Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 1 (6) (1982), S. 57–76

Zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie für torusberandete Gebiete mit Potentialen vom Typ der einfachen Schicht

J. Maul

Betrachtet wird im Rahmen der Elastostatik sowie für stationäre elastische Schwingungen der elastisch homogene und isotrope Vollraum mit einem einfach zusammenhängenden Einschluß aus anderem Material. An der Kontaktfläche L sind die Sprünge der Verschiebungen und der Spannungen vorgegeben. L sei homöomorph zur Oberfläche eines regulären Torus und gehöre der Klasse $C^{1,\beta}$ an. Unter Verwendung des elastischen Einfachschichtpotentials wird ein Integralgleichungssystem erhalten, auf welches ein Beltramischer Differentialoperator Ω angewandt wird. Das resultierende zweidimensionale singuläre Integralgleichungssystem ist normal lösbar und besitzt den Index 0. Das Studium des Nullraumes und des Wertebereiches von Ω erlaubt, den Beweis für die Existenz und Darstellbarkeit einer Lösung der Ausgangsprobleme als Einfachschichtpotential zu führen. Einige Verallgemeinerungen über die Anwendung des Zuganges auf andere Problemstellungen werden diskutiert.

Рассматривается контактная задача в изотропном и упругооднородном пространстве с односвязным включением из другого материала в рамках эластостатики, а также установившихся упругих колебаний. На общей поверхности контакта L заданы скачки смещений и напряжений. Предполагается, что поверхность L гомеоморфна границе регулярного тора и принадлежит классу $C^{1,\beta}$. Решение ищется в виде потенциала простого слоя. Система интегральных уравнений преобразуется посредством дифференциального оператора Бельтрами Ω в систему двухмерных сингулярных интегральных уравнений, являющуюся нормально разрешимой и имеющую индекс 0. С помощью результатов о ядре и области значений оператора Ω можно доказать теорему о существовании решения исходных проблем. В работе также обсуждаются возможные обобщения поставленных проблем.

The problem of the elastic homogeneous and isotropic whole space with a simple connected inclusion of other material in elastostatics and for stationary elastic vibrations is considered. On the contact surface L the jumps of displacements and tractions are given. L is assumed to be homeomorphic to the boundary surface of a regular torus, and to belong to the class $C^{1,\beta}$. Using the elastic single layer potential, a system of integral equations is obtained, which is transformed to a twodimensional singular integral equation system by the aid of a Beltrami differential operator Ω. The singular system is normal solvable and has the index 0. Studying the kernel and the range of the operator Ω, the existence of solutions of the original problems can be proved. Some generalisations of the approach on other problems are discussed.

1. Einleitung

Die Arbeit beschäftigt sich in der Hauptsache mit der Untersuchung des fundamentalen Kontaktproblems der Elastostatik bzw. für stationäre elastische Schwingungen. L sei stets eine geschlossene Ljapunowfläche, kurz $L \in C^{1,\beta}$ $(0 < \beta \leqq 1)$, die das einfach zusammenhängende endliche Gebiet $D^+ \subset \mathbb{R}_3$ bzw. das einfach zusammenhängende unendliche Gebiet $D^- \subset \mathbb{R}_3$ beranden möge. Wir nehmen an, die Gebiete D^+ und D^- seien ausgefüllt von elastischen Medien, die durch die konstanten Laméschen Moduln $\lambda^\pm$, $\mu^\pm > 0$ charakterisiert werden und die ebenfalls konstante Massendichten $\varrho^\pm$ besitzen. Gesucht sind nun Lösungen $\mathbf{v}^\pm(\mathbf{x}, t)$ $(\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_3$, t — Zeit) der beiden Differentialgleichungssysteme

$$\mu^\pm \Delta \mathbf{v}^\pm(\mathbf{x}, t) + (\lambda^\pm + \mu^\pm) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}^\pm(\mathbf{x}, t) + \varrho^\pm \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \varrho^\pm \frac{\partial^2 \mathbf{v}^\pm(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \tag{1}$$

für $\mathbf{x} \in D^+$ bzw. $\mathbf{x} \in D^-$ (die Operationen grad, div und Δ beziehen sich auf die x-Variablen), die auf L den folgenden Kontaktbedingungen genügen:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}^+(\mathbf{z}, t) - \mathbf{v}^-(\mathbf{z}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{z}, t), \\ &\mathcal{T}^+\mathbf{v}^+(\mathbf{z}, t) - \mathcal{T}^-\mathbf{v}^-(\mathbf{z}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{z}, t) \quad \text{für } \mathbf{z} \in L. \end{aligned} \tag{2}$$

Hierbei sind $\mathbf{f}(\mathbf{z}, t)$, $\mathbf{g}(\mathbf{z}, t)$ gegebene Vektoren der Klasse $C^{1,\gamma}(L)$ bzw. $C^{0,\gamma}(L)$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ der Vektor der Volumenkräfte, der außerhalb eines beschränkten Gebietes identisch verschwinden und zur Klasse $C^{0,\gamma}(\mathbb{R}_3)$ gehören möge $(0 < \gamma < \beta \leqq 1)$. $\mathcal{T}^\pm$ ist der Differentialoperator, der den Vektorfeldern der Verschiebungen $\mathbf{v}^\pm(\mathbf{x}, t)$ den Spannungsvektor in Richtung der äußeren Normale $\mathbf{n}$ an L zuordnet. $\mathcal{T}^\pm$ wird bekanntlich gegeben durch

$$\mathcal{T}^\pm \mathbf{v}^\pm = 2\mu^\pm \frac{\partial \mathbf{v}^\pm}{\partial \mathbf{n}} + \lambda^\pm \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{v}^\pm + \mu^\pm \mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}^\pm. \tag{3}$$

Wir betrachten speziell den statischen Fall, bei dem alle vorgegebenen Vektoren von der Zeit unabhängig sind, und den Fall stationärer elastischer Schwingungen. Dabei sind alle vorgegebenen Vektoren harmonischen Schwingungen mit ein- und derselben Kreisfrequenz $\omega > 0$ unterworfen, was sich auf die Lösungen $\mathbf{v}^\pm(\mathbf{x}, t)$ überträgt. Man kann hier also annehmen $\mathbf{v}^\pm(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}\left(e^{i\omega t}\mathbf{u}^\pm(\mathbf{x})\right)$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}\left(e^{i\omega t}\mathbf{F}(\mathbf{x})\right), \ldots$ Man zeigt leicht, daß die Amplituden $\mathbf{u}^\pm$ dann Lösungen des Kontaktproblemes

$$\begin{aligned} &\mu^\pm \Delta \mathbf{u}^\pm(\mathbf{x}) + (\lambda^\pm + \mu^\pm) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}^\pm(\mathbf{x}) + \varrho^\pm \omega^2 \mathbf{u}^\pm(\mathbf{x}) = -\varrho^\pm \mathbf{F}(\mathbf{x}) \\ &\text{für } \mathbf{x} \in D^+ \text{ bzw. } \mathbf{x} \in D^-. \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}^+(\mathbf{z}) - \mathbf{u}^-(\mathbf{z}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \\ &\mathcal{T}^+\mathbf{u}^+(\mathbf{z}) - \mathcal{T}^-\mathbf{u}^-(\mathbf{z}) = \mathbf{g}(\mathbf{z}) \quad \text{für } \mathbf{z} \in L \end{aligned} \tag{5}$$

sind. Setzt man hierin $\omega = 0$, so erhält man das oben erwähnte Problem im statischen Fall. (4), (5) bezeichnen wir kurz als *Problem* $\mathsf{K}(\omega)$ (für $\omega \geqq 0$). Das entsprechende homogene Problem (d. h. $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{g}(\mathbf{z}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in D^\pm$ bzw. $\mathbf{z} \in L$) wird kurz *Problem* $\mathsf{Ko}(\omega)$ genannt.

Das Problem $\mathsf{K}(0)$ wurde von Jentsch [5] unter der Voraussetzung $L \in C^3$ behandelt. In früheren Arbeiten von Kupradze (vgl. [10] und die dort angegebene Literatur) konnte noch nicht die Regularität der konstruierten verallgemeinerten Lösung nachgewiesen werden, während die Arbeit [4] Lücken enthält. Jentsch sucht die Lösung des Problemes $\mathsf{K}(0)$ zum Zwecke der Aufstellung von Integralgleichungen in Form eines speziell konstruierten Potentials, in das Terme des elastischen Einfach- wie des Doppelschichtpotentials eingehen. In [6] verallgemeinert Jentsch die Resultate auf den Fall stationärer thermoelastischer Schwingungen, wovon unser Problem $\mathsf{K}(\omega)$ $(\omega > 0)$ einen Spezialfall darstellt. Es sei schließlich noch erwähnt, daß analoge Kontaktprobleme natürlich auch über Hilbertraummethoden zugänglich sind ([1, 3, 7]).

Anliegen dieser Arbeit ist es, eine Verallgemeinerung des im ebenen Fall [11] (vgl. auch [12—14; 8]) für verschiedene Modelle der Elastizitäts- und Thermoelastizitätstheorie und unterschiedliche Rand- und Kontaktprobleme ausgearbeiteten Zuganges zu geben, bei dem nur Einfachschichtpotentiale benötigt werden. In der Arbeit wird eine solche Verallgemeinerung vorgestellt, allerdings unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Kontaktfläche L homöomorph zur Oberfläche eines regulären Torus ist, was wir im folgenden stets annehmen werden. Um ein singuläres Integralgleichungssystem auf der Fläche L zu erhalten, wird analog zu [11] ein Differentialoperator Ω konstruiert. Studiert man die Wirkung von Ω über der Ebene der Flächenparameter u^1, u^2, so kann Ω als Beltramischer Differentialoperator [17] interpretiert werden. In dieser Auffassung lassen sich unter Verwendung von Resultaten aus [17] Aussagen über den Nullraum und den Wertebereich des Operators Ω beweisen, welche ihrerseits zur vollständigen Untersuchung der Integralgleichung und zu Existenz- und Regularitätsaussagen für das Kontaktproblem führen. Auf Grund der besseren Differenzierbarkeitseigenschaften des Einfachschichtpotentials im Vergleich zum Doppelschichtpotential [10] genügt bei dem neuen Zugang (für Kontaktflächen L vom Torustyp) die Voraussetzung $L \in C^{1,\beta}$, um die Existenz einer regulären Lösung des Problems zu sichern. Das entspricht einer Abschwächung der Voraussetzungen an die Randfläche um mindestens eine Ordnung im Vergleich zu anderen Zugängen.

Wir stellen noch einige im Text verwendete Bezeichnungen zusammen. Ist $\mathscr{A}$ ein linearer Operator, so bedeuten die Symbole $N(\mathscr{A})$ bzw. $R(\mathscr{A})$ den Nullraum (Kern) bzw. den Wertebereich (range) des Operators $\mathscr{A}$. Ist D ein Gebiet des $\mathbb{R}_n$, so bedeuted ∂D seinen Rand, $\overline{D}$ seinen Abschluß und $CD = \mathbb{R}_n \setminus D$ das Komplement im $\mathbb{R}_n$. Die imaginäre Einheit wird mit i bezeichnet.

