Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 1(5) (1982), S. 67–92

Über ein Bimetallproblem in der Ebene

L. Jentsch

Es werden Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Rand-Kontakt-Aufgaben der ebenen Elastostatik und Thermoelastostatik für stückweise homogene Scheiben, deren elastisch homogenen Teile längs einer Geraden zusammengeklebt sind, in einer geeigneten Klasse regulärer Vektoren bewiesen. Das Problem wird mit Hilfe des Kontakttensors der Elastostatik für zwei fest verbundene Halbebenen auf ein Integralgleichungssystem zurückgeführt, das neben singulären Integralen singuläre Integrale mit feststehenden Singularitäten enthält. Aus der Theorie von Duduchava folgt, daß der Integraloperator im Raum $L_2(S)$ (S Rand der Scheibe) ein Noetheroperator mit Index Null ist.

Рассматриваются плоские гранично-контактные задачи эластостатики и термоэластостатики для кусочно-однородных сред, однородные части которых склеиваются вдоль прямой. Доказываются теоремы существования и единственности решения в соответствующем пространстве регулярных векторов. Используя контактный тензор при рассмотрении эластостатики двух склеенных полуплоскостей сводим задачу к системе сингулярных интегральных уравнений с неподвижными особенностями. Нетеровость сингулярного оператора в пространстве $L_2(S)$ (S-граница плоской области) доказана с помощью теории Дудучавы.

Existence and uniqueness theorems for boundary-contact-problems of plane elastostatics and thermoelastostatics are given in a proper class of regularity, when the thermoelastic constants are piecewise constant and discontinuous along a straight line. The problem is reduced with the aid of the contact-tensor of elastostatics for two composite half-planes to a system of integral equations with fixed singularities. From the theory of Duduchava it follows, that the integral operator is Noetherian in the space $L_2(S)$ (S boundary of the disc) with index zero.

Betrachtet wird die zweite Randkontaktaufgabe der Thermoelastostatik in der Ebene, wenn die geradlinige Trennlinie zwischen den beiden elastisch homogenen Teilen bis zum äußeren Rand reicht. Der Fall, daß die Einschlüsse aus anderem Material ganz im Innern liegen, ist sowohl in der Ebene (s. [21, 18]) als im Raum (s. [16; Kap. XII], [5]) behandelt worden. Wir wählen für unser Problem die Kontaktbedingung, die der festen Verbindung der homogenen Teile entspricht. Andere Kontaktbedingungen sind Gegenstand der Arbeiten [1, 6–11, 14, 15, 17, 19]. Die in [12] im räumlichen Fall dargelegte Idee, das Problem mit Hilfe des Kontakttensors der Elastostatik für zwei aneinandergrenzende Halbräume auf ein Integralgleichungssystem über den Rand des Gesamtgebietes zurückzuführen, wird in dieser Arbeit im ebenen Fall genau dargelegt. Sitzt die Randkurve auf der geradlinigen Trennlinie senkrecht auf, erhält man ein singuläres Integralgleichungssystem mit feststehenden Singularitäten, auf das die Theorie von Duduchava [3] anwendbar ist. Es wird ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz in einer geeigneten Klasse regulärer Vektoren bewiesen. Aussagen über das Singularitätsverhalten in der Ecke eines aus verschiedenen isotropen homogenen Keilen zusammengesetzten Körpers sind in [25, 2] enthalten.

1. Formulierung des Problems

In einem kartesischen x_1x_2-Koordinatensystem mit den Basisvektoren $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$ betrachten wir das Gebiet D mit dem Rand S, das die Lage des elastischen Materials bestimmt. Das Material sei stückweise homogen, die Laméschen Moduln und den linearen Wärmeausdehnungskoeffizienten bezeichnen wir in $D^+ = D \cap \{x = (x_1, x_2)^T : x_2 > 0\}$ mit λ_1, μ_1, α_1 und in $D^- = D \cap \{x : x_2 < 0\}$ mit $\lambda_0, \mu_0, \alpha_0$. Es sei $S_0 = D \cap \{x : x_2 = 0\}$ ein Intervall (s. Abb. 1) und $S^+ = S \cap \{x : x_2 > 0\}$, $S^- = S \cap \{x : x_2 < 0\}$. Die Normaleneinheitsvektoren $\boldsymbol{n}$ seien wie in Abb. 1 orientiert. Vektoren fassen wir stets als Spaltenmatrizen auf, für das Skalarprodukt $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$ schreiben wir auch $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$.

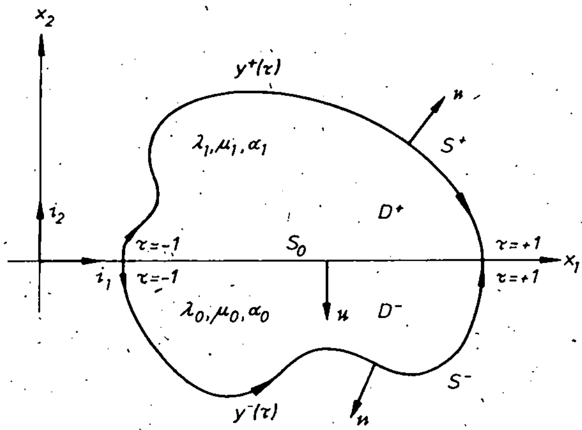

Abb. 1

Definition 1.1: Es sei $S \subset C_n^{1,\alpha}(0 < \alpha \leqq 1)$, wenn $S \subset C^{1,\alpha}$ und S die Gerade $x_2 = 0$ in genau zwei Punkten senkrecht schneidet (vgl. [18, Def. 2.1]).

Falls $S \subset C_n^{1,\alpha}$, dann besitzt $\overline{S^\pm}$ eine Parameterdarstellung

$$y^\pm(\tau) = y_1^\pm(\tau)\, \boldsymbol{i}_1 + y_2^\pm(\tau)\, \boldsymbol{i}_2, \qquad -1 \leqq \tau \leqq +1$$

mit $\dot{y}_1^\pm(\pm 1) = 0$, $\dot{y}_2^\pm(1) = \mp 1$, $\dot{y}_2^\pm(-1) = \pm 1$, $y^+(\pm 1) = y^-(\pm 1)$ und $y_j^\pm(\tau) \in C^{1,\alpha}([-1, +1])$, $|\dot{y}^\pm(\tau)| \neq 0$ für $-1 \leqq \tau \leqq +1$.

Einige Bezeichnungen: $K(x_0, r) = \{x : |x - x_0| < r\}$, $K_\varepsilon = K(y^+(-1), \varepsilon) \cup K(y^+(+1), \varepsilon)$, $D_\varepsilon = D \setminus K_\varepsilon$, $D_\varepsilon^\pm = D^\pm \setminus K_\varepsilon$, für $x \in K_{\varepsilon_0}$ ($\varepsilon_0 > 0$ genügend klein) sei ϱ_x der kürzeste Abstand des Punktes x von S auf der Parallelen zu $x_2 = 0$, $CD = \{x : x \notin \overline{D}\}$, $CD^+ = \{x : x \notin \overline{D^+}, x_2 > 0\}$, $CD^- = \{x : x \notin \overline{D^-}, x_2 < 0\}$, $CD_\varepsilon = CD \setminus K_\varepsilon$, $CD_\varepsilon^\pm = CD^\pm \setminus K_\varepsilon$.

Definition 1.2: Ein Vektor $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x) = u_1(x)\, \boldsymbol{i}_1 + u_2(x)\, \boldsymbol{i}_2$ heiße *in D regulär*, wenn

$$\boldsymbol{u}|_{D^+} \in C^0(\overline{D_\varepsilon^+}) \cap C^1(\overline{D_\varepsilon^+}) \cap C^2(D^+),$$

$$\boldsymbol{u}|_{D^-} \in C^0(\overline{D_\varepsilon^-}) \cap C^1(\overline{D_\varepsilon^-}) \cap C^2(D^-) \quad \text{für jedes } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

$\boldsymbol{u}$ beschränkt in $D^+ \cup D^-$ und $\dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_j} = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\varrho_x}}\right)$ für $x \in (D^+ \cup D^-) \cap K_{\varepsilon_0}$.

Es heiße u *in CD regulär*, wenn

$$u|_{CD^+} \in C^0(\overline{CD_\varepsilon^+}) \cap C^1(\overline{CD_\varepsilon^+}) \cap C^2(CD^+),$$

$$u|_{CD^-} \in C^0(\overline{CD_\varepsilon^-}) \cap C^1(\overline{CD_\varepsilon^-}) \cap C^2(CD^-) \quad \text{für} \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0,$$

u beschränkt in $CD^+ \cup CD^-$ und $\frac{\partial u}{\partial x_j} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho_x}}\right)$ für $x \in (CD^+ \cup CD^-) \cap K_{\varepsilon_0}$, $\frac{\partial u}{\partial x_j} = \mathcal{O}(|x|^{-2})$ für $|x| > R_0$.

Definition 1.3: Ein Vektor u ist *Lösung des Problems* I $(D; F, \theta; w; \hat{w}, \hat{P})$ *bzw. des Problems* II $(D; F, \theta; P; \hat{w}, \hat{P})$, wenn u in D regulär ist und

a) der Differentialgleichung

$$\underset{(1)}{A} u = (2\mu_1 + 3\lambda_1)\, \alpha_1 \operatorname{grad} \theta - F \quad \text{in } D^+, \tag{1.1+}$$

$$\underset{(0)}{A} u = (2\mu_0 + 3\lambda_0)\, \alpha_0 \operatorname{grad} \theta - F \quad \text{in } D^-, \tag{1.1−}$$

b) der Randbedingung $u = w$ auf S bzw.

$$\left\{\underset{(1)}{T}(\partial_x, n)\, u - (2\mu_1 + 3\lambda_1)\, \alpha_1 \theta n\right\}^+ = P \quad \text{auf } S^+, \tag{1.2+}$$

$$\left\{\underset{(0)}{T}(\partial_x, n)\, u - (2\mu_0 + 3\lambda_0)\, \alpha_0 \theta n\right\}^- = P \quad \text{auf } S^-, \tag{1.2−}$$

c) der Kontaktbedingung

$$\{u\}^+ - \{u\}^- = \hat{w} \quad \text{auf } S_0, \tag{1.3}$$

$$\left\{\underset{(1)}{T}(\partial_x, n)\, u - (2\mu_1 + 3\lambda_1)\, \alpha_1 \theta n\right\}^+ - \left\{\underset{(0)}{T}(\partial_x, n)\, u - (2\mu_0 + 3\lambda_0)\, \alpha_0 \theta n\right\}^-$$
$$= \hat{P} \quad \text{auf } S_0 \tag{1.4}$$

genügt.

Es ist u *Lösung des Problems* I $(CD; F, \theta; w; \hat{w}, \hat{P})$ *bzw. des Problems* II $(CD; F, \theta; P; \hat{w}, \hat{P})$, wenn u in CD regulär ist, (1.1+) in CD^+, (1.1−) in CD^-, $u = w$ auf S bzw. (1.2) und (1.3), (1.4) auf $\{x : x_2 = 0\} \setminus \overline{S}_0$ gilt. Hierbei ist

$$\underset{(i)}{A} u = \mu_i \Delta u + (\lambda_i + \mu_i) \operatorname{graddiv} u, \tag{1.5}$$

$$\underset{(i)}{T}(\partial_x, n)\, u = \sum_{k=1}^{2} \left[\sum_{j=1}^{2} \left(\mu_i \delta_{kj} \sum_{l=1}^{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} n_l + \lambda_i n_k \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu_i n_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\right] i_k \tag{1.6}$$

und $\{\cdot\}^+$, $\{\cdot\}^-$ bezeichnet den Grenzwert gegen einen Randpunkt von D^+, D^- auf der Normalen.

Bemerkung: Das Problem I $(D; F, \theta; w; 0, 0)$ bzw. II $(D; F, \theta; P; 0, 0)$ kann aufgefaßt werden als quasistatisches Wärmespannungsproblem zur Ermittlung des Verschiebungsvektors u in einem unendlich langen Zylinder mit dem Querschnitt D im ebenen Deformationszustand oder in einer Scheibe, wenn die elastisch homogenen Teile längs S_0 fest verbunden sind und am Rand der Verschiebungsvektor w bzw. die Normalspannung P vorgegeben sind und im Innern des Körpers ein äußeres Kraftfeld F und Temperaturfeld θ wirken. Dabei kann θ beliebig vorgegeben sein, Lösung einer Randkontaktaufgabe für die stationäre Wärmeleitungsgleichung oder Lösung eines Anfangs-Randkontaktwertproblems für die instationäre Wärmeleitungsgleichung zu einem festen Zeitpunkt sein.

Eindeutigkeitssatz: *Die Probleme* $\mathrm{I}(D; 0, 0; 0; 0, 0)$ *und* $\mathrm{I}(CD; 0, 0; 0; 0, 0)$ *haben nur die triviale Lösung, das Problem* $\mathrm{II}(D; 0, 0; 0; 0, 0)$ *hat genau* $\mathscr{L}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ *und das Problem* $\mathrm{II}(CD; 0, 0; 0; 0, 0)$ *hat genau* $\mathscr{L}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ *als Lösung.*

Beweis: Die Vektoren $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{a}_3 = -x_2\boldsymbol{i}_1 + x_1\boldsymbol{i}_2$ und damit der von $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ aufgespannte lineare Raum $\mathscr{L}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ sind offenbar Lösung des Problems $\mathrm{II}(D; 0, 0; 0; 0, 0)$. Ebenso ist $\mathscr{L}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ Lösung des Problems $\mathrm{II}(CD; 0, 0; 0; 0, 0)$.

