν_n — наименьшие собственные значения матриц Λ_n, M_n, N_n соответственно. Отметим, что условие $\inf \mu_n > 0$ влечет $\lim \lambda_n > 0$, а из последнего, в свою очередь, следует, что $\lim \nu_n > 0$. Естественно предполагать, что матрицы Γ_n — симметричны, а $A_n(t)$ и $B_n(t)$ — измеримы по t. Нормы векторам и матрицам припишем как элементам и векторам эвклидова пространства $\mathbf{R}^n$.

Теорема 6: *Пусть выполнены условия* (1.1)—(1.3) *и* (4.1). *Пусть* $f \in L^2(0, T; V')$, $\xi \in H$.

1° *Если* $\|\Gamma_n\| \leqq n_1 \min\left\{\sqrt{\mu_n\nu_n}, \lambda_n\right\}$, $\sup\limits_{0\leqq t\leqq T} \|A_n(t)\| \leqq r_2\nu_n$, $\sup\limits_{0\leqq t\leqq T} \|B_n(t)\| \leqq r_3\sqrt{\lambda_n\nu_n}$, *где* r_1, r_2 *и* r_3 — *некоторые положительные постоянные, то задача* (4.3) *однозначно разрешима и*

$$\begin{aligned} |||v_n - u_n||| &\equiv (\|v_n - u_n\|^2_{L^2(0,T;V)} + \|v_n' - u_n'\|^2_{L^2(0,T;V_n')})^{1/2} \\ &\leqq c\left(\frac{\|u_n'\|_{L^2(0,T;V_n')}}{\sqrt{\mu_n\nu_n}}\|\Gamma_n\| + \frac{\|u_n\|_{L^2(0,T;V_n)}}{\nu_n}\sup_{0\leqq t\leqq T}\|A_n(t)\| \right. \\ &\quad + \frac{\|u_n\|_{C([0,T];H_n)}}{\sqrt{\lambda_n\nu_n}}\sup_{0\leqq t\leqq T}\|B_n(t)\| + \frac{1}{\sqrt{\nu_n}}\|g_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{R}^n)} \\ &\quad \left. + \frac{\|u_n(0)\|_{H_n}}{\lambda_n}\|\Gamma_n\| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\|\eta_n\|\right), \end{aligned} \tag{4.4}$$

c — некоторая постоянная.

2° *Существуют не зависящие от n положительные постоянные* $c_1, \ldots, c_6$ *такие, что:*

1. *если* $A_n(t) = 0$, $B_n(t) = 0$, $g_n(t) = 0$, $\eta_n = 0$, *то существуют* $\Gamma_n \neq 0$ (*со сколь угодно малой нормой*) *и* $u_n \neq 0$ *такие, что*

$$|||v_n - u_n||| \geqq \frac{c_1\, |||u_n|||}{\sqrt{\mu_n\nu_n}}\|\Gamma_n\|; \tag{4.5}$$

2. *если* $\Gamma_n = 0$, $B_n(t) = 0$, $g_n(t) = 0$, $\eta_n = 0$, *то существуют* $A_n(t) \neq 0$ (*со сколь угодно малой нормой*) *и* $u_n \neq 0$ *такие, что*

$$|||v_n - u_n||| \geqq \frac{c_2\, |||u_n|||}{\nu_n}\sup_{0\leqq t\leqq T}\|A_n(t)\|; \tag{4.6}$$

3. *если* $\Gamma_n = 0$, $A_n(t) = 0$, $g_n(t) = 0$, $\eta_n = 0$, *то существуют* $B_n(t) \neq 0$ (*со сколь угодно малой нормой*) *и* $u_n \neq 0$ *такие, что*

$$|||v_n - u_n||| \geq \frac{c_3 \|u_n\|_{C([0,T];H_n)}}{\sqrt{\lambda_n \nu_n}} \sup_{0 \leq t \leq T} \|B_n(t)\|; \tag{4.7}$$

4. *если* $A_n(t) = 0$, $B_n(t) = 0$, $g_n(t) = 0$, $\eta_n = 0$, *то существуют* $\Gamma_n \neq 0$ (*со сколь угодно малой нормой*) *и* $u_n \neq 0$ *такие, что*

$$|||v_n - u_n||| \geq \frac{c_4 \|u_n(0)\|_{H_n}}{\lambda_n} \|\Gamma_n\|; \tag{4.8}$$