In der Arbeit wird die Michlinsche Theorie mehrdimensionaler singulärer Integralgleichungen verwendet, die bekanntlich im L_2 bzw. den L_p-Räumen entwickelt wird. Auf Grund von Einbettungssätzen können unter in unserem Fall stets erfüllten Regularitätsforderungen an die Kerne der Integralgleichungen die Noetherschen Sätze auch in Hölderräumen formuliert werden [15, 10, 16]. Da für unsere Zwecke aber nur im klassischen Sinne reguläre Lösungen des Kontaktproblemes interessant sind, spezialisieren wir die erzielten Resultate von vornherein auf Hölderräume.

2. Parametrisierung von L

Wie bereits bemerkt, sei die Ljapunowfläche L homöomorph zur Oberfläche T eines regulären Torus. Um eine globale Parametrisierung von L zu erhalten, nehmen wir an, es sei ein Diffeomorphismus $\psi\colon T \to L$ gegeben, der der Klasse $C^{1,\beta}$ $(0 < \beta \leqq 1)$ angehört, d. h., die Abbildung ψ ist bijektiv und überführt jede auf T erklärte Funktion f der Klasse $C^{1,\beta}(T)$ in eine Funktion $\bar{f} \in C^{1,\beta}(L)$. Dabei verlangen wir noch, daß der Diffeomorphismus ψ in keinem Punkte ausgeartet ist, d. h., die Funktionaldeterminante der zwischen den lokalen kartesischen Koordinaten auf T und auf L durch ψ vermittelten Abbildung ist überall von 0 verschieden. Das System der lokalen kartesischen Koordinatensysteme in T bildet dann Karten der Klasse $C^{1,\beta}$ über L, die insgesamt einen Atlas der Klasse $C^{1,\beta}$ über L darstellen, wobei wegen der Kompaktheit von L ein fester Kreiszylinder $Z_\varepsilon(d)$ mit der Höhe $2d$ und dem Radius ε der Grundfläche existiert, der die folgenden Eigenschaften besitzt. Man beschreibe dazu um einen beliebigen Punkt $\mathbf{z} \in L$ als Mittelpunkt den Zylinder $Z_\varepsilon(d)$, so daß dessen Achse mit der Normalen an L im Punkte $\mathbf{z}$ zusammenfällt. Bezeichne weiter $\mathbf{y}$ einen beliebigen Punkt von $L \cap Z_\varepsilon(d)$, $\zeta = \psi^{-1}\mathbf{z}$, $\eta = \psi^{-1}\mathbf{y}$ die Urbildpunkte auf T und v^1, v^2 die lokalen Koordinaten des Punktes η in dem in ζ errichteten lokalen kartesischen Koordinatensystem auf T. Dann existieren unabhängig von $\mathfrak{z}$ zwei positive Konstanten m, M, so daß die Beziehung

$$0 < m \leqq \left(\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(v_1, v^2)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y_2, y_3)}{\partial(v^1, v^2)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y_3, y_1)}{\partial(v^1, v^2)}\right)^2 = M \tag{6}$$

gilt. (6) zeigt u. a. die positive Definitheit der ersten Fundamentalform in den lokalen Koordinaten v^1, v^2. Es seien nun zwei sich im Punkte $\zeta \in T$ rechtwinklig schneidende Kurven auf T gegeben. Aus (6) folgt dann leicht, daß eine Konstante α_0 mit $0 < \alpha_0 \leqq \frac{\pi}{2}$ existiert, so daß unabhängig von ζ für den Schnittwinkel α der Bilder dieser Kurven auf L die Beziehung $\alpha_0 \leqq \alpha \leqq \pi - \alpha_0$ gilt.

Wir parametrisieren die Standardfläche T nun auf folgende Weise:

$$\zeta = \zeta(u^1, u^2) = \left(\zeta_1 (u^1, u^2), \zeta_2(u^1, u^2), \zeta_3(u^1, u^2)\right)$$

mit

$$\begin{aligned} &\zeta_1(u^1, u^2) = (R + r \cos u^2) \cos u^1, \\ &\zeta_2(u^1, u^2) = (R + r \cos u^2) \sin u^1, \\ &\zeta_3(u^1, u^2) = r \sin u^2 \qquad (r < R, \; -\pi \leqq u^1 \leqq \pi, \; -\pi \leqq u^2 \leqq \pi). \end{aligned} \tag{7}$$

Die Koordinatenlinien $u^1 = \text{const}$ und $u^2 = \text{const}$ schneiden sich auf T orthogonal. Ihnen entsprechen über den Diffeomorphismus ψ zwei Scharen von Kurven auf L, die L lückenlos überdecken. Der Schnittwinkel α je zweier Kurven dieser Scharen genügt nach den obigen Überlegungen den Ungleichungen $\alpha_0 \leqq \alpha \leqq \pi - \alpha_0$. Durch die Formeln

$$\begin{gathered} \mathfrak{s}_1 = \frac{\mathfrak{z}_{,1}}{|\mathfrak{z}_{,1}|}, \quad \mathfrak{s}_2 = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\mathfrak{z}_{,2}}{|\mathfrak{z}_{,2}|} - \operatorname{ctg} \alpha\, \mathfrak{s}_1, \quad \mathfrak{s}_3 = \mathfrak{s}_1 \times \mathfrak{s}_2 \\ \left(\mathfrak{z}_{,i} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial u^i}\right) = \left(\frac{\partial z_1}{\partial u^i}, \frac{\partial z_2}{\partial u^i}, \frac{\partial z_3}{\partial u^i}\right), \qquad i = 1, 2 \end{gathered} \tag{8}$$

wird in allen Punkten von L ein lokales kartesisches Koordinatensystem erklärt, wobei $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ in der Tangentialebene liegen. Die Koordinaten der Vektoren $\mathfrak{s}_j$ sind außerdem hölderstetig über dem betrachteten Parameterbereich wie auch als Funktionen über L.

3. Regularität, Eindeutigkeit

Wir interessieren uns für reguläre Lösungen $\mathfrak{u}^\pm$ von $\mathsf{K}(\omega)$ im folgenden Sinne:

Es sei $\mathfrak{u}^\pm \in C^2(D^\pm) \cap C^1(\bar{D}^\pm)$. Für große $|\mathfrak{x}|$ gelte darüber hinaus im Falle $\omega = 0$ $\mathfrak{u}^-(\mathfrak{x}) = \mathcal{O}(|\mathfrak{x}|^{-1})$ und $\mathfrak{u}^-_{,j}(\mathfrak{x}) = \mathcal{O}(|\mathfrak{x}|^{-2})$ $(j = 1, 2, 3)$. Im Falle $\omega > 0$ fordern wir dagegen die elastischen Ausstrahlungsbedingungen. Unter Benutzung der wegen der vorausgesetzten Finitheit von $\mathfrak{F}$ für große $|\mathfrak{x}|$ gültigen Zerlegung $\mathfrak{u}^- = \mathfrak{u}^{(p)-} + \mathfrak{u}^{(s)-}$ mit

$$\mathfrak{u}^{(p)-} = -\frac{\lambda^- + 2\mu^-}{\varrho^-\omega^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u}^-, \qquad \mathfrak{u}^{(s)-} = \frac{\mu^-}{\varrho^-\omega^2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{u}^-,$$

für die man leicht die Schwingungsgleichungen

$$\Delta \mathfrak{u}^{(p)-} + \frac{\varrho^-\omega^2}{\lambda^- + 2\mu^-} \mathfrak{u}^{(p)-} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta \mathfrak{u}^{(s)-} + \frac{\varrho^-\omega^2}{\mu^-} \mathfrak{u}^{(s)-} = 0$$

bestätigt, lassen sich die Ausstrahlungsbedingungen wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} u^{(p)-}(x) &= \mathcal{O}(1), \quad \left[\frac{\partial u^{(p)-}(x)}{\partial |x|} - i\,\frac{\varrho^- \omega^2}{\lambda^- + 2\mu^-}\, u^{(p)-}(x)\right] = \mathcal{O}(|x|^{-1}), \\ u^{(s)-}(x) &= \mathcal{O}(1), \quad \left[\frac{\partial u^{(s)-}(x)}{\partial |x|} - i\,\frac{\varrho^- \omega^2}{\mu^-}\, u^{(s)-}(x)\right] = \mathcal{O}(|x|^{-1}) \end{aligned} \tag{9}$$

(vgl. [10]).

Satz 1: *Das homogene Problem* $\mathrm{Ko}(\omega)$ *besitzt keine nichttriviale reguläre Lösung.*

Beim Beweis, den wir hier nicht im einzelnen führen werden, benötigt man die erste Greensche Formel der Elastizitätstheorie sowie die Bedingungen an $u^-(x)$ für große $|x|$. Man vergleiche auch [5] für den Fall $\omega = 0$ und [10] für $\omega > 0$.

4. Grundlösungsmatrix, Einfachschichtpotential

Die Matrix $\Gamma(x - y)$ mit

$$\Gamma(z) = [\Gamma_{ik}(z)]_{i,k=1,2,3} \quad \text{und} \quad \Gamma_{ik}(z) = \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\,\frac{1}{|z|}\,\delta_{ik} + \frac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\,\frac{z_i z_k}{|z|^3} \tag{10}$$

ist bekanntlich eine Grundlösungsmatrix des betrachteten Differentialgleichungssystems im statischen Fall $\omega = 0$. Ebenso wird durch $\Gamma(x - y; \omega)$ mit

$$\Gamma(z;\omega) = [\Gamma_{jk}(z;\omega)]_{j,k=1,2,3}$$

und

$$\Gamma_{jk}(z;\omega) = \sum_{p=1}^{2}\left(\delta_{jk}\alpha_p + \beta_p\,\frac{\partial^2}{\partial z_k\,\partial z_j}\right)\frac{e^{il_p|z|}}{|z|} \tag{11}$$

$$\left(l_1^2 = \varrho\omega^2(\lambda + 2\mu)^{-1},\ l_2^2 = \varrho\omega^2\mu^{-1};\ \alpha_p = \delta_{2p}\mu^{-1},\ \beta_p = (-1)^p\,(\varrho\omega^2)^{-1}\right)$$

eine Grundlösungsmatrix des Differentialgleichungssystems für $\omega > 0$ gegeben. Hierbei sind in den Gebieten D^+ bzw. D^- natürlich die Konstanten λ^+, μ^+, ϱ^+ bzw. λ^-, μ^-, ϱ^- einzusetzen. Die mit diesen Größen gebildeten Grundlösungsmatrizen werden auch durch $\Gamma^+(x - y)$, $\Gamma^+(x - y; \omega)$; $\Gamma^-(x - y)$ bzw. $\Gamma^-(x - y; \omega)$ besonders gekennzeichnet. Die Matrizen (10) und (11) sind für $x \neq y$ bezüglich x reguläre Lösungen der zugehörigen Differentialgleichungssysteme. Insbesondere erfüllt $\Gamma^-(x - y; \omega)$ für große $|x|$ die Ausstrahlungsbedingungen.

Wir bilden nun mit den Grundlösungen $\Gamma(z;\omega)$ ($\omega \geqq 0$; es wird hier $\Gamma(z;0) = \Gamma(z)$ gesetzt) für ein gegebenes Gebiet $D \subset \mathbb{R}^3$ die *Einfachschichtpotentiale*

$$V(x;\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \Gamma(x - y;\omega)\,\varphi(y)\,df_y. \tag{12}$$

Hierbei ist φ ein gegebener Dichtevektor, der auf ∂D definiert ist. Es gilt der folgende Satz.