Sei nun $\boldsymbol{u}$ Lösung des Problems $\mathrm{I}(D; 0, 0; 0; 0, 0)$ oder $\mathrm{II}(D; 0, 0; 0; 0, 0)$. Wenden wir den Integralsatz (3.11) in [18] an auf $D^+ \setminus Q_\varepsilon$, $D^- \setminus Q_\varepsilon$ mit $Q_\varepsilon = \{x \in D: (|x_2| < \varepsilon, \varrho_x < \varepsilon\}$, dann folgt für die elastische Energie (s. [18: (3.14)])

$$E(\boldsymbol{u}(x)) = \lambda(u_{1,1} + u_{2,2})^2 + 2\mu(u_{1,1}^2 + u_{2,2}^2) + \mu(u_{1,2} + u_{2,1})^2 \tag{1.7}$$

$\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$ für $x_2 > 0$, $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$ für $x_2 < 0$)

$$\int\limits_{D\setminus Q_\varepsilon} E(\boldsymbol{u}(x))\,dx = \int\limits_{\partial Q_\varepsilon \setminus S} \boldsymbol{u} \cdot T(\partial_x, \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{u}(x)\,d_xs = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}).$$

Also ist $\int\limits_D E(\boldsymbol{u}(x))\,dx = 0$. Da $\boldsymbol{u}$ homogene Kontaktbedingungen erfüllt, folgt hieraus (s. [18: Hilfssatz 3.1]) $\boldsymbol{u} \in \mathscr{L}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$. Analog schließt man bei den Außengebietaufgaben. Dort scheidet $\boldsymbol{a}_3$ wegen des Verhaltens im Unendlichen aus. Bei der ersten Randbedingung kommt nur $\boldsymbol{u} \equiv 0$ in Frage ∎

Notwendige Lösbarkeitsbedingung: Hat das Problem $\mathrm{II}(D; \boldsymbol{F}, 0; \boldsymbol{P}; \hat{\boldsymbol{w}}, \hat{\boldsymbol{P}})$ eine Lösung, dann gilt

$$\int\limits_D \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a}_k\,dx + \int\limits_S \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a}_k\,ds + \int\limits_{S_0} \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a}_k\,ds = 0, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{1.8}$$

Dies folgt durch Anwendung des Integralsatzes (3.13) in [18] auf $D^+ \setminus Q_\varepsilon$, $D^- \setminus Q_\varepsilon$ und anschließenden Grenzübergang $\varepsilon \to +0$.

2. Potentialtheorie

Die Lösung des Problems $\mathrm{II}(D; 0, 0; \boldsymbol{P}; 0, 0)$ suchen wir in Form des Potentials

$$\boldsymbol{V}(x, \varphi) := \frac{1}{\pi} \int\limits_S \mathrm{G}(x, y)\,\varphi(y)\,d_ys. \tag{2.1}$$

Dabei ist $\mathrm{G}(x, y)$ der *Greensche Kontakttensor der Elastostatik* für zwei fest verbundene Halbebenen mit unterschiedlichen *Laméschen Moduln*, der in [13] explizit berechnet wurde.

Satz 2.1: *Es sei* $S \subset C_n^{1,\alpha}$, $\varphi \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$[1]) *für jedes feste* $\varepsilon > 0$ $(0 < \beta < \alpha \leqq 1)$. *Dann ist* $\boldsymbol{V}(x, \varphi)$ *in* D *regulär.*

Beweis: Die Differenzierbarkeitseigenschaften von $\boldsymbol{V}(x, \varphi)$ folgen aus bekannten Eigenschaften des elastischen Potentials der einfachen Schicht (s. [21, 18, 22]; vgl. auch [16: S. 226]). Wir brauchen nun nur noch die Abschätzungen in K_{ε_0} zu zeigen. Dazu wird nur die Voraussetzung $\varphi \in L_2^2(S)$ benötigt. Es genügt, die Abschätzung in einer Umgebung von $y_0 = y^+(+1)$ zu zeigen. Wir wählen $\delta > 0$ so,

---

[1]) Es ist $L_2^k(M) = \{\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)^T : \varphi_j \in L_2(M)\}$ und $\|\varphi\|^2 = \int\limits_M \sum\limits_{j=1}^k |\varphi_j|^2\,dM$.

daß für $x \in K(y_0, \delta)$, $y \in S \cap K(y_0, \delta)$ gilt

$$\frac{|x_2 - y_2|}{|\varrho_x - |x_1 - y_1||} \geqq 6.$$

Dann folgt leicht

$$\frac{1}{2}[\varrho_x^2 + (x_2 - y_2)^2] \leqq |x - y|^2 \leqq \frac{3}{2}[\varrho_x^2 + (x^2 - y_2)^2]. \tag{2.2}$$

Für $|x - y| \geqq \frac{\delta}{2}$ ist $G(x, y)$ und $\frac{\partial G(x, y)}{\partial x_j}$ beschränkt und für $|x - y| \leqq \delta$ gilt $G(x, y) = \mathcal{O}\left(\ln \frac{1}{|x - y|}\right)$, $\frac{\partial G(x, y)}{\partial x_j} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x - y|}\right)$. Sei nun $x \in K\left(y_0, \frac{\delta}{2}\right) \cap (D^+ \cup D^-)$, dann folgt unter Verwendung der Schwarzschen Ungleichung

$$|V_k(x, \varphi)| \leqq C_1 \int\limits_{S \setminus K(y_0,\delta)} \sum_{j=1}^{2} |\varphi_j(y)|\, d_y s + C_2 \int\limits_{S \cap K(y_0,\delta)} \ln \frac{1}{|x - y|} \sum_{j=1}^{2} |\varphi_j(y)|\, d_y s$$

$$\leqq C_3 \|\varphi\| + 2C_2 \sqrt{\int\limits_{S \cap K(y_0,\delta)} \left(\ln \frac{1}{|x - y|}\right)^2 d_y s}\; \|\varphi\|.$$

Unter Beachtung von (2.2) kann man zeigen, daß das Integral unter der Wurzel unabhängig von $x \in K\left(y_0, \frac{\delta}{2}\right) \cap (D^+ \cup D^-)$ beschränkt ist. Also ist $V(x, \varphi)$ in $D^+ \cup D^-$ beschränkt.

Analog ist

$$\left|\frac{\partial V_k(x, \varphi)}{\partial x_j}\right| \leqq C_4 \|\varphi\| + C_5 \sqrt{\int\limits_{S \cap K(y_0,\delta)} \frac{1}{|x - y|^2} d_y s}\; \|\varphi\|.$$

Nun ist wegen (2.2)

$$\int\limits_{S \cap K(y_0,\delta)} \frac{1}{|x - y|^2} d_y s \leqq 2 \int\limits_{S \cap K(y_0,\delta)} \frac{1}{\varrho_x^2 + (x_2 - y_2)^2} d_y s$$

$$\leqq C_6 \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\varrho_x^2 + (x_2 - t)^2} dt = C_6 \frac{1}{\varrho_x} \arctan \frac{u}{\varrho_x}\Bigg|_{u = x_2 - t_2}^{u = x_2 - t_1}$$

$$\leqq C_6 \pi \frac{1}{\varrho_x}.$$

Also ist $\frac{\partial V(x, \varphi)}{\partial x_j} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho_x}}\right)$ ∎

Über das Verhalten von $V(x, \varphi)$ im Unendlichen gibt der folgende Satz Auskunft.

Satz 2.2: *Sei $\varphi \in L_1^2(S)$. Für die Gültigkeit jeder der beiden Abschätzungen $V(x, \varphi) = o(1)$ und $\frac{\partial V(x, \varphi)}{\partial x_j} = \mathcal{O}(|x|^{-2})$ ist $\int_S \varphi(y)\, d_y s = 0$ notwendig und hinreichend.*

Dieser Satz wird im Prinzip wie der entsprechende Satz für das klassische Potential der einfachen Schicht bewiesen (s. [23: S. 234]), nur sind hier die Rechnungen aufwendiger. Man muß beim Beweis die Eigenschaften von $\mathrm{G}(x, y)$ ausnutzen.

Aus Satz 2.1 und Satz 2.2 folgt eine weitere Aussage.

Satz 2.3: *Es sei* $S \subset C_n^{1,\alpha}$, $\varphi \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ *für jedes feste* $\varepsilon > 0$ $(0 < \beta < \alpha \leqq 1)$ *und* $\int\limits_S \varphi(y)\, d_y s = \mathbf{0}$. *Dann ist* $\boldsymbol{V}(x, \varphi)$ *in* CD *regulär.*

Auf Grund der Eigenschaften von $\mathrm{G}(x, y)$ (s. [13]) folgt aus Satz 2.1 noch eine Aussage.

Satz 2.4: *Es sei* $S \subset C_n^{1,\alpha}$, $\varphi \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ *für jedes feste* $\varepsilon > 0$, $(0 < \beta < \alpha \leqq 1)$. *Dann ist* $\boldsymbol{V}(x, \varphi)$ *reguläre Lösung des Problems* $\mathrm{I}(D; \mathbf{0}, 0; \{\boldsymbol{V}(x_0, \varphi)\}; \mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Weiter benötigen wir den folgenden Satz.

Satz 2.5: *Es sei* $S \subset C_n^{1,\alpha}$, $\boldsymbol{u}_p|_{D^+} = \boldsymbol{u}_p^+ \in C^{1,\beta}(D^+) \cap C^2(D^+)$, $\boldsymbol{u}_p|_{D^-} = \boldsymbol{u}_p^- \in C^{1,\beta}(D^-) \cap C^2(D^-)$ $(0 < \beta < \alpha \leqq 1)$ und $\boldsymbol{u}_p^+\big(y^+(\pm 1)\big) = \boldsymbol{u}_p^-\big(y^+(\pm 1)\big)$. *Dann ist*

$$\boldsymbol{u}_{H_2}(x) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^+} \Big(\underset{(1)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\, \mathrm{G}(x, y)^T\Big)^T \{\boldsymbol{u}_p(y)\}^+\, d_y s + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^-} \Big(\underset{(0)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\, \mathrm{G}(x, y)^T\Big)^T \{\boldsymbol{u}_p(y)\}^-\, d_y s$$

reguläre Lösung des Problems $\mathrm{I}(D; \mathbf{0}, 0; \{\boldsymbol{u}_{H_2}\}; \mathbf{0}, 0)$ *und für den Grenzwert*

$$\{T\boldsymbol{u}_{H_2}(x_0)\} := \begin{cases} \Big\{\underset{(1)}{T}(\partial_{x_0}, \boldsymbol{n}_{x_0})\, \boldsymbol{u}_{H_2}(x_0)\Big\}^+ & \textit{für } x_0 \in S^+ \\ \Big\{\underset{(0)}{T}(\partial_{x_0}, \boldsymbol{n}_{x_0})\, \boldsymbol{u}_{H_2}(x_0)\Big\}^- & \textit{für } x_0 \in S^- \end{cases}$$

gilt $\{T\boldsymbol{u}_{H_2}(x_0)\} \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$.

Beweis: Das Erfülltsein der Differentialgleichung und der homogenen Kontaktbedingungen folgt aus den Eigenschaften von $\mathrm{G}(x, y)$, die Differenzierbarkeitseigenschaften folgen aus bekannten Ergebnissen über das elastische Potential der doppelten Schicht (vgl. [16: S. 226]). Nun zur Abschätzung in K_{ε_0}.

Aus der Bettischen Formel folgt (vgl. [18: (3.16)])

$$\boldsymbol{u}_p(x) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^+} \Big(\underset{(1)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\, \mathrm{G}(x, y)^T\Big)^T \boldsymbol{u}_p(x)\, d_y s - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^-} \Big(\underset{(0)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\, \mathrm{G}(x, y)^T\Big)^T \boldsymbol{u}_p(x)\, d_y s \tag{2.3}$$

für $x \in D^+ \cup D^-$. Damit ist

$$\boldsymbol{u}_{H_2}(x) = -\boldsymbol{u}_p(x) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^+} \Big(\underset{(1)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\, \mathrm{G}(x, y)^T\Big)^T \big(\{\boldsymbol{u}_p(y)\}^+ - \boldsymbol{u}_p(x)\big)\, d_y s + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^-} \Big(\underset{(0)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\, \mathrm{G}(x, y)^T\Big)^T \big(\{\boldsymbol{u}_p(y)\}^- - \boldsymbol{u}_p(x)\big)\, d_y s. \tag{2.4}$$

Wegen $u_p^+ \in C^{1,\beta}(D^+)$ ist $u_p^+ \in C^{0,1}(D^+)$ und damit ist u_p^+ zusammen mit den Grenzwerten $\{u_p^+(y)\}^+$ in $C^{0,1}(\overline{D^+})$, also gilt

$$|\{u_{pj}(y)\}^+ - u_{pj}(x)| \leqq A\,|y-x| \quad \text{für } y \in S^+,\ x \in D^+.$$

Damit ist der Integrand des Integrals über S^+ beschränkt, wenn $x \in D^+$. Sei nun $x \in K\left(y_0, \frac{\delta}{2}\right) \cap D^+$ und $y \in S^- \cap K(y_0, \delta)$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\left|\left(\underset{(0)}{T}(\partial_y, n_y)\, \mathrm{G}(x,y)^T\right)^T \left(\{u_p(y)\}^- - u_p(x)\right)\right| \\ &= \left|\left(\underset{(0)}{T}(\partial_y, n_y)\, \mathrm{G}(x,y)^T\right)^T \left(\{u_p^-(y)\}^- - \{u_p^-(y_0)\}^- - u_p^+(x) + \{u_p^+(y_0)\}^+\right)\right| \\ &\leqq C_1 \frac{|y-y_0|}{|x-y|} + C_2 \frac{|x-y_0|}{|x-y|} \leqq C_3. \end{aligned}$$

Also ist $u_{H_2}(x)$ in $D^+ \cup D^-$ beschränkt.

Nun ist nach (2.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{H_2}(x)}{\partial x_j} = &-\frac{\partial u_p(x)}{\partial x_j} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^+} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\underset{(1)}{T}(\partial_y, n_y)\, \mathrm{G}(x,y)^T\right)^T \left(\{u_p(y)\}^+ - u_p(x)\right) d_y s \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^-} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\underset{(0)}{T}(\partial_y, n_y)\, \mathrm{G}(x,y)^T\right)^T \left(\{u_p(y)\}^- - u_p(x)\right) d_y s \\ &- \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^+} \left(\underset{(1)}{T}(\partial_y, n_y)\, \mathrm{G}(x,y)^T\right)^T \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_j}\, d_y s \\ &- \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^-} \left(\underset{(0)}{T}(\partial_y, n_y)\, \mathrm{G}(x,y)^T\right)^T \frac{\partial u_p(x)}{\partial x_j}\, d_y s. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Nach Voraussetzung ist $\frac{\partial u_p(x)}{\partial x_j}$ in $D^+ \cup D^-$ beschränkt. Sei nun $x \in K\left(y_0, \frac{\delta}{2}\right) \cap D$ und $y \in S \cap K(y_0, \delta)$, dann lassen sich die Integranden der Integrale in (2.5) nach oben abschätzen durch $C \cdot |x-y|^{-1}$. Unter Verwendung von (2.2) erhält man leicht

$$\int\limits_{S \cap K(y_0,\delta)} \frac{1}{|x-y|}\, d_y s = \mathcal{O}\left(\ln \frac{1}{\varrho_x}\right).$$

Also gilt sicher $\frac{\partial u_{H_2}(x)}{\partial x_j} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho_x}}\right)$.

