Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 1 (6) (1982), S. 45–56

Lokale Theorie des Reduktionsverfahrens für singuläre Integralgleichungen

B. SILBERMANN

Es wird das Reduktionsverfahren für eindimensionale singuläre Integralgleichungen mittels eines lokalen Prinzipes studiert. Unter anderem wird ein Prinzip der Singularitätentrennung hergeleitet und das Reduktionsverfahren für singuläre Integralgleichungen mit Koeffizienten aus der Algebra $\overline{PC}$ untersucht.

Изучается метод редукции для одномерных сингулярных интегральных уравнений при помощи некоторого локального приницпа. В частности выведен принцип разделения особенностей и изучается метод редукции для сингулярных интегральных уравнений с коэффициентами, принадлежащими алгебре $\overline{PC}$.

Using a lokal principle the finite section method is studied for one-dimensional singular integral operators. In particular a principle of separation of singularities is deduced and the finite section method is studied for singular integral equations with coefficients belonging to the algebra $\overline{PC}$.

In [4] wurde aufgezeigt, wie das von I. Z. GOCHBERG und N. J. KRUPNIK vorgeschlagene (abstrakte) lokale Prinzip in der Theorie des Reduktionsverfahrens für eindimensionale Toeplitzoperatoren mit unstetigem Symbol eingesetzt werden kann. Dieser Beitrag ist der Übertragung dieser Methode auf den Fall singulärer Integralgleichungen gewidmet.

Im § 1 wird der Vollständigkeit halber das abstrakte lokale Prinzip von I. Z. GOCHBERG und N. J. KRUPNIK kurz skizziert. Der § 2 beinhaltet die Beschreibung eines abstrakten Näherungsverfahrens und einer Banachalgebra, die eng mit diesem verknüpft ist. Für singuläre Integraloperatoren mit stetigen Koeffizienten werden im § 3 z. T. bekannte Aussagen relativ einfach erhalten. Der § 4 ist der Anwendung des lokalen Prinzipes vorbehalten. Unter anderem wird für das Reduktionsverfahren ein Prinzip der Singularitätentrennung hergeleitet und das Reduktionsverfahren für singuläre Integralgleichungen mit Koeffizienten aus der Algebra $\overline{PC}$ studiert. Die §§ 5 und 6 dienen der Darstellung analoger Ergebnisse für paarige diskrete Wiener-Hopfsche Operatoren in den Räumen l_p und für Systeme solcher Operatoren.

§ 1. Ein abstraktes lokales Prinzip

1. Sei $\mathfrak{B}$ eine Banachalgebra mit dem Einselement e. Eine Menge M von Elementen der Algebra heißt *lokalisierende Klasse*, wenn $0 \notin M$ und für beliebige Elemente $a_1, a_2 \in M$ ein Element $a \in M$ existiert mit

$$a_j a = a a_j = a \quad (j = 1, 2).$$

Zwei Elemente x und y aus $\mathfrak{B}$ heißen *M-äquivalent*, wenn

$$\inf_{a\in M} \|(x-y)\,a\| = \inf_{a\in M} \|a(x-y)\| = 0$$

gilt. Ein Element $x \in \mathfrak{B}$ heißt *M-invertierbar*, wenn solche Elemente $z_i \in \mathfrak{B}$ und $a_i \in M$ existieren ($i = 1, 2$), daß $z_1 x a_1 = a_1$, $a_2 x z_2 = a_2$ ist.

Die Beweise der folgenden Behauptungen können in [3] gefunden werden.

SATZ 1.1: *Sei M eine lokalisierende Klasse. Seien ferner x und y ($\in \mathfrak{B}$) M-äquivalent. Wenn x M-invertierbar ist, so gilt dies auch für y.*

2. Ein System $\{M_\tau\}_{\tau\in T}$ lokalisierender Klassen M_τ heißt *überdeckend*, wenn aus jeder Menge $\{a_\tau\}_{\tau\in T}$ von Elementen $a_\tau \in M_\tau$ eine endliche Anzahl ausgewählt werden kann, deren Summe in $\mathfrak{B}$ invertierbar ist.

SATZ 1.2: *Sei $\{M_\tau\}_{\tau\in T}$ ein überdeckendes System lokalisierender Klassen. Dann ist ein mit jedem Element $y \in \bigcup_{\tau\in T} M_\tau$ vertauschbares Element $x \in \mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}$ genau dann invertierbar, wenn für jedes $\tau \in T$ das Element x M_τ-invertierbar ist.*

§ 2. Ein abstraktes Näherungsverfahren und eine assoziierte Banachalgebra

Sei X ein Banachraum und $\mathcal{L}(X)$ der Ring der stetigen und linearen Operatoren in X, $\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{L}(X)$ das Ideal der vollstetigen Operatoren. Eine Möglichkeit zur näherungsweisen Lösung von Operatorgleichungen

$$Ax = y\big(A \in \mathcal{L}(X), x \in X\big) \tag{2.1}$$

kann wie folgt beschrieben werden. Sei $\{P_n\} \subset \mathcal{L}(X)$ eine Folge von Projektoren mit $P_n \to I$[1]) und seien $A_n : \operatorname{im} P_n \to \operatorname{im} P_n$ gegebene Operatoren, die als Elemente des Ringes $\mathcal{L}(X)$ aufgefaßt werden können, wenn sie mit $A_n P_n$ identifiziert werden. Statt der Gleichung (2.1) wird die Gleichung

$$A_n x_n = P_n y, \qquad x_n \in \operatorname{im} P_n \tag{2.2}$$

betrachtet. Man schreibt $A \in \Pi\{A_n\}$, wenn für hinreichend große n die Gleichung (2.2) für jedes $y \in X$ eine eindeutige Lösung x_n besitzt und die Folge $\{x_n\}$ in der Norm von X gegen ein Element x konvergiert mit $Ax = y$. Falls $A_n = P_n A P_n$ gilt, wird $\Pi\{A_n\}$ auch mit $\Pi\{P_n\}$ bezeichnet.