Satz 2: *Es sei* $\partial D \in C^{1,\beta}$ *und* $\varphi \in C^{0,\gamma}(\partial D)$ $(0 < \gamma < \beta \leqq 1)$. *Dann ist das Potential* (12) *reguläre Lösung des zugehörigen homogenen Differentialgleichungssystems im*

Gebiet D und in $C\overline{D}$, und für $\mathbf{x} = \mathbf{z} \in \partial D$ gelten folgende Formeln:

1. $$\lim_{\substack{\mathbf{x}\in D\\ \mathbf{x}\to\mathbf{z}\in\partial D}} \mathscr{T}\mathbf{V}(\mathbf{x};\varphi) = \varphi(\mathbf{z}) + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \mathscr{T}\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{z}-\mathbf{y};\omega)\,\varphi(\mathbf{y})\,df_{\mathbf{y}}, \tag{13}$$

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\in C\overline{D}\\ \mathbf{x}\to\mathbf{z}\in\partial D}} \mathscr{T}\mathbf{V}(\mathbf{x};\varphi) = -\varphi(\mathbf{z}) + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \mathscr{T}\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{z}-\mathbf{y};\omega)\,\varphi(\mathbf{y})\,df_{\mathbf{y}}$$

(*Hierbei bedeutet $\mathscr{T}$ den Spannungsoperator* (3), *gebildet mit den betrachteten Moduln λ und μ*).

2. *Ist ν eine Richtung der Tangentialebene von ∂D im Punkte $\mathbf{z} \in \partial D$, so gilt*

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\mathbf{V}(\mathbf{z};\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu}\boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{z}-\mathbf{y};\omega)\,\varphi(\mathbf{y})\,df_{\mathbf{y}}, \tag{14}$$

d. h., in tangentieller Richtung ist die Differentiation unter dem Integral möglich.

3. *Ist ν eine im Punkte $\mathbf{z} \in \partial D$ tangentielle Richtung, so geht die Funktion $\frac{\partial}{\partial \nu}\mathbf{V}(\mathbf{x};\varphi)$ im Punkte $\mathbf{z}$ stetig durch ∂D hindurch.*

Die Behauptungen dieses Satzes folgen leicht aus den Sätzen 5.1 und 5.2 der Monografie [10: S. 223]. Behauptung 2 ist natürlich eine Folgerung von 3., läßt sich aber unabhängig von 3. sehr einfach zeigen (vgl. etwa den analogen Satz für das entsprechende ebene Potential [11]).

Bemerkung: *Satz 2 bleibt richtig für Potentiale des Typs*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\varphi(\mathbf{y})\,df_{\mathbf{y}}, \tag{12'}$$

wenn $\mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{x}-\mathbf{y};\omega) + \mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *gilt, wobei* $\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *bezüglich* $\mathbf{x} \in B$ *für alle* $\mathbf{y} \in B$ *eine reguläre Lösung des betrachteten Differentialgleichungssystems ist, wenn B eine offene Menge* mit $\overline{D} \subset B$ ist.

Die Behauptung folgt leicht daraus, daß dann der durch $\mathbf{R}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ bewirkte Teil des Potentials (12′) regulär in einer Umgebung von ∂D ist.

Die bei der weiteren Behandlung von Problem $\mathsf{K}(\omega)$ notwendigen Überlegungen werden sehr vereinfacht, wenn man in D^+ bzw. D^- Potentiale vom Typ (12) bzw. (12′) zur Verfügung hat, die die folgende *Äquivalenzeigenschaft* (*Vollständigkeit des Kernes*) aufweisen:

Aus $\mathbf{V}(\mathbf{x};\varphi) = \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x}$ aus dem betrachteten Gebiet D soll folgen $\varphi(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{y} \in \partial D$ (wenn φ noch als hölderstetig vorausgesetzt wird).

Wir zeigen zuerst, daß das Potential

$$\mathbf{V}^+(\mathbf{x};\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_L \boldsymbol{\Gamma}^+(\mathbf{x}-\mathbf{y};\omega)\,\varphi(\mathbf{y})\,df_{\mathbf{y}}$$

die Äquivalenzeigenschaft hat. Sei nämlich $\mathbf{V}^+(\mathbf{x};\varphi) = \mathbf{0}$ für alle $\mathbf{x} \in D^+$. Wir betrachten die durch das Potential dargestellte Funktion $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}^+(\mathbf{x};\varphi)$ für $x \in D^-$. Nach Satz 2 ist $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ in D^- eine reguläre Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\mu^+\Delta\mathbf{u} + (\lambda^+ + \mu^+)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \varrho^+\omega^2\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Andererseits gilt wegen der Stetigkeit des Einfachschichtpotentials auf L $\mathbf{W}(\mathbf{z}) = 0$ für alle $\mathbf{z} \in L$. Hieraus folgt nach dem Eindeutigkeitssatz für die erste Randwertaufgabe [10] $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in D^-$. Unter Beachtung von Satz 2 ergibt sich nun für alle $\mathbf{z} \in L$

$$0 = \lim_{\substack{\mathbf{x}\in D^+ \\ \mathbf{x}\to\mathbf{z}\in L}} \mathcal{T}^+\mathbf{V}^+(\mathbf{x};\varphi) - \lim_{\substack{\mathbf{x}\in D^- \\ \mathbf{x}\to\mathbf{z}\in L}} \mathcal{T}^+\mathbf{V}^+(\mathbf{x};\varphi)$$

$$= \varphi(\mathbf{z}) + \frac{1}{2\pi}\int_L \mathcal{T}^+\Gamma^+(\mathbf{z}-\mathbf{y};\omega)\,\varphi(\mathbf{y})\,df_{\mathbf{y}}$$

$$- \left(-\varphi(\mathbf{z}) + \frac{1}{2\pi}\int_L \mathcal{T}^+\Gamma^+(\mathbf{z}-\mathbf{y};\omega)\,\varphi(\mathbf{y})\,df_{\mathbf{y}}\right) = 2\varphi(\mathbf{z}),$$

d. h., $\mathbf{V}^+(\mathbf{x};\varphi)$ erfüllt tatsächlich die Äquivalenzeigenschaft.

In D^- kann das Potential nicht auf die gleiche Weise gewählt werden, da die erste Randwertaufgabe in dem endlichen Gebiet D^+ bekanntlich Eigenwerte besitzt. Wir setzen hier

$$\mathbf{V}^-(\mathbf{x};\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_L \mathbf{G}(\mathbf{x},\mathbf{y};\omega)\,\varphi(\mathbf{y})\,df_{\mathbf{y}},$$

wobei $\mathbf{G}(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}};\bar{\omega})$ der Greensche Tensor der ersten Randwertaufgabe in einem Gebiet $\tilde{D}$ ist, das den folgenden beiden Eigenschaften genügt:

1. $\bar{D}^- \subset \tilde{D}$.
2. Die homogene erste Randwertaufgabe für das Differentialgleichungssystem

$$\mu^-\Delta\mathbf{u} + (\lambda^- + \mu^-)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \varrho^-\omega^2\mathbf{u} = 0 \quad \text{im Gebiet } \tilde{D}\setminus\bar{D}^-$$

besitzt nur die triviale Lösung.

Die erste Eigenschaft läßt sich leicht erfüllen. Damit auch die zweite zutrifft, braucht $\tilde{D}$ nur so gewählt werden, daß $\mathrm{mes}\,(\tilde{D}\setminus\bar{D}^-)$ hinreichend klein ist. Mit Hilfe der beiden Eigenschaften zeigt man wie oben leicht, daß auch das Potential $\mathbf{V}^-(\mathbf{x};\varphi)$ die Äquivalenzeigenschaft erfüllt.

Wir bemerken noch, daß man im Falle $\omega = 0$ wegen der hier stets statthabenden Eindeutigkeit der ersten Randwertaufgabe in D^- ebenfalls stets das gewöhnliche Einfachschichtpotential verwenden kann.

5. Überführung des Problems $\mathsf{K}(\omega)$ in ein singuläres Integralgleichungssystem

Wir verstehen von jetzt an unter dem Problem $\mathsf{K}(\omega)$ das Problem (4), (5) mit $\mathbf{F} \equiv 0$. Auf diesen Spezialfall läßt sich das allgemeine Problem unter Verwendung des elastischen Volumenpotentials zurückführen, dessen Eigenschaften in [10] ausführlich untersucht sind. Die Lösung $\mathbf{u}$ von Problem $\mathsf{K}(\omega)$ wird in Gestalt eines äquivalenten Einfachschichtpotentials

$$\mathbf{u}^\pm(\mathbf{x}) = \mathbf{V}^\pm(\mathbf{x};\varphi^\pm) = \frac{1}{2\pi}\int_L \mathbf{K}^\pm(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\varphi^\pm(\mathbf{y})\,df_{\mathbf{y}} \quad \text{für } x \in D^\pm \tag{15}$$

mit den noch zu bestimmenden Dichtevektoren φ^+ bzw. φ^- gesucht. Hierbei wird von vornherein vorausgesetzt, daß die Potentiale (15) die Äquivalenzeigenschaft erfüllen (man hat also die Kerne $\mathbf{K}^\pm(\mathbf{x},\mathbf{y})$ nach den Überlegungen des letzten Abschnittes wie folgt zu wählen: $\mathbf{K}^+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Gamma^+(\mathbf{x} - \mathbf{y}; \omega)$ für $\omega \geqq 0$, $\mathbf{K}^-(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \omega)$ für $\omega > 0$ bzw. $\mathbf{K}^-(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Gamma^-(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ für $\omega = 0$). Nach Einsetzen in die Kontaktbedingungen (5) der Aufgabe ergibt sich folgendes Integralgleichungssystem für die Vektoren $\varphi^\pm$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_L \left(\mathbf{K}^+(\mathbf{z}, \mathbf{y})\, \varphi^+(\mathbf{y}) - \mathbf{K}^-(\mathbf{z}, \mathbf{y})\, \varphi^-(\mathbf{y})\right) df_{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}) \\ &\varphi^+(\mathbf{z}) + \varphi^-(\mathbf{z}) + \frac{1}{2\pi} \int_L \left(\mathcal{T}^+\mathbf{K}^+(\mathbf{z}, \mathbf{y})\, \varphi^+(\mathbf{y}) - \mathcal{T}^-\mathbf{K}^-(\mathbf{z}, \mathbf{y})\, \varphi^-(\mathbf{y})\right) df_{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{z}) \end{aligned} \tag{16}$$

für $\mathbf{z} \in \mathbf{L}$. Unter Beachtung von

$$df_y = \sqrt{\left(\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(u^1, u^2)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y_2, y_3)}{\partial(u^1, u^2)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y_3, y_1)}{\partial(u^1, u^2)}\right)^2}\, du^1\, du^2 \tag{*}$$

kann (16) als Integralgleichungssystem über dem fundamentalen Rechteck der Parameterdarstellung (7) aufgefaßt werden. Die zweite Gleichungsgruppe von (16) enthält singuläre Integrale, während die erste aus Fredholmschen Integraloperatoren erster Art gebildet wird. Wir wenden auf alle drei Gleichungen dieser ersten Gleichungsgruppe den Differentialoperator