Es bleibt nun nur noch zu zeigen $\{T u_{H_2}(x_0)\} \in L_2^2(S)$. Dazu genügt es, $\left\{\underset{(1)}{T}(\partial_{x_0}, n_{x_0})\, u_{H_2}(x_0)\right\}^+ \in L_2^2(S^+)$ nachzuweisen. Nun ist für $x \in D^+$

$$\begin{aligned} \underset{(1)}{T}(\partial_x, n_x)\, u_{H_2}(x) = &-\underset{(1)}{T}(\partial_x, n_x)\, u_p(x) \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^+} \underset{(1)}{T}(\partial_x, n_x) \left(\underset{(1)}{T}(\partial_y, n_y)\, \mathrm{G}(x,y)^T\right)^T \left(\{u_p(y)\}^+ - u_p(x)\right) d_y s \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{S^-} \underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\left(\underset{(0)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\,\mathrm{G}(x, y)^T\right)^T \left(\{\boldsymbol{u}_p(y)\}^- - \boldsymbol{u}_p(x)\right) d_y s$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{S^+} \left(\underset{(1)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\,\mathrm{G}(x, y)^T\right)^T \underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\,\boldsymbol{u}_p(x)\, d_y s$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{S^-} \left(\underset{(0)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\,\mathrm{G}(x, y)^T\right)^T \underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\,\boldsymbol{u}_p(x)\, d_y s.$$

Offenbar ist $\left\{\underset{(1)}{T}(\partial_{x_0}, \boldsymbol{n}_{x_0})\,\boldsymbol{u}_p(x_0)\right\}^+_{x_0\in S^+} \in L_2{}^2(S^+)$. Beachtet man die Sprungrelation für das elastische Potential der doppelten Schicht, so folgt

$$\boldsymbol{w}_A{}^+(x_0) := \left\{\frac{1}{\pi}\int_{S^+} \left(\underset{(1)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\,\mathrm{G}(x_0, y)^T\right)^T \underset{(1)}{T}(\partial_{x_0}, \boldsymbol{n}_{x_0})\,\boldsymbol{u}_p(x_0)\, d_y s\right\}^+_{x_0\in S^+}$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\left\{\underset{(1)}{T}(\partial_{x_0}, \boldsymbol{n}_{x_0})\,\boldsymbol{u}_p(x_0)\cdot \boldsymbol{i}_j\right\}^+_{x_0\in S^+} \left\{\frac{1}{\pi}\int_{S^+} \left(\underset{(1)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\,\mathrm{G}(x_0, y)^T\right)^T \boldsymbol{i}_j d_y s\right\}^+_{x_0\in S^+}$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\left\{\underset{(1)}{T}(\partial_{x_0}, \boldsymbol{n}_{x_0})\,\boldsymbol{u}_p(x_0)\cdot \boldsymbol{i}_j\right\}^+_{x_0\in S^+} \left[-\boldsymbol{i}_j + \frac{1}{\pi}\int_{S^+} \left(\underset{(1)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\,\mathrm{G}(x_0, y)^T\right)^T \boldsymbol{i}_j d_y s\right].$$

Der Integraloperator in der eckigen Klammer ist ein linearer beschränkter Operator von $L_2{}^2(S^+)$ in $L_2{}^2(S^+)$ (s. Kap. 3) und der Grenzwert davor beschränkt, also ist $\boldsymbol{w}_A{}^+(x_0) \in L_2{}^2(S^+)$. Weiter ist

$$\boldsymbol{w}_A{}^-(x_0) := \left\{\int_{S^-}\left(\underset{(0)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\,\mathrm{G}(x_0, y)^T\right)^T \underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\,\boldsymbol{u}_p(x_0)\, d_y s\right\}^+_{x_0\in S^+}$$

$$= \sum_{j=1}^{2}\left\{\underset{(1)}{T}(\partial_{x_0}, \boldsymbol{n}_{x_0})\,\boldsymbol{u}_p(x_0)\cdot \boldsymbol{i}_j\right\}^+_{x_0\in S^+} \int_{S^-}\left(\underset{(0)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\,\mathrm{G}(x_0, y)^T\right)^T \boldsymbol{i}_j d_y s.$$

Nun ist

$$\boldsymbol{k}(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y \in S^+ \\ \boldsymbol{i}_j & \text{für } y \in S^- \end{cases}$$

in $L_2{}^2(S)$ und $\int_S \left(\underset{(0)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\,\mathrm{G}(x, y)^T\right)^T \boldsymbol{k}(y)\, d_y s$ ein linearer beschränkter Operator von $L_2{}^2(S)$ in $L_2{}^2(S)$ (s. Kap. 3), also ist $\boldsymbol{w}_A{}^-(x_0) \in L_2{}^2(S^+)$.

Für $x \in D^+$, $y \in S^+$ zerlegen wir $\mathrm{G}(x, y) = \underset{(1)}{\Gamma}(x, y) + \mathrm{V}(x, y)$ in die Summe aus dem *Somiglianaschen Tensor* $\underset{(1)}{\Gamma}(x, y)$ und der *Kompensatrix* $\mathrm{V}(x, y)$ (s. [13]) und setzen $\{\boldsymbol{u}_p(y)\}^+ \in C^{1,\beta}(S^+)$ fort zu $\boldsymbol{u}_p{}^*(y) \in C^{1,\beta}(S)$. Dann ist

$$\boldsymbol{w}_B{}^+(x) := \int_{S^+} \underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\left(\underset{(1)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\,\mathrm{G}(x, y)^T\right)^T \left(\{\boldsymbol{u}_p(y)\}^+ - \boldsymbol{u}_p(x)\right) d_y s$$

$$= \boldsymbol{w}^+_{B_1}(x) + \boldsymbol{w}^+_{B_2}(x) + \boldsymbol{w}^+_{B_3}(x)$$

mit

$$\boldsymbol{w}_{B_1}^+(x) = \int_S \underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) \left(\underset{(1)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) \underset{(1)}{\Gamma}(x, y)^T\right)^T \left(\boldsymbol{u}_p^*(y) - \boldsymbol{u}_p(x)\right) d_y s,$$

$$\boldsymbol{w}_{B_2}^+(x) = \int_{S^+} \underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) \left(\underset{(1)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) \mathbf{V}(x, y)^T\right)^T \left(\boldsymbol{u}_p^*(y) - \boldsymbol{u}_p(x)\right) d_y s,$$

$$\boldsymbol{w}_{B_3}^+(x) = -\int_{S^-} \underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) \left(\underset{(1)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) \underset{(1)}{\Gamma}(x, y)^T\right)^T \left(\boldsymbol{u}_p^*(y) - \boldsymbol{u}_p(x)\right) d_y s.$$

Nun ist $\{\boldsymbol{w}_{B_1}^+(x_0)\}_{x_0\in S}^+ \in C^{0,\beta}(S) \subset L_2^2(S)$ (vgl. [16: S. 226]). Weiter ist

$$\{\boldsymbol{w}_{B_2}^+(x_0)\}_{x_0\in S^+}^+ = \int_{S^+} \underset{(1)}{T}(\partial_{x_0}, \boldsymbol{n}_{x_0}) \left(\underset{(1)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) \mathbf{V}(x_0, y)^T\right)^T \left(\boldsymbol{u}_p^*(y) - \boldsymbol{u}_p(x_0)\right) d_y s,$$

also

$$|\{\boldsymbol{w}_{B_2k}^+(x_0)\}_{x_0\in S^+}^+| \leqq C \int_{S^+} \frac{|x_0 - y|}{(x_1^0 - y_1)^2 + (x_2^0 + y_2)^2}\, d_y s$$

$$\leqq C \int_{S^+} \frac{1}{x_2^0 + y_2}\, d_y s = \mathcal{O}(|\ln x_2^0|).$$

Damit ist $\{\boldsymbol{w}_{B_2}^+(x_0)\}_{x_0\in S^+}^+ \in L_2^2(S^+)$. Bei $\boldsymbol{w}_{B_3}^+(x)$ kann man den Grenzübergang $x \to x_0 \in S^+$ ebenfalls unter dem Integral ausführen, und man erhält

$$|\{\boldsymbol{w}_{B_3k}^+(x_0)\}^+| \leqq C \int_{S^-} \frac{1}{x_2^0 - y_2^2}\, d_y s = \mathcal{O}(|\ln x_2^0|).$$

Also ist $\{\boldsymbol{w}_B^+(x_0)\}_{x_0\in S^+}^+ \in L_2^2(S^+)$.

Wegen $\{\boldsymbol{u}_p^+(y_0)\}^+ = \{\boldsymbol{u}_p^-(y_0)\}^-$ kann man schreiben

$$\boldsymbol{w}_B^-(x) := \int_{S^-} \underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) \left(\underset{(0)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) \mathbf{G}(x, y)^T\right)^T \left(\{\boldsymbol{u}_p(y)\}^- - \boldsymbol{u}_p(x)\right) d_y s$$

$$= \boldsymbol{w}_{B_1}^-(x) + \boldsymbol{w}_{B_2}^-(x),$$

mit

$$\boldsymbol{w}_{B_1}^-(x) = \int_{S^-} \underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) \left(\underset{(0)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) \mathbf{G}(x, y)^T\right)^T \left(\{\boldsymbol{u}_p^-(y)\}^- - \{\boldsymbol{u}_p^-(y_0)\}^-\right) d_y s,$$

$$\boldsymbol{w}_{B_2}^-(x) = \int_{S^-} \underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) \left(\underset{(0)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y) \mathbf{G}(x, y)^T\right)^T \left(\{\boldsymbol{u}_p^+(y_0)\}^+ - \boldsymbol{u}_p(x)\right) d_y s.$$

In beiden Integralen kann man den Grenzübergang $x \to x_0 \in S^+$ unter dem Integral ausführen, und man erhält in einer Umgebung von y_0

$$|\{w_{B_1k}^-(x_0)\}^+| \leqq C \int_{S^-} \frac{|y_0 - y|}{|x_0 - y|^2}\, d_y s \leqq C \int_{S^-} \frac{1}{|x_0 - y|}\, d_y s \leqq C \int_{S^-} \frac{1}{x_2^0 - y_2}\, d_y s$$

$$= \mathcal{O}(|\ln x_2^0|)$$

und

$$|\{w_{B_2k}^-(x_0)\}^+| \leqq C \int_{S^-} \frac{|y_0 - x|}{|x_0 - y|^2}\, d_y s \leqq C \int_{S^-} \frac{1}{|x_0 - y|}\, d_y s = \mathcal{O}(|\ln x_2^0|).$$

Also ist $\{\boldsymbol{w}_{B_2}^-(x_0)\}_{x_0\in S^+}^+ \in L_2^2(S^+)$. Damit ist Satz 2.5 bewiesen ∎

3. Integralgleichungen

Zur Lösung des Problems II(D; 0, 0; $\boldsymbol{P}$; 0, 0) machen wir den Ansatz $V(x, \varphi)$ (vgl. (2.1)), der a priori die Differentialgleichung und die homogenen Kontaktbedingungen erfüllt (vgl. Satz 2.4). Die Randbedingung (1.2) führt auf Grund der Sprungrelation für das elastische Potential der einfachen Schicht (vgl. [18: (4.2)]) auf die Integralgleichung

$$\mathscr{A}\varphi := \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int\limits_S \mathbf{K}(x, y)\, \varphi(y)\, d_y s = \boldsymbol{P}(x) \tag{3.1}$$

mit

$$\mathbf{K}(x, y) = \begin{cases} \underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\, \mathrm{G}(x, y) & \text{für } x \in S^+, \\ \underset{(0)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x)\, \mathrm{G}(x, y) & \text{für } x \in S^-. \end{cases} \tag{3.2}$$

Für $x \in S^+$, $y \in S^+$ ist

$$\mathbf{K}(x, y) = \mathrm{S}(x, y) + \mathrm{F}(x, y)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathrm{S}(x, y) = &- \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \sum_{j=1}^{2} n_j(x) \frac{x_j - y_j}{|x - y|^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \left(n_1(x) \frac{x_2 - y_2}{|x - y|^2} - n_2(x) \frac{x_1 - y_1}{|x - y|^2} \right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &- \frac{2(\lambda_1 + \mu_1)}{\lambda_1 + 2\mu_1} \sum_{j=1}^{2} n_j(x) \frac{x_j - y_j}{|x - y|^4} (x - y)(x - y)^T \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(x, y) = &+ \frac{x_1 - y_1}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \begin{pmatrix} K_1^+ n_1(x) & K_2^+ n_2(x) \\ K_3^+ n_2(x) & K_2^+ n_1(x) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{x_2}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \begin{pmatrix} K_2^+ n_2(x) & K_3^+ n_1(x) \\ K_2^+ n_1(x) & K_1^+ n_2(x) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{y_2}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \begin{pmatrix} K_4^+ n_2(x) & K_5^+ n_1(x) \\ K_4^+ n_1(x) & K_6^+ n_2(x) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{x_2 (x_1 - y_1)^2}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2]^2}\, 4\mu_1 H_9^+ \begin{pmatrix} -n_2(x) & -n_1(x) \\ -n_1(x) & +n_2(x) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{y_2 (x_1 - y_1)^2}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2]^2} \begin{pmatrix} 2\mu_1 H_{11}^+ n_2(x) & K_7^+ n_1(x) \\ 2\mu_1 H_{11}^+ n_1(x) & K_8^+ n_2(x) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{x_2 (x_1 - y_1)(x_2 + y_2)}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2]^2}\, 4\mu_1 H_9^+ \begin{pmatrix} +n_1(x) & -n_2(x) \\ -n_2(x) & -n_1(x) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{y_2 (x_1 - y_1)(x_2 + y_2)}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2]^2} \begin{pmatrix} K_7^+ n_1(x) & -2\mu_1 H_{11}^+ n_2(x) \\ K_8^+ n_2(x) & -2\mu_1 H_{11}^+ n_1(x) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{x_2 y_2 (x_1 - y_1)}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2]^2}\, 12\mu_1 H_{11}^+ \begin{pmatrix} +n_1(x) & +n_2(x) \\ -n_2(x) & +n_1(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$+\frac{x_2y_2(x_2+y_2)}{[(x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2]^2}\,4\mu_1H_{11}^+\begin{pmatrix}+n_2(x) & -n_1(x)\\ +n_1(x) & +n_2(x)\end{pmatrix}$$

$$+\frac{x_2y_2(x_1-y_1)^3}{[(x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2]^3}\,16\mu_1H_{11}^+\begin{pmatrix}-n_1(x) & -n_2(x)\\ +n_2(x) & -n_1(x)\end{pmatrix}$$

$$+\frac{x_2y_2(x_1-y_1)^2(x_2+y_2)}{[(x_1-y_1)^2+(x_2+y_2)^2]^3}\,16\mu_1H_{11}^+\begin{pmatrix}-n_2(x) & +n_1(x)\\ -n_1(x) & -n_2(x)\end{pmatrix} \tag{3.3}$$

mit

$$\begin{aligned}
K_1^+ &= -(\lambda_1+2\mu_1)\,H_6^+ - \lambda_1H_8^+ + \lambda_1H_9^+,\\
K_2^+ &= \mu_1(-H_6^+ + H_8^+ + H_9^+),\\
K_3^+ &= -\lambda_1H_6^+ - (\lambda_1+2\mu_1)\,H_8^+ + (\lambda_1+2\mu_1)\,H_9^+,\\
K_4^+ &= \mu_1(-H_6^+ + H_8^+ - H_9^+ - H_{11}^+),\\
K_5^+ &= -\lambda_1H_6^+ - (\lambda_1+2\mu_1)\,H_8^+ - (\lambda_1+2\mu_1)\,H_9^+ - \lambda_1H_{11}^+,\\
K_6^+ &= -(\lambda_1+2\mu_1)\,H_6^+ - \lambda_1H_8^+ - \lambda_1H_9^+ - (\lambda_1+2\mu_1)\,H_{11}^+,\\
K_7^+ &= 4(\lambda_1+\mu_1)\,H_9^+ + 2\lambda_1H_{11}^+, \qquad K_8^+ = K_7^+ + 4\mu_1H_{11}^+.
\end{aligned}$$