5. *если* $\Gamma_n = 0$, $A_n(t) = 0$, $B_n(t) = 0$, $\eta_n = 0$, *то существует* $g_n(t) \neq 0$ *такой, что*

$$|||v_n - u_n||| \geq \frac{c_5}{\sqrt{\nu_n}} \|g_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{R}^n)};$$

6. *если* $\Gamma_n = 0$, $A_n(t) = 0$, $B_n(t) = 0$, $g_n(t) = 0$, *то существует* $\eta_n \neq 0$ *такой, что*

$$|||v_n - u_n||| \geq \frac{c_6}{\sqrt{\lambda_n}} \|\eta_n\|.$$

3° *В оценках* (4.5) *и* (4.6) *можно* $|||\dot{u}_n|||$ *заменить величиной* $(\|f\|^2_{L^2(0,T;V')} + \|\xi\|_H{}^2)^{1/2}$, *а в* (4.7) *и* (4.8) *нормы* $\|u_n\|_{C([0,T];H_n)}$ *и* $\|u_n(0)\|_{H_n}$ *величиной* $\|\xi\|_H$, *где* f *и* ξ — *некоторые элементы в* (1.4) (*зависящие от* n), *которым соответствует* u_n *в* (1.8) *или* (4.2).

Доказательство опирается на оценку (1.10) и идейно не отличается от приведенного в [15] для случая $M = 0$.

Метод Галеркина (1.8) будем называть *устойчивым в норме* $|||\cdot|||$, определенной в (4.4), если существуют положительные постоянные c, p_1, p_2 и p_3, не зависящие от n и исходных данных f и ξ, такие, что при $\|\Gamma_n\| \leq p_1$, $\|A_n(t)\| \leq p_2$ и $\|B_n(t)\| \leq p_3$ задача (4.3) однозначно разрешима и для решений u_n и v_n, определенных из задач (4.2) и (4.3) соответственно, выполняется оценка

$$|||v_n - u_n||| \leq c\Big(\big(\|\Gamma_n\| + \sup_{0 \leq t \leq T} \|A_n(t)\| + \sup_{0 \leq t \leq T} \|B_n(t)\|\big) \\ \times (\|f\|^2_{L^2(0,T;V')} + \|\xi\|_H{}^2)^{1/2} + \|g_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{R}^n)} + \|\eta_n\|\Big).$$

Из теоремы 6 следует, что необходимым и достаточным условием для устойчивости метода Галеркина в только что приведенном смысле является ограниченность μ_n снизу положительным числом. Из теоремы 6 видно также, что если скалярные произведения (w_i, w_k) вычисляются точно, то необходимым и достаточным условием устойчивости метода (1.8) в норме из (4.4) является $\underline{\lim}\, \lambda_n > 0$, т. е. сильная минимальность системы $\{w_k\}$ в H.

Отметим, что устойчивость метода Галеркина в рассматриваемом смысле не характеризует всесторонне его численную реализацию, а лишь практическое составление задачи Коши (4.2); о происхождении этого понятия см. [17].

3. Решение задачи (3.4) определяется из аналогичной (4.2) задачи, по-другому выглядит только начальное условие:

$$\sum_{k=1}^{n} (w_k, w_i)_V\, c_{nk}(0) = (\xi, w_i)_V;$$

а в возмущенной задаче типа (4.3) имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\left((w_k, w_i)_V + \delta_{ik}\right) b_{nk}(0) = (\xi, w_i)_V + \eta_{ni}. \tag{4.9}$$

Обозначим еще $\Delta_n = \{\delta_{ik}\}$ — симметричная матрица.

Теорема 7: *Пусть выполнены предположения теоремы* 3, *оператор* $M \in \mathscr{L}\left(L^\infty(0, T; H), L^\infty(0, T; H)\right)$ *удовлетворяет условию* (4.1) *или же выполнены предположения теоремы* 4, *а оператор* $M \in \mathscr{L}\left(L^\infty(0, T; V), L^\infty(0, T; H)\right)$ *удовлетворяет соответствующему аналогу* (4.1). *Пусть* $f \in L^2(0, T; H)$ *и* $\xi \in V$.