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega\left(\frac{\partial}{\partial u}, \alpha\right) &= \frac{\partial}{\partial s^1} + i\,\frac{\partial}{\partial s^2} = \frac{1}{|\mathbf{z}_{,1}|}\,\frac{\partial}{\partial u^1} \\ &\quad + i\left\{\frac{1}{\sin\alpha}\,\frac{1}{|\mathbf{z}_{,2}|}\,\frac{\partial}{\partial u^2} - \operatorname{ctg}\alpha\,\frac{1}{|\mathbf{z}_{,1}|}\,\frac{\partial}{\partial u^1}\right\} \end{aligned} \tag{17}$$

an (vgl. Formel (8)). (Im Gegensatz zur Formel (*) sind u^1, u^2 in (17) auf den Punkt $\mathbf{z}$ und nicht auf $\mathbf{y}$ bezogen. Wir führen jedoch trotz dieser Zweideutigkeit keine besondere Kennzeichnung durch, da bei Beachtung der konkreten Situation Mißverständnisse ausgeschlossen sind.) Dieses Vorgehen wird dadurch motiviert, daß die nach der beschriebenen Differentiation entstehenden Integrale singulär sein werden; denn man kann unter Beachtung von Satz 2 (Behauptung 2) nämlich unter dem Integral differenzieren und erhält z. B.

$$\Omega\,\frac{1}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|} = -\frac{1}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^2}\left[\frac{\partial}{\partial s^1}\,|\mathbf{z} - \mathbf{y}| + i\,\frac{\partial}{\partial s^2}\,|\mathbf{z} - \mathbf{y}|\right] = \frac{e^{i\theta}}{|\mathbf{z} - \mathbf{y}|^2},$$

wenn θ der Winkel ist, den die Projektion der geraden Verbindungslinie $\widehat{\mathbf{z}\mathbf{y}}$ auf die Tangentialebene im Punkte $\mathbf{z}$ mit der s_1-Achse (im Punkte $\mathbf{z}$) bildet. Man erhält schließlich das Integralgleichungssystem

$$\mathbf{A}(\mathbf{z})\, \Phi(\mathbf{z}) + \frac{1}{2\pi} \int_L \mathbf{K}(\mathbf{z}, \mathbf{y})\, \Phi(\mathbf{y})\, df_{\mathbf{y}} = \mathbf{F}(\mathbf{z}) \tag{18}$$

mit

$$\mathbf{A}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{K}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \Omega\mathbf{K}^+(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - \Omega\mathbf{K}^-(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \mathcal{T}^+\mathbf{K}^+(\mathbf{z}, \mathbf{y}) - \mathcal{T}^-\mathbf{K}^-(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{F}(z) = \begin{bmatrix} \Omega\mathfrak{f}(z) \\ g(z) \end{bmatrix}, \quad \Phi(y) = \begin{bmatrix} \varphi^+(y) \\ \varphi^-(y) \end{bmatrix},$$

das im folgenden weiter zu untersuchen sein wird.

6. Normale Lösbarkeit und Index des Systems (18)

Ziel dieses Abschnittes ist der Nachweis, daß das System (18) ein stark singuläres normal lösbares Integralgleichungssystem ist, auf das die Theorie von [15] anwendbar ist. Hierzu muß man den charakteristischen Teil dieses Systems abspalten. Wir verwenden dabei die bekannte Formel

$$\left(\mathscr{T}\Gamma(z - y)\right)_{jk} = c\,\frac{\cos(n, z_j)\,(z_k - y_k) - \cos(n, z_k)\,(z_j - y_j)}{|z - y|^3} + \mathcal{O}(|z - y|^{-2+\varepsilon}) \tag{19}$$

mit $c = \dfrac{\mu}{\lambda + 2\mu}$, $\varepsilon > 0$, die unter der Voraussetzung $L \in C^{1,\beta}$ gültig ist. Da sich die Matrizen $\Gamma(z - y)$ einerseits und $\Gamma(z - y; \omega)$, $G(z, y; \omega)$ andererseits nur durch additive Terme mit schwächerer Singularitätenordnung unterscheiden, wird auch die Ordnung der Singularität der Kerne $\mathscr{T}\Gamma(z - y; \omega)$ und $\mathscr{T}G(z, y; \omega)$ durch den mit der Konstante c behafteten Teil der Formel (19) bestimmt. Weiterhin ergibt sich

$$\begin{aligned}\left[\Omega\left(\frac{\partial}{\partial u}, \alpha\right)\Gamma(z - y)\right]_{jk} &= a\delta_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial s^1} + i\,\frac{\partial}{\partial s^2}\right)\frac{1}{|z - y|} \\ &+ \frac{b}{|z - y|^2}\left\{-\frac{y_j - z_j}{|y - z|}\left(\frac{\partial}{\partial s^1} + i\,\frac{\partial}{\partial s^2}\right)z_k - \frac{y_k - z_k}{|y - z|}\left(\frac{\partial}{\partial s^1} + i\,\frac{\partial}{\partial s^2}\right)z_j\right\} \\ &+ 3b\,\frac{y_j - z_j}{|y - z|}\,\frac{y_k - z_k}{|y - z|}\left(\frac{\partial}{\partial s^1} + i\,\frac{\partial}{\partial s^2}\right)\frac{1}{|y - z|}\end{aligned} \tag{20}$$

mit $a = \dfrac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}$ und $b = \dfrac{\lambda + \mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}$.

Wir stellen nun die charakteristische Matrix auf. Dazu wählen wir das Ausgangskoordinatensystem im $\mathbb{R}_3$ so, daß der betrachtete Punkt z zum Ursprung des neuen Koordinatensystems wird und die Koordinatenachsen parallel zu den Vektoren s_1, s_2 und s_3 verlaufen. Bei einer solchen Transformation bleibt das Symbol des Operators ungeändert. Führen wir in der Tangentialebene zum Punkt z an die Fläche L den Polarwinkel θ ein, so gilt

$$\cos\theta = \frac{y_1 - z_1}{|y - z|}, \qquad \sin\theta = \frac{y_2 - z_2}{|y - z|}.$$

Unter unseren Voraussetzungen und wegen $L \in C^{1\beta}$ ist $\dfrac{y_3 - z_3}{|y - z|} = \mathcal{O}(1)$ in der Umgebung von $y = z$. Damit läßt sich leicht die charakteristische Matrix $\mathfrak{f}(z, \theta)$ des Kernes im betrachteten Punkte z ablesen; es gilt

$$2\pi\mathfrak{f}(z, \theta) = \begin{bmatrix} \multicolumn{2}{c}{\mathbf{D}^+} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} & \multicolumn{2}{c}{-\mathbf{D}^-} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix} \\ 0 & 0 & a^+e^{i\theta} & 0 & 0 & -a^-e^{i\theta} \\ 1 & 0 & -c^+\cos\theta & 1 & 0 & c^-\cos\theta \\ 0 & 1 & -c^+\sin\theta & 0 & 1 & c^-\sin\theta \\ c^+\cos\theta & c^+\sin\theta & 1 & -c^-\cos\theta & -c^-\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$$

mit

$$\mathbf{D}^{\pm} = \begin{bmatrix} a^{\pm}(\cos\theta + i\sin\theta) - 2b^{\pm}\cos\theta & 3b^{\pm}(\cos^2\theta\cos\theta + i\sin\theta\sin^2\theta) \\ +3b^{\pm}(\cos^3\theta + i\cos^2\theta\sin\theta) & -b^{\pm}(i\cos\theta + \sin\theta) \\ 3b^{\pm}(\cos^2\theta\sin\theta + i\sin^2\theta\cos\theta) & a^{\pm}(\cos\theta + i\sin\theta) - 2b^{\pm} i\sin\theta \\ -b^{\pm}(i\cos\theta + \sin\theta) & +3b^{\pm}(\cos\theta\sin^2\theta + i\sin^3\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(a^{\pm} + \frac{b^{\pm}}{2}\right) e^{i\theta} - \frac{b^{\pm}}{4} e^{-i\theta} - \frac{3b^{\pm}}{4} e^{3i\theta} & + i\frac{b^{\pm}}{4} e^{-i\theta} - i\frac{3b^{\pm}}{4} e^{3i\theta} \\ -i\frac{b^{\pm}}{4} e^{-i\theta} - i\frac{3b^{\pm}}{4} e^{3i\theta} & \left(a^{\pm} + \frac{b^{\pm}}{2}\right) e^{i\theta} + \frac{b^{\pm}}{4} e^{-i\theta} + \frac{3b^{\pm}}{4} e^{3i\theta} \end{bmatrix}.$$

Damit hat die *symbolische Matrix* $\sigma(\mathbf{z}, \theta)$ [15] folgende Gestalt:

$$\sigma(\mathbf{z}, \theta) = \left[\begin{array}{cccccc} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\tilde{\mathbf{D}}^{+}$}} & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$-\tilde{\mathbf{D}}^{-}$}} & 0 \\ & & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & a^{+} i e^{i\theta} & 0 & 0 & -a^{-} i e^{i\theta} \\ 1 & 0 & -ic^{+}\cos\theta & 1 & 0 & ic^{-}\cos\theta \\ 0 & 1 & -ic^{+}\sin\theta & 0 & 1 & ic^{-}\sin\theta \\ ic^{+}\cos\theta & ic^{+}\sin\theta & 1 & -ic^{-}\cos\theta & -ic^{-}\sin\theta & 1 \end{array}\right]$$

mit

$$\tilde{\mathbf{D}}^{\pm} = \begin{bmatrix} i\left(a^{\pm} + \frac{b^{\pm}}{2}\right) e^{i\theta} - i\frac{b^{\pm}}{4}(e^{-i\theta} + e^{3i\theta}) & \frac{b^{\pm}}{4}(e^{-i\theta} - e^{3i\theta}) \\ \frac{b^{\pm}}{4}(e^{-i\theta} - e^{3i\theta}) & i\left(a^{\pm} + \frac{b^{\pm}}{2}\right) e^{i\theta} + i\frac{b^{\pm}}{4}(e^{-i\theta} + e^{3i\theta}) \end{bmatrix}.$$

Aus der Theorie von MICHLIN [15] ergeben sich bekanntlich die folgenden Aussagen. Die Bedingung $\det\sigma(\mathbf{z}, \theta) \neq 0$ für alle $0 \leq \theta < 2\pi$ ist hinreichend dafür, daß das System (18) als Operatorgleichung über dem $L_2(L)$ bzw. über $C^{0,\gamma}(L)$ normal lösbar ist. Hinreichend dafür, daß das System den Index 0 besitzt, ist die Bedingung, daß die Beträge aller Hauptminoren der symbolischen Matrix größer als eine gegebene positive Zahl sind.