Für $x \in S^-$, $y \in S^-$ erhält man $\mathbf{K}(x, y)$ aus (3.3), indem man μ_1 durch μ_0, λ_1 durch λ_0, H_9^+, H_{11}^+ durch H_9^-, H_{11}^- und $K_1^+, \ldots, K_8^+$ durch $K_1^-, \ldots, K_8^-$ ersetzt. Dabei geht K_j^- $(j = 1, \ldots, 8)$ aus K_j^+ durch die Ersetzungen $\lambda_1 \mid \lambda_0$, $\mu_1 \mid \mu_0$, $H_k^+ \mid H_k^-$ hervor. Die Konstanten H_k^+, H_k^- $(k = 1, \ldots, 11)$ sind als Funktion der *Laméschen Moduln* $\lambda_0, \mu_0, \lambda_1, \mu_1$ in [13] explizit angegeben. Als Funktion der *Youngschen Moduln* E_0, E_1 und der *Poissonschen Zahlen* ν_0, ν_1 sind sie am Ende der Arbeit aufgeschrieben.

Für $x \in S^+$, $y \in S^-$ ist

$$\mathbf{K}(x,y) = \mathbf{F}(x,y) = \frac{x_1-y_1}{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\begin{pmatrix}K_9^-n_1(x) & K_{10}^-n_2(x)\\ K_{11}^-n_2(x) & K_{10}^-n_1(x)\end{pmatrix}$$

$$+\frac{x_2-y_2}{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\begin{pmatrix}K_{12}^-n_2(x) & K_{13}^-n_1(x)\\ K_{12}^-n_1(x) & K_{14}^-n_2(x)\end{pmatrix}$$

$$+\frac{x_2H_4^-+y_2H_5^-}{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\,2\mu_1\begin{pmatrix}-n_2(x) & -n_1(x)\\ -n_1(x) & +n_2(x)\end{pmatrix}$$

$$+\frac{(x_2H_4^-+y_2H_5^-)\,(x_1-y_1)^2}{[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^2}\,4\mu_1\begin{pmatrix}+n_2(x) & +n_1(x)\\ +n_1(x) & -n_2(x)\end{pmatrix}$$

$$+\frac{(x_2H_4^-+y_2H_5^-)\,(x_1-y_1)\,(x_2-y_2)}{[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2]^2}\,4\mu_1\begin{pmatrix}-n_1(x) & +n_2(x)\\ +n_2(x) & +n_1(x)\end{pmatrix} \tag{3.4}$$

mit

$$\begin{aligned}
&K_9^- = -(\lambda_1+2\mu_1)\,H_1^- + \lambda_1H_3^- - \lambda_1H_4^-,\ K_{10}^- = \mu_1(-H_1^- - H_3^- - H_4^-),\\
&K_{11}^- = -\lambda_1H_1^- + (\lambda_1+2\mu_1)\,H_3^- - (\lambda_1+2\mu_1)\,H_4^-,\ K_{12}^- = K_{10}^- + 2\mu_1H_4^-,\\
&K_{13}^- = K_{11}^- + 2\mu_1H_4^-,\ K_{14}^- = K_9^- - 2\mu_1H_4^-.
\end{aligned}$$

Analog zu oben erhält man $\mathbf{K}(x, y)$ für $x \in S^-$, $y \in S^+$ aus (3.4) durch die Ersetzungen $\mu_1 \mid \mu_0$, $H_4^- \mid H_4^+$, $H_5^- \mid H_5^+$, $K_9^-, \ldots, K_{14}^+ \mid K_9^+, \ldots, K_{14}^+$. Dabei ergibt sich K_j^+ $(j = 9, \ldots, 14)$ aus K_j^- durch die Ersetzungen $\lambda_1 \mid \lambda_0$, $\mu_1 \mid \mu_0$, $H_k^- \mid H_k^+$.

Neben dem singulären Kern $\mathbf{S}(x, y)$ tritt der Kern $\mathbf{F}(x, y)$ auf, der feststehende Singularitäten bei $x = y = y^+(\pm 1)$ hat.

Wir transformieren jetzt das System (3.1) mit Hilfe der Parameterdarstellung von S^+ und S^- auf das Intervall $[-1, +1]$, indem wir setzen:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \\ \Phi_3(t) \\ \Phi_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(y^+(t)) \\ \varphi_2(y^+(t)) \\ \varphi_1(y^-(t)) \\ \varphi_2(y^-(t)) \end{pmatrix}, \quad p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ p_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(y^+(t)) \\ P_2(y^+(t)) \\ P_1(y^-(t)) \\ P_2(y^-(t)) \end{pmatrix},$$

$$k(t, \tau) = (k_{ij}(t, \tau))_{i,j=1,\dots,4}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathbf{K}(y^+(t), y^+(\tau))\,|\dot{y}^+(\tau)| & \mathbf{K}(y^+(t), y^-(\tau))\,|\dot{y}^-(\tau)| \\ \mathbf{K}(y^-(t), y^+(\tau))\,|\dot{y}^+(\tau)| & \mathbf{K}(y^-(t), y^-(\tau))\,|\dot{y}^-(\tau)| \end{pmatrix}.$$

Dann geht (3.1) über in (beachte Satz 1.2, S. 36 in [20])

$$\mathscr{B}\Phi := \Phi(t) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} k(t, \tau)\,\Phi(\tau)\,d\tau = p(t). \tag{3.5}$$

Mit Ergebnissen in [22: Kap. I, § 7] folgt unter der Voraussetzung $S^+ \subset C^{1,\alpha}$, $S^- \subset C^{1,\alpha}$

$$k(t, \tau) = (\alpha_{ij})\frac{1}{t-\tau}$$
$$+ \begin{pmatrix} h_{11}(t, \tau) & h_{12}(t, \tau) & 0 & 0 \\ h_{21}(t, \tau) & h_{22}(t, \tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{33}(t, \tau) & h_{34}(t, \tau) \\ 0 & 0 & h_{43}(t, \tau) & h_{44}(t, \tau) \end{pmatrix}\frac{1}{t-\tau} + f(t, \tau) \tag{3.6}$$

mit

$$(\alpha_{ij}) = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} \\ 0 & 0 & -\dfrac{\mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0} & 0 \end{bmatrix}.$$

Dabei ist $h_{ij}(t, \tau) \in H^\alpha([-1, +1] \times [-1, +1])$ (s. [20: S. 33]), $h_{ij}(t, t) = 0$ und $f(t, \tau)$ hat feststehende Singularitäten bei $(t, \tau) = (1, 1)$ und $(t, \tau) = (-1, -1)$. Die Elemente $f_{ij}(t, \tau)$ von $f(t, \tau)$ zerlegen wir in

$$f_{ij}(t, \tau) = h^+(\tau)\,f_{ij}(t, \tau) + h^-(\tau)\,f_{ij}(t, \tau). \tag{3.7}$$

Dabei sind $h^+(\tau), h^-(\tau) \in C^\infty([-1, +1]), h^\pm(\tau) \geqq 0, h^+(\tau) = 1$ für $\tau \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $h^+(\tau) = 0$ für $\tau \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$, $h^-(\tau) = 0$ für $\tau \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $h^-(\tau) = 1$ für $\tau \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ und $h^+(\tau) + h^-(\tau) = 1$ für $\tau \in [-1, +1]$. Dann hat $h^+(\tau)\,f_{ij}(t, \tau)$ nur bei $(t, \tau) = (1, 1)$ und $h^-(\tau)\,f_{ij}(t, \tau)$ nur bei $(t, \tau) = (-1, -1)$ eine Singularität.

Bei der Normierung $\mathring{y}_2^{\pm}(1) = \mp 1$, $\mathring{y}_2^{\pm}(-1) = \pm 1$ erhält man für die Gleichung der Tangente an $S^{\pm}$ im Punkt $y^+(1)$

$$\mathring{y}_1^{\pm}(t)_{+1} = y_1^{\pm}(1) + \cot \alpha_1^{\pm}(t-1), \ \big(y_1^+(1) = y_1^-(1)\big)$$
$$\mathring{y}_2^{\pm}(t)_{+1} = \pm (1-t)$$

und im Punkt $y^+(-1)$

$$\mathring{y}_1^{\pm}(t)_{-1} = y_1^{\pm}(-1) + \cot \alpha_{-1}^{\pm}(t+1), \ \big(y_1^+(-1) = y_1^-(-1)\big)$$
$$\mathring{y}_2^{\pm}(t)_{-1} = \pm (t+1).$$

Hierbei sind α_1^+, α_1^- die Winkel der Tangente an S^+, S^- mit der x_1-Achse im Punkt $y^+(1)$ und α_{-1}^+, α_{-1}^- die entsprechenden Winkel im Punkt $y^+(-1)$.

Führen wir die Bezeichnungen ein $(i, j = 1, 2)$:

$$\begin{aligned} f_{ij}^{0\pm}(t,\tau) &= F_{ij}\big(\mathring{y}^+(t)_{\pm 1}, \mathring{y}^+(\tau)_{\pm 1}\big)\,|\dot{y}^+(\pm 1)|, \\ f_{i,j+2}^{0\pm}(t,\tau) &= F_{ij}\big(\mathring{y}^+(t)_{\pm 1}, \mathring{y}^-(\tau)_{\pm 1}\big)\,|\dot{y}^-(\pm 1)|, \\ f_{i+2,j}^{0\pm}(t,\tau) &= F_{ij}\big(\mathring{y}^-(t)_{\pm 1}, \mathring{y}^+(\tau)_{\pm 1}\big)\,|\dot{y}^+(\pm 1)|, \\ f_{i+2,j+2}^{0\pm}(t,\tau) &= F_{ij}\big(\mathring{y}^-(t)_{\pm 1}, \mathring{y}^-(\tau)_{\pm 1}\big)\,|\dot{y}^-(\pm 1)|, \end{aligned} \tag{3.8}$$

dann erhält man durch eine genaue Analyse aus (3.7) $(i, j = 1, \ldots, 4)$:

$$f_{ij}(t,\tau) = f_{ij}^{0+}(t,\tau) + f_{ij}^{0-}(t,\tau) + \frac{m_{ij}^{+}(t,\tau)}{(1-t)^{1-\alpha} + (1-\tau)^{1-\alpha}}$$
$$+ \frac{m_{ij}(t,\tau)}{(1+t)^{1-\alpha} + (1+\tau)^{1-\alpha}}, \tag{3.9}$$

wobei $m_{ij}^+(t,\tau)$ für $(t,\tau) \neq (1,1)$ und $m_{ij}^-(t,\tau)$ für $(t,\tau) \neq (-1,-1)$ stetig und beschränkt ist. Für die Kerne $F_{ij}(x,y)$ gilt offenbar die Abschätzung

$$|F_{ij}(x,y)| \leqq C \frac{1}{|x_2| + |y_2|}. \tag{3.10}$$

Hieraus folgt

$$|f_{ij}^{0+}(t,\tau)| \leqq C^+ \frac{1}{2-t-\tau}, \quad |f_{ij}^{0-}(t,\tau)| \leqq C^- \frac{1}{2+t+\tau}. \tag{3.11}$$

Aus bekannten Resultaten (s. [3: S. 100, S. 85]) schließt man nun auf folgende Aussage.