1° *Если* $\|\Gamma_n\| \leqq r_1\lambda_n$, $\sup\limits_{0\leqq t\leqq T}\|A_n(t)\| \leqq r_2\sqrt{\lambda_n\nu_n}$, $\sup\limits_{0\leqq t\leqq T}\|B_n(t)\| \leqq r_3\sqrt{\lambda_n\nu_n}$, $\|\Delta_n\| \leqq r_4\nu_n$, *где* $r_1 - r_4$ *некоторые положительные постоянные, то система уравнений из* (4.3) *с начальными условиями* (4.9) *однозначно разрешима и*

$$\begin{aligned}
|||v_n - u_n||| &\equiv \left(\|v_n' - u_n'\|^2_{L^2(0,T;H_n)} + \|P_nA(v_n - u_n)\|^2_{L^2(0,T;H_n)}\right.\\
&\quad \left.+ \|v_n - u_n\|^2_{C([0,T];V_n)}\right)^{1/2}\\
&\leqq c\left(\frac{\|u_n'\|_{L^2(0,T;H_n)}}{\lambda_n}\|\Gamma_n\| + \frac{\|u_n\|_{L^2(0,T;V_n)}}{\sqrt{\lambda_n\nu_n}}\sup_{0\leqq t\leqq T}\|A_n(t)\|\right.\\
&\quad + \frac{\|u_n\|_{C([0,T];V_n)}}{\sqrt{\lambda_n\nu_n}}\sup_{0\leqq t\leqq T}\|B_n(t)\| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\|g_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{R}^n)}\\
&\quad \left. + \frac{\|u_n(0)\|_{V_n}}{\nu_n}\|\Delta_n\| + \frac{1}{\sqrt{\nu_n}}\|\eta_n\|\right),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

c — некоторая постоянная.

2° *Существуют не зависящие от n положительные постоянные* $c_1, \ldots, c_6$ *такие, что:*

1. *при* $A_n(t) = 0$, $B_n(t) = 0$, $\Delta_n = 0$, $g_n(t) = 0$, $\eta_n = 0$ *существуют* $\Gamma_n \neq 0$ (*со сколь угодно малой нормой*) *и* $u_n \neq 0$ *такие, что*

$$|||v_n - u_n||| \geqq \frac{c_1\,|||u_n|||}{\lambda_n}\|\Gamma_n\|; \tag{4.11}$$

2. *при* $\Gamma_n = 0$, $B_n(t) = 0$, $\Delta_n = 0$, $g_n(t) = 0$, $\eta_n = 0$ *существуют* $A_n(t) \neq 0$ (*со сколь угодно малой нормой*) *и* $u_n \neq 0$ *такие, что*

$$|||v_n - u_n||| \geqq \frac{c_2\,|||u_n|||}{\sqrt{\lambda_n\nu_n}}\sup_{0\leqq t\leqq T}\|A_n(t)\|; \tag{4.12}$$

3. *при* $\Gamma_n = 0$, $A_n(t) = 0$, $\Delta_n = 0$, $g_n(t) = 0$, $\eta_n = 0$ *существуют* $B_n(t) \neq 0$ (*со сколь угодно малой нормой*) *и* $u_n \neq 0$ *такие, что*

$$|||v_n - u_n||| \geqq \frac{c_3\,\|u_n\|_{C([0,T];V_n)}}{\sqrt{\lambda_n\nu_n}}\sup_{0\leqq t\leqq T}\|B_n(t)\|; \tag{4.13}$$

4. *при* $\Gamma_n = 0$, $A_n(t) = 0$, $B_n(t) = 0$, $g_n(t) = 0$, $\eta_n = 0$ *существуют* $\Delta_n \neq 0$ (*со сколь угодно малой нормой*) *и* $u_n \neq 0$ *такие, что*

$$|||v_n - u_n||| \geqq \frac{c_4\,\|u_n(0)\|_{V_n}}{\nu_n}\|\Delta_n\|; \tag{4.14}$$

5. *при* $\Gamma_n = 0$, $A_n(t) = 0$, $B_n(t) = 0$, $\Delta_n = 0$, $\eta_n = 0$ *и некотором* $g_n(t) \neq 0$

$$|||v_n - u_n||| \geqq \frac{c_5}{\sqrt{\lambda_n}} \|g_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{R}^n)};$$