Wir berechnen zunächst die Determinante der symbolischen Matrix. Dazu entwickeln wir diese unter Benutzung des Laplaceschen Entwicklungssatzes nach den ersten drei Zeilen. Die aus den ersten drei Zeilen und der i-ten, j-ten und k-ten Spalte gebildeten dreireihigen Unterdeterminanten werden mit A_{ijk} bezeichnet. Man erhält dann nach einfachen Rechnungen

$$A_{123} = -i(a^{+})^2 (a^{+} + b^{+}) e^{3i\theta}, \qquad A_{456} = i(a^{-})^2 (a^{-} + b^{-}) e^{3i\theta},$$

$$A_{126} = ia^{+}a^{-}(a^{+} + b^{+}) e^{3i\theta}, \qquad A_{345} = ia^{+}a^{-}(a^{-} + b^{-}) e^{3i\theta},$$

$$A_{124} = A_{125} = A_{145} = A_{245} = A_{136} = A_{236} = A_{346} = A_{356} = 0,$$

$$A_{134} = (b^{+}a^{-} - b^{-}a^{+}) \frac{a^{+}}{4} (e^{i\theta} - e^{5i\theta}) = -A_{235},$$

$$A_{146} = (b^{+}a^{-} - b^{-}a^{+}) \frac{a^{-}}{4} (e^{i\theta} - e^{5i\theta}) = -A_{256},$$

$$A_{135} = (b^{+}a^{-} - b^{-}a^{+})\, i\frac{a^{+}}{4} (e^{i\theta} + e^{5i\theta}) - ia^{+}\left(a^{+}a^{-} + \frac{1}{2}(a^{+}b^{-} + a^{-}b^{+})\right) e^{3i\theta},$$

$$A_{234} = (b^{+}a^{-} - b^{-}a^{+})\, i\frac{a^{+}}{4} (e^{i\theta} + e^{5i\theta}) + ia^{+}\left(a^{+}a^{-} + \frac{1}{2}(a^{+}b^{-} + a^{-}b^{+})\right) e^{3i\theta},$$

$$A_{156} = (b^+a^- - b^-a^+)\, i\frac{a^-}{4}(e^{i\theta} + e^{5i\theta}) - ia^-\left(a^+a^- + \frac{1}{2}(a^+b^- + a^-b^+)\right)e^{3i\theta},$$

$$A_{246} = (b^+a^- - b^-a^+)\, i\frac{a^-}{4}(e^{i\theta} + e^{5i\theta}) + ia^-\left(a^+a^- + \frac{1}{2}(a^+b^- + a^-b^+)\right)e^{3i\theta}.$$

Wenn $\tilde{A}_{ijk}$ die zu A_{ijk} adjungierte Unterdeterminante bezeichnet, so haben wir:

$$\det \sigma(z, \theta) = \sum_{1\leq i<j<k\leq 6} (-1)^{i+j+k} A_{ijk}\tilde{A}_{ijk}$$

$$= A_{123}\begin{vmatrix} 1 & 0 & ic^-\cos\theta \\ 0 & 1 & ic^-\sin\theta \\ -ic^-\cos\theta & -ic^-\sin\theta & 1 \end{vmatrix} - A_{456}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -ic^+\cos\theta \\ 0 & 1 & -ic^+\sin\theta \\ ic^+\cos\theta & ic^+\sin\theta & 1 \end{vmatrix}$$

$$- A_{126}\begin{vmatrix} -ic^+\cos\theta & 1 & 0 \\ -ic^+\sin\theta & 0 & 1 \\ 1 & -ic^-\cos\theta & -ic^-\sin\theta \end{vmatrix} + A_{345}\begin{vmatrix} 1 & 0 & ic^-\cos\theta \\ 0 & 1 & ic^-\sin\theta \\ ic^+\cos\theta & ic^+\sin\theta & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ A_{134}\begin{vmatrix} 0 & 0 & ic^-\cos\theta \\ 1 & 1 & ic^-\sin\theta \\ ic^+\sin\theta & -ic^-\sin\theta & 1 \end{vmatrix} - A_{145}\begin{vmatrix} 0 & -ic^+\sin\theta & 0 \\ 1 & -ic^+\sin\theta & 1 \\ ic^+\sin\theta & 1 & -ic^-\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$+ A_{235}\begin{vmatrix} 1 & 1 & ic^-\cos\theta \\ 0 & 0 & ic^-\sin\theta \\ ic^+\cos\theta & -ic^-\cos\theta & 1 \end{vmatrix} - A_{256}\begin{vmatrix} 1 & -ic^+\cos\theta & 1 \\ 0 & -ic^+\sin\theta & 0 \\ ic^+\cos\theta & 1 & -ic^-\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$- A_{135}\begin{vmatrix} 0 & 1 & ic^-\cos\theta \\ 1 & 0 & ic^-\sin\theta \\ ic^+\sin\theta & -ic^-\cos\theta & 1 \end{vmatrix} + A_{156}\begin{vmatrix} 0 & -ic^+\cos\theta & 1 \\ 1 & -ic^+\sin\theta & 0 \\ ic^+\sin\theta & 1 & -ic^-\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$- A_{234}\begin{vmatrix} 1 & 0 & ic^-\cos\theta \\ 0 & 1 & ic^-\sin\theta \\ ic^+\cos\theta & -ic^-\sin\theta & 1 \end{vmatrix} + A_{246}\begin{vmatrix} 1 & -ic^+\cos\theta & 0 \\ 0 & -ic^+\sin\theta & 1 \\ ic^+\cos\theta & 1 & -ic^-\sin\theta \end{vmatrix}.$$

Die weitere Ausrechnung dieses Ausdruckes und recht aufwendige Umformungen führen schließlich zu

$$\det \sigma(z, \theta)$$
$$= \frac{i}{4}e^{i\theta}(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta)(b^+a^- - b^-a^+)(c^+ + c^-)(a^-c^+ - a^+c^-)$$
$$+ \frac{i}{4}e^{5i\theta}(\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta)(b^+a^- - b^-a^+)(c^+ + c^-)(a^-c^+ - a^+c^-)$$
$$- ie^{3i\theta}\left\{(1 + c^+c^-)\left[(a^+ + a^-)\left(2a^+a^- + \frac{1}{2}(a^+b^- + a^-b^+)\right) + a^+a^-(b^+ + b^-)\right]\right.$$
$$+ (1 - (c^-)^2)\left[(a^+)^2(a^+ + b^+ + a^-) + \frac{a^+}{2}(a^+b^- + a^-b^+)\right] + (1 - (c^+)^2)$$
$$\left.\times\left[(a^-)^2(a^- + b^- + a^+) + \frac{a^-}{2}(a^+b^- + a^-b^+)\right]\right\}$$
$$= -ie^{3i\theta}\{(a^+ + a^- + b^+ + b^-)\left[(a^-)^2(1 - (c^+)^2) + (a^+)^2(1 - (c^-)^2)\right]$$
$$+ a^+a^-(1 + c^+c^-)\left[2(a^+ + a^-) + (a^+ + a^- + 1)(b^+ + b^-)\right]\}.$$

Wegen $0 < c^\pm < \frac{1}{2}$ und $a^\pm$, $b^\pm > 0$ ist die in der geschweiften Klammer stehende Konstante größer als 0, und es folgt

$$|\det \sigma(z, \theta)| \neq 0,$$

also ist das Integralgleichungssystem (18) normal lösbar.

Wir untersuchen nun die Hauptminoren, die der Reihe nach mit $A_1, A_2, \ldots, A_6 = \det \sigma(z, \theta)$ bezeichnet seien. Man erhält sofort bzw. nach einfachen Rechnungen

$$A_1 = i\left(a^+ + \frac{b^+}{2}\right)e^{i\theta} - i\frac{b^+}{4}e^{-i\theta} - i\frac{b^+}{4}e^{3i\theta} = -ie^{-i\theta}\left(\frac{b^+}{4} - \left(a^+ + \frac{b^+}{2}\right)e^{2i\theta} + \frac{b^+}{4}e^{4i\theta}\right).$$

$$A_2 = -e^{2i\theta}a^+(a^+ + b^+), \qquad A_3 = -i(a^+)^2(a^+ + b^+)\,e^{3i\theta}.$$

Unter Ausnutzung der früheren Rechnungen ergibt sich weiterhin

$$A_4 = -i\frac{a^+}{4}e^{i\theta}\{(b^+a^- - b^-a^+)\,e^{4i\theta} + (4a^+(a^+ + a^- + b^+) + 2(a^+b^- + a^-b^+))\,e^{2i\theta}$$
$$+ (b^+a^- - b^-a^+)\},$$

$$A_5 = -i\frac{a^+}{2}e^{i\theta}\{(a^+b^- - a^-b^+)\,e^{4i\theta} + 2(a^+(a^+ + b^+) + a^-(a^- + b^-))\,e^{2i\theta} + (a^+b^- - a^-b^+)\}.$$

$|A_2| \neq 0$ und $|A_3| \neq 0$ ist sofort zu sehen. Die Bedingung $|A_5| \neq 0$ für alle $0 \leqq \theta < 2\pi$ ist äquivalent dazu, daß das Polynom

$$w(z) = (a^+b^- - a^-b^+)\,z^2 + 2[a^+(a^+ + b^+) + a^-(a^- + b^-)]\,z + (a^+b^- - a^-b^+)$$

keine Wurzeln vom Betrag 1 besitzt. Letzteres ist im Falle $(a^+b^- - a^-b^+) = 0$ sofort klar. Gilt hingegen $(a^+b^- - a^-b^+) \neq 0$, so hat man für die beiden Wurzeln z_1, z_2 von $w(z)$ offenbar

$$z_1z_2 = 1, \quad z_1 + z_2 = -2\,\frac{a^+(a^+ + b^+) + a^-(a^- + b^-)}{a^+b^- - a^-b^+} = -2A \tag{$*$}$$

(die Konstante A wird durch die obige Gleichung definiert). Wegen der generellen Voraussetzung $\lambda^\pm, \mu^\pm > 0$ gilt stets $a^\pm, b^\pm > 0$ und $a^+ > b^+$, $a^- > b^-$. Setzen wir nun $N = a^+(a^+ + b^+) + a^-(a^- + b^-)$, so gilt stets

$$N > a^+b^- + a^-b^+. \tag{$**$}$$

Das erkennt man mittels Fallunterscheidung. Wenn nämlich $a^+ \geqq a^-$ und $b^+ \geqq b^-$ bzw. $b^+ \leqq b^-$, so ist

$$a^+(a^+ + b^+) \geqq a^+a^- + a^+b^- > a^-b^+ + a^+b^-$$

bzw.

$$a^+(a^+ + b^+) \geqq a^+a^- + a^-b^+ > a^+b^- + a^-b^+.$$

Ist aber $a^+ \leqq a^-$ und $b^+ \geqq b^-$ bzw. $b^+ \leqq b^-$, so gilt

$$a^-(a^- + b^-) \geqq a^+a^- + a^+b^- > a^-b^+ + a^+b^-$$

bzw.

$$a^-(a^- + b^-) \geqq a^-a^+ + a^-b^+ > a^+b^- + a^-b^+.$$

Mit ($*$) folgt nun

$$|A| > \left|\frac{a^+b^- + a^-b^+}{a^+b^- - a^-b^+}\right| > 1.$$

Es sei nun $|z| = 1$. Dann gilt

$$|w(z)| \geqq |a^+b^- - a^-b^+| \, (2\,|A| - |z^2 + 1|) = 2\,|a^+b^- - a^-b^+| \, (|A| - 1) > 0,$$

womit auch $|A_5| \neq 0$ evident ist.

Die restlichen Ungleichungen $|A_1| \neq 0$ und $|A_4| \neq 0$ zeigt man analog.

Folglich ist das System (18) über $L_2(L)$ bzw. $C^{0,\gamma}(L)$ normal lösbar und besitzt den Index 0.