Satz 3.1: *Sei $S^+ \subset C^{1,\alpha}$, $S^- \subset C^{1,\alpha}$ $(0 < \alpha \leqq 1)$, $\alpha_1^{\pm} \neq 0$, $\alpha_{-1}^{\pm} \neq 0$. Dann ist $\mathcal{B}$ in (3.5) ein linearer beschränkter Operator von $L_2^4([-1,+1])$ in $L_2^4([-1,+1])$ und damit $\mathcal{A}$ in (3.1) ein linearer beschränkter Operator von $L_2^2(S)$ in $L_2^2(S)$.*

Der zu $\mathcal{A}$ adjungierte Operator $\mathcal{A}^*$ ist

$$\mathcal{A}^*\psi = \psi(x) + \frac{1}{\pi}\int_{S^+} \Big(\underset{(1)}{T}(\partial_y, n_y)\,\mathrm{G}(x,y)^T\Big)^T \psi(y)\,d_ys$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_{S^-} \Big(\underset{(0)}{T}(\partial_y, n_y)\,\mathrm{G}(x,y)^T\Big)^T \psi(y)\,d_ys. \tag{3.12}$$

Transformation von $\mathscr{A}^*$ auf das Intervall $[-1, +1]$ ergibt für

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \Psi_1(t) \\ \Psi_2(t) \\ \Psi_3(t) \\ \Psi_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(y^+(t)) \\ \psi_2(y^+(t)) \\ \psi_1(y^-(t)) \\ \psi_2(y^-(t)) \end{pmatrix}$$

$$\mathscr{B}^T\Psi = \Psi(t) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{+1} k^T(t, \tau)\, \Psi(\tau)\, d\tau \tag{3.13}$$

mit $(i, j = 1, 2)$

$$k_{ij}^T(t, \tau) = k_{ji}(\tau, t)\, \frac{|\dot{y}^+(\tau)|}{|\dot{y}^+(t)|}, \quad k_{i,j+2}^T(t, \tau) = k_{j+2,i}(\tau, t)\, \frac{|\dot{y}^-(\tau)|}{|\dot{y}^+(t)|},$$

$$k_{i+2,j}^T(t, \tau) = k_{j,i+2}(\tau, t)\, \frac{|\dot{y}^+(\tau)|}{|\dot{y}^-(t)|}, \quad k_{i+2,j+2}^T(t, \tau) = k_{j+2,i+2}(\tau, t)\, \frac{|\dot{y}^-(\tau)|}{|\dot{y}^-(t)|}.$$

Der zu $\mathscr{B}$ adjungierte Operator ist

$$\mathscr{B}^*\Psi = \Psi(t) + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{+1} k^*(t, \tau)\, \Psi(\tau)\, d\tau \tag{3.14}$$

mit

$$k_{ij}^*(t, \tau) = k_{ji}(\tau, t).$$

Satz 3.2: *Unter den Voraussetzungen des Satzes 3.1 gilt, daß die starren Verschiebungen $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ zu $N(\mathscr{A}^*)$ (Nullraum von $\mathscr{A}^*$) gehören. Entsprechend gilt*

$$\Psi_{(k)}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_k(y^+(t)) \\ \boldsymbol{a}_k(y^-(t)) \end{pmatrix} \subset N(\mathscr{B}^T)$$

und

$$\Psi_{(k)}^*(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_k(y^+(t))\, |\dot{y}^+(t)| \\ \boldsymbol{a}_k(y^-(t))\, |\dot{y}^-(t)| \end{pmatrix} \subset N(\mathscr{B}^*), \quad k = 1, 1, 3. \tag{3.15}$$

Beweis: Wendet man die *Bettische Formel* (s. [18: (3.13)]) an auf $D^+ \setminus K(x_0, \varepsilon)$, $x_0 \in S^+$ und D^- mit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(y) = \mathbf{G}_{(k)}(x_0, y)$ und $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(y) = \boldsymbol{a}_i(y)$, dann folgt (beachte [18: S. 13] und die Symmetrie von $\mathbf{G}(x, y)$ [13]) $\mathscr{A}^*\boldsymbol{a}_i(x_0) = \mathbf{0}$ für $x_0 \in S^+$. Analog zeigt man $\mathscr{A}^*\boldsymbol{a}_i(x_0) = \mathbf{0}$ für $x_0 \in S^-$ ∎

Zum Nachweis, daß $\mathscr{L}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\} = N(\mathscr{A}^*)$ gilt, benötigen wir folgenden Satz.

Satz 3.3 (*Regularitätssatz*): *Es seien die Voraussetzungen des Satzes 3.1 erfüllt $\boldsymbol{P}(x) \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$, und $\boldsymbol{\varphi}(x) \in L_2^2(S)$ eine Lösung von $\mathscr{A}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{P}$. Dann gilt $\boldsymbol{\varphi}(x) \in C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$.*

Beweis: Die Anteile in der Integralgleichung, die von der Kompensatrix $\mathbf{V}(x, y)$ herrühren, sind für $|x_2| \neq 0$ gutartig und genügen auf $S \setminus K_\varepsilon$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten 1. Bringen wir diese auf die rechte Seite, gewinnt $\mathscr{A}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{P}$

die Gestalt

$$\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{S^+} \underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) \underset{(1)}{\Gamma}(x, y) \, \varphi(y) \, d_y s = \boldsymbol{q}(x) \quad \text{für} \quad x \in S^+, \tag{3.16}$$

$$\varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{S^-} \underset{(0)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n}_x) \underset{(0)}{\Gamma}(x, y) \, \varphi(y) \, d_y s = \boldsymbol{q}(x) \quad \text{für} \quad x \in S^-$$

mit $\boldsymbol{q}(x) \in L_2{}^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ ($\beta = 1$, wenn $\boldsymbol{P}(x) = 0$). Es genügt offenbar, den weiteren Beweis für (3.16) zu führen. Wir transformieren (3.16) auf das Intervall $[-1, +1]$ und erhalten

$$\Phi_1(t) + \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\tau - t} \Phi_2(\tau) \, d\tau + \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} d_{1j}(t, \tau) \, \Phi_j(\tau) \, d\tau = q_1(t),$$

$$\Phi_2(t) - \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\tau - t} \Phi_1(\tau) \, d\tau + \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} d_{2j}(t, \tau) \, \Phi_j(\tau) \, d\tau = q_2(t),$$

$$d_{ij}(t, \tau) = \frac{h_{ij}(t, \tau)}{t - \tau} = \frac{h_{ij}(t, \tau) - h_{ij}(t, t)}{t - \tau}, \tag{3.17}$$

$$h_{ij}(t, \tau) \in H^\alpha([-1, +1] \times [-1, +1]),$$

$$\Phi_i(t) \in L_2([-1, +1]), \quad q_i(t) \in L_2([-1, +1]) \cap C^{0,\beta}([-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]).$$

Wir setzen jetzt das Intervall $[-1, +1]$ zu einer genügend glatten geschlossenen Kurve L fort und betrachten

$$\hat{\Phi}(t) = \begin{cases} \Phi(t) & \text{für} \quad t \in [-1, +1], \\ 0 & \text{für} \quad t \in L \setminus [-1, +1], \end{cases}$$

$$\hat{d}_{ij}(t, \tau) = \frac{\hat{h}_{ij}(t, \tau) - \hat{h}_{ij}(t, t)}{t - \tau} \quad \text{für} \quad t, \tau \in L,$$

wobei $\hat{h}_{ij}(t, \tau) \in H^\alpha(L \times L)$ eine Fortsetzung von $h_{ij}(t, \tau)$ auf $L \times L$ ist (zur Fortsetzbarkeit s. Kap. 4, man muß noch mit einer genügend glatten Abschneidefunktion multiplizieren),

$$\hat{q}_1(t) = \begin{cases} q_1(t) \quad \text{für} \quad t \in [-1, +1], \\ \displaystyle \frac{1}{\pi} \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\tau - t} \Phi_2(\tau) \, d\tau + \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \hat{d}_{1j}(t, \tau) \, \Phi_j(\tau) \, d\tau \\ \text{für} \quad t \in L \setminus [-1, +1], \end{cases}$$

$$\hat{q}_2(t) = \begin{cases} q_2(t) \quad \text{für} \quad t \in [-1, +1], \\ \displaystyle -\frac{1}{\pi} \frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\tau - t} \Phi_1(\tau) \, d\tau + \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \hat{d}_{2j}(t, \tau) \, \Phi_j(\tau) \, d\tau \\ \text{für} \quad t \in L \setminus [-1, +1]. \end{cases}$$

Setzen wir noch

$$\mathscr{S}u = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{u(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \quad \mathscr{V}_{ij}u = \frac{1}{\pi}\int\limits_L \hat{d}_{ij}(t,\tau)\,u(\tau)\,d\tau,$$

dann kann (3.17) geschrieben werden

$$\begin{aligned}
&\hat{\Phi}_1 + i\,\frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\,\mathscr{S}\hat{\Phi}_2 + \mathscr{V}_{11}\hat{\Phi}_1 + \mathscr{V}_{12}\hat{\Phi}_2 = \hat{q}_1,\\
&\hat{\Phi}_2 - i\,\frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\,\mathscr{S}\hat{\Phi}_1 + \mathscr{V}_{21}\hat{\Phi}_1 + \mathscr{V}_{22}\hat{\Phi}_2 = \hat{q}_2
\end{aligned} \tag{3.18}$$

mit $\hat{q}_i \in L_2(L) \cap C^{0,\beta}\big(L \setminus (K(1,\varepsilon) \cup K(-1,\varepsilon))\big)$. Jetzt wird (3.18) von links mit

$$\begin{pmatrix} a\mathscr{I} & -i\,\dfrac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\,a\mathscr{S} \\ i\,\dfrac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\,a\mathscr{S} & a\mathscr{I} \end{pmatrix}, \qquad a = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\right)^2}$$

multipliziert, dann folgt wegen $\mathscr{S}^2 = \mathscr{I}$ (s. [20: S. 41])

$$\begin{aligned}
&\hat{\Phi}_1 + \left(a\mathscr{V}_{11} - i\,\frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\,a\mathscr{S}\mathscr{V}_{21}\right)\hat{\Phi}_1\\
&\quad + \left(a\mathscr{V}_{12} - i\,\frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\,a\mathscr{S}\mathscr{V}_{22}\right)\hat{\Phi}_2 = a\hat{q}_1 - i\,\frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\,a\mathscr{S}\hat{q}_2,\\
&\hat{\Phi}_2 + \left(i\,\frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\,a\mathscr{S}\mathscr{V}_{11} + a\mathscr{V}_{21}\right)\hat{\Phi}_1\\
&\quad + \left(i\,\frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\,a\mathscr{S}\mathscr{V}_{12} + a\mathscr{V}_{22}\right)\hat{\Phi}_2 = i\,\frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\,a\mathscr{S}\hat{q}_1 + a\hat{q}_2.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Durch Vertauschung der Integrationsreihenfolge (s. [24: S. 104]) folgt

$$\pi^2 i\mathscr{S}\mathscr{V}_{kj}\hat{\Phi}_l = \int\limits_L \frac{M_{kj}(t,\tau) - M_{kj}(\tau,\tau)}{t - \tau}\,\hat{\Phi}_l(\tau)\,d\tau$$

mit

$$M_{kj}(t,\tau) = \int\limits_L \frac{\hat{h}_{kj}(\sigma,\tau) - \hat{h}_{kj}(\sigma,\sigma)}{\sigma - t}\,d\sigma \in H^{\alpha'}(L \times L)$$

($\alpha' < \alpha$, wenn $\alpha = 1$, $\alpha' = \alpha$, wenn $\alpha < 1$).

Zerlegen wir $\hat{q}_i = \chi_1(t)\,\hat{q}_i(t) + \chi_2(t)\,\hat{q}_i(t)$, wobei $\chi_i(t)$ genügend glatt ist und $\chi_i(t) \geqq 0$ für $t \in L$, $\chi_1(t) = 1$ für $t \in L \setminus \left(K\left(1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup K\left(-1, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$, $\chi_1(t) = 0$ für $t \in L \cap \left(K\left(1, \frac{\varepsilon}{4}\right) \cup K\left(-1, \frac{\varepsilon}{4}\right)\right)$, $\chi_2(t) = 0$ für $t \in L \setminus \left(K\left(1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup K\left(-1, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$, $\chi_2(t) = 1$ für $t \in L \cap \left(K\left(1, \frac{\varepsilon}{4}\right) \cup K\left(-1, \frac{\varepsilon}{4}\right)\right)$, $\chi_1(t) + \chi_2(t) = 1$ für $t \in L$. Dann ist $\chi_1(t)\,\hat{q}_i(t) \in C^{0,\beta}(L)$ und $\chi_2(t)\,\hat{q}_i(t) = 0$ für $t \in L \setminus \left(K\left(1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup K\left(-1, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$. Daraus folgt $\mathscr{S}\hat{q}_i \in L_2(L) \cap C^{0,\beta}\big(L \setminus (K(1, \varepsilon) \cup K(-1, \varepsilon))\big)$ (s. [24: S. 94]). Also kann man (3.19) schreiben

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}} - \mathscr{V}\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{g}, \tag{3.20}$$

wobei die Kerne $v_{ij}(t, \tau)$ des Matrixintegraloperators $\mathscr{V}$ die Gestalt haben $v_{ij}(t, \tau) = \dfrac{c_{ij}(t, \tau) - c_{ij}(t, t)}{t - \tau} \in H^{\alpha'}(L \times L)$ und $\boldsymbol{g} \in L_2{}^2(L) \cap C^{0,\beta}\big(L \setminus (K(1, \varepsilon) \cup K(-1, \varepsilon))\big)$ gilt. Beachtet man, daß auch $\mathscr{V}\boldsymbol{g} \in L_2{}^2(L) \cap C^{0,\beta}\big(L \setminus (K(1, \varepsilon) \cap K(-1, \varepsilon))\big)$ gilt, dann folgt in bekannter Weise durch Iteration von (3.20) (s. [24: S. 112–113]) $\hat{\boldsymbol{\Phi}} \in L_2{}^2([-1, +1]) \cap C^{0,\beta}([-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon])$ und damit $\varphi \in L_2{}^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ ∎

Wir wenden uns nun dem Nachweis der Fredholm-Eigenschaft des Operators $\mathscr{B}$ (vgl. (3.5)) zu. Dazu setzen wir jetzt voraus $S \subset C_n^{1,\alpha}$ (vgl. Def. 1.1). Dann ist

$$f_{11}^{0+}(t, \tau) = f_{11}^{0-}(t, \tau) = 0,$$

$$f_{12}^{0\pm}(t, \tau) = \pm K_3{}^{+} \frac{1 \mp t}{(2 \mp t \mp \tau)^2} \pm K_5{}^{+} \frac{1 \mp \tau}{(2 \mp t \mp \tau)^2} \mp 4\mu_1 H_{11}^{+} \frac{(1 \mp t)(1 \mp \tau)}{(2 \mp t \mp \tau)^3},$$

$$f_{13}^{0+}(t, \tau) = f_{13}^{0-}(t, \tau) = 0,$$

$$f_{14}^{0\pm}(t, \tau) = \pm K_{13}^{-} \frac{1}{2 \mp t \mp \tau} \mp 2\mu_1 H_4{}^{-} \frac{1 \mp t}{(2 \mp t \mp \tau)^2} \pm 2\mu_1 H_5{}^{-} \frac{1 \mp \tau}{(2 \mp t \mp \tau)^2},$$

$$f_{21}^{0\pm}(t, \tau) = \pm K_2{}^{+} \frac{1 \mp t}{(2 \mp t \mp \tau)^2} \pm K_4{}^{+} \frac{1 \mp \tau}{(2 \mp t \mp \tau)^2} \pm 4\mu_1 H_{11}^{+} \frac{(1 \mp t)(1 \mp \tau)}{(2 \mp t \mp \tau)^3},$$

$$f_{22}^{0+}(t, \tau) = f_{22}^{0-}(t, \tau) = 0,$$

$$f_{23}^{0\pm}(t, \tau) = \pm K_{12}^{-} \frac{1}{2 \mp t \mp \tau} \mp 2\mu_1 H_4{}^{-} \frac{1 \mp t}{(2 \mp t \mp \tau)^2} \pm 2\mu_1 H_5{}^{-} \frac{1 \mp \tau}{(2 \mp t \mp \tau)^2},$$

$$f_{24}^{0+}(t, \tau) = f_{24}^{0-}(t, \tau) = 0,$$

$$f_{31}^{0+}(t, \tau) = f_{31}^{0-}(t, \tau) = 0,$$

$$f_{32}^{0\pm}(t, \tau) = \mp K_{13}^{+} \frac{1}{2 \mp t \mp \tau} \pm 2\mu_0 H_4{}^{+} \frac{1 \mp t}{(2 \mp t \mp \tau)^2} \mp 2\mu_0 H_5{}^{+} \frac{1 \mp \tau}{(2 \mp t \mp \tau)^2},$$

$$f_{33}^{0+}(t, \tau) = f_{33}^{0-}(t, \tau) = 0,$$

$$f_{34}^{0\pm}(t, \tau) = \mp K_3{}^{-} \frac{1 \mp t}{(2 \mp t \mp \tau)^2} \mp K_5{}^{-} \frac{1 \mp \tau}{(2 \mp t \mp \tau)^2} \pm 4\mu_0 H_{11}^{-} \frac{(1 \mp t)(1 \mp \tau)}{(2 \mp t \mp \tau)^3},$$

$$f_{41}^{0\pm}(t, \tau) = \mp K_{12}^{+} \frac{1}{2 \mp t \mp \tau} \pm 2\mu_0 H_4{}^{+} \frac{1 \mp t}{(2 \mp t \mp \tau)^2} \mp 2\mu_0 H_5{}^{+} \frac{1 \mp \tau}{(2 \mp t \mp \tau)^2},$$

$$f_{42}^{0+}(t, \tau) = f_{42}^{0-}(t, \tau) = 0,$$

$$f_{43}^{0\pm}(t, \tau) = \mp K_2{}^{-} \frac{1 \mp t}{(2 \mp t \mp \tau)^2} \mp K_4{}^{-} \frac{1 \mp \tau}{(2 \mp t \mp \tau)^2} \mp 4\mu_0 H_{11}^{-} \frac{(1 \mp t)(1 \mp \tau)}{(2 \mp t \mp \tau)^3},$$

$$f_{44}^{0+}(t, \tau) = f_{44}^{0-}(t, \tau) = 0.$$

Der Operator $\mathscr{B}$ ist also von der Gestalt

$$\mathscr{B}\Phi = \Phi(t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} k^0(t, \tau)\, \Phi(\tau)\, d\tau + \mathscr{K}\Phi.$$

Dabei ist $\mathscr{K}$ ein vollstetiger Operator von $L_2^4([-1, +1])$ in $L_2^4([-1, +1])$ und

$$
\begin{aligned}
k_{ij}^0(t, \tau) = {} & \alpha_{ij} \frac{1}{t-\tau} + \beta_{ij} \frac{1}{2-t-\tau} - \beta_{ij} \frac{1}{2+t+\tau} \\
& + \gamma_{ij} \frac{1-t}{(2-t-\tau)^2} - \gamma_{ij} \frac{1+t}{(2+t+\tau)^2} \\
& + \eta_{ij} \frac{(1-t)^2}{(2-t-\tau)^3} - \eta_{ij} \frac{(1+t)^2}{(2+t+\tau)^3}
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

mit α_{ij} nach (3.6),

$$
(\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & K_5^+ & 0 & K_{13}^- + 2\mu_1 H_5^- \\ K_4^+ & 0 & K_{12}^- + 2\mu_1 H_5^- & 0 \\ 0 & -K_{13}^+ - 2\mu_0 H_5^+ & 0 & -K_5^- \\ -K_{12}^+ - 2\mu_0 H_5^+ & 0 & -K_4^- & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
(\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2(\lambda_1 + 2\mu_1) H_9^+ + (\lambda_1 - 4\mu_1) H_{11}^+ & 0 & -2\mu_1(H_4^- + H_5^-) \\ \mu_1(2H_9^+ + 5H_{11}^+) & 0 & -2\mu_1(H_4^- + H_5^-) & 0 \\ 0 & 2\mu_0(H_4^+ + H_5^+) & 0 & -2(\lambda_0 + 2\mu_0) H_9^- - (\lambda_0 - 4\mu_0) H_{11}^- \\ 2\mu_0(H_4^+ + H_5^+) & 0 & -\mu_0(2H_9^- + 5H_{11}^-) & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 4\mu_1 H_{11}^+ & 0 & 0 \\ -4\mu_1 H_{11}^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4\mu_0 H_{11}^- \\ 0 & 0 & 4\mu_0 H_{11}^- & 0 \end{pmatrix}.
$$

Die Symbole des Matrixoperators $\mathscr{B}$ als Operator von $L_2^4([-1, +1])$ in $L_2^4([-1, +1])$ sind (s. [3: (10.4)]):

$$
A_{kj}(\lambda, \xi) = \begin{cases} \delta_{kj} - i\alpha_{kj} \tanh \pi\lambda - \dfrac{1}{\cosh \pi\lambda} \Big[\beta_{kj} + \gamma_{kj} \Big(\dfrac{1}{2} - i\lambda\Big) \\ \quad + \dfrac{1}{2} \eta_{kj} \Big(\dfrac{3}{2} - i\lambda\Big) \Big(\dfrac{1}{2} - i\lambda\Big)\Big] \quad \text{für} \quad -\infty < \lambda \leq +\infty,\ \xi = -\infty, \\ \delta_{kj} + i\alpha_{kj} \tanh \pi\xi + \dfrac{1}{\cosh \pi\xi} \Big[\beta_{kj} + \gamma_{kj} \Big(\dfrac{1}{2} - i\xi\Big) \\ \quad + \dfrac{1}{2} \eta_{kj} \Big(\dfrac{3}{2} - i\xi\Big) \Big(\dfrac{1}{2} - i\xi\Big)\Big] \quad \text{für} \quad \lambda = \infty,\ -\infty < \xi \leqq +\infty. \end{cases}
\tag{3.22}
$$

Wegen

$$\lim_{\lambda\to-\infty} A_{kj}(\lambda, -\infty) = \delta_{kj} + i\alpha_{kj} = A_{kj}(\infty, \infty) \quad \text{und}$$

$$\lim_{\xi\to-\infty} A_{kj}(\infty, \xi) = \delta_{kj} - i\alpha_{kj} = A_{kj}(\infty, -\infty)$$

bildet die Menge der Punkte $A_{kj}(\lambda, \xi)$ in der komplexen Ebene eine geschlossene Kurve, die im Sinne wachsender λ, ξ orientiert sei. Ebenso ist dann $\det\left(A_{kj}(\lambda, \xi)\right)$ eine geschlossene orientierte Kurve. Wenn $\inf\limits_{\lambda,\xi} \left|\det\left(A_{kj}(\lambda, \xi)\right)\right| > 0$ ist, dann sei $\operatorname{ind}(A_{kj})$ gleich der Anzahl der mathematisch positiven minus der Anzahl der mathematisch negativen Umfahrungen der Kurve $\det\left(A_{kj}(\lambda, \xi)\right)$ um die komplexe Zahl $z = 0$.

Es gilt nun (s. [3: Satz 12.5, Satz 12.6]) der folgende Fakt.

Satz 3.4: *Es ist $\mathscr{B}$ in $L_2^4([-1, +1])$ dann und nur dann ein Noetheroperator, wenn*

$$\inf_{\lambda,\xi} \left|\det\left(A_{kj}(\lambda, \xi)\right)\right| > 0. \tag{3.23}$$

Ist (3.23) erfüllt, dann gilt für den Index von $\mathscr{B}$

$$\operatorname{Ind} \mathscr{B} = -\operatorname{ind}(A_{kj}).$$

Setzen wir $f(\lambda, \xi) = \det\left(A_{kj}(\lambda, \xi)\right)$, dann zeigt man leicht

$$f(\lambda, -\infty) = f(\infty, \lambda). \tag{3.24}$$

Daraus folgt, daß $f(\lambda) := f(\lambda, -\infty)$, $-\infty < \lambda \leqq +\infty$, eine geschlossene Kurve ist, die wir kurz *Symbolkurve* nennen. Weiter folgt aus (3.24), daß die Kurve $f(\lambda, \xi)$ gleich der zweimal mit derselben Orientierung durchfahrenen Symbolkurve $f(\lambda)$ ist. Man stellt leicht fest, daß $\operatorname{Re} f(\lambda)$ eine gerade und $\operatorname{Im} f(\lambda)$ eine ungerade Funktion ist. Also ist die Symbolkurve $f(\lambda)$ symmetrisch zur reellen Achse. Es ist

$$f(\infty) = \left[1 - \left(\frac{\mu_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}\right)^2\right]. \tag{3.25}$$

Unter den in der Elastizitätstheorie üblichen Voraussetzungen $\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0$ gilt $\frac{9}{16} < f(\infty) < 1$. Aus diesen Überlegungen folgt mit Satz 3.4 eine weitere Aussage.

Satz 3.5: *Es sei $S \subset C_n^{1,\alpha}(0 < \alpha \leqq 1)$ und*

$$\operatorname{Re} f(\lambda) > 0 \quad \textit{für} \quad 0 \leqq \lambda < \infty. \tag{3.26}$$

Dann ist $\mathscr{B}$ in $L_2^4([-1, +1])$ ein Noetheroperator mit $\operatorname{Ind} \mathscr{B} = 0$.

Wenn nun $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda^*$, $\mu_0 = \mu_1 = \mu^*$ ist, dann ist

$$H_1^- = H_1^+ = \frac{\lambda^* + 3\mu^*}{2\mu^*(\lambda^* + 2\mu^*)}, \quad H_2^- = H_2^+ = -\frac{\lambda^* + \mu^*}{2\mu^*(\lambda^* + 2\mu^*)},$$

$$H_3^- = H_3^+ = 0,$$

$$H_4^- = H_4^+ = -\frac{\lambda^* + \mu^*}{2\mu^*(\lambda^* + 2\mu^*)}, \quad H_5^- = H_5^+ = \frac{\lambda^* + \mu^*}{2\mu^*(\lambda^* + 2\mu^*)},$$

$$H_k^- = H_k^+ = 0 \quad \text{für} \quad k = 6, \ldots, 11$$

und man erhält

$$f(\lambda) = \left[1 - \left(\frac{\mu^*}{\lambda^* + 2\mu^*}\right)^2\right]^2,$$

d. h., die Symbolkurve zieht sich auf einen Punkt zusammen, der auf der reellen Achse im Intervall $\left(\frac{9}{16}, 1\right)$ liegt. Da man den Fall allgemeiner Laméscher Moduln durch stetige Deformation aus dem Fall gleicher Laméscher Moduln erzeugen kann, ist (3.26) sicher erfüllt, wenn sich μ_0 von μ_1 und λ_0 von λ_1 nicht zu viel unterscheiden.

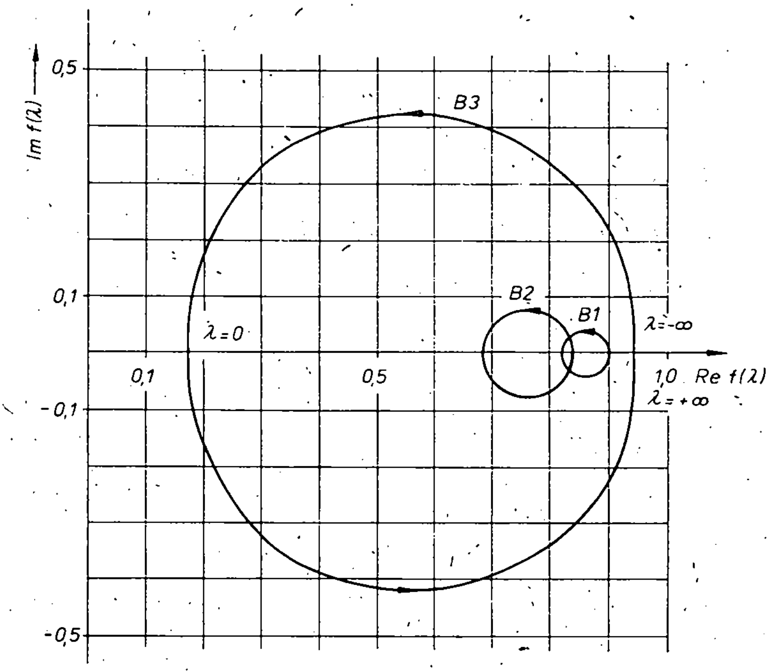

Abb. 2

In den drei folgenden gerechneten Beispielen war Bedingung (3.26) erfüllt (s. Abb. 2):

B1: $\mu_0 = 0{,}2$, $\lambda_0 = 0{,}6$; $\mu_1 = 0{,}4$, $\lambda_1 = 0{,}8$,
B2: $E_0 = 7300$, $\nu_0 = 0{,}25$ (Al); $E_1 = 22000$, $\nu_1 = 0{,}33$ (Fe),
B3: $E_0 = 0{,}1$, $\nu_0 = 0{,}4$; $E_1 = 100$, $\nu_1 = 0{,}4$.

Für die Lage des Punktes $f(0)$ im Grenzfall $E_0/E_1 = 0$ ($E_1/E_0 = 0$ liefert dasselbe, da sich $f(\lambda)$ bei Vertauschung der Indizes bei den Laméschen Moduln nicht ändert) ergibt sich

$$f(0) = \frac{9 - 24\nu_1 + 16\nu_1^2}{16(1-\nu_1)^2} \cdot \frac{17 - 48\nu_0 + 32\nu_0^2}{16(1-\nu_0)^2} =: g(\nu_0, \nu_1).$$

Daraus folgt

$$\frac{153}{256} = g(0, 0) \geqq g(\nu_0, \nu_1) \geqq g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} \quad \text{für} \quad 0 \leqq \nu_0, \nu_1 \leqq \frac{1}{2}.$$

Das legt die Vermutung nahe, daß (3.26) unter der Voraussetzung $E_i > 0, 0 < \nu_i < \frac{1}{2}$ immer erfüllt ist. Ein allgemeiner Beweis dieser Vermutung ist auf Grund der Kompliziertheit von $f(\lambda)$ nicht gelungen.