6. *при* $\Gamma_n = 0$, $A_n(t) = 0$, $B_n(t) = 0$, $\Delta_n = 0$, $g_n(t) = 0$ *и некотором* $\eta_n \neq 0$

$$|||v_n - u_n||| \geqq \frac{c_6}{\sqrt{\nu_n}} \|\eta_n\|.$$

3° *В оценках* (4.11) *и* (4.12) *можно* $|||u_n|||$ *заменить величиной* $(\|f\|^2_{L^2(0,T;H)} + \|\xi\|_V{}^2)^{1/2}$, *а* $\|u_n\|_{C([0,T];V_n)}$ *и* $\|u_n(0)\|_{V_n}$ *в* (4.13) *и* (4.14) *нормой* $\|\xi\|_V$, *где* f *и* ξ *— некоторые исходные данные в* (1.4) (*зависящие от* n), *которым соответствует* u_n *в* (3.4).

Здесь доказательство опирается на оценку (3.6) и лишь в деталях отличается от случая $M = 0$, изложенного в [14].

Устойчивости метода Галеркина (3.4) в норме $|||\cdot|||$, определенной в (4.10), придаем такую же смысль, что и в пункте 2. Тогда из теоремы 7 следует, что метод (3.4) устойчив в норме $|||\cdot|||$ из (4.10) тогда и только тогда, когда система $\{w_k\}$ сильно минимальна в H.

§ 5. Библиографические замечания и комментарии

1. В [2] доказана, что задача (1.4) имеет единственное решение при условиях (1.1)—(1.3), $f \in L^2(0, T; V')$, $\xi \in H$, но при дополнительных ограничениях:

$$\text{вложение } V \subset H \text{ компактно}, \tag{5.1}$$

$$\text{из } u_n \to u \text{ п. в. на } [0, T] \text{ следует, что } Mu_n \to Mu \text{ п. в. на } [0, T]. \tag{5.2}$$

Особенно ограничительным нужно считать из них (5.2), оно не выполняется, например, для оператора, определенного соотношением

$$(Mu)(t) = \int_0^t u(s)\, ds, \qquad u \in L^\infty(0, T; H),$$

и это практически исключало возможность взять в качестве M интегральные операторы. Правда, анализ доказательств в [2] показывает, что достаточно, если (5.2) выполняется для ограниченных в $L^\infty(0, T; H)$ последовательностей, а это уже существенное ослабление ограничений на задачу (1.4). Там же установлена оценка (1.7) и, таким образом, доказана непрерывная зависимость решения в нормах пространств $L^2(0, T; V)$ и $C([0, T]; H)$ от исходных данных $f \in L^2(0, T; V')$, $\xi \in H$. Теоремой 1 избавляются от (5.1), (5.2) и указывается, в каких нормах задача (1.4) осуществляет изоморфизм. Теорему 1 в случае $M = 0$ можно уже назвать классической (см. [10, 11]).

2. Для задачи (1.4) с $M \in \mathscr{L}(L^\infty(0, T; V), L^\infty(0, T; H))$ и $f \in L^2(0, T; H)$, $\xi \in D(A(0))$ в [2] также установлена единственная разрешимость, но опять-таки при ограничениях (5.1) и (5.2). При этом на семейство $A(t)$ налагаются условия теоремы 3. Теоремой 4 показано, что и здесь от (5.1) и (5.2) можно освободиться, можно допустить $\xi \in V$, зато нужно больше требовать от семейства $A(t)$. Теорема 3 для $M = 0$ имеется в [14].

3. Теорема 2 о сходимости и скорости сходимости метода Галеркина для случая $M = 0$ приведено в [12].

4. Сходимость метода (3.4) для задачи (1.4) с самосопряженным главным оператором $A(t)$ изучена в [8], опираясь на результаты работы [2], тем самым и при тех же ограничениях, указанных в пункте 2. Предполагается также, что $D(A(t))$ не зависит от t, нормы в них равномерно по t эквивалентны и производная $A'(t)$ неположительна: $(A'(t)\,v, v) \leqq 0 \ \forall v \in V$. Сходимости, приведенные в теореме 5, доказаны на отрезке $[0, T_0]$, где $\alpha > 2T_0\mu^2$, приведены также оценки сходимости сверху и снизу через разные величины. Теоремой 5 избавляются от (5.1), (5.2), неположительности $A'(t)$ и ограничения $\alpha > 2T\mu^2$, допускается $\xi \in V$ и устанавливается двусторонние оценки сходимости.

5. Устойчивость метода (3.4) при тех же условиях, наложенных на задачу (1.4), что и в [8], изучена в [9]. Показано, что метод устойчив в норме пространства $C([0, T]; H)$ на отрезке $[0, T_0]$ (здесь $\alpha > cT_0\mu^2$, c — некоторая постоянная), если координатная система сильно минимальна в H. Теорема 7 показывает, что сильная минимальность координатной системы в H необходимо и достаточно для устойчивости метода (3.4) в более сильных мормах.

6. В [4] рассматривается задача

$$\begin{aligned} &u''(t) + A(t)\,u'(t) + (M_0u)(t) + (M_1u')(t) = f(t), \\ &u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где $A(t) = A$ не зависит от t, выполнены (1.1) и (1.2), A самосопряжен в H. Операторы $M_0 \in \mathscr{L}(L^\infty(0, T; V), L^\infty(0, T; H))$ и $M_1 \in \mathscr{L}(L^\infty(0, T; H), L^\infty(0, T; H))$ удовлетворяют условиям (3.8) и (1.3) соответственно, а $f \in L^2(0, T; H)$, $u_0 \in V$, $u_1 \in H$. Предполагается, что выполнено (5.1), а M_0 и M_1 удовлетворяют условию типа (5.2). Указано, что задача (5.3) имеет единственное решение $u \in C([0, T]; V)$, $u' \in C([0, T]; H)$.

Пусть $w(t) = \{u(t), u'(t)\}$; тогда уравнение задачи (5.3) записывается в виде

$$w'(t) + \begin{pmatrix} 0 & -I \\ 0 & A(t) \end{pmatrix} w(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M_0 & M_1 \end{pmatrix} w(t) = \{0, f(t)\},$$

или; для любого числа $\lambda > 0$,

$$w'(t) + \begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ 0 & A(t) + \lambda I \end{pmatrix} w(t) + \begin{pmatrix} -\lambda I & -I \\ 0 & -\lambda I \end{pmatrix} w(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M_0 & M_1 \end{pmatrix} w(t) = \{0, f(t)\} \tag{5.4}$$

с начальным условием $w(0) = \{u_0, u_1\}$. Задачу (5.4) рассмотрим в тройке пространств

$$V \times V \subset V \times H \subset V \times V', \tag{5.5}$$

введем также обозначения

$$C(t) = \begin{pmatrix} \lambda I & 0 \\ 0 & A(t) + \lambda I \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\lambda I & -I \\ 0 & -\lambda I \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M_0 & M_1 \end{pmatrix}.$$

Если оператор $A(t)$ удовлетворяет условиям (1.1) и (1.2), то это же выполняется и для $C(t)$ в пространствах (5.5). Непосредственно проверяется, что $B \in \mathscr{L}(V \times V, V \times H)$, $M \in \mathscr{L}(L^\infty(0, T; V \times H), L^\infty(0, T; V \times H))$ и M удовлетворяет аналогу условия (1.3). Учитывая замечание 2, можно теперь утверждать, что задача

(5.3) сведена к задаче (1.4) в пространствах (5.5), значит, применимы все результаты §§1—4. В частности, из § 1 вытекает, что, если семейство $A(t)$ удовлетворяет условиям (1.1) и (1.2), $f \in L^2(0, T; V')$, $u_0 \in V$ и $u_1 \in H$, то задача (5.3) имеет единственное решение такое, что $u \in C([0, T]; V)$, $u' \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; H)$, $u'' \in L^2(0, T; V')$. Отметим, наконец, что, если $A(t)$ удовлетворяет условиям теорем 3 или 4, то таким же оказывается и семейство $C(t)$.

7. Задача Коши $u' + Au = f$, $u(0) = \xi$ с нелинейным вольтерровым оператором A подробно изучена в [18], см. также имеющиеся там библиографические замечания. Приведены условия единственной разрешимости таких задач, доказана сходимость метода Галеркина. Эти результаты приложимы к задаче (1.4) лишь в случае, когда M является „L^2-регулярным" т. е. $M \in \mathscr{L}(L^2(0, T; V), L^2(0, T; H))$ либо $M \in \mathscr{L}(L^2(0, T; H), L^2(0, T; V'))$. Однако, оператор M в рассматриваемых нами условиях не должен быть ограниченным даже из $L^2(0, T; V)$ в $L^2(0, T; V')$. Случай „L²-регулярного" оператора M отличается от случая $M = 0$ несущественно (это отмечено уже в [2]), поскольку в таком случае стандартной заменой неизвестной функции получают уравнение с оператором, имеющим такие же свойства как „главный" оператора A.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Artola, M.: Équations paraboliques à retardement. C. R. Acad. Sci. Paris **264** A (1967), 668—671.

[2] Artola, M.: Sur les perturbations des équations d'évolution. Application à des problèmes de retard. Ann. E. N. S. **2** (1969), 137—253.

[3] Baiocchi, C.: Sulle equazioni differenziali astratte lineari del primo e secondo ordine negli spazi di Hilbert. Ann. Mat. Pura Appl. LXXVI (4) (1967), 233—304.

[4] Алиев, Ф. А., и М. А. Велиев: Разрешимость задачи Коши для уравнения второго порядка с операторами локального типа. Докл. АН Азерб. ССР № 8 (1979), 16—20.

[5] Заманов, Т. А.: Об одном операторном уравнении в гильбертовом пространстве. Вестник МГУ, матем.-мех. сер. № **1** (1968), 35—40.

[6] Заманов, Т. А.: Применение метода Галеркина к эволюционным уравнениям с запаздывающим аргументом. Тр. семинара по теорий дифференц. ур. с отклоняющимся аргументом. Университет Дружбы Народов им. П. Лумумбы **VII** (1969), 164—170.

[7] Заплитная, А. Т.: Об одном операторном уравнении в гильбертовом пространстве. Укр. мат. журнал **25**, № **6** (1973), 796—797.

[8] Алиев, Ф. А.: О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для уравнений первого порядка. Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук № **2** (1978), 86—90.

[9] Алиев, Ф. А.: Об устойчивости метода Бубнова—Галеркина для уравнений первого порядка. Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук № **1** (1978), 103—108.

[10] Lions, J. L.: Équations différentielles opérationelles et problèmes aux limites. (Grundlehren der math. Wiss. Bd. 111.) Berlin · Göttingen · Heidelberg: Springer-Verlag 1961.

[11] Лионс, Ж.-Л., и Э. Мадженес: Неоднородные граничные задачи и их приложения. Москва: Изд-во Мир 1971.

[12] Вайникко, Г. М., и П. Э. Оя: О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений. Дифференц. уравнения **11**, № 7 (1975), 1269—1277.

[13] Оя, П. Э.: О решении эволюционных уравнений методом Галеркина. Уч. зап. Тартуск. ун-та **342** (1974), 237—248.

[14] Оя, П. Э.: О сходимости и устойчивости метода Галеркина для параболических уравнений с дифференцируемыми операторами. Уч. зап. Тартуск. ун-та **374** (1975), 194—210.

[15] Оя, П. Э.: Об устойчивости метода Галеркина для эволюционных уравнений. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-мат. **25**, № 3 (1976), 219—226.

[16] Оя, П. Э.: О выборе координатной системы в методе Ритца и в методе Галеркина для эволюционных уравнений. Изв. АН Эст. ССР, сер. физ.-мат. **30**, № 3 (1981), 185—190.

[17] Михлин, С. Г.: Численная реализация вариационных методов. Москва: Изд-во Наука 1966.

[18] Гаевский, Х., Грёгер, К., и К. Захариас: Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. Москва: Изд-во Мир 1978.

Manuskripteingang: 28. 07. 1981; Eingang der revidierten Fassung: 7. 12. 1981

VERFASSER:

Dr. Päätera Oja
Mathematische Fakultät der Staatlichen Universität
USSR-202400 Tartu, Ülikooli Str. 18