7. Der Nullraum des Operators Ω

Bei der in den folgenden Abschnitten durchzuführenden Untersuchung des Systems (18) werden Aussagen über den Nullraum des Operators Ω benötigt. Ω wird durch (17) gegeben. Der Definitionsbereich des Operators Ω besteht aus i. a. komplexwertigen Funktionen der Klasse $C^{1,\gamma}(L)$ $(0 < \gamma < \beta)$ oder, in anderer Auffassung, komplexwertigen beschränkten Funktionen der Klasse $C^{1,\gamma}(R)$ über dem fundamentalen Rechteck

$$R = \begin{Bmatrix} -\pi \leqq u^1 \leqq \pi \\ -\pi \leqq u^2 \leqq \pi \end{Bmatrix},$$

die gewisse Periodizitätseigenschaften besitzen. Offensichtlich kann man im Rahmen der zweiten Deutung die Betrachtungen auch über der gesamten u-Ebene durchführen, indem die Funktionen des Definitionsbereiches von Ω doppeltperiodisch auf die ganze Ebene U fortgesetzt werden. Die solcherart fortgesetzten Funktionen haben dann die Eigenschaft, in jedem kompakten Teilgebiet $B \subset U$ der Klasse $C^{1,\gamma}(B)$ anzugehören. Beide Auffassungsweisen sind äquivalent; wir werden vor allem von der zweiten Gebrauch machen.

Es sei nun $w(u) = w_1(u^1, u^2) + i w_2(u^1, u^2)$ $(w_i(u^1, u^2)$ — reell) eine Funktion des Definitionsbereiches $\mathscr{D}(\Omega)$ von Ω. Die Gleichung

$$\Omega w = F$$

bedeutet dann ausführlich:

$$\frac{1}{|\mathfrak{z}_{,1}|} w_{1,1} - \frac{1}{\sin\alpha} \frac{1}{|\mathfrak{z}_{,2}|} w_{2,2} + \operatorname{ctg}\alpha \frac{1}{|\mathfrak{z}_{,1}|} w_{2,1} = F_1,$$

$$\frac{-\operatorname{ctg}\alpha}{|\mathfrak{z}_{,1}|} w_{1,1} + \frac{1}{\sin\alpha} \frac{1}{|\mathfrak{z}_{,2}|} w_{1,2} + \frac{1}{|\mathfrak{z}_{,1}|} w_{2,1} = F_2,$$

oder

$$\begin{aligned} w_{1,1} - \frac{1}{\sin\alpha} \frac{|\mathfrak{z}_{,1}|}{|\mathfrak{z}_{,2}|} w_{2,2} + \operatorname{ctg}\alpha\, w_{2,1} &= |\mathfrak{z}_{,1}|\, F_1, \\ -\operatorname{ctg}\alpha\, w_{1,1} + \frac{1}{\sin\alpha} \frac{|\mathfrak{z}_{,1}|}{|\mathfrak{z}_{,2}|} w_{1,2} + w_{2,1} &= |\mathfrak{z}_{,1}|\, F_2. \end{aligned} \tag{21}$$

Komplex geschrieben nimmt (21) die folgende Form an:

$$\left(\frac{1}{\sin\alpha} \frac{|\mathfrak{z}_{,1}|}{|\mathfrak{z}_{,2}|} + 1 - i \operatorname{ctg}\alpha\right) w_{\bar{u}} - \left(\frac{1}{\sin\alpha} \frac{|\mathfrak{z}_{,1}|}{|\mathfrak{z}_{,2}|} - 1 + i \operatorname{ctg}\alpha\right) w_u = |\mathfrak{z}_{,1}|\, F$$

bzw.

$$w_{\bar{u}} - q(u)\, w_u = \frac{|z_{,1}|}{\dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{|z_{,1}|}{|z_{,2}|} + 1 - i \operatorname{ctg}\alpha} F(u) \tag{21'}$$

mit

$$q(u) = \frac{\dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{|z_{,1}|}{|z_{2,}|} - 1 + i\operatorname{ctg}\alpha}{\dfrac{1}{\sin\alpha}\dfrac{|z_{,1}|}{|z_{,2}|} + 1 - i\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{\dfrac{|z_{,1}|}{|z_{,2}|} - \dfrac{|z_{,2}|}{|z_{,1}|} + 2i\cos\alpha}{\dfrac{|z_{,1}|}{|z_{,2}|} + \dfrac{|z_{,2}|}{|z_{,2}|} + 2\sin\alpha}.$$

Nach elementaren Umformungen bestätigt man, daß (21) auch in der Form

$$\begin{aligned} -w_{2,2} + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{|z_{,2}|}{|z_{,1}|} w_{1,1} - \operatorname{ctg}\alpha w_{1,2} &= |z_{,2}|\,(\sin\alpha F_1 - \cos\alpha F_2) = F_1^* \\ w_{2,1} - \operatorname{ctg}\alpha w_{1,1} + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{|z_{,1}|}{|z_{,2}|} w_{1,2} &= |z_{,1}|\, F_2 = F_2^* \end{aligned} \tag{21''}$$

geschrieben werden kann.

Das System (21) ist ein Beltramisches Differentialgleichungssystem, dessen Eigenschaften z. B. in [17] ausführlich untersucht werden. Wie man aus dem ersten Ausdruck für $q(u)$ sofort sieht, existiert eine Konstante k mit $|q(u)| \leqq k < 1$. Aus den Sätzen 2.4 und 2.15 der Monografie [17] folgt die Existenz eines globalen Homöomorphismus $\zeta(u)$ der komplexen u-Ebene auf die komplexe v-Ebene, der $u = \infty$ invariant läßt und in jedem kompakten Gebiet B der u-Ebene zur Klasse $C^{1,\beta}(B)$ gehört. Dieser Homöomorphismus hat weiterhin die grundlegende Eigenschaft, die Differentialgleichung $\Omega w(u) = 0$ in die Differentialgleichung $\dfrac{\partial}{\partial \bar{v}} \tilde{w}(v) = 0$ (mit $\tilde{w}(v) = w(\zeta^{-1}(v))$) zu transformieren. Folglich kann die allgemeine Lösung der Gleichung (21) in einem beliebigen Gebiet B in der Form

$$w(u) = \Psi(\zeta(u)) \tag{22}$$

geschrieben werden, wobei Ψ eine beliebige im Gebiet $\tilde{B} = \zeta(B)$ analytische Funktion ist.

Wie bereits bemerkt, interessieren wir uns auf Grund des Zusammenhanges mit der Integralgleichung (18) nur für solche Lösungen $w(u)$, die in der gesamten u-Ebene beschränkt sind. w sei nun eine solche Lösung von (21). In jedem Kreis $K_n = \{u : |u| < n\}$ existiert dann eine analytische Funktion Ψ_n mit $w(u) = \Psi_n(\zeta(u))$ für alle $u \in K_n$. Offenbar ist weiter die analytische Funktion Ψ_{n+1} analytische Fortsetzung von Ψ_n. Da die Mengen $\tilde{K}_n = \zeta(K_n)$ wegen der Eigenschaften des Homöomorphismus ζ die gesamte v-Ebene ausschöpfen, existiert eine in der gesamten v-Ebene analytische Funktion Ψ, die die maximale Fortsetzung der Ψ_n ist. Ψ muß außerdem in der ganzen v-Ebene beschränkt sein. Also ist Ψ nach dem Satz von Liouville eine willkürliche komplexe Konstante. Hieraus folgt auch

$$w(u) = \text{const}.$$

Wir haben somit den folgenden Satz hergeleitet.

Satz 3: *Der Nullraum des Operators Ω is reell zweidimensional und besteht aus allen über dem fundamentalen Rechteck (bzw. über der gesamten u-Ebene) konstanten Funktionen.*

Da der Operator Ω auf 3 skalare Gleichungen des Systems (16) angewandt wurde, ergibt sich leicht eine weitere Aussage.

Folgerung: *Das homogene System* (18o) (*der Buchstabe o in Formeln soll stets die homogene Gleichung bedeuten*) *besitzt höchstens* 6 *reell linear unabhängige Lösungen oder, in anderer Sprechweise, der Nullraum des Operators von Gleichung* (18) *ist höchstens* 6-*dimensional.*

In der Tat, die Äquivalenzeigenschaft der verwendeten Potentiale führt mit Satz 1 dazu, daß das homogene System (16o) nur trivial lösbar ist. Der Nullraum von (18) fällt nun zusammen mit dem Lösungsraum von (16) für $\mathfrak{g}(z) = 0$ und einen beliebigen konstanten komplexen Vektor $\mathfrak{f}(z)$, woraus die Richtigkeit der Folgerung sofort klar wird.

8. Untersuchung des homogenen Systems (18o)

In diesem Abschnitt wird zu zeigen sein, daß der Nullraum des Systemes (18) genau reell 6-dimensional ist. Bisher wissen wir aus der Folgerung zu Satz 3, daß dieser Nullraum höchstens die Dimension 6 haben kann.

Da das System (18) den Index 0 besitzt, würde die Behauptung über den Nullraum von (18) offenbar aus der Existenz von 6 reell linear unabhängigen Lösungen des adjungierten homogenen Systems folgen. Äquivalent hierzu aber ist die Existenz von 6 linear unabhängigen Vektoren auf der rechten Seite von (18), so daß (18) für beliebige nichttriviale Linearkombinationen dieser 6 Vektoren unlösbar ist. Um dies zu zeigen, genügt wiederum der Nachweis, daß die Gleichung

$$\Omega w = F = F_1 + iF_2 \qquad (*)$$

für zwei (reell) linear unabhängige hölderstetige Funktionen $F^{(1)}$, $F^{(2)}$ unlösbar ist, d. h., daß der Wertebereich von Ω mindestens die Kodimension 2 hat.

Wir betrachten dazu das System

$$\Omega w = F$$

in der äquivalenten Form (21'') und führen die Variablensubstitution $v = \zeta(u)$ bzw. in reeller Schreibweise

$$v^1 = \xi(u^1, u^2), \qquad v^2 = \eta(u^1, u^2)$$

mit dem globalen Homöomorphismus $\zeta = \xi + i\eta$ des letzten Abschnittes aus. Dabei erhalten wir mit den Bezeichnungen

$$\tilde{w}_1(v) + i\tilde{w}_2(v) = \tilde{w}(v) = w\big(\zeta^{-1}(v)\big), \qquad \tilde{F}^*(v) = F^*\big(\zeta^{-1}(v)\big),$$

$$\tilde{w}_{j,i}(v) = \frac{\partial \tilde{w}_i}{\partial v^j}(v), \qquad \xi_{,i} = \frac{\partial \xi}{\partial u^i}, \qquad \eta_{,i} = \frac{\partial \eta}{\partial u^i} \qquad (i, j = 1, 2)$$

das Differentialgleichungssystem

$$-\tilde{w}_{2,1}\xi_{,2} - \tilde{w}_{2,2}\eta_{,2} + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{|\mathfrak{z}_{,2}|}{|\mathfrak{z}_{,1}|}(\tilde{w}_{1,1}\,\xi_{,1} + \tilde{w}_{1,2}\eta_{,1})$$
$$-\operatorname{ctg}\alpha(\tilde{w}_{1,1}\xi_{,2} + \tilde{w}_{1,2}\eta_{,2}] = \tilde{F}_1^*,$$

$$\tilde{w}_{2,1}\xi_{,1} + \tilde{w}_{2,2}\eta_{,1} - \operatorname{ctg}\alpha(\tilde{w}_{1,1}\xi_{,1} + \tilde{w}_{1,2}\eta_{,1}) + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{|\mathfrak{z}_{,1}|}{|\mathfrak{z}_{,2}|}(\tilde{w}_{1,1}\xi_{,2} + \tilde{w}_{1,2}\eta_{,2}) = \tilde{F}_2^*.$$