Satz 3.6: *Es sei* $S \subset C_n^{1,\alpha}$ $(0 < \alpha \leqq 1)$ *und* (3.26) *erfüllt. Dann ist* $N(\mathscr{A}^*) = \mathscr{L}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ *und entsprechend* $N(\mathscr{B}^*) = \mathscr{L}\{\Psi^*_{(1)}, \Psi^*_{(2)}, \Psi^*_{(3)}\}$.

Beweis: Nach Satz 3.2 ist $\dim N(\mathscr{A}^*) \geqq 3$. Sei $\dim N(\mathscr{A}^*) > 3$, dann wäre wegen $\operatorname{Ind} \mathscr{B} = \operatorname{Ind} \mathscr{A} = 0$ auch $\dim N(\mathscr{A}) > 3$, d. h. in $N(\mathscr{A})$ gäbe es wenigstens 4 linear unabhängige Vektoren $\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_4$. Aus Satz 3.3 und Satz 2.1 und $\mathscr{A}\boldsymbol{\varphi}_j = 0$ folgt, daß $\boldsymbol{V}(x, \boldsymbol{\varphi}_j)$ Lösung des Problems II $(D; \boldsymbol{0}, 0; \boldsymbol{0}; \boldsymbol{0}, 0)$ ist. Aus dem Eindeutigkeitssatz folgt $\boldsymbol{V}(x, \boldsymbol{\varphi}_j) \in \mathscr{L}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3\}$. Dann gibt es in $\mathscr{L}\{\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_4\}$ (s. [18: S. 33]) einen Vektor $\boldsymbol{\varphi} \neq \boldsymbol{0}$ mit

$$\int_S \boldsymbol{\varphi}\, ds = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{V}(x, \boldsymbol{\varphi}) = \sum_{i=1}^{2} \delta_i \boldsymbol{a}_i(x) = \delta_1 \boldsymbol{i}_1 + \delta_2 \boldsymbol{i}_2, \quad x \in D.$$

Wegen Satz 2.3 ist $\boldsymbol{V}(x, \boldsymbol{\varphi})$ in CD Lösung des Problems $\mathrm{I}(CD; \boldsymbol{0}, 0; \delta_1 \boldsymbol{i}_1 + \delta_2 \boldsymbol{i}_2; \boldsymbol{0}, 0)$. Nun ist offenbar auch $\delta_1 \boldsymbol{i}_1 + \delta_2 \boldsymbol{i}_2$ Lösung dieses Problems, also gilt auf Grund des Eindeutigkeitssatzes $\boldsymbol{V}(x, \boldsymbol{\varphi}) = \delta_1 \boldsymbol{i}_1 + \delta_2 \boldsymbol{i}_2$ für $x \in CD$. Wegen Satz 2.2 gilt $\boldsymbol{V}(x, \boldsymbol{\varphi}) = o(1)$, also ist $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$ und somit $\boldsymbol{V}(x, \boldsymbol{\varphi}) \equiv \boldsymbol{0}$. Aus der Sprungrelation für das elastische Potential der einfachen Schicht (s. [18: (4.2), (4.3)]) folgt $\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{0}$. Dieser Widerspruch zeigt, daß $\dim N(\mathscr{A}^*) = 3$ ist und somit $N(\mathscr{A}^*) = \mathscr{L}\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ ist ∎

4. Existenzsätze

Satz 4.1: *Es sei* $S \subset C_n^{1,\alpha}$, *Bedingung* (3.26) *erfüllt,* $\boldsymbol{P} \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ *für jedes* $\varepsilon > 0$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$. *Das Problem* $\mathrm{II}(D; \boldsymbol{0}, 0; \boldsymbol{P}; \boldsymbol{0}, 0)$ *besitzt dann und nur dann eine Lösung* $\boldsymbol{u}(x)$, *wenn die Gleichgewichtsbedingungen*

$$\int_S \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a}_k\, ds = 0, \qquad k = 1, 2, 3 \tag{4.1}$$

erfüllt sind. Es ist $\boldsymbol{u}(x)$ *darstellbar als Potential* $\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{V}(x, \boldsymbol{\varphi})$, *wobei* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ *eine Lösung von* $\mathscr{A}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{P}$ *ist.*

Beweis: Daß (4.1) notwendig ist, haben wir bereits festgestellt (s. (1.8)). Sei nun (4.1) erfüllt. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \Psi^*_{(k)}(t) \cdot p(t)\, dt &= \int_{-1}^{+1} \boldsymbol{a}_k\big(y^+(t)\big) \,|\dot{y}^+(t)|\, \cdot \boldsymbol{P}\big(y^+(t)\big)\, dt \\ &\quad + \int_{-1}^{+1} \boldsymbol{a}_k\big(y^-(t)\big) \,|\dot{y}^-(t)|\, \cdot \boldsymbol{P}\big(y^-(t)\big)\, dt \\ &= \int_{S^+} \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{P}\, ds + \int_{S^-} \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{P}\, ds = \int_S \boldsymbol{a}_k \cdot \boldsymbol{P}\, ds = 0.\end{aligned}$$

Also hat $\mathscr{B}\Phi = p$ und damit $\mathscr{A}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{P}$ eine Lösung. Aus Satz 3.3, Satz 2.4, $\mathscr{A}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{P}$ folgt, daß $\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{V}(x, \boldsymbol{\varphi})$ Lösung des Problems $\mathrm{II}(D; \boldsymbol{0}, 0; \boldsymbol{P}; \boldsymbol{0}, 0)$ ist ∎

Wir kommen jetzt zum allgemeinen Fall:
Wir betrachten ein Kurvenstück S_1 der oberen Halbebene, so daß $S_0^* = S_0 \cup \bar{S}_1$ eine beliebig glatte geschlossene Kurve ist und das Innengebiet D^{+*} von S_0^* das

Gebiet D^+ enthält. Sei $D^{+*} \cup D \subset K(0, R)$ und $D^{-*} = K(0, R) \setminus \overline{D^{+*}}$, $S_R = \{x: |x| = R\}$. Wir betrachten folgendes Rand-Kontaktproblem $K^*(0, 0; \boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{P}^*)$:

$$\underset{(1)}{A}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in} \quad D^{+*}, \qquad \underset{(0)}{A}\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{in} \quad D^{-*},$$

$$\{\boldsymbol{u}\}^+ - \{\boldsymbol{u}\}^- = \boldsymbol{w}^* \quad \text{auf} \quad S_0^*, \quad \Big\{\underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{u}\Big\}^+ - \Big\{\underset{(0)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{u}\Big\}^- = \boldsymbol{P}^* \quad \text{auf}$$
$$S_0^*, \quad \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{auf} \quad S_R.$$

Es gilt (s. [18], vgl. auch [5]) folgende Aussage.

Hilfssatz 4.1: *Unter den Voraussetzungen $\boldsymbol{w}^* \in C^{1,\beta}(S_0^*)$, $\boldsymbol{P}^* \in C^{0,\beta}(S_0^*)$, $0 < \beta < 1$, hat das Problem $K^*(0, 0; \boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{P}^*)$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{u}$, für die gilt:*

$$\boldsymbol{u}|_{D^{+*}} \in C^{1,\beta}(\overline{D^{+*}}) \cap C^\infty(D^{+*}), \qquad \boldsymbol{u}|_{D^{-*}} \in C^{1,\beta}(\overline{D^{-*}}) \cap C^\infty(D^{-*}).$$

Gegeben seien die Kontaktdaten $\hat{\boldsymbol{w}} \in C^{1,\beta}(S_0)$, $\hat{\boldsymbol{P}} \in C^{0,\beta}(S_0)$, die Volumenkraft $\boldsymbol{F}|_{D^+} \in C^{0,\beta}(\overline{D^+})$, $\boldsymbol{F}|_{D^-} \in C^{0,\beta}(\overline{D^-})$ und das Temperaturfeld $\theta|_{D^+} \in C^{1,\beta}(\overline{D^+})$, $\theta|_{D^-} \in C^{1,\beta}(\overline{D^-})$. Wir setzen $\hat{\boldsymbol{w}}, \hat{\boldsymbol{P}}$ auf S_0^* fort zu $\hat{\boldsymbol{w}}^* \in C^{1,\beta}(S_0^*)$, $\hat{\boldsymbol{P}}^* \in C^{0,\beta}(S_0^*)$, setzen $\boldsymbol{F}$ fort zu $\boldsymbol{F}^*|_{D^{+*}} \in C^{0,\beta}(\overline{D^{+*}})$, $\boldsymbol{F}^*|_{D^{-*}} \in C^{0,\beta}(\overline{D^{-*}})$ und setzen grad θ fort zu grad $\theta^*|_{D^{+*}} \in C^{0,\beta}(\overline{D^{+*}})$, grad $\theta^*|_{D^{-*}} \in C^{0,\beta}(\overline{D^{-*}})$. Auf Grund eines Lemmas in [4: S. 556] braucht man die Fortsetzbarkeit von $\boldsymbol{F}$ (bzw. grad θ) nur in der Umgebung jedes Randpunktes x^* von D^+ einzusehen. Falls $S \subset C_n^{1,\alpha}$, bilden wir $K(x^*, \varepsilon) \cap \overline{D^+}$ auf ein Halbebenenstück bzw. ein Quadrantenstück ab. Eine $C^{0,\beta}$-Funktion der Halbebene kann man offenbar fortsetzen; eine $C^{0,\beta}$-Funktion $f(x)$ eines Quadranten Q mit dem Eckpunkt x_E kann man z. B. so fortsetzen, daß man für y auf der äußeren Normalen im Randpunkt x_0 von Q setzt $f(y) = f(x_0)$ und für y in dem Q gegenüberliegendem Quadranten $f(y) = f(x_E)$.

Wir betrachten jetzt das Flächenpotential

$$\boldsymbol{u}_{\theta,\boldsymbol{F}}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{D^{+*}} \underset{(1)}{\Gamma}(x, y) \left(\boldsymbol{F}^* - (2\mu_1 + 3\lambda_1)\, \alpha_1 \operatorname{grad} \theta^*\right) dy & \text{für} \quad x \in D^{+*}; \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{D^{-*}} \underset{(0)}{\Gamma}(x, y) \left(\boldsymbol{F}^* - (2\mu_0 + 3\lambda_0)\, \alpha_0 \operatorname{grad} \theta^*\right) dy & \text{für} \quad x \in D^{-*}. \end{cases}$$

Dann gilt (s. [18: Satz 4.5]):

$$\boldsymbol{u}_{\theta,\boldsymbol{F}}|_{D^{+*}} \in C^2(D^{+*}) \cap C^{1,\beta}(\overline{D^{+*}}), \qquad \boldsymbol{u}_{\theta,\boldsymbol{F}}|_{D^{-*}} \in C^2(D^{-*}) \cap C^{1,\beta}(\overline{D^{-*}}),$$

$$\underset{(1)}{A}\boldsymbol{u}_{\theta,\boldsymbol{F}} = (2\mu_1 + 3\lambda_1)\, \alpha_1 \operatorname{grad} \theta^* - \boldsymbol{F}^* \quad \text{in} \quad D^{+*},$$

$$\underset{(0)}{A}\boldsymbol{u}_{\theta,\boldsymbol{F}} = (2\mu_0 + 3\lambda_0)\, \alpha_0 \operatorname{grad} \theta^* - \boldsymbol{F}^* \quad \text{in} \quad D^{-*},$$

$$\{\boldsymbol{u}_{\theta,\boldsymbol{F}}\}^+ - \{\boldsymbol{u}_{\theta,\boldsymbol{F}}\}^- =: \tilde{\boldsymbol{w}} \in C^{1,\beta}(S_0^*),$$

$$\Big\{\underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{u}_{\theta,\boldsymbol{F}} - (2\mu_1 + 3\lambda_1)\, \alpha_1 \theta^* \boldsymbol{n}\Big\}^+ - \Big\{\underset{(0)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{u}_{\theta,\boldsymbol{F}} - (2\mu_0 + 3\lambda_0)\, \alpha_0 \theta^* \boldsymbol{n}\Big\}^-$$
$$=: \tilde{\boldsymbol{P}} \in C^{0,\beta}(S_0^*).$$

Sei jetzt $\boldsymbol{u}^*$ die Lösung des Problems $K^*(0, 0; \hat{\boldsymbol{w}}^* - \tilde{\boldsymbol{w}}, \hat{\boldsymbol{P}}^* - \tilde{\boldsymbol{P}})$, dann hat $\boldsymbol{u}_p = \boldsymbol{u}^* + \boldsymbol{u}_{\theta,\boldsymbol{F}}$ folgende Eigenschaften:

$$\boldsymbol{u}_p|_{D^{+*}} \in C^2(D^{+*}) \cap C^{1,\beta}(\overline{D^{+*}}); \quad \boldsymbol{u}_p|_{D^{-*}} \in C^2(D^{-*}) \cap C^{1,\beta}(\overline{D^{-*}}),$$

$$\underset{(1)}{A}\boldsymbol{u}_p = (2\mu_1 + 3\lambda_1)\,\alpha_1 \operatorname{grad} \theta^* - \boldsymbol{F}^* \quad \text{für} \quad x \in D^{+*},$$

$$\underset{(0)}{A}\boldsymbol{u}_p = (2\mu_0 + 3\lambda_0)\,\alpha_0 \operatorname{grad} \theta^* - \boldsymbol{F}^* \quad \text{für} \quad x \in D^{-*},$$

$$\{\boldsymbol{u}_p\}^+ - \{\boldsymbol{u}_p\}^- = \hat{\boldsymbol{w}}^*,$$

$$\Big\{\underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{u}_p - (2\mu_1 + 3\lambda_1)\,\alpha_1\theta^*\boldsymbol{n}\Big\}^+ - \Big\{\underset{(0)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{u}_p - (2\mu_0 + 3\lambda_0)\,\alpha_0\theta^*\boldsymbol{n}\Big\}^- = \hat{\boldsymbol{P}}^*.$$

Sei nun $\boldsymbol{P} \in L_2{}^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$, dann gilt auch für

$$\boldsymbol{Q} = \begin{cases} \boldsymbol{P} - \Big\{\underset{(1)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{u}_p - (2\mu_1 + 3\lambda_1)\,\alpha_1\theta\boldsymbol{n}\Big\}^+ & \text{auf} \quad S^+ \\ \boldsymbol{P} - \Big\{\underset{(0)}{T}(\partial_x, \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{u}_p - (2\mu_0 + 3\lambda_0)\,\alpha_0\theta\boldsymbol{n}\Big\}^- & \text{auf} \quad S^-, \end{cases}$$

daß $\boldsymbol{Q} \in L_2{}^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ ist.
Wendet man die *Bettische Formel* (s. [18: (3.13)) an auf D^+, D^- mit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_p$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}_k$, dann folgt

$$\int_S \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{a}_k \, ds = \int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{a}_k \, dx + \int_S \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{a}_k \, ds + \int_{S_0} \hat{\boldsymbol{P}} \cdot \boldsymbol{a}_k \, ds.$$

Setzen wir also die Gleichgewichtsbedingungen (1.8) voraus, dann hat das Problem II$(D; 0, 0; \boldsymbol{Q}; 0, 0)$ eine Lösung $\boldsymbol{u}_H$. Es ist dann $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_H + \boldsymbol{u}_p|_D$ eine Lösung des Problems II$(D; \boldsymbol{F}, \theta; \boldsymbol{P}; \hat{\boldsymbol{w}}, \hat{\boldsymbol{P}})$. Damit haben wir den folgenden Fakt.

Satz 4.2: *Sei $S \subset C_n{}^{1,\alpha}$, Bedingung* (3.26) *erfüllt,* $\boldsymbol{P} \in L_2{}^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ *für jedes* $\varepsilon > 0$, $0 < \beta < \alpha \leqq 1$, $\hat{\boldsymbol{w}} \in C^{1,\beta}(S_0)$, $\hat{\boldsymbol{P}} \in C^{0,\beta}(S_0)$, $\boldsymbol{F}|_{D^+} \in C^{0,\beta}(D^+)$, $\boldsymbol{F}|_{D^-} \in C^{0,\beta}(D^-)$, $\theta|_{D^+} \in C^{1,\beta}(D^+)$, $\theta|_{D^-} \in C^{1,\beta}(D^-)$. *Das Problem* II$(D;$ F$, \theta; \boldsymbol{P}; \hat{\boldsymbol{w}}, \hat{\boldsymbol{P}})$ *besitzt dann und nur dann eine Lösung, wenn die Gleichgewichtsbedingungen* (1.8) *erfüllt sind.*

Zum Schluß geben wir noch eine explizite partikuläre Lösung an.

Satz 4.3: *Sei $S \subset C_n{}^{1,\alpha}$, $\hat{\boldsymbol{w}}$, $\hat{\boldsymbol{P}}$, $\boldsymbol{F}$, θ erfülle die Voraussetzungen des Satzes* 4.2, *und es sei* $\hat{\boldsymbol{w}}\big(y^+(\pm 1)\big) = 0$. *Dann ist*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_G(x) = {} & \frac{1}{2\pi} \int_{D^+} \mathrm{G}(x, y)\,[\boldsymbol{F} - (2\mu_1 + 3\lambda_1)\,\alpha_1 \operatorname{grad} \theta]\, dy \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{D^-} \mathrm{G}(x, y)\,[\boldsymbol{F} - (2\mu_0 + 3\lambda_0)\,\alpha_0 \operatorname{grad} \theta]\, dy \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \mathrm{G}(x, y)\,[\hat{\boldsymbol{P}} + (2\mu_1 + 3\lambda_1)\,\alpha_1\{\theta\}^+ \boldsymbol{n} \\ & - (2\mu_0 + 3\lambda_0)\,\alpha_0\{\theta\}^- \boldsymbol{n}]\, d_y s \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \Big\{\Big(\underset{(1)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\, \mathrm{G}(x, y)^T\Big)^T\Big\}^+ \hat{\boldsymbol{w}}(y)\, d_y s \end{aligned}$$

eine Lösung des Problems I$(D; \boldsymbol{F}, \theta; \{\boldsymbol{u}_G\}, \hat{\boldsymbol{w}}, \hat{\boldsymbol{P}})$. *Für den Grenzwert* $\{T\boldsymbol{u}_G(x_0)\}$ (*s. Satz* 2.5) *gilt* $\{T\boldsymbol{u}_G(x_0)\} \in L_2{}^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$.

Beweis: Für die oben konstruierte partikuläre Lösung $\boldsymbol{u}_p$ erhält man mit Hilfe der *Bettischen Formel* die Darstellung

$$\boldsymbol{u}_p(x) = \boldsymbol{u}_G(x) + \boldsymbol{u}_{H_1}(x) - \boldsymbol{u}_{H_2}(x) \quad \text{für } x \in D^+ \cup D^-.$$

Dabei ist

$$\boldsymbol{u}_{H_1}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \mathrm{G}(x, y)\, \boldsymbol{\psi}(y)\, d_y s$$

mit

$$\boldsymbol{\psi}(y) = \begin{cases} \Bigl\{\underset{(1)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\, \boldsymbol{u}_p(y)\Bigr\}^+ & \text{für } y \in S^+ \\ \Bigl\{\underset{(0)}{T}(\partial_y, \boldsymbol{n}_y)\, \boldsymbol{u}_p(y)\Bigr\}^- & \text{für } y \in S^- \end{cases}$$

und $\boldsymbol{u}_{H_2}$ ist in Satz 2.5 definiert. Aus Satz 2.4 und Satz 2.5 und den Eigenschaften von $\boldsymbol{u}_p$ folgt, daß $\boldsymbol{u}_G(x)$ Lösung des Problems $\mathrm{I}(D; \boldsymbol{F}, \theta; \{\dot{\boldsymbol{u}}_G\}; \hat{\boldsymbol{w}}, \hat{\boldsymbol{P}})$ ist. Offenbar ist $\{T\boldsymbol{u}_p(x_0)\} \in L_2{}^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$, und es ist $\{T\boldsymbol{u}_{H_2}(x_0)\} \in L_2{}^2(S) \cap C^{0,\beta}(S \setminus K_\varepsilon)$ auf Grund von Satz 2.5. Da $\boldsymbol{\psi} \in L_2{}^2(S)$ und $\{T\boldsymbol{u}_{H_1}(x_0)\} = \mathscr{A}\boldsymbol{\psi}$ gilt und $\mathscr{A}$ ein linearer beschränkter Operator von $L_2{}^2(S)$ in $L_2{}^2(S)$ ist, folgt auch $\{T\boldsymbol{u}_{H_1}(x_0)\} \in L_2{}^2(S)$. Damit ist der Satz bewiesen ∎

Auf Grund von Satz 4.3 läßt sich eine Lösung des Problems $\mathrm{II}(D; \boldsymbol{F}, \theta; \boldsymbol{P}; \hat{\boldsymbol{w}}, \hat{\boldsymbol{P}})$ darstellen als Summe von $\boldsymbol{u}_G(x)$ und einem Potential $\boldsymbol{V}(x, \boldsymbol{\varphi})$ (vgl. [12: (19)]).

Anhang

Die Konstanten H_k^- sind:

$$H_1^- = 4(1 + \nu_0)(1 + \nu_1) \times \frac{E_1(1 + \nu_0)(3 - 4\nu_0)(1 - \nu_1) + E_0(1 - \nu_0)(1 - \nu_1)(3 - 4\nu_1)}{[E_0(3 - 4\nu_1)(1 + \nu_1) + E_1(1 + \nu_0)]\,[E_1(3 - 4\nu_0)(1 + \nu_0) + E_0(1 + \nu_1)]},$$

$$H_2^- = H_1^- - \frac{4(1 + \nu_0)(1 + \nu_1)}{E_0(1 + \nu_1) + E_1(1 + \nu_0)},$$

$$H_3^- = 2(1 + \nu_0)(1 + \nu_1) \times \frac{E_0(1 - 2\nu_0)(1 + \nu_1)(3 - 4\nu_1) - E_1(1 + \nu_0)(3 - 4\nu_0)(1 - 2\nu_1)}{[E_0(3 - 4\nu_1)(1 + \nu_1) + E_1(1 + \nu_0)]\,[E_1(3 - 4\nu_0)(1 + \nu_0) + E_0(1 + \nu_1)]},$$

$$H_4^- = -\frac{2(1 + \nu_0)(1 + \nu_1)}{E_0(3 - 4\nu_1)(1 + \nu_1) + E_1(1 + \nu_0)},$$

$$H_5^- = \frac{2(1 + \nu_0)(1 + \nu_1)}{E_3(3 - 4\nu_0)(1 + \nu_0) + E_0(1 + \nu_1)},$$

$$H_6^- = H_1^- - \frac{(3 - 4\nu_0)(1 + \nu_0)}{2E_0(1 - \nu_0)}, \qquad H_7^- = H_2^- + \frac{1 + \nu_0}{2E_0(1 - \nu_0)}, \qquad H_8^- = H_3^-,$$

$$H_9^- = \frac{1}{2}\,\frac{(1+\nu_0)(3-4\nu_0)\,[E_0(1+\nu_1)-E_1(1+\nu_0)]}{(1-\nu_0)\,E_0[E_1(3-4\nu_0)(1+\nu_0)+E_0(1+\nu_1)]}, \quad H_{10}^- = H_9^-,$$

$$H_{11}^- = \frac{(1+\nu_0)\,[E_1(1+\nu_0)-E_0(1+\nu_1)]}{(1-\nu_0)\,E_0[E_1(3-4\nu_0)(1+\nu_0)+E_0(1+\nu_1)]}.$$

Die Konstanten H_k^+ ergeben sich aus H_k^- durch Vertauschung der Indizes 0 und 1.

LITERATUR

[1] BECKERT, H.: Über die klassischen Randwertaufgaben in der Theorie der Wärmespannungen in stückweise stetigen, anisotropen Körpern unter Kopplungsbedingungen. ZAMM 52 (1972), 111–122.

[2] DEMPSEY, J. P., and G. B. SINCLAIR: On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge. J. Elasticity 9 (1979), no. 4, 373–391.

[3] DUDUCHAVA, R.: Integral equations with fixed singularities. Teubner-Texte zur Mathematik. Leipzig 1979.

[4] FICHTENHOLZ, G. M.: Differential- und Integralrechnung I. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin 1969.

[5] JENTSCH, L.: Über Wärmespannungen in Körpern mit stückweise konstanten Laméschen Elastizitätsmoduln. Schriftenreihe des ZIMM bei der Akademie der Wissenschaften der DDR, Heft 14. Akademie-Verlag: Berlin 1972.

[6] JENTSCH, L.: Zur Existenz von regulären Lösungen der Elastostatik stückweise homogener Körper mit neuen Kontaktbedingungen an den Trennflächen zwischen zwei homogenen Teilen. Abhandlungen der Sächs. Akademie der Wissensch. zu Leipzig, Math.-naturw. Klasse Bd. 53, Heft 2, 1977.

[7] JENTSCH, L.: Bemerkungen zu einigen neueren gekoppelten Randwertproblemen der Thermoelastostatik. Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math.-Naturwiss. R., 25. Jg. (1976), H. 1.

[8] JENTSCH, L.: Die Greensche Matrix für zwei aneinander reibungsfrei gleitende elastische Halbräume mit verschiedenen Laméschen Moduln. ZAMM 58 (1978), 209–224.

[9] JENTSCH, L.: Thermoelastostatik stückweise homogener Körper mit gleitenden Einschlüssen. Demonstratio Mathematica, Vol. XII, No. 1 (1979), 261–280.

[10] JENTSCH, L.: Die elastostatischen Greenschen Tensoren 1. und 4. Art für den Halbraum als Grenzfälle eines Tensors für zwei aneinandergrenzende Halbräume mit verschiedenen Laméschen Moduln. Seminar of Institute of Applied Mathematics Reports 12–13 (1978), Tbilisi University.

[11] JENTSCH, L., und J. MAUL: Zur Elastizitäts- und Thermoelastizitätstheorie. Schriftenreihe Mathematische Forschung bei der Akademie der Wissensch. der DDR, Bd. 4. Akademie-Verlag: Berlin 1980.

[12] JENTSCH, L.: Zur Theorie der Wärmespannungen in Bimetallkörpern. Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math.-Naturw. R., 29. Jg. (1980), H. 1, 49–58.

[13] JENTSCH, L.: Der Greensche Kontakttensor der Elastostatik für zwei fest verbundene Halbebenen. ZAMM 61, H. 7 (1981), 339–340.

[14] КАТАМАДЗЕ, Р. Г.: Новая контактная задача теории упругости. Сообщения Акад. Наук Груз. ССР 95 (1979), № 1, 49–52.

[15] КАТАМАДЗЕ, Р. Г.: О существовании решения одной контактной задачи теории упругости. Сообщения Акад. Наук Груз. ССР 96 (1979), № 2, 305–307.

[16] КУПРАДЗЕ, В. Д., ГЕГЕЛИА, Т. Г., БАШЕЛЕЙШВИЛИ, М. О., и Т. В. БУРЧУЛАДЗЕ: Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Издательство Наука: Москва 1976.

[17] КУПРАДЗЕ, В. Д.: О контактных задачах теории упругости. Дифференциальные уравнения, Т. XVI, № 2, 1980, 293–310.

[18] MAUL, J.: Eine einheitliche Methode zur Lösung der ebenen Aufgaben der linearen Elastostatik. Schriftenreihe des ZIMM bei der Akademie der Wissensch. der DDR, Heft 24. Akademie-Verlag: Berlin 1976.

[19] MAUL, J.: Beiträge zur Existenztheorie gemischter Randwert- und Kontaktaufgaben der klassischen und mikropolaren Elastizitätstheorie und Thermoelastizitätstheorie. Reprint Karl-Marx-Univ. Leipzig 1977.
[20] MICHLIN, S. G., und S. PRÖSSDORF: Singuläre Integraloperatoren. Akademie-Verlag: Berlin 1980.
[21] Мусхелишвили, Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва 1966.
Erschienen in deutscher Übersetzung:
MUSSCHELISCHWILI, N. I.: Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie. VEB Fachbuchverlag: Leipzig 1971.
[22] Мусхелишвили, Н. И.: Сингулярные интегральные уравнения. Москва 1962.
[23] PETROWSKI, I. G.: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. B. G. Teubner: Leipzig 1955.
[24] PRÖSSDORF, S.: Einige Klassen singulärer Gleichungen. Akademie-Verlag: Berlin 1974.
[25] THEOCARIS, P. S.: On the singular stress field at a multiwedge corner. Rev. Roumaine Sci. Tech. Sér. Méc. Appl. 23 (1978), no. 5, 673—685.

Manuskripteingang: 28. 07. 1981

VERFASSER:

Prof. Dr. sc. nat. LOTHAR JENTSCH
Sektion Mathematik der Technischen Hochschule
DDR-9010 Karl-Marx-Stadt, Reichenhainer Str. 39—41