Im weiteren bedeute X^* den zu X adjungierten Raum und $A^* \in \mathcal{L}(X^*)$ den zu $A \in \mathcal{L}(X)$ adjungierten Operator.

SATZ 2.1: *Es gelte $P_n \to I$, $P_n^* \to I$, $A_n P_n \to A$ und $A_n^* P_n^* \to A^*$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. $A \in \Pi\{A_n\}$.
2. *A ist invertierbar, für hinreichend große n sind die Operatoren $A_n : \operatorname{im} P_n \to \operatorname{im} P_n$ invertierbar und* $\sup_n \|(A_n)^{-1} P_n\| = c_1 < \infty$.
3. $A^* \in \Pi\{A_n^*\}$.
4. *A^* ist invertierbar, für hinreichend große n sind die Operatoren $A_n^* : \operatorname{im} P_n^* \to \operatorname{im} P_n^*$ invertierbar und*

$$\sup_n \|(A_n^*)^{-1} P_n^*\| = c_2 < \infty.$$

[1]) Wir vereinbaren, mit $\to$ immer die starke Konvergenz zu kennzeichnen; die gleichmäßige, d. h. die Normkonvergenz von Operatoren wird durch $\rightrightarrows$ kenntlich gemacht.

Beweis: Die Aussage dieses Satzes ist wohlbekannt; wir werden daher den Beweis nur andeuten.

Aus 1. *folgt* 2.: Aus $A \in \Pi\{A_n\}$ folgt nach dem Satz von Banach-Steinhaus zunächst

$$\sup_n \|(A_n^{-1}) P_n\| = c_1 < \infty$$

und damit auch $\sup_n \|(A_n^*)^{-1} P_n^*\| = c_2 < \infty$. Diese Beziehungen liefern

$$\|A_n P_n x\| \geqq c_1 \|x\|, \qquad \|A_n^* P_n^* y\| \geqq c_2 \|y\|.$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich somit

$$\|Ax\| \geqq c_1 \|x\|, \qquad \|A^* y\| \geqq c_2 \|y\|$$

und damit die Invertierbarkeit von A und A^*.

Aus 2. *folgt* 3.: Wir vermerken zunächst, daß 2. und 4. äquivalent sind. Wir stützen uns daher auf 4. Sei $y \in X^*$ beliebig und

$$x_n = (A_n^*)^{-1} P_n^* y, \qquad x = (A^*)^{-1} y.$$

Dann gilt

$$A_n^*(x_n - P_n^* x) = P_n^* A^* x - A_n^* P_n^* x \text{ und}$$
$$P_n^* A^* x - A_n^* P_n^* x \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung $\|A_n^* x_n\| \geqq c \|x_n\|$ $(x_n \in \operatorname{im} P_n^*)$ liefert dies $x_n - P_n^* x \to 0$ für $n \to \infty$. Mithin gilt $(A_n^*)^{-1} P_n^* y \to (A^*)^{-1} y$ und somit $A \in \Pi\{A_n\}$.

Analog wird nun noch gezeigt, daß aus 3. die Behauptung 4. und aus 4. auch 1. folgt ∎

Seien nunmehr neben den Projektoren P_n noch Operatoren $W_n \in \mathscr{L}(X)$ gegeben mit folgenden Eigenschaften:

1. $W_n^2 = P_n$, $P_n W_n = W_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$.
2. Die Folgen $\{W_n\}$ und $\{W_n^*\}$ konvergieren schwach gegen Null.

Bemerkung 2.1: Wegen $W_n P_n = W_n^3 = P_n W_n$ kommutieren die Operatoren W_n und P_n. Daher gilt auch $W_n P_n = W_n$. Aus der Bedingung 2. folgt außerdem

$$\sup_n \|W_n\| < \infty.$$

Sei $\mathscr{A}$ die Menge aller Folgen $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$, $A_n \colon \operatorname{im} P_n \to \operatorname{im} P_n$, für die stetige Operatoren $A, \tilde{A} \in \mathscr{L}(X)$ existieren mit

$$A_n P_n \to A, \qquad A_n^* P_n^* \to A^*, \qquad \tilde{A}_n P_n = W_n A_n W_n \to \tilde{A},$$
$$(\tilde{A}_n)^* P_n^* \to (\tilde{A})^*.$$

Bezüglich der Operationen $\{A_n\} + \{B_n\} = \{A_n + B_n\}$, $\{A_n\}\{B_n\} = \{A_n B_n\}$ und der Norm

$$\|\{A_n\}\| = \sup_n \|A_n\|$$

ist $\mathscr{A}$ eine Banachalgebra mit Einselement.

Wir benötigen noch folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 2.1.: *Sei* $T \in \mathscr{K}(X)$.

1. *Für beliebige Folgen* $\{A_n\}, \{B_n\} \subset \mathscr{L}(X)$ *mit* $A_n \to A$, $B_n^* \to B^*$ *gilt* $A_n T B_n \rightrightarrows ATB$
2. *Wenn* A_n *schwach gegen* A *konvergiert, dann gilt* $TA_n \to TA$.

Aus Hilfssatz 2.1 folgt, daß für jeden vollstetigen Operator $T \in \mathscr{K}(X)$ die Folgen $\{P_n T P_n\}$ und $\{W_n T W_n\}$ zu $\mathscr{A}$ gehören.

Sei $J \subset \mathscr{A}$ die Menge aller Folgen $\{A_n\} \in \mathscr{A}$ mit

$$A_n = P_n T_1 P_n + W_n T_2 W_n + C_n,$$

wobei $T_1, T_2 \in \mathscr{K}(X)$ und $C_n \rightrightarrows 0$. Der folgende Satz wird wie in [4] bewiesen.

SATZ 2.2: *J ist ein zweiseitiges und abgeschlossenes Ideal in $\mathscr{A}$.*

Mit $\mathscr{A}^\wedge$ bezeichnen wir die Faktoralgebra $\mathscr{A}/J$. Diese ist ebenfalls eine Banachalgebra. Es gilt folgender grundlegender Satz.

SATZ 2.3: *Sei $A \in \mathscr{A}(X)$ ein Operator, für den eine Folge $\{A_n\} \in \mathscr{A}$ existiert mit $A_n P_n \to A$. Dafür, daß $A \in \Pi\{A_n\}$, ist notwendig und hinreichend, daß die Operatoren A, $\tilde{A}$ invertierbar sind und die Restklasse $\{A_n\}^\wedge$, zu der $\{A_n\}$ gehört, in $\mathscr{A}^\wedge$ invertierbar ist.*

Beweis: *Notwendigkeit:* Diese ergibt sich aus Satz 2.1 und der Beziehung $\tilde{A}^{-1} P_n = W_n A_n^{-1} W_n$.

Hinlänglichkeit: Weil $\{A_n\}^\wedge$ in $\mathscr{L}^\wedge$ invertierbar ist, existiert eine Folge $\{B_n\} \in \mathscr{A}$ mit

$$A_n B_n = P_n + P_n T_1 P_n + W_n T_2 W_n + C_n \quad \text{und}$$

$$T_1, T_2 \in \mathscr{K}(X), \quad C_n \rightrightarrows 0.$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich hieraus

$$AB = I + T_1, \qquad \tilde{A}\tilde{B} = I + T_2.$$

Mithin unterscheiden sich A^{-1} von B und $\tilde{A}^{-1}$ von $\tilde{B}$ jeweils durch einen vollstetigen Summanden: $A^{-1} = B + T_1'$, $\tilde{A}^{-1} = \tilde{B} + T_2'$. Die Folgen $\{B_n\}$ und $\{B_n'\} = \{B_n + P_n T_1' P_n + W_n T_2' W_n\}$ liegen in einer Restklasse und es gilt

$$A_n B_n' = P_n + C_n', \qquad C_n' \rightrightarrows 0.$$

Analog wird die Existenz einer Folge $\{B_n''\}$ mit

$$B_n'' A_n = P_n + C_n'', \qquad C_n'' \rightrightarrows 0$$

gezeigt. Für hinreichend große n sind die Operatoren $P_n + C_n'$, $P_n + C_n''$ (in im P_n) invertierbar. Folglich gilt dies auch von A_n und B_n'; außerdem ist

$$(B_n')^{-1} A_n^{-1} = P_n + C_n''', \qquad C_n''' \rightrightarrows 0.$$

Multipliziert man die letzte Beziehung mit B_n', so ergibt sich die gleichmäßige Beschränktheit der Normen $\|A_n^{-1} P_n\|$. Aus Satz 2.1 ergibt sich $A \in \Pi\{A_n\}$ ∎

Verschiedene Projektionsverfahren für Faltungsgleichungen (wie diskrete Wiener-Hopfsche Gleichungen, Wiener-Hopfsche Integralgleichungen, singuläre Integralgleichungen) erfüllen die Voraussetzungen dieses Punktes. Den Fall der singulären Integralgleichungen werden wir u. a. in den nächsten Punkten näher betrachten.

§ 3. Das Reduktionsverfahren für singuläre Integraloperatoren

Sei $\Gamma = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ und S der in $L^2 = L^2(\Gamma)$ durch

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} \, d\tau$$

definierte singuläre Integraloperator. Bekanntlich ist dieser Operator stetig, und es gilt $S^2 = I$ (vgl. [3]). Daher sind $P = \frac{1}{2}(I + S)$ und $Q = \frac{1}{2}(I - S)$ stetige Projektoren in L^2 mit $PQ = QP = 0$ und $P + Q = I$.

Wir betrachten weiterhin die durch

$$P_n \left(\sum_{-\infty}^{\infty} f_k t^k \right) = \sum_{-n}^{n} f_k t^k$$

in L^2 definierten und stetigen Projektoren ($n = 0, 1, \ldots$). Diese sind selbstadjungiert, und es gilt $P_n \to I$.

Schließlich sei W_n ($n = 0, 1, \ldots$) der durch

$$W_n \left(\sum_{-\infty}^{\infty} f_k t^k \right) = f_{-1} t^{-n} + f_{-2} t^{-n+1} + \cdots + f_{-n} t^{-1} + f_n + f_{n-1} t^1 + \cdots + f_0 t^n$$

definierte Operator. Die folgenden Behauptungen sind leicht überprüfbar:

1. $W_n^2 = P_n$, $P_n W_n = W_n$;
2. $W_n^* = W_n$, und die Folge W_n konvergiert schwach gegen Null.

Somit können die im § 2 angeführten Ergebnisse benutzt werden und insbesondere die Algebren $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}^\wedge$ und das Ideal J eingeführt werden.

Für beliebige Elemente $a, b \in L^\infty = L^\infty(\Gamma)$ sind die singulären Integraloperatoren

$$A_1 = aP + bQ, \qquad A_2 = Pa + Qb, \qquad A_3 = PaP + QbQ$$

Elemente von $\mathscr{L}(L^2)$. Weiterhin gilt:

$$\{P_n A_i P_n\}, \quad \{W_n A_i W_n\} \in \mathscr{A} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Wir zeigen dies für A_1. Dieser Operator kann als $A_1 = PaP + QaP + QbQ + PbQ$ dargestellt werden. Dann gilt $W_n PaP W_n = P_n P\tilde{a} P P_n$ und $W_n QbQ W_n = P_n Q\tilde{b} Q P_n$, wobei wir hier und im weiteren für jede Funktion $c \in L^\infty$ mit $\tilde{c}$ die Funktion $c\left(\frac{1}{t}\right)$ bezeichnen. Ferner kann man sich leicht von $W_n QaP W_n \to 0$, $W_n PbQ W_n \to 0$ überzeugen. Aus diesen Überlegungen folgt unschwer obige Behauptung und

$$\tilde{A}_i = P\tilde{a}P + Q\tilde{b}Q \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3.1}$$

Wir benötigen noch den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 3.1 (vgl. [1, 3]): *Die folgenden Behauptungen sind äquivalent:*

1. $P\tilde{a}P + Q\tilde{b}Q$ *ist invertierbar;*
2. $\tilde{a}P + Q$, $P + \tilde{b}Q$ *sind invertierbar;*
3. $aP + Q$, $P + bQ$ *sind invertierbar;*
4. $a^{-1}P + Q$, $P + b^{-1}Q$ *sind invertierbar.*

FOLGERUNG 3.1: *Aus Satz 2.3 ergibt sich somit, daß $aP + bQ \in \Pi\{P_n\}$ die Invertierbarkeit von $aP + bQ$, $aP + Q$ und $P + bQ$ liefert. Die analoge Behauptung gilt auch für die Operatoren $Pa + Qb$ und $PaP + QbQ$.*

SATZ 3.1 [2]: *Seien die Funktionen $a, b \in C = C(\Gamma)$, d. h. stetige und im allgemeinen komplexwertige Funktionen. Dann gilt $aP + bQ \in \Pi\{P_n\}$ genau dann, wenn die Operatoren $aP + Q$ und $P + bQ$ invertierbar sind.*

Neuer Beweis: Die *Notwendigkeit* ergibt sich sofort aus den vorangegangenen Überlegungen.

Hinlänglichkeit: Aus den Voraussetzungen folgt zunächst, daß die Funktionen a und b auf Γ nirgends verschwinden (vgl. [3]). Neben dem Operator $A = aP + bQ$ betrachten wir noch den Operator $B = Pa^{-1}P + Qb^{-1}Q$. Wir behaupten:

$$\{P_nAP_n\}\{P_nBP_n\} - \{P_n\} \in J \quad \text{und} \quad \{P_nBP_n\}\{P_nAP_n\} - \{P_n\} \in J.$$

Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}&\{P_nAP_n\}\{P_nBP_n\}\\ &= \{P_nPaPP_nPa^{-1}PP_n\} + \{P_nQbQP_nQb^{-1}QP_n\} + \{P_nQaPP_nPa^{-1}PP_n\}\\ &\quad + \{P_nPbQP_nQb^{-1}QP_n\}.\end{aligned}$$

Da für $c \in C(\Gamma)$ die Operatoren PcQ, QcP vollstetig sind (vgl. [3]), gehören die beiden letzten Summanden zu J. Unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\begin{aligned}P_nPcdPP_n &= P_nPcPP_nPdPP_n + P_nPcQdPP_n + W_nP\tilde{c}Q\tilde{d}PW_n,\\ P_nQcdQP_n &= P_nQcQP_nQdQP_n + P_nQcPdQP_n + W_nQ\tilde{c}P\tilde{d}QW_n\end{aligned} \tag{3.2}$$

($c, d \in L^\infty$ beliebig gewählt)

ergibt sich nunmehr die erste der obigen Behauptungen. Die zweite wird analog bewiesen. Folglich ist $\{P_nAP_n\}^\cdot$ invertierbar. Da wegen der Stetigkeit von a und b auch $aP + bQ$ invertierbar ist, liefert Satz 2.3 nunmehr $A \in \Pi\{P_n\}$ ∎

SATZ 3.2: *Sei*

$$A = \sum_{k=1}^{l} A_{k1}A_{k2}\dots A_{km} \quad \textit{mit} \quad A_{kj} = a_{kj}P + b_{kj}Q,\ a_{kj}, b_{kj} \in C(\Gamma),$$

und sei

$$A_n = \sum_{k=1}^{l} P_nA_{k1}P_nA_{k2}P_n \dots P_nA_{km}P_n.$$

Dann gilt $A \in \Pi\{A_n\}$ genau dann, wenn die Operatoren A und

$$B = \sum_{k=1}^{l} P\tilde{a}_{k1}P\tilde{a}_{k2}P \dots P\tilde{a}_{km}P + Q\tilde{b}_{k1}Q\tilde{b}_{k2}Q \dots Q\tilde{b}_{km}Q$$

invertierbar sind.

Beweis: Wegen $\{A_n\} \in \mathscr{A}$ ergibt sich die *Notwendigkeit* aus Satz 2.3.

Hinlänglichkeit: Wegen der Stetigkeit der Koeffizienten a_{kj}, b_{kj} gilt

$$A - A_1 \in \mathscr{K}(L^2), \qquad B - B_1 \in \mathscr{K}(L^2),$$

wobei

$$A_1 = \left(\sum \prod a_{kj}\right)P + \left(\sum \Pi b_{kj}\right)Q, \qquad B_1 = P\left(\sum \Pi \tilde{a}_{kj}\right)P + Q\left(\sum \Pi \tilde{b}_{kj}\right)Q.$$

Damit gilt ind A_1 = ind $B_1 = 0$. Folglich sind die Operatoren A_1 und B_1 invertierbar (vgl. [3]). Nach Satz 3.1 ist $A_1 \in \Pi\{P_n\}$; insbesondere ist dann das Element $\{P_n A_1 P_n\}^\wedge$ in $\mathscr{A}^\wedge$ invertierbar. Wegen der Stetigkeit der Koeffizienten a_{kj}, b_{kj} gilt außerdem $\{P_n A_1 P_n\} - \{A_n\} \in J$. Satz 2.3 liefert nunmehr $A \in \Pi\{A_n\}$ ∎

§ 4. Ein lokales Prinzip in der Theorie des Reduktionsverfahrens

Wir beweisen zunächst eine für das Weitere grundlegende Beziehung.

SATZ 4.1: *Sei*

$$A = aP + bQ \quad \textit{und} \quad B = PcP + QcQ \quad \textit{mit} \quad a, b \in L^\infty \quad \textit{und} \quad c \in C(\Gamma).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} c_1 &= \{P_nAP_n\}\{P_nBP_n\} - \{P_n(acP + bcQ)P_n\} \in J, \\ c_2 &= \{P_nBP_n\}\{P_nAP_n\} - \{P_n(acP + bcQ)P_n\} \in J. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Beweis: Zunächst gilt $c_1 = I_1 + I_2$ mit

$$\begin{aligned} I_1 &= \{P_nPaPP_nPcPP_n\} + \{P_nQbQP_nQcQP_n\} - \{P_nPacPP_n + P_nQbcQP_n\}, \\ I_2 &= (\{P_nQaPP_nPcPP_n\} - (P_nQacPP_n\}) + (\{P_nPbQP_nQcQP_n\} \\ &\quad - \{P_nPbcQP_n\}). \end{aligned}$$

Wegen der Beziehungen (3.2) gehört I_1 zu J. Wir betrachten nunmehr den ersten Summanden in I_2: Wegen der Stetigkeit von c ergibt sich

$$I_2' - (\{P_nQaPP_nPcPP_n\} - \{P_nQacPP_n\} \in J \tag{4.2}$$

mit

$$I_2' = \{P_nQaP_ncPP_n\} - \{P_nQacPP_n\}.$$

Für beliebige Elemente $d, e \in L^\infty$ ist

$$\begin{aligned} P_nQdePP_n &= QP_ndeP_nP = Q(t^{-n}P_{2n}PdePP_{2n}t^n)P \\ &= Q(t^{-n}P_{2n}PdPP_{2n}t^nt^{-n}P_{2n}PePP_{2n}t^n)P \\ &\quad + Q(t^{-n}P_{2n}PdQePP_{2n}t^n)P + Q(t^{-n}W_{2n}P\tilde{d}Q\tilde{e}PW_{2n}t^n)P. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} &P_nQdePP_n \\ &= P_nQdP_nePP_n + P_nQt^{-n}P_{2n}PdQePP_{2n}t^nPP_n + P_nQt^{-n}W_{2n}P\tilde{d}Q\tilde{e}PW_{2n}t^nPP_n. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Wenn eine der Funktionen d, e stetig ist, konvergieren die beiden letzten Summanden in (4.3) in der Norm gegen Null. Dies folgt aus Hilfssatz 2.1 und

$$(t^nP)^* = (Pt^nP)^* = Pt^{-n}P \to 0, \quad Qt^{-n}W_{2n}P = Qt^{-n}PW_{2n}P \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Somit gilt $I_2' \in J$, und wegen (4.2) liegt der erste Summand von I_2 im Ideal J. Analog wird die Zugehörigkeit des zweiten Summanden von I_2 zu J und die Zugehörigkeit von C_2 zu J gezeigt ∎

FOLGERUNG 4.1: *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 4.1 *gilt* $\{P_nAP_n\} \times \{P_nBP_n\} - \{P_nBP_n\}\{P_nAP_n\} \in J$.

Sei PC die Klasse der stückweise stetigen Funktionen mit endlich vielen Unstetigkeitsstellen erster Art auf Γ. Mit $\overline{PC}$ bezeichnen wir die Abschließung von PC in der Norm $\|a\|_\infty = \sup_{t\in\Gamma} |a(t)|$. Bekanntlich besitzt ein Element der Algebra $\overline{PC}$ höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen 1. Art. Wir werden uns zunächst mit dem Reduktionsverfahren für singuläre Integraloperatoren mit Koeffizienten aus der Algebra $\overline{PC}$ beschäftigen. Die Überlegungen stützen sich auf das im § 1 dargelegte lokale Prinzip und den in [6] bewiesenen

SATZ 4.2: *Die Funktionen* $a, b \in PC$ *mögen der Bedingung*

$$\left|\arg \frac{a(t+0)}{a(t-0)} - \arg \frac{b(t+0)}{b(t-0)}\right| < \pi,^{2)} \qquad t \in \Gamma, \tag{4.4}$$

genügen. Dann ist $aP + bQ \in \Pi\{P_n\}$ *genau dann, wenn die Operatoren* $aP + Q$ *und* $P + bQ$ *invertierbar sind.*

SATZ 4.3: *Für die Funktionen* $a, b \in \overline{PC}$ *sei die Bedingung* (4.4) *in jedem Punkt* $t \in \Gamma$ *erfüllt. Dann ist* $aP + bQ \in \Pi\{P_n\}$ *genau dann, wenn die Operatoren* $aP + Q$ *und* $P + bQ$ *invertierbar sind.*

Beweis: Die *Notwendigkeit* ergibt sich aus Folgerung 3.1.

Hinlänglichkeit: Sei N_τ für jedes $\tau \in \Gamma$ die Menge aller stetigen Funktionen auf Γ mit folgenden Eigenschaften:

1. Für jede Fiunktion $f \in N_\tau$ existiert eine Umgebung des Punktes τ, in der f gleich 1 ist.
2. $0 \leqq f(t) \leqq 1$ für alle $t \in \Gamma$.

Mit M_τ bezeichnen wir die Menge aller Elemente aus $\mathscr{A}^\wedge$, die von der Gestalt $\{P_nPfPP_n + P_nQfQP_n\}^\wedge$ mit $f \in N_\tau$ sind. Die Beziehungen (3.2) liefern, daß M_τ eine lokalisierende Klasse ist. Weil aus jeder Menge $\{f_\tau\}_{\tau\in\Gamma}$ von Elementen $f_\tau \in N_\tau$ eine endliche Anzahl $f_\tau^1, \ldots, f_\tau^k$ von Elementen ausgewählt werden kann mit

$$f(t) = \sum_{i=1}^{k} f_{\tau_i}(t) \geqq 1 \qquad (|t| = 1)$$

und somit $PfP + QfQ \in \Pi\{P_n\}$ gilt, stellt $\{M_\tau\}_{\tau\in\Gamma}$ ein System lokalisierender und überdeckender Klassen dar. Wegen Folgerung 4.1. kommutiert für beliebige $a, b \in L^\infty$ das Element $\{P_n(aP + bQ)\, P_n\}^\wedge$ mit jedem Element von $\bigcup_{\tau\in\Gamma} M_\tau$.

Jedem Punkt $\tau \in \Gamma$ ordnen wir nun Funktionen $a_\tau(t)$, $b_\tau(t)$ wie folgt zu: Wenn τ ein Stetigkeitspunkt der Funktion a (b) ist, dann setzen wir $a_\tau(t) = a(\tau)$ $\big(b_\tau(t) = b(\tau)\big)$. Ist τ ein Unstetigkeitspunkt der Funktion a (b), so sei $a_\tau(t)$ $\big(b_\tau(t)\big)$ eine gewisse Funktion, die in jedem Punkt $t \neq \tau$ stetig und ungleich Null ist sowie im Punkt τ den Bedingungen

$$a_\tau(\tau) = a(\tau), \quad a_\tau(\tau \pm 0) = a(\tau \pm 0)$$
$$\big(b_\tau(\tau) = b(\tau), \quad b_\tau(\tau \pm 0) = b(\tau \pm 0)\big)$$

genügt, und für die der Operator $a_\tau P + Q$ $(P + b_\tau Q)$ invertierbar ist. Satz 4.2 liefert dann $a_\tau P + b_\tau Q \in \Pi\{P_n\}$.

---

2) Hier und im weiteren gelte $\arg z \in (-\pi, \pi]$ $(z \in \mathbb{C},\ z \neq 0)$.

Weil für jede Funktion $f \in N_\tau$, deren Träger sich in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes τ befindet, die Größen

$$\sup_{t\in\Gamma} |f(t)\,(a(t) - a_\tau(t))|, \qquad \sup_{t\in\Gamma} |f(t)\,(b(t) - b_\tau(t))|$$

hinreichend klein sind, ist die Norm

$$f(a - a_\tau)\,P + f(b - b_\tau)\,Q$$

hinreichend klein. Aus Satz 4.1 ergibt sich die M_τ-Äquivalenz von $\{P_n(aP + bQ)\,P_n\}^\wedge$ und $\{P_n(a_\tau P + b_\tau Q)\,P_n\}^\wedge$. Somit ist wegen Satz 1.1. $\{P_n(aP + bQ)\,P_n\}^\wedge$ M_τ-invertierbar ($\tau \in \Gamma$) und wegen Satz 1.2. in $\mathscr{A}^\wedge$ invertierbar. Bedingung (4.4) garantiert außerdem die Invertierbarkeit von $aP + bQ$. Satz 2.3. liefert nunmehr $A \in \Pi\{P_n\}$ ∎

In der Theorie der singulären Integraloperatoren ist das Prinzip der Singularitätentrennung eine wichtige Untersuchungsmethode, um Aussagen über die normale Auflösbarkeit solcher Operatoren zu gewinnen (vgl. [3]). Andererseits ist es einfacher anzuwenden als lokale Prinzipien. In der Theorie des Reduktionsverfahrens kann ein solches Prinzip ebenfalls formuliert werden. Sein Beweis wird allerdings mittels des oben beschriebenen lokalen Prinzips geführt. Wir geben zunächst noch eine Definition:

Für $f \in L^\infty$ bezeichnen wir mit sing supp f den *Singularitätenträger* von f, d. h. das Komplement der größten offenen Teilmenge von Γ, auf der f stetig ist.

SATZ 4.4: *Es gelte* $a_i \in L^\infty$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. *Wenn*

$$a_1P + a_2Q \in \Pi\{P_n\}, \qquad a_3P + a_4Q \in \Pi\{P_n\} \tag{4.5}$$

und

$$\text{sing supp}\, a_i \cap \text{sing supp}\, a_j = \emptyset \quad (i = 1, 2;\ j = 3, 4) \tag{4.6}$$

gilt, so ist auch $a_1a_3P + a_2a_4Q \in \Pi\{P_n\}$.

Beweis: Aus Folgerung 3.1 und (4.5) ergibt sich zunächst die Invertierbarkeit der Operatoren $a_1P + a_2Q$, $a_3P + a_4Q$, $a_iP + Q$ $(i = 1, 3)$ und $P + a_iQ$ $(i = 2, 4)$. Nach [3] sind dann die Funktionen a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ in L^∞ invertierbar. Wegen (4.6) sind die Operatoren

$$Pa_1a_3P - Pa_1Pa_3P, \qquad Qa_2a_4Q - Qa_2Qa_4Q$$

vollstetig (vgl. [3]). Hieraus ergibt sich (vgl. [3: Kap. VII]) die Invertierbarkeit von $a_1a_3P + Q$, $P + a_2a_4Q$. Somit ist auch $(a_2a_4)^{-1}\,P + Q$ invertierbar. Wiederum wegen (4.6) ist $P(a_2a_4)^{-1}\,a_1a_3P - P(a_2a_4)^{-1}\,Pa_1a_3\,P$ vollstetig und somit $(a_2a_4)^{-1}\,a_1a_3P + Q$ bzw.

$$a_1a_3P + a_2a_4Q$$

invertierbar.

Wir führen nun die lokalisierenden Klassen wie im Beweis des vorigen Satzes ein. Aufgrund der Voraussetzung (4.6) existiert für jeden Punkt $\tau \in \Gamma$ eine Umgebung U_τ, in der entweder die Funktionen a_1a_2 oder die Funktionen a_3, a_4 stetig sind. Für jeden Punkt $\tau \in \Gamma$ definieren wir nun Funktionen $a_{i\tau}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ folgendermaßen: Wenn a_1, a_2 in einer Umgebung von τ stetig sind, setzen wir

$$a_{1\tau}(t) = a_1(\tau), \quad a_{2\tau}(t) = a_2(\tau), \quad a_{3\tau}(t) = a_3(t), \quad a_{4\tau}(t) = a_4(t).$$

Sind die Funktionen a_1, a_2 in keiner Umgebung von τ stetig, so sei

$$a_{1\tau}(t) = a_1(t), \quad a_{2\tau}(t) = a_2(t), \quad a_{3\tau}(t) = a_3(\tau), \quad a_{4\tau}(t) = a_4(\tau).$$

Dann ist $\{P_n(a_1a_3P + a_2a_4Q) P_n\}^\cdot$ M_τ-äquivalent zu $\{P_n(a_{1\tau}a_{3\tau}P + a_{2\tau}a_{4\tau}Q) P_n\}^\cdot$ und entsprechend $\{P_n(a_1P + a_2Q) P_n\}^\cdot$, $\{P_n(a_3P + a_4Q) P_n\}^\cdot$ zu $\{P_n(a_{1\tau}P + a_{2\tau}Q)P_n\}^\cdot$, $\{P_n(a_{3\tau}P + a_{4\tau}Q) P_n\}^\cdot$. Die letzteren Elemente sind wegen (4.5) auch M_τ-invertierbar. Weil sich die Funktionen $a_{1\tau}a_{3\tau}$, $a_{2\tau}a_{4\tau}$ von $a_{1\tau}$, $a_{2\tau}$ oder $a_{3\tau}$, $a_{4\tau}$ entsprechend nur durch von Null verschiedene konstante Faktoren unterscheiden, ist somit auch $\{P_n(a_{1\tau}a_{3\tau}P + a_{2\tau}a_{4\tau}Q) P_n\}^\cdot$ M_τ-invertierbar. Satz 2.3 liefert nun die Behauptung ∎

Bemerkung 4.1: Unter der Voraussetzung, daß die Funktionen $a, b \in \overline{PC}$ keine gemeinsamen Unstetigkeitsstellen besitzen, kann Satz 4.3 unter Anwendung des lokalen Prinzips auch aus den Ergebnissen über die Konvergenz des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren hergeleitet werden, wie sie in [2] enthalten sind. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, sich auf Satz 4.4 und die Resultate von [4] zu stützen.

FOLGERUNG 4.1: *Seien $a_i \in L^\infty$ reellwertige Funktionen, für die $0 \notin$ [ess inf a_i, ess sup a_i] gilt, $i = 1, 2$. Aus*

$$\operatorname{sing\,supp} a_1 \cap \operatorname{sing\,supp} a_2 = \Phi$$

folgt dann $a_1P + a_2Q \in \Pi\{P_n\}$.

§ 5. Das Reduktionsverfahren für diskrete paarige Wiener-Hopfsche Gleichungen

Sei l_p $(1 < p < \infty)$ der Banachraum aller Zahlenfolgen $\xi = \{\xi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ mit der Norm $\|\xi\| = \left\{\sum_{-\infty}^{\infty} |\xi_k|^p\right\}^{1/p}$. Es sei weiter $a \in L^\infty$ eine gegebene Funktion und

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(e^{i\varphi})\, e^{-ik\varphi}\, d\varphi \qquad (k = 0, \pm 1, \ldots)$$

ihre Fourierkoeffizienten. Ferner bedeute M_p die Menge aller derjenigen Funktionen $a \in L^\infty$, für die die unendliche Matrix $\{a_{j-k}\}_{j,k=-\infty}^{\infty}$ in l_p einen beschränkten Operator A erzeugt. Die Funktion a heißt *Symbol* des Operators. Schließlich sei $M_{\langle p\rangle}$ die Menge aller Funktionen aus L^∞, die zu $M_{\tilde p}$ für alle $\tilde p$ aus einer Umgebung von p gehören.

In der Banachalgebra $\mathscr{L}(l_p)$ sind die durch

$$P\{\xi_k\}_{-\infty}^{\infty} = \{\ldots, 0, \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots\}$$

$$P_n\{\xi_k\}_{-\infty}^{\infty} = \{\ldots, 0, \xi_{-n}, \ldots, \xi_0, \ldots, \xi_n, 0, \ldots\}$$

definierten Projektoren P und P_n enthalten. Analog zum vorigen Paragraphen werden die Operatoren W_n und die Algebren $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}^\cdot$ eingeführt. Die lokale Theorie läßt sich unter Berücksichtigung der Ergebnisse von [3: Kap. XIV] auch hier entwickeln. Als Folgerung aus dieser Theorie und den Ergebnissen von [4] oder [5] ergibt sich z. B. der folgende Satz.

SATZ 5.1: *Es gelte $a, b \in \overline{PC} \cap M_{\langle p\rangle}$ und die Funktionen a, b mögen keine gemeinsamen Unstetigkeitsstellen besitzen. Dann gilt $(Q = I - P)$*

$$AP + BQ \in \Pi\{P_n\} \qquad (PA + QB \in \Pi\{P_n\})$$

genau dann, wenn die Operatoren $AP + BQ$, $\tilde{A}P + Q$, $P + \tilde{B}Q$ $(PA + QB, P\tilde{A} + Q, P + \tilde{B}Q)$ *invertierbar sind. Dabei bedeuten* A, B, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ *die oben beschriebenen Operatoren entsprechend mit den Symbolen* $a(t)$, $b(t)$, $a\left(\frac{1}{t}\right)$, $b\left(\frac{1}{t}\right)$.

§ 6. Das Reduktionsverfahren für Systeme singulärer Integralgleichungen

Sei $L_k{}^2$ das topologische Produkt von k Exemplaren des Raumes L^2. Seien ferner

$$\mathfrak{P} = (\delta_{ij}P)_{i,j=1}^k, \qquad \mathfrak{Q} = I - \mathfrak{P},$$

$$\mathfrak{P}_n = (\delta_{ij}P_n)_{i,j=1}^k, \qquad \mathfrak{W}_n = (\delta_{ij}W_n)_{i,j=1}^k.$$

Für beliebige Matrixfunktionen $a, b \in (L^\infty)_{k\times k}$ sind dann die singulären Integraloperatoren $a\mathfrak{P} + b\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}a + \mathfrak{Q}b$, $\mathfrak{P}a\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}b\mathfrak{Q}$ im Raum $L_k{}^2$ erklärt und stetig. Die Überlegungen der §§ 3 und 4 können ohne Schwierigkeiten auf diesen etwas allgemeineren Fall übertragen werden. Es gilt z. B. folgender Satz.

SATZ 6.1: *Seien* $a, b \in (\overline{PC})_{k\times k}$, *und diese Funktionen mögen keine gemeinsamen Unstetigkeitsstellen besitzen. Dann ist*

$$a\mathfrak{P} + b\mathfrak{Q} \in \Pi\{\mathfrak{P}_n\} \qquad (\mathfrak{P}a + \mathfrak{Q}b \in \Pi\{\mathfrak{P}_n\})$$

genau dann, wenn die Operatoren

$$a\mathfrak{P} + b\mathfrak{Q}, \quad \tilde{a}\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{P} + \tilde{b}\mathfrak{Q} \qquad (\mathfrak{P}a + \mathfrak{Q}b, \quad \mathfrak{P}\tilde{a} + Q, \quad \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}\tilde{b})$$

invertierbar sind, wobei $\tilde{a}(t) = a\left(\frac{1}{t}\right)$, $\tilde{b}(t) = b\left(\frac{1}{t}\right)$ *ist.*

Dieser Satz ergibt sich mittels des lokalen Prinzips aus [4]. Als lokalisierende Klasse wird dabei für jedes $\tau \in \Gamma$ die Menge

$$\mathfrak{M}_\tau = \{(\delta_{ij}a)_{i,j=1}^k) : a \in M_\tau\}$$

gewählt.

Abschließend sei vermerkt, daß die Ergebnisse des § 5 ebenfalls mittels des lokalen Prinzipes auf den Systemfall übertragen werden können.

LITERATUR

[1] Douglas, R. G.: Banach algebra techniques in operator theory. Academic Press: New York 1972.

[2] Гохберг, И. Ц., и И. А. Фельдман: Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. Москва 1971.

[3] Гохберг, И. Ц., и. Н. Я. Крупник: Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинёв 1973.

[4] Silbermann, B.: Lokale Theorie des Reduktionsverfahrens für Toeplitzoperatoren. Math. Nachrichten 104 (1981), 137–146.

[5] Вербицкий, И. Э., и. Н. Я. Крупник: О применимости проекционного метода к

дискретным уравнениям Винера-Хопфа с кусочно-непрерывным символом, Мат. иссл. (Кишинёв), вып. 45 (1978), 17–28.
[6] Вербицкий, И. Э.: Проекционные методы решения сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами, Мат. иссл. (Кишинёв), вып. 47 (1978), 12–24.

Manuskripteingang: 6. 10. 1981

VERFASSER:

Prof. Dr. BERND SILBERMANN
Sektion Mathematik der Technischen Hochschule
DDR-9010 Karl-Marx-Stadt, Straße der Nationen 62
PSF 964