Nach $\tilde{w}_{2,2}$ bzw. $\tilde{w}_{2,1}$ aufgelöst ergibt sich das System

$$\begin{aligned} -\tilde{w}_{2,2} + a_{11}\tilde{w}_{1,1} + a_{12}\tilde{w}_{1,2} &= \hat{F}_1, \\ \tilde{w}_{2,1} + a_{21}\tilde{w}_{1,1} + a_{22}\tilde{w}_{1,2} &= \hat{F}_2 \end{aligned} \tag{23}$$

mit

$$\hat{F}_1 = \hat{F}_1(v) = \frac{1}{J}(\eta_{,1}\tilde{F}_1^* + \eta_{,2}\tilde{F}_2^*),$$

$$\hat{F}_2 = \hat{F}_2(v) = \frac{1}{J}(\xi_{,1}\tilde{F}_1^* + \xi_{,2}\tilde{F}_2^*),$$

$$\tilde{F}_i^*(v) = F_i^*(\zeta^{-1}(v)) \quad \text{und} \quad J = \xi_{,1}\eta_{,2} - \xi_{,2}\eta_{,1}.$$

Auf Grund der definierenden Eigenschaft des Homöomorphismus ζ wird in der obigen Gleichung $a_{11} = a_{22} = 1$ und $a_{12} = a_{21} = 0$ gelten. Wir haben in den neuen Variablen v^1, v^2 also das folgende inhomogene Cauchy-Riemannsche System erhalten:

$$\begin{aligned} -\tilde{w}_{2,2} + \tilde{w}_{1,1} &= \hat{F}_1, \\ \tilde{w}_{2,1} + \tilde{w}_{1,2} &= \hat{F}_2. \end{aligned} \tag{24}$$

Wir behaupten nun, daß das System (24) unlösbar ist für die beiden linear unabhängigen rechten Seiten

$$\hat{F}_1^{(1)} = 1, \quad \hat{F}_2^{(2)} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \hat{F}_1^{(2)} = 0, \quad \hat{F}_2^{(2)} = 1.$$

Wäre nämlich $w = w_1 + iw_2$ eine in der ganzen v-Ebene reguläre und beschränkte Funktion, die die Gleichung (23) etwa mit der rechten Seite $\hat{F}^{(1)}$ befriedigt, so wären w_1 und w_2 offensichtlich auch beschränkte Lösungen der Laplacegleichung in der ganzen v-Ebene, woraus $w_1 = C_1 = \text{const}$, $w_2 = C_2 = \text{const}$ folgt. Dann würde aber auch $\hat{F}_1^{(1)} = 0$ sein, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es ist sofort klar, daß das System auch für eine beliebige nichttriviale Linearkombination der $\hat{F}^{(1)}$, $\hat{F}^{(2)}$ nicht lösbar ist. Nun können wir schlußfolgern, daß das System (21) für alle nichttrivialen Linearkombinationen der beiden rechten Seiten

$$F_1^{*(1)} = -\frac{1}{J}\,\xi_{,2}, \quad F_2^{*(1)} = \frac{1}{J}\,\xi_{,1} \quad \text{bzw.} \quad F_1^{*(2)} = \frac{1}{J}\,\eta_{,2},$$

$$F_2^{*(2)} = -\frac{1}{J}\,\eta_{,1}$$

unlösbar ist; folglich ist auch das ursprüngliche System (21) nicht lösbar für alle nichttrivialen Linearkombinationen der beiden rechten Seiten

$$F_1^{(1)} = \frac{1}{J}\left[\operatorname{ctg}\alpha\,\frac{\xi_{,1}}{|z_{,1}|} - \frac{1}{\sin\alpha}\,\frac{\xi_{,2}}{|z_{,2}|}\right], \qquad F_2^{(1)} = \frac{1}{J}\,\frac{\xi_{,1}}{|z_{,1}|} \quad \text{bzw.}$$

$$F_1^{(2)} = \frac{1}{J}\left[\frac{1}{\sin\alpha}\,\frac{\eta_{,2}}{|z_{,2}|} - \operatorname{ctg}\alpha\,\frac{\eta_{,1}}{|z_{,1}|}\right], \qquad \hat{F}_2^{(2)} = -\frac{1}{J}\,\frac{\eta_{,1}}{|z_{,1}|},$$

was man nach Auflösung gemäß (21″) leicht verifiziert. Die Kodimension des Wertebereiches des Operators Ω ist damit größer oder gleich 2. Unter Berücksichtigung der obigen Bemerkungen folgt hieraus die folgende Aussage.

Satz 4: *Unter den angenommenen Voraussetzungen besitzt das homogene Integralgleichungssystem* (18 o) *genau* 6 *reell linear unabhängige Lösungen.*

9. Existenzsatz für das Problem $\mathsf{K}(\omega)$

Zum Beweis des Existenzsatzes für das Problem $\mathsf{K}(\omega)$ benötigen wir noch zwei Lemmata.

Lemma 1: *$\Phi_1, \ldots, \Phi_6$ seien 6 linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems* (18o). *Dann kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden:*

$$\mathbf{V}^+(\mathbf{z}; \varphi_j^+) - \mathbf{V}^-(\mathbf{z}; \varphi_j^-) = \mathbf{a}_j \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{25a}$$

$$\mathbf{V}^+(\mathbf{z}; \varphi_j^+) - \mathbf{V}^-(\mathbf{z}; \varphi_j^-) = i\mathbf{a}_j \qquad (j = 4, 5, 6), \tag{25b}$$

$$\mathscr{T}^+\mathbf{V}^+(\mathbf{z}; \varphi_j^+) - \mathscr{T}^-\mathbf{V}^-(\mathbf{z}; \varphi_j^-) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 6) \tag{25c}$$

für $\mathbf{z} \in L$, *wobei*

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T, \quad \mathbf{a}_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$$

gesetzt ist.

Beweis: Bezeichnen wir das System (16) mit dem Symbol $\mathscr{A}\Phi = \mathbf{w}$, so kann (18) kurz

$$\hat{\Omega}\mathscr{A}\Phi = \hat{\Omega}\mathbf{w}$$

geschrieben werden (das Zeichen $\hat{}$ über Ω deutet an, daß hierbei nur die ersten drei Gleichungen von (16) gemäß Formel (17) zu differenzieren sind). $\hat{\Omega}$ und $\mathscr{A}$ sind lineare Operatoren. Wegen der Äquivalenzeigenschaft der Potentiale $\mathbf{V}^+$ und $\mathbf{V}^-$ und auf Grund von Satz 1 gilt $\dim N(\mathscr{A}) = 0$.

Wir kommen nun zum Beweis der Behauptungen (25a)—(25c). (25c) ist sofort klar, da diese Beziehung die letzten drei Bedingungen der Systeme (16) bzw. (18) ausdrückt.

Die ersten drei Gleichungen des Operators $\mathscr{A}\Phi$ ergeben nun offenbar gerade die Differenzen $\mathbf{V}^+(\mathbf{z}; \varphi^+) - \mathbf{V}^-(\mathbf{z}; \varphi^-)$ $(\mathbf{z} \in L)$. Die Komponenten dieser Differenz müssen aber für Vektoren $\Phi \in N(\hat{\Omega}\mathscr{A})$ wegen $N(\mathscr{A}) = \{0\}$ dem Nullraum $N(\hat{\Omega})$ des Operators $\hat{\Omega}$ angehören. Da dieser Nullraum von beliebigen konstanten Vektoren gebildet wird, gehören die Differenzen $\mathbf{V}^+(\mathbf{z}; \varphi_j^+) - \mathbf{V}^-(\mathbf{z}; \varphi_j^-)$ $(\mathbf{z} \in L)$, $(\varphi_j^+, \varphi_j^-)^T = \Phi_j$ $(j = 1, 2, \ldots, 6)$ tatsächlich der reell 6-dimensionalen linearen Hülle der Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ an. Die Behauptung des Lemmas ist nun gleichbedeutend damit, daß die (komplexe) lineare Hülle der Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ von den Differenzen $\mathbf{V}^+(\mathbf{z}; \varphi_j^+) - \mathbf{V}^-(\mathbf{z}; \varphi_j^-)$ vollständig aufgespannt wird. Wäre das nicht der Fall, so könnte man einen nichttrivialen Vektor $\Phi = (\varphi^+, \varphi^-)^T$ als nichttriviale Linearkombination der gegebenen Basis Φ_j $(j = 1, \ldots, 6)$ des Nullraumes $N(\hat{\Omega}\mathscr{A})$ konstruieren, für den

$$\mathbf{V}^+(\mathbf{z}; \varphi^+) - \mathbf{V}^-(\mathbf{z}; \varphi^-) = 0, \qquad \mathscr{T}^+\mathbf{V}^+(\mathbf{z}; \varphi^+) - \mathscr{T}^-\mathbf{V}^-(\mathbf{z}; \varphi^-) = 0$$

gelten würde. Das bedeutet nach Satz 3, daß die Potentiale $\mathbf{V}^+(\mathbf{x}; \varphi^+)$ und $\mathbf{V}^-(\mathbf{x}; \varphi^-)$ reguläre Lösung des homogenen Problemes $\mathsf{K}o(\omega)$ sind, woraus nach Satz 1 $\mathbf{V}^+(\mathbf{x}; \varphi^+) \equiv 0$ und $\mathbf{V}^-(\mathbf{x}; \varphi^-) \equiv 0$ folgt. Somit kann wegen der Äquivalenzeigenschaft der Potentiale auf $\varphi^+ = \varphi^- = 0$, also $\Phi = 0$ geschlossen werden. Das ist ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der Φ_j und beweist indirekt das Lemma ∎

Wir bemerken, daß man im statischen Falle $\omega = 0$ über die Lösungen Φ_j des homogenen Systems (180) noch weitergehende Aussagen machen kann. Man kann nämlich auf Grund des Eindeutigkeitssatzes hier die Lösungen der durch die Formeln

(25a)—(25c) definierten Kontaktaufgabe sofort angeben. Diese Lösungen sind

$$\mathbf{V}^+(\mathbf{x}; \varphi_j^+) = \mathbf{a}_j \quad (j = 1, 2, 3), \qquad \mathbf{V}^+(\mathbf{x}; \varphi_j^+) = i\mathbf{a}_j \quad (j = 4, 5, 6),$$
$$\mathbf{V}^-(\mathbf{x}; \varphi_j^-) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, 6).$$

Hieraus folgt insbesondere $\varphi_j^- = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, 6$. Die φ_j^+ müssen dann aber Lösungen des singulären Integralgleichungssystems der zweiten Randwertaufgabe [10] sein.

Lemma 2: *Die Integralgleichungssysteme* (16) *und* (18) *sind für alle* $\mathbf{f} \in C^{1,\gamma}(L)$, $\mathbf{g} \in C^{0,\gamma}(L)$ *stets lösbar.*

Beweis. Wenn wir die gleichen Bezeichnungen wie beim Beweis von Lemma 1 verwenden, so folgt aus den beiden letzten Abschnitten leicht die Beziehung

$$\operatorname{codim} R(\hat{\Omega}) = 6, \tag{*}$$

welche die Existenz von 6 komponentenweise hölderstetigen linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{F}^{(1)}, \ldots, \mathbf{F}^{(6)}$ nach sich zieht, so daß alle nichttrivialen Linearkombinationen der $\mathbf{F}^{(i)}$ nicht zu $R(\hat{\Omega})$ gehören. Wäre nun die Behauptung des Lemmas über das System (16) nicht richtig, so würde ein Vektor $\mathbf{w} = (\mathbf{f}, \mathbf{g})^T$ mit $\mathbf{f} \in C^{1,\gamma}(L)$, $\mathbf{g} \in C^{0,\gamma}(L)$ existieren, der nicht zu $R(\mathscr{A})$ gehört, d. h. die Gleichung $\mathscr{A}\Phi = \mathbf{w}$ wäre nicht lösbar. O. B. d. A. kann $\mathbf{w} \neq 0$ angenommen werden, denn $0 \in R(\mathscr{A})$. Um die Existenz eines solchen $\mathbf{w}$ zum Widerspruch zu führen, unterscheiden wir zwei Fälle: a) $\mathbf{w} \in N(\hat{\Omega})$ und b) $\mathbf{w} \notin N(\hat{\Omega})$.

Fall a) würde einen direkten Widerspruch zur Aussage von Lemma 1 bilden und kann daher ausgeschlossen werden.

Im Falle b) bilden wir den Vektor $\mathbf{F}^{(0)} = \hat{\Omega}\mathbf{w} = (\Omega\mathbf{f}, \mathbf{g})^T$. Es gilt $\mathbf{F}^{(0)} \neq 0$. Wir zeigen, daß die Vektoren $\mathbf{F}^{(0)}, \mathbf{F}^{(1)}, \ldots, \mathbf{F}^{(6)}$ linear unabhängig sind. Aus $C_0\mathbf{F}^{(0)} + C_1\mathbf{F}^{(1)} + \cdots + C_6\mathbf{F}^{(6)} = 0$ folgt nämlich wegen $\mathbf{F}^{(0)} \in R(\hat{\Omega})$ und $\mathbf{F}^{(1)}, \ldots, \mathbf{F}^{(6)} \notin R(\hat{\Omega})$ sofort $C_0\mathbf{F}^{(0)} = 0$ und $C_1\mathbf{F}^{(1)} + \cdots + C_6\mathbf{F}^{(6)} = 0$ und hieraus $C_0 = C_1 = \cdots = C_6$. Weiterhin ist klar, daß auch die Gleichung

$$\hat{\Omega}\mathscr{A}\Phi = \mathbf{F}^{(0)} \tag{**}$$

unlösbar ist. Denn wäre (**) lösbar, so wäre mindestens eine Gleichung

$$\mathscr{A}\Phi = \mathbf{w} + \mathbf{w}_0, \qquad \mathbf{w}_0 \in N(\hat{\Omega})$$

lösbar; da aber die Potentiale mit den Lösungen $\Phi_1, \ldots, \Phi_6$ der homogenen Gleichung (18*o*) nach Lemma 1 den Nullraum von $\hat{\Omega}$ aufspannen, wäre dann auch die Gleichung

$$\mathscr{A}\Phi = \mathbf{w}$$

lösbar, im Widerspruch zur Annahme $\mathbf{w} \notin R(\mathscr{A})$. Folglich ist die Gleichung

$$\hat{\Omega}\mathscr{A}\Phi = \mathbf{F}$$

unlösbar für alle nichttrivialen Linearkombinationen der Vektoren $\mathbf{F}^{(0)}, \mathbf{F}^{(1)}, \ldots, \mathbf{F}^{(6)}$, d. h. $\operatorname{codim} R(\hat{\Omega}\mathscr{A}) \geqq 7$. Da aber $\hat{\Omega}\mathscr{A}$ ein singulärer Integraloperator mit dem Index 0 ist, würde hieraus $\dim N(\hat{\Omega}\mathscr{A}) \geqq 7$ resultieren, im Widerspruch zu Satz 4. Wir müssen die Annahme der Existenz eines $\mathbf{w} \notin R(\mathscr{A})$ deshalb fallen lassen, woraus die Behauptung des Lemmas über das System (16) folgt.

Wir nehmen nun an, das System (18) sei unlösbar für ein $\mathbf{F}^{(0)} = \hat{\Omega}\mathbf{w} = (\Omega\mathbf{f}, \mathbf{g})^T$ aus dem Wertebereich des Operators $\hat{\Omega}$. $\mathbf{F}^{(0)}$ ist dann natürlich nicht der Nullvektor.

Für die Vektoren $\mathbf{F}^{(0)}, \mathbf{F}^{(1)}, \ldots, \mathbf{F}^{(6)}$ besteht jetzt die gleiche Situation wie oben, und wir erhalten schließlich den Widerspruch $\dim N(\hat{\Omega}\mathscr{A}) \geqq 7$, der indirekt auch die Behauptung über das System (18) beweist ∎

Wir bemerken noch, daß man aus den Formeln von Abschnitt 8 die Vektoren $\mathbf{F}^{(1)}, \ldots, \mathbf{F}^{(6)}$ unter Verwendung des globalen Homöomorphismus ζ sofort aufschreiben kann.

Lemma 1 und 2 ermöglichen nun den Beweis des Existenzsatzes.

Satz 5 (*Existenzsatz*): *Es sei* $L \in C^{1,\beta}$, $\mathfrak{f} \in C^{1,\gamma}(L)$, $\mathfrak{g} \in C^{0,\gamma}(L)$ $(0 < \gamma < \beta \leqq 1)$. *Dann besitzt das Problem* $\mathsf{K}(\omega)$ *stets eine reguläre Lösung. Diese kann als Einfachschichtpotential* (15) *dargestellt werden, wobei* φ^+, φ^- *die Lösung des Systems* (18) *ist, die gleichzeitig* (16) *erfüllt.*

Der Beweis dieses Satzes folgt sofort aus der Konstruktion der Integralgleichung (18) in Verbindung mit Lemma 2.

Wir wollen hier noch kurz auf einige auf der Hand liegende Verallgemeinerungen eingehen. Enthält das Gebiet D^- endlich viele Einschlüsse $D_1^+, \ldots, D_m^+$, so daß jede der Randflächen $\partial D_1^+, \ldots, \partial D_m^+$ homöomorph zu T ist, so lassen sich die Überlegungen der Arbeit unmittelbar übertragen. Man hat auf Grund des Ergebnisses der Arbeit auch die Möglichkeit, wie in [5] bzw. [6] die gekoppelte Grundlösungsmatrix oder wie in [13] Greensche Kontakttensoren zu definieren. Bei der Untersuchung der ersten Randwertaufgabe für Gebiete vom Torustyp kann man ebenfalls mit dem Einfachschichtpotential arbeiten. Das erhaltene Integralgleichungssystem wird unter Benutzung des Operators Ω von (17) in ein normal lösbares singuläres Integralgleichungssystem überführt. Die zugehörige symbolische Matrix $\sigma_I(\mathrm{z}, \theta)$ ist die linke obere (3, 3)-Untermatrix der Matrix $\sigma(\mathrm{z}, \theta)$ aus Abschnitt 6, deren Hauptminoren die Werte A_1, A_2, A_3 haben. $\sigma_I(\mathrm{z}, \theta)$ erfüllt damit ebenfalls die in Abschnitt 6 angegebenen Voraussetzungen der Michlinschen Theorie. Wie im Text können auch hier die Überlegungen zum Operator Ω zur Untersuchung des singulären Integralgleichungssystems ausgenützt werden.

Die Anwendung des Zuganges auf weitere Randwert- bzw. Randkontaktaufgaben mit Randflächen vom Torustyp erscheint prinzipiell möglich. Die Überlegungen der Arbeit zum Operator Ω können hierbei ebenfalls ausgenutzt werden, während noch zu prüfen ist, ob für die singulären Integralgleichungen die Fredholmschen Sätze zutreffen.

LITERATUR

[1] Beckert, H.: Über die klassischen Randwertaufgaben der Theorie der Wärmespannungen in stückweise stetigen anisotropen Körpern unter Kopplungsbedingungen. ZAMM **52** (1972), 111–122.

[2] Fichera, G.: Linear elliptic equations of higher order in two independent variables ... In: Proceedings of the Int. Conf. PDE and Cont. Mechanics Madison, Wisconsin 1960. R. E. Langer Editor.

[3] Fichera, G.: Existence theorems in elasticity. Handbuch d. Physik Bd. VI/2, No 3, Springer, Heidelberg 1973.

[4] Башелейшвили, М. О., и Т. Г. Гегелиа: Об основных пространственных граничных задачах для составных изотропных упругих сред. ДАН. СССР **160** (1965), 50–63.

[5] Jentsch, L.: Über Wärmespannungen in Körpern mit stückweise konstanten Laméschen Elastizitätsmoduln. Schriftenreihe ZIMM bei der Deutschen Akademie der Wiss. zu Berlin. Heft **14**, Berlin 1972.

[6] JENTSCH, L.: Über stationäre thermoelastische Schwingungen in inhomogenen Körpern. Math. Nachr. 64 (1974), 171–231.

[7] JENTSCH, L.: Bemerkungen zu einigen neueren gekoppelten Randwertproblemen der Thermoelastostatik. Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. Leipzig, Math.-Naturwiss. R. 25. Jg., H. 1 (1976), 39–52.

[8] JENTSCH, L., und J. MAUL: Zur Elastizitäts- und Thermoelastizitätstheorie. Mathematical Research Bd. 4, Akademie-Verlag: Berlin 1980. Insbesondere der Beitrag von J. MAUL: Existenzsätze und äquivalente Integralgleichungen für allgemeine gemischte Randwertprobleme und Randkontaktprobleme der ebenen mikropolaren Elastizitätstheorie und Thermoelastizitätstheorie.

[9] KREYSZIG, E.: Differentialgeometrie, 2. Aufl. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1964.

[10] КУПРАДЗЕ, В. Д., ГЕГЕЛИА, Т. Г., БАШЕЛЕЙШВИЛИ, М. О., и Т. В. БУРЧУЛАДЗЕ: Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Москва 1976.

[11] MAUL, J.: Eine einheitliche Methode zur Lösung der ebenen Aufgaben der linearen Elastostatik. Schriftenr. ZIMM Akad. d. Wiss. d. DDR. Heft 24, Berlin 1976.

[12] MAUL, J.: Über eine Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie in einem inhomogenen Medium. Тр. Тбил. мат. ин-та т. 52 (1976), 111–126.

[13] МАУЛЬ, Й. (MAUL, J.): О решении плоских задач связной теории термоупругости для изотропной неоднородной среды. Тр. Тбил. мат. ин-та т. 58 (1978), 150–167.

[14] MAUL, J.: Über die Lösung von Randwertaufgaben der ebenen Elastostatik in stückweise homogenen Körpern mit Gleitungsbedingungen an den Übergangskurven zwischen zwei homogenen Teilen. Beiträge zur Analysis 6 (1974), 103–107.

[15] Михлин, С. Г.: Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Москва 1962.

[16] MICHLIN, S. G., und S. PRÖSSDORF: Singuläre Integraloperatoren. Akademie-Verlag: Berlin 1980.

[17] VEKUA, I. N.: Verallgemeinerte analytische Funktionen. Akademie-Verlag: Berlin 1963.

[18] WEYL, H.: Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten Körpers. Rend. Circ. Mat. Palermo 39 (1915), 1–49.

Manuskripteingang: 17. 09. 1981

VERFASSER:

Doz. Dr. sc. JOHANNES MAUL
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz