

Optimalitätsbedingungen für Prozesse in Evolutionsgleichungen n -ter Ordnung

W. KAMPOWSKY

Die Arbeit beschäftigt sich mit Problemen optimaler Steuerung, die durch nichtlineare, abstrakte, gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung mit Anfangsbedingungen beschrieben werden. Charakteristisch für die betrachteten Evolutionsgleichungen höherer Ordnung sind die Zurückführung auf Evolutionsgleichungen 1. Ordnung und die Lösung im Rahmen der Theorie monotoner Operatoren. Für die Steueraufgaben werden notwendige Optimalitätsbedingungen hergeleitet, die in einem Spezialfall auch hinreichend sind.

Настоящая работа посвящена проблемам оптимального управления, которые описываются нелинейными абстрактными обыкновенными дифференциальными уравнениями высшего порядка с начальными условиями. Решения этих эволюционных уравнений высшего порядка получаются путём сведения их в эволюционные уравнения первого порядка и в рамках теории монотонных операторов. Для изучаемых проблем управления установлены необходимые условия оптимальности, которые в одном частном случае являются также достаточными.

This paper deals with optimal control problems governed by nonlinear abstract ordinary differential equations of higher order with initial conditions. The considered evolution equations of higher order can be transformed into evolution equations of first order and can be solved then using the theory of monotone operators. For the control problems necessary optimality conditions are derived which are also sufficient in a special case.

In der Arbeit werden optimale Prozesse untersucht, die durch abstrakte gewöhnliche Differentialgleichungen n -ter Ordnung, sogenannte *Evolutionsgleichungen* n -ter Ordnung beschrieben werden. Die Arbeit schließt direkt an eine frühere Arbeit des Autors [8] an, in der Prozesse in Evolutionsgleichungen 1. Ordnung betrachtet und im wesentlichen notwendige Optimalitätsbedingungen hergeleitet wurden. Charakteristisch für die hier betrachteten Evolutionsgleichungen n -ter Ordnung ist die Zurückführung auf Evolutionsgleichungen 1. Ordnung. Diese Tatsache und die Anwendung von Resultaten aus [8] liefern die gewünschten Optimalitätsbedingungen.

1. Aufgabenstellung, Bezeichnungen, Definitionen

Wir betrachten die folgende Aufgabe optimaler Steuerung:

$$\begin{aligned} F(x, u) &= \min! \text{ bei } x^{(n)} + A(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, \dots, x, u) = 0, \\ x^{(i)}(0) &= v_i(u) \quad (i = 0, 1, \dots, n-2), \quad x^{(n-1)}(0) = h(u) \quad (x \in W_n, u \in U_0). \end{aligned} \quad (1)$$

Wir setzen folgendes voraus:

V sei ein reflexiver (und separabler) Banach-Raum, der stetig und dicht in einen Hilbert-Raum H eingebettet ist. H wird mit H^* identifiziert, so daß die stetige und dichte Einbettung $V \subset H \subset V^*$ gilt. $(\cdot; \cdot)_H$ bezeichne das Skalarprodukt von

$H, (\cdot; \cdot)$ die Anwendung von Elementen aus V^* auf Elemente aus V . S sei das Zeitintervall $[0, T]$. Es sei $X = L_2(S; V)$, mithin ist $X^* = L_2(S; V^*)$. Die Anwendung von Elementen aus X^* auf Elemente aus X werde mit $\langle \cdot; \cdot \rangle$ bezeichnet. W sei der Raum aller $x \in X$ mit einer Ableitung $x' \in X^*$. Wir verstehen die Ableitung im Sinne der Distributionen über S mit Werten in V^* , wobei $x \in X$ über $V \subset H \subset V^*$ V^* -wertig ist. W_n sei der Raum jener $x \in C^{(n-2)}(S; V)$, für die $x^{(n-2)}$ f. ü. (im gewöhnlichen Sinne) differenzierbar ist und die Ableitung $x^{(n-1)}$ zu W gehört. W und W_n sind Banach-Räume mit den Normen

$$\|x\|_W := \|x\|_X + \|x'\|_{X^*} \quad \text{bzw.} \quad \|x\|_{W_n} := \|x\|_{C^{(n-2)}(S; V)} + \|x^{(n-1)}\|_W,$$

wobei wir als Norm für $C^{(n-2)}(S; V)$ gerade $\sum_{i=0}^{n-2} \max_{t \in S} \|x^{(i)}(t)\|_V$ verwenden. Zur Abkürzung bezeichnen wir mit \mathcal{X} den Raum $[C(S; V)]^{n-1}$, normiert durch

$$\|x\|_{\mathcal{X}} := \sum_{i=1}^{n-1} \max_{t \in S} \|x_i(t)\|_V, \quad x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathcal{X}.$$

Für $[C(S; V)]^{n-1}$ benutzen wir noch eine zweite Norm: $\sum_{i=1}^{n-1} \|x\|_X$; wir bezeichnen diesen Raum mit \mathcal{X}_X und dessen Norm mit $\|\cdot\|_{\mathcal{X}_X}$. U_0 bezeichne die Menge der zulässigen Steuerung u des metrischen Raumes aller Steuerungen U . Schließlich mögen die Abbildungen F, A, v_i und h wie folgt gegeben sein:

$$F: W_n \times U \rightarrow \mathbf{R}, \quad A: X \times \mathcal{X} \times U \rightarrow X^*, \quad v_i: U \rightarrow V \quad \text{und} \quad h: U \rightarrow H.$$

Der Fall $n = 1$ läßt sich formal deuten als die in [8] betrachtete Steuerungsaufgabe mit einer Evolutionsgleichung 1. Ordnung, wie wir sie in Abschnitt 3 unter (6) angeben.

Wir definieren im folgenden eine Reihe von Operatoren, die in den kommenden Abschnitten benötigt werden: $D_i: X \times V^i \rightarrow C(S; V)$ wird induktiv definiert durch

$$D_1(x, v)(t) := v + \int_0^t x(s) ds \quad (t \in S, x \in X, v \in V)$$

und

$$D_i(x, v_1, \dots, v_i) := D_1(D_{i-1}(x, v_1, \dots, v_{i-1}), v_i) \quad (x \in X, v_1, \dots, v_i \in V).$$

Es gilt gerade für $t \in S$:

$$D_i(x, v_1, \dots, v_i)(t) = \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} v_1 + \frac{t^{i-2}}{(i-2)!} v_2 + \dots + v_i + \int_0^t \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} x(s) ds.$$

$D: X \times V^{n-1} \rightarrow \mathcal{X}$ wird definiert durch

$$D(x, v_1, \dots, v_{n-1}) := (D_1(x, v_1), D_2(x, v_1, v_2), \dots, D_{n-1}(x, v_1, \dots, v_{n-1})) \\ (x \in X, v_1, \dots, v_{n-1} \in V).$$

Speziell setzen wir:

$$\begin{aligned} {}^0D_i: V^i &\rightarrow C(S; V) && \text{für } {}^0D_i(v_1, \dots, v_i) := D_i(0, v_1, \dots, v_i), \\ D_i^0: X &\rightarrow C(S; V) && \text{für } D_i^0x := D_i(x, 0, \dots, 0), \\ {}^0D: V^{n-1} &\rightarrow \mathcal{X} && \text{für } {}^0D(v_1, \dots, v_{n-1}) := D(0, v_1, \dots, v_{n-1}), \\ D^0: X &\rightarrow \mathcal{X} && \text{für } D^0x := D(x, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Offenbar sind die 0D_i und D_i^0 linear und stetig, mithin existieren die adjungierten Operatoren:

$$\begin{aligned} ({}^0D_i)^*: C^*(S; V) &\rightarrow (V^*)^i, & (D_i^0)^*: C^*(S; V) &\rightarrow X^*, & ({}^0D)^*: \mathcal{X}^* &\rightarrow (V^*)^{n-1} \\ \text{und } (D^0)^*: \mathcal{X}^* &\rightarrow X^*. \end{aligned}$$

Es gelten gerade die folgenden Beziehungen:

$$((D_i^0)^*z)(t) = \int_0^T \frac{(s-t)^{i-1}}{(i-1)!} z(s) ds \quad (t \in S, z \in X^* \subset C^*(S; V)),$$

$$\begin{aligned} ({}^0D_i)^*z &= \left(\int_0^T \frac{s^{i-1}}{(i-1)!} z(s) ds, \int_0^T \frac{s^{i-2}}{(i-2)!} z(s) ds, \dots, \int_0^T z(s) ds \right) \\ &(z \in X^* \subset C^*(S; V)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D^0)^*(z_1, \dots, z_{n-1}) &= (D_1^0)^*z_1 + (D_2^0)^*z_2 + \dots + (D_{n-1}^0)^*z_{n-1} \\ &((z_1, \dots, z_{n-1}) \in (X^*)^{n-1} \subset \mathcal{X}^*), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ({}^0D)^*(z_1, \dots, z_{n-1}) &= \left(\int_0^T \sum_{i=1}^{n-1} \frac{s^{i-1}}{(i-1)!} z_i(s) ds, \int_0^T \sum_{i=2}^{n-1} \frac{s^{i-2}}{(i-2)!} z_i(s) ds, \dots, \int_0^T z_{n-1}(s) ds \right), \\ &((z_1, \dots, z_{n-1}) \in (X^*)^{n-1} \subset \mathcal{X}^*). \end{aligned}$$

2. Zur Lösung von Evolutionsgleichungen n -ter Ordnung

Ergebnisse über Klassen nichtlinearer Evolutionsgleichungen 2. Ordnung findet man zuerst bei LIONS und STRAUSS [12] (siehe auch in der Monographie [9]) und bei BROWDER [3], für umfassendere Klassen bei GAJEWSKI [5] sowie GAJEWSKI und GRÖGER [6]. Dabei werden bestimmte Regularisierungsverfahren verwendet, die die Ausgangsaufgabe durch eine Folge einfacherer Aufgaben approximieren. GRÖGER führt in [7, 4] spezielle Gleichungen 2. Ordnung auf Evolutionsgleichungen 1. Ordnung zurück und gewinnt so Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für Lösungen dieser Gleichungen. Wir verallgemeinern dieses Vorgehen für Evolutionsgleichungen n -ter Ordnung in naheliegender Weise.

Wir betrachten folgende Evolutionsgleichungen, sehen von der Steuerung u in diesem Abschnitt ab:

$$\begin{aligned} x^{(n)} + A(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, \dots, x) &= 0; \quad x^{(i)}(0) = b_i \quad (i = 0, 1, \dots, n - 2), \\ x^{(n-1)}(0) &= a \end{aligned} \tag{2}$$

($A: X \times \mathcal{X} \rightarrow X^*$, $b_i \in V$, $a \in H$ gegeben, $x \in W_n$ gesucht).

$$z' + \mathcal{A}(z) = 0, \quad z(0) = a \tag{3}$$

($\mathcal{A}: X \rightarrow X^*$, $a \in H$ gegeben, $z \in W$ gesucht).

Den Zusammenhang zwischen den Aufgaben (2) und (3) liefert die folgende Festsetzung:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(z) &= A(z, D_1(z, b_{n-2}), D_2(z, b_{n-2}, b_{n-3}), \dots, D_{n-1}(z, b_{n-2}, \dots, b_0)) \\ &= A(z, D(z, b_{n-2}, \dots, b_0)), \quad z \in X. \end{aligned} \tag{4}$$

Ist nun $x \in W_n$ Lösung von (2), so ist $z = x^{(n-1)} \in W$ Lösung von (3), und löst umgekehrt $z \in W$ Aufgabe (3), so löst $x = D_{n-1}(z, b_{n-2}, \dots, b_0) \in W_n$ Gleichung (2).

Für die Evolutionsgleichung (3) geben wir den folgenden Existenzsatz an, siehe z. B. in [4] oder [9] oder vgl. in [8] Satz 5.

Satz 1: Sei $\mathcal{A}: X \rightarrow X^*$ radialstetig und erfülle die folgende Bedingung:

$$\begin{aligned} &\int_0^T e^{-2\lambda s} (\mathcal{A}(x)(s) - \mathcal{A}(y)(s) + \lambda I(x(s) - y(s)); x(s) - y(s)) ds \\ &\geq m \cdot \|x - y\|_X^2 \quad \forall x, y \in X \end{aligned} \tag{5}$$

mit Konstanten $\lambda \geq 0$, $m > 0$.¹⁾ Dann hat die Evolutionsgleichung (3) für jeden Anfangswert $a \in H$ genau eine Lösung $z \in W$.

Mit Hilfe dieses Satzes erhalten wir für die Evolutionsgleichung (2) den folgenden Existenzsatz, verallgemeinern damit Resultate von GRÖGER ([7: Satz 2] bzw. [4: Satz 1.2, S. 239]).

Satz 2: Sei $A: X \times \mathcal{X} \rightarrow X^*$ ein Volterra-Operator mit den folgenden Eigenschaften:

- a) $A(\cdot, x): X \rightarrow X^*$ sei radialstetig und erfülle Bedingung (5) mit Konstanten $\lambda \geq 0$, $m > 0$ unabhängig von $x \in \mathcal{X}$.
- b) $A(x, \cdot): \mathcal{X} \rightarrow X^*$ sei Lipschitz-stetig mit einer Konstanten $M > 0$ unabhängig von $x \in X$.

Dann hat die Evolutionsgleichung (2) für jeden Satz von Anfangswerten $b_0, \dots, b_{n-2} \in V$, $a \in H$ genau eine Lösung $x \in W_n$.

Beweis: Wir zeigen, daß der in (4) definierte, den Zusammenhang zwischen (2) und (3) liefernde Operator $\mathcal{A}: X \rightarrow X^*$ den Voraussetzungen des Satzes 1 genügt.

Die Radialstetigkeit von \mathcal{A} ergibt sich aus der Radialstetigkeit von A im ersten Argument und der Lipschitz-Stetigkeit im zweiten Argument sowie der Stetigkeit.

¹⁾ I bezeichne die stetige Einbettung von X in X^* , definiert durch die Inklusion $V \subset H \subset V^*$. Für $\lambda = 0$ ergibt sich die übliche Bedingung der starken Monotonie. Ist \mathcal{A} ein Volterra-Operator (d. h. für $t \in S$ gilt: aus $x(s) = y(s)$ für f. a. $s \in [0, t]$ folgt $\mathcal{A}(x)(s) = \mathcal{A}(y)(s)$ für f. a. $s \in [0, t]$) und ist $\mathcal{A} + \lambda I: X \rightarrow X^*$ stark monoton, so ist die Bedingung (5) erfüllt.

von D . Da A ein Volterra-Operator ist, erhalten wir aus a)

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-2\lambda s} (A(x, x)(s) - A(y, x)(s) + \lambda I(x(s) - y(s)); x(s) - y(s)) ds \\ & \geq m \int_0^t \|x(s) - y(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds \geq m \int_0^t e^{-2\lambda s} \|x(s) - y(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds \\ & \forall t \in S, \quad x, y \in X, \quad x \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-2\lambda s} \{(A(x, x)(s) - A(y, x)(s) + \lambda I(x(s) - y(s)); x(s) - y(s)) \\ & - m \cdot \|x(s) - y(s)\|_{\mathcal{V}}^2\} ds \geq 0. \end{aligned}$$

Mit partieller Integration (genauer, mit Lemma 1.6 aus [4], S. 211) ergibt sich

$$\int_0^t e^{-2(\lambda+\mu)s} \{ \dots \} ds \geq 0 \quad \forall \mu \geq 0,$$

und schließlich

$$\begin{aligned} & \int_0^T e^{-2\mu s} (A(x, x)(s) - A(y, x)(s) + \mu I(x(s) - y(s)); x(s) - y(s)) ds \\ & \geq m \cdot \int_0^T e^{-2\mu s} \|x(s) - y(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds \quad \forall \mu \geq \lambda, \quad x, y \in X, \quad x \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (i)$$

Aus der Lipschitz-Stetigkeit von A im zweiten Argument und mit der Schwarz-schen Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|A(x, x_1)(s) - A(x, x_2)(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds \leq M^2 (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^T \|x_{1i}(s) - x_{2i}(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds \\ & \forall x \in X, \quad x_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n-1}), \quad x_2 = (x_{21}, \dots, x_{2n-1}) \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Wir zeigen, daß auch die Abschätzung

$$\int_0^t \|A(x, x_1)(s) - A(x, x_2)(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds \leq M^2 (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^t \|x_{1i}(s) - x_{2i}(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds$$

gilt, und zwar für jedes $t \in S$. Dann ergibt sich auf analoge Weise wie oben die Beziehung

$$\begin{aligned} & \int_0^T e^{-2\mu s} \|A(x, x_1)(s) - A(x, x_2)(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds \\ & \leq M^2 \cdot (n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^T e^{-2\mu s} \|x_{1i}(s) - x_{2i}(s)\|_{\mathcal{V}}^2 ds \\ & \forall \mu \geq 0, \quad x \in X, \quad x_1, x_2 \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (ii)$$

Sei also t fest gewählt, $0 < t < T$, sei weiter $\varepsilon > 0$ so, daß $t + \varepsilon \leq T$ ist. Wir setzen:

$$y_{ji}(s) = \begin{cases} x_{ji}(s), & 0 \leq s \leq t \\ \frac{t + \varepsilon - s}{\varepsilon} x_{ji}(t), & t \leq s \leq t + \varepsilon \\ 0, & t + \varepsilon \leq s \leq T \end{cases}$$

(für $j = 1, 2$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$) und fassen entsprechend zusammen: $y_1 = (y_{11}, \dots, y_{1n-1})$, $y_2 = (y_{21}, \dots, y_{2n-1})$. Offenbar sind y_1 und y_2 aus \mathcal{X} . Da A ein Volterra-Operator ist, gilt:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|A(x, x_1)(s) - A(x, x_2)(s)\|_{V^*}^2 ds \\ & \leq \int_0^T \|A(x, y_1)(s) - A(x, y_2)(s)\|_{V^*}^2 ds \\ & \leq M^2 \cdot (n - 1) \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^T \|y_{1i}(s) - y_{2i}(s)\|_{V^2}^2 ds \\ & \leq M^2 \cdot (n - 1) \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \int_0^t \|x_{1i}(s) - x_{2i}(s)\|_{V^2}^2 ds + \int_t^{t+\varepsilon} \left(\frac{t + \varepsilon - s}{\varepsilon} \right)^2 \right. \\ & \quad \left. \times \|x_{1i}(t) - x_{2i}(t)\|_{V^2}^2 ds \right\}. \end{aligned}$$

Das letzte Integral ergibt sich gerade zu $\varepsilon/3 \|x_{1i}(t) - x_{2i}(t)\|_{V^2}^2$. Mit $\varepsilon \rightarrow 0$ ergibt sich die gewünschte Abschätzung.

Wir können weiter zeigen unter Verwendung der induktiven Darstellung von D_i :

$$\begin{aligned} & \int_0^T e^{-2\mu s} \|D_i(x, v_1, \dots, v_i)(s) - D_i(y, v_1, \dots, v_i)(s)\|_{V^2}^2 ds \\ & \leq \left(\frac{T}{2\mu} \right)^i \int_0^T e^{-2\mu s} \|x(s) - y(s)\|_{V^2}^2 ds \quad \forall \mu > 0, \quad x, y \in X, \quad v_1, \dots, v_i \in V. \end{aligned} \tag{iii}$$

Wir deuten den Induktionsbeweis an: Für $i = 1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \int_0^T e^{-2\mu s} \|D_1(x, v_1)(s) - D_1(y, v_1)(s)\|_{V^2}^2 ds \\ & = \int_0^T e^{-2\mu s} \left\| \int_0^s (x(\tau) - y(\tau)) d\tau \right\|_{V^2}^2 ds \\ & \leq T \int_0^T e^{-2\mu s} \int_0^s \|x(\tau) - y(\tau)\|_{V^2}^2 d\tau ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{T}{2\mu} \int_0^T e^{-2\mu s} \|x(s) - y(s)\|_V^2 ds - \frac{T}{2\mu} e^{-2\mu T} \int_0^T \|x(\tau) - y(\tau)\|_V^2 d\tau \\ &\leq \frac{T}{2\mu} \int_0^T e^{-2\mu s} \|x(s) - y(s)\|_V^2 ds. \end{aligned}$$

Für $i - 1$ sei die Behauptung richtig. Dann ist mit

$$\begin{aligned} &\int_0^T e^{-2\mu s} \|D_i(x, v_1, \dots, v_i)(s) - D_i(y, v_1, \dots, v_i)(s)\|_V^2 ds, \\ &= \int_0^T e^{-2\mu s} \|D_1(D_{i-1}(x, v_1, \dots, v_{i-1}), v_i)(s) - D_1(D_{i-1}(y, v_1, \dots, v_{i-1}), v_i)(s)\|_V^2 ds \\ &\leq \frac{T}{2\mu} \int_0^T e^{-2\mu s} \|D_{i-1}(x, v_1, \dots, v_{i-1})(s) - D_{i-1}(y, v_1, \dots, v_{i-1})(s)\|_V^2 ds \end{aligned}$$

der Induktionsbeweis vollständig.

Insgesamt erhalten wir nun mit (i), (ii) und (iii):

$$\begin{aligned} &\int_0^T e^{-2\mu s} (\mathcal{A}(x)(s) - \mathcal{A}(y)(s) + \mu I(x(s) - y(s)); x(s) - y(s)) ds \\ &= \int_0^T e^{-2\mu s} (A(x, D(x, b_{n-2}, \dots, b_0))(s) - A(y, D(x, b_{n-2}, \dots, b_0))(s) \\ &\quad + \mu I(x(s) - y(s)); x(s) - y(s)) ds \\ &\quad + \int_0^T e^{-2\mu s} (A(y, D(x, b_{n-2}, \dots, b_0))(s) - A(y, D(y, b_{n-2}, \dots, b_0))(s); \\ &\quad x(s) - y(s)) ds \\ &\geq m \int_0^T e^{-2\mu s} \|x(s) - y(s)\|_V^2 ds - \frac{m}{2} \int_0^T e^{-2\mu s} \|x(s) - y(s)\|_V^2 ds - \frac{1}{2m} \\ &\quad \times \int_0^T e^{-2\mu s} \|A(y, D(x, b_{n-2}, \dots, b_0))(s) - A(y, D(y, b_{n-2}, \dots, b_0))(s)\|_V^2 ds \\ &\geq \frac{m}{2} \int_0^T e^{-2\mu s} \|x(s) - y(s)\|_V^2 ds \\ &\quad - \frac{M^2(n-1)}{2m} \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^T e^{-2\mu s} \|D_i(x, b_{n-2}, \dots, b_{n-1-i})(s) \\ &\quad - D_i(y, b_{n-2}, \dots, b_{n-1-i})(s)\|_V^2 ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \left(\frac{m}{2} - \frac{M^2(n-1)}{2m} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{T}{2\mu} \right)^i \right) \int_0^T e^{-2\mu s} \|x(s) - y(s)\|_V^2 ds \\ &\geq \left(\frac{m}{2} - \frac{M^2(n-1)}{2m} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{T}{2\mu} \right)^i \right) e^{-2\mu T} \|x - y\|_{X^2}. \end{aligned}$$

Für hinreichend großes $\mu > \lambda$ ergibt sich damit die Bedingung (5), und der Satz ist vollständig bewiesen ■

3. Notwendige Optimalitätsbedingungen

Wir wenden uns nun unserer Steuerungsaufgabe (1) zu, werden sie in eine äquivalente Aufgabe mit einer Evolutionsgleichung 1. Ordnung als Prozeßgleichung überführen und die Optimalitätsbedingungen für letztere Aufgabe aus [8] übertragen. Das Grundkonzept zur Gewinnung der notwendigen Optimalitätsbedingungen wurde in [8] dargelegt, wobei ein Modell von Bittner [1, 2] modifiziert wurde.

Wir betrachten zunächst die folgende Steuerungsaufgabe mit einer Evolutionsgleichung 1. Ordnung:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z, u) &= \min! \quad \text{bei } z' + \mathcal{A}(z, u) = 0, \quad z(0) = h(u), \quad u \in U_0 \\ (\mathcal{F}: W \times U &\rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{A}: X \times U \rightarrow X^*, h: U \rightarrow H). \end{aligned} \quad (6)$$

Für die Aufgabe sei $(z_0, u_0) \in W \times U_0$ optimal im folgenden. Wir definieren Richtungsgrenzwerte wie folgt:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{F} &:= \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k^{-1} (\mathcal{F}(z_0, u_k) - \mathcal{F}(z_0, u_0)), \\ \Delta \mathcal{A} &:= \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k^{-1} (\mathcal{A}(z_0, u_k) - \mathcal{A}(z_0, u_0)), \\ \Delta h &:= \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k^{-1} (h(u_k) - h(u_0)), \end{aligned} \quad (7)$$

wobei $\{u_k\} \subset U_0$ mit $u_k \rightarrow u_0$ in U und $\{\gamma_k\}$ eine Nullfolge positiver Zahlen ist. Die Grenzwerte $\Delta \mathcal{A}$ und Δh sind nur in der schwachen Topologie von X^* bzw. H gefordert. \mathcal{U} bezeichne die Menge jener Folgen $\{u_k\} \subset U_0$ mit $u_k \rightarrow u_0$ in U , die die Existenz sämtlicher Richtungsgrenzwerte $\Delta \mathcal{F}$, $\Delta \mathcal{A}$ und Δh sichern.

Zur Gewinnung einer notwendigen Optimalitätsbedingung für die Aufgabe (6) machen wir folgende Voraussetzungen:

Voraussetzung a): $\mathcal{A}(\cdot, u): X \rightarrow X^*$ sei radialstetig und erfülle die Bedingung (5) mit Konstanten $\lambda \geq 0, m > 0$ unabhängig von u (aus einer Umgebung von u_0).

Voraussetzung b): $\mathcal{A}: X \times U \rightarrow X^*$ sei schwach Gâteaux-differenzierbar nach $z \in X$ (in einer Umgebung von (z_0, u_0)). Es gelte folgende punktweise Stetigkeit: Aus $z_k \rightarrow z_0$ in X und $\{u_k\} \in \mathcal{U}$ folge stets: $\mathcal{A}_{z_k}^*(z_k, u_k) w \rightarrow \mathcal{A}_{z_0}^*(z_0, u_0) w$ in X^* für jedes $w \in X$.

Voraussetzung c): $\mathcal{F}: W \times U \rightarrow \mathbb{R}$ sei Fréchet-differenzierbar nach $z \in W$ (in einer Umgebung von (z_0, u_0)). Es gelte folgende Stetigkeit: Aus $z_k \rightarrow z_0$ in W und $\{u_k\} \in \mathcal{U}$ folge stets $\mathcal{F}_{z_k}(z_k, u_k) \rightarrow \mathcal{F}_{z_0}(z_0, u_0)$ in W^* .

Voraussetzung d): Es gelte folgende Darstellung:

$$\mathcal{F}_z(z_0, u_0) z = \langle f^*; z \rangle + \langle z'; f \rangle, \quad \forall z \in W$$

mit Elementen $f^* \in X^*$, $f \in X$.²⁾

Unter diesen Voraussetzungen gilt der folgende Satz, siehe [8; Satz 10].

Satz 3: Aus der Optimalität von $(z_0, u_0) \in W \times U_0$ für die Aufgabe (6) folgt: Für alle Tripel $(\Delta \mathcal{F}, \Delta \mathcal{A}, \Delta h)$ gemeinsamer Richtungsgrenzwerte gilt

$$\Delta \mathcal{F} - \langle \Delta \mathcal{A}; y + f \rangle + (\Delta h; y(0))_H \geq 0, \quad (8)$$

wobei $y \in W$ die eindeutig bestimmte Lösung der adjungierten Evolutionsgleichung

$$-y' + \mathcal{A}_z^*(z_0, u_0) y = f^* - \mathcal{A}_z^*(z_0, u_0) f, \quad y(T) = 0 \quad (9)$$

ist.

\mathcal{F} , \mathcal{A} und h setzen wir nun wie folgt an:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(z, u) &:= F(D_{n-1}(z, v_{n-2}(z), \dots, v_0(u)), u), \quad z \in W, \quad u \in U, \\ \mathcal{A}(z, u) &:= A(z, D(z, v_{n-2}(u), \dots, v_0(u)), u), \quad z \in X, \quad u \in U, \\ h(u) &:= h(u), \quad u \in U. \end{aligned} \quad (10)$$

Mit diesen Festsetzungen ist Aufgabe (6) äquivalent unserer Aufgabe (1), das heißt, ist $(x_0, u_0) \in W_n \times U_0$ optimal für (1), so ist $(x_0^{(n-1)}, u_0) \in W \times U_0$ optimal für (6), und umgekehrt folgt aus der Optimalität von $(z_0, u_0) \in W \times U_0$ für (6) die Optimalität von $(D_{n-1}(z_0, v_{n-2}(u_0), \dots, v_0(u_0)), u_0) \in W_n \times U_0$ für Aufgabe (1).

Im folgenden sei $(x_0, u_0) \in W_n \times U_0$ optimal für die Aufgabe (1). Zur Abkürzung bezeichne x_0 den Vektor $(x_0^{(n-2)}, \dots, x_0)$. Zuerst führen wir die folgenden Richtungsgrenzwerte ein:

$$\begin{aligned} \Delta F &:= \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k^{-1} (F(x_0, u_k) - F(x_0, u_0)), \\ \Delta A &:= \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k^{-1} (A(x_0^{(n-1)}, x_0, u_k) - A(x_0^{(n-1)}, x_0, u_0)), \\ \Delta v_i &:= \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k^{-1} (v_i(u_k) - v_i(u_0)) \quad (i = 0, 1, \dots, n-2), \\ \Delta h &:= \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k^{-1} (h(u_k) - h(u_0)), \end{aligned} \quad (11)$$

wobei die Folgen $\{u_k\}$, $\{\gamma_k\}$ wie vorher seien. Die Grenzwerte ΔA , Δv_i und Δh werden nur in der schwachen Topologie von X^* , V bzw. H gefordert. \mathcal{U} bezeichne hier die Menge jener Folgen $\{u_k\}$, die die Existenz sämtlicher Richtungsgrenzwerte sichern.

Wir formulieren jetzt eine Reihe von Voraussetzungen an den Volterra-Operator A und an das Funktional F :

Voraussetzung α): $A(\cdot, x, u): X \rightarrow X^*$ sei radialstetig und erfülle die Bedingung (5) mit Konstanten $\lambda \geq 0$, $m > 0$ unabhängig von $x \in X$ und u (aus einer Umgebung von u_0).

Voraussetzung β): $A: X \times X \times U \rightarrow X^*$ sei schwach-Gâteaux-differenzierbar nach $(x, x) \in X \times X$. Außerdem gelte:

$\beta, 1$): $\|A_x(x, x, u)\|_{\mathcal{L}(X; X^*)} \leq K \quad \forall x \in X, x \in X, u$ (aus einer Umgebung von u_0), wobei K eine positive Konstante ist.

²⁾ Jedes lineare, stetige Funktional über W läßt sich in dieser Weise darstellen.

β ; 2): Es gelte folgende punktweise Stetigkeit:

Aus $x_k \rightarrow x_0^{(n-1)}$ in X , $x_k \rightarrow x_0$ in \mathcal{X} , $\{u_k\} \in \mathcal{U}'$ folge stets:

$$A_x^*(x_k, x_k, u_k) w \rightarrow A_x^*(x_0^{(n-1)}, x_0, u_0) w \text{ in } X^*$$

und

$$A_x^*(x_k, x_k, u_k) w \rightarrow A_x^*(x_0^{(n-1)}, x_0, u_0) w \text{ in } \mathcal{X}_X^*$$

für jedes $w \in X$.

Voraussetzung γ): $F: W_n \times U \rightarrow \mathbb{R}$ sei Fréchet-differenzierbar nach $x \in W_n$ (in einer Umgebung von (x_0, u_0)). Es gelte folgende Stetigkeit: Aus $x_k \rightarrow x_0$ in W_n und $\{u_k\} \in \mathcal{U}'$ folge stets: $F_x(x_k, u_k) \rightarrow F_x(x_0, u_0)$ in W_n^* .

Diese Voraussetzungen erlauben es uns, auf die Aufgabe (6) mit den Festsetzungen (10), also auf unsere zu (1) äquivalente Steuerungsaufgabe mit einer Evolutionsgleichung 1. Ordnung, den Satz 3 anzuwenden.

Wir überprüfen zunächst die Voraussetzungen a), b) und c):

$\mathcal{A}(\cdot, u): X \rightarrow X^*$ ist radialstetig und erfüllt die Bedingung (5) mit Konstanten $\lambda' > 0$, $m' > 0$ unabhängig von u (aus einer Umgebung von u_0), und zwar wegen α) und der Lipschitz-Stetigkeit von A im zweiten Argument gleichmäßig, bez. der anderen beiden Argumente als Folgerung aus β , 1) — der Beweis erfolgt wie in Satz 2.

Offenbar ist $\mathcal{A}: X \times U \rightarrow X^*$ schwach Gâteaux-differenzierbar nach $z \in X$, dies folgt aus β). Es gilt gerade:

$$\mathcal{A}_z(z, u) w = A_x(z, D(z, v_{n-2}(u), \dots, v_0(u)), u) w + A_x(z, D(z, v_{n-2}(u), \dots, v_0(u)), u) D^0 w, \quad (z, w \in X, u \in U) \quad (12)$$

sowie für den adjungierten Operator

$$\mathcal{A}_z^*(z, u) w = A_x^*(z, D(z, v_{n-2}(u), \dots, v_0(u)), u) w + (D^0)^* A_x^*(z, D(z, v_{n-2}(u), \dots, v_0(u)), u) w, \quad (z, w \in X, u \in U). \quad (12')$$

Gelte nun $z_k \rightarrow z_0$ in X und $\{u_k\} \in \mathcal{U} = \mathcal{U}'$. Dann haben wir zu bestätigen: $\mathcal{A}_z^*(z_k, u_k) w \rightarrow \mathcal{A}_z^*(z_0, u_0) w$ in X^* . Dies folgt aber aus β , 2), aus $v_i(u_k) \rightarrow v_i(u_0)$, denn $\{u_k\} \in \mathcal{U}'$, und aus der Stetigkeit von D .

$\mathcal{F}: W \times U \rightarrow \mathbb{R}$ ist offenbar Fréchet-differenzierbar nach $z \in W$ (in einer Umgebung von (z_0, u_0)) wegen γ). Dabei gilt:

$$\mathcal{F}_z(z, u) w = F_x(D_{n-1}(z, v_{n-2}(u), \dots, v_0(u)), u) D_{n-1}^0 w, \quad (z, w \in W, u \in U). \quad (13)$$

Die geforderte Stetigkeit in (z_0, u_0) ergibt sich ähnlich wie bei \mathcal{A}_z^* .

Zur Formulierung der notwendigen Optimalitätsbedingung benötigen wir noch eine Darstellung von $\mathcal{F}_z(z_0, u_0) \in W^*$ gemäß d). Es ist $F_x(x_0, u_0) \in W_n^*$. W_n ist offenbar isomorph einem abgeschlossenen Teilraum von $[C(S; V)]^{n-1} \times X \times X^*$. Der Isomorphismus ist durch $\varphi(x) := (x, x', \dots, x^{(n-2)}, x^{(n-1)}, x^{(n)})$ ($x \in W_n$) gegeben. Der Raum $L = \{(x, x', \dots, x^{(n)}): x \in W_n\}$ ist abgeschlossen in $[C(S; V)]^{n-1} \times X \times X^*$, da W_n ein Banach-Raum ist. Jedes Element aus $[C^*(S; V)]^{n-1} \times X^* \times X$ definiert ein lineares, stetiges Funktional über W_n . Umgekehrt definiert jedes Element aus W_n^* über den Isomorphismus ein lineares, stetiges Funktional über L , das nach dem

Hahn-Banach-Theorem auf ganz $[C(S; V)]^{n-1} \times X \times X^*$ fortgesetzt werden kann. Folglich läßt sich $F_x(x_0, u_0)$ (nicht in eindeutiger Weise) darstellen in der Form:

$$F_x(x_0, u_0) x = \sum_{i=0}^{n-2} f_i^* x^{(i)} + \langle f^*; x^{(n-1)} \rangle + \langle x^{(n)}; f \rangle \quad \forall x \in W_n, \quad (14)$$

wobei $f_0^*, \dots, f_{n-2}^* \in C^*(S; V)$, $f^* \in X^*$, $f \in X$ ist. Mithin erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_z(z_0, u_0) z &= \sum_{i=0}^{n-2} f_i^* D_{n-1-i}^0 z + \langle f^*; z \rangle + \langle z'; f \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=0}^{n-2} (D_{n-1-i}^0)^* f_i^* + f^*; z \right\rangle + \langle z'; f \rangle, \end{aligned}$$

das heißt, wir haben folgende Darstellung:

$$\mathcal{F}_z(z_0, u_0) z = \langle f^*; z \rangle + \langle z'; f \rangle \quad \forall z \in W, \quad (15)$$

wobei $f^* = (D^0)^*(f_{n-2}^*, \dots, f_0^*) + f^*$, $f = f$ ist.

Bemerkung 1: Für zwei spezielle Funktionale wollen wir f^* und f bestimmen.

1. $F(x, u) := F^0(x, x', \dots, x^{(n-2)}, x^{(n-1)}, x^{(n)}, u)$ ($x \in W_n, u \in U$), wobei $F^0: X^n \times X^* \times U \rightarrow R$ ist. F^0 sei stetig Fréchet-differenzierbar nach den ersten $n + 1$ Komponenten x_0, x_1, \dots, x_n . Dann gilt:

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \sum_{i=0}^{n-2} \int_t^T \frac{(s-t)^{n-2-i}}{(n-2-i)!} F_{x_i}^0(x_0, x_0^{(n-1)}, x_0^{(n)}, u_0)(s) ds \\ &\quad + F_{x_{n-1}}^0(x_0, x_0^{(n-1)}, x_0^{(n)}, u_0)(t) \quad (t \in S), \\ f(t) &= F_{x_n}^0(x_0, x_0^{(n-1)}, x_0^{(n)}, u_0)(t) \quad (t \in S). \end{aligned}$$

2. $F(x, u) := k(x(t_0), x'(t_1), \dots, x^{(n-2)}(t_{n-2}), u)$ ($x \in W_n, u \in U$), wobei $k: V^{n-1} \times U \rightarrow R$, $t_0, t_1, \dots, t_{n-2} \in S$ fest gegeben sind. k sei stetig Fréchet-differenzierbar nach den ersten $n - 1$ Komponenten, v_0, v_1, \dots, v_{n-2} . Dann gilt:

$$f^*(t) = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(t_i - t)^{n-2-i}}{(n-2-i)!} \delta_i(t) k_{v_i}(x_0(t_0), \dots, x_0^{(n-2)}(t_{n-2}), u_0) \quad (t \in S),$$

wobei $\delta_i(t) := \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq t_i \\ 0, & t_i < t \leq T \end{cases}$ ist, $f(t) = 0$ ($t \in S$).

Schließlich berechnen wir noch die Richtungsgrenzwerte $\Delta \mathcal{F}$, $\Delta \mathcal{A}$ und Δk aus (7). Für $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$ gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{F} &= \Delta F + {}^0F_x(x_0, u_0) {}^0D_{n-1}(\Delta v_{n-2}, \dots, \Delta v_0), \\ \Delta \mathcal{A} &= \Delta A + A_x(x_0^{(n-1)}, x_0, u_0) {}^0D(\Delta v_{n-2}, \dots, \Delta v_0), \\ \Delta k &= \Delta k. \end{aligned} \quad (16)$$

Mit (14) ist

$$\begin{aligned} F_x(x_0, u_0) {}^0D_{n-1}(\Delta v_{n-2}, \dots, \Delta v_0) &= \sum_{i=0}^{n-2} f_i^* {}^0D_{n-1-i}(\Delta v_{n-2}, \dots, \Delta v_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} ({}^0D_{n-1-i})^* f_i^*(\Delta v_{n-2}, \dots, \Delta v_i), \end{aligned}$$

also gilt

$$\Delta \mathcal{F} = \Delta F + ({}^0D)^*(f_{n-2}^*, \dots, f_0^*)(\Delta v_{n-2}, \dots, \Delta v_0). \quad (16')$$

Bemerkung 2: Für unsere Funktionale aus Bemerkung 1 rechnen wir $({}^0D)^*(f_{n-2}^*, \dots, f_0^*)(\Delta v_{n-2}, \dots, \Delta v_0)$ aus.

1. Es ergibt sich unter Benutzung der Darstellung von $({}^0D)^*$ aus Abschnitt 1:

$$\sum_{i=0}^{n-2} \left(\int_0^T \sum_{i=0}^j \frac{s^{j-i}}{(j-i)!} F_{x_i}^0(x_0, x_0^{(n-1)}, x_0^{(n)}, u_0)(s) ds; \Delta v_j \right).$$

2. Hier ergibt sich unmittelbar:

$$\sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j \frac{t_i^{j-i}}{(j-i)!} k_{v_i}(x_0(t_0), \dots, x_0^{(n-2)}(t_{n-2}), u_0); \Delta v_j \right).$$

Wir können nun Satz 3 auf die Aufgabe (6) mit den Festsetzungen (10) anwenden und erhalten für Aufgabe (1) die folgende notwendige Optimalitätsbedingung.

Satz 4: Es sei $(x_0, u_0) \in W_n \times U_0$ optimal für die Aufgabe (1). Es mögen die Voraussetzungen α), β) und γ) erfüllt sein. Für $F_x(x_0, u_0) \in W_n^*$ möge eine Darstellung der Form (14) mittels $(f_{n-2}^*, \dots, f_0^*, f^*, f) \in [C^*(S; V)]^{n-1} \times X^* \times X$ bekannt sein. Dann gilt für alle $(n+2)$ -Tupel $(\Delta F, \Delta A, \Delta v_{n-2}, \dots, \Delta v_0, \Delta h)$ gemeinsamer Richtungsgrenzwerte:

$$\begin{aligned} & \Delta F + ({}^0D)^*(f_{n-2}^*, \dots, f_0^*)(\Delta v_{n-2}, \dots, \Delta v_0) - \langle \Delta A; y + f \rangle \\ & - ({}^0D)^* A_x^*(x_0^{(n-1)}, x_0, u_0)(y + f)(\Delta v_{n-2}, \dots, \Delta v_0) + (y(0); \Delta h)_H \geq 0, \end{aligned} \quad (17)$$

wobei $y \in W$ die eindeutig bestimmte Lösung der adjungierten Evolutionsgleichung (1. Ordnung)

$$\begin{aligned} -y' + [A_x^*(x_0^{(n-1)}, x_0, u_0) + (D^0)^* A_x^*(x_0^{(n-1)}, x_0, u_0)] y &= g, \\ y(T) &= 0, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} g &= (D^0)^*(f_{n-2}^*, \dots, f_0^*) + f^* - [A_x^*(x_0^{(n-1)}, x_0, u_0) \\ & + (D^0)^* A_x^*(x_0^{(n-1)}, x_0, u_0)] f \end{aligned} \quad (18)$$

ist.

Beweis: Die Behauptung ergibt sich aus Satz 3 und (12'), (15), (16) und (16') ■

Folgerung 1: Das Zielfunktional möge explizit vom Endzustand der $(n-1)$ -ten Ableitung $x^{(n-1)}(T)$ abhängen, das heißt, wir betrachten für die Aufgabe (1) ein Zielfunktional

$$\hat{F}(x, u) = g(x^{(n-1)}(T), u) + F(x, u) \quad (x \in W_n, u \in U),$$

wobei $g: H \times U \rightarrow \mathbb{R}$ und $F: W_n \times U \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben sind. Unter der Voraussetzung, daß g (in einer Umgebung von $(x_0^{(n-1)}(T), u_0)$) Fréchet-differenzierbar nach $h \in H$ ist und die Fréchet-Ableitung g_h (identifiziert mit ihrem erzeugenden Element aus H) stetig im Punkt $(x_0^{(n-1)}(T), u_0)$ ist, gilt die Aussage des Satzes 4, nur in der Variationsungleichung (17) kommt additiv der entsprechende Richtungsgrenzwert Δg hinzu, und die Endbedingung der adjungierten Evolutionsgleichung (18) lautet $y(T) = g_h(x_0^{(n-1)}, u_0)$ (vgl. [8: Satz 11]).

Folgerung 2: Für den folgenden Spezialfall läßt sich die adjungierte Evolutionsgleichung als Evolutionsgleichung n -ter Ordnung schreiben. Es sei

$$A(x^{(n-1)}, x^{(n-2)}, \dots, x, u) = B(x^{(n-1)}, u) + \sum_{i=0}^{n-2} B_i(u) x^{(i)} + C(u),$$

wobei $B: X \times U \rightarrow X^*$, $B_i: U \rightarrow \mathcal{L}(X; X^*)$ durch $(B_i(u) x)(t) := b_i(u) x(t)$ ($t \in S$, $x \in X$, $u \in U$) mit $b_i: U \rightarrow \mathcal{L}(V; V^*)$ und $C: U \rightarrow X^*$ gegeben sind. In diesem Fall lautet die notwendige Optimalitätsbedingung:

$$\begin{aligned} & \Delta F + ({}^0D)^* (f_{n-2}^*, \dots, f_0^*) (\Delta v_{n-2}, \dots, \Delta v_0) \\ & - \left\langle \Delta B + \sum_{i=0}^{n-2} \Delta B_i x_0^{(i)} + \Delta C; z^{(n-1)} + f \right\rangle \\ & - \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j (-1)^{i+j+1} b_i^*(u_0) z^{(n-2-j+i)}(0); \Delta v_j \right) \\ & - ({}^0D)^* (B_{n-2}^*(u_0) f, \dots, B_0^*(u_0) f) (\Delta v_{n-2}, \dots, \Delta v_0) \\ & + (z^{(n-1)}(0); \Delta h)_H \geq 0, \end{aligned}$$

wobei $z \in W_n$ die eindeutig bestimmte Lösung der adjungierten Evolutionsgleichung (n -ter Ordnung)

$$\begin{aligned} & -z^{(n)} + B_z^*(x_0^{(n-1)}, u_0) z^{(n-1)} - B_{n-2}^*(u_0) z^{(n-2)} + \dots + (-1)^{n-1} \\ & \quad \times B_0^*(u_0) z = g, \end{aligned}$$

$$z^{(i)}(T) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-2), \quad z^{(n-1)}(T) = 0,$$

mit

$$g = (D_0)^* (f_{n-2}^* - B_{n-2}^*(u_0) f, \dots, f_0^* - B_0^*(u_0) f) + f^* - B_z^*(x_0^{(n-1)}, u_0) f$$

ist.

Beweis: In unserem speziellen Fall ergibt sich gerade in der adjungierten Evolutionsgleichung (18)

$$((D_0)^* A_x^*(x_0^{(n-1)}, x_0, u_0) y)(t) = \sum_{i=0}^{n-2} b_{n-2-i}^*(u_0) \int_0^T \frac{(s-t)^i}{i!} y(s) ds \quad (t \in S).$$

Offenbar gilt für $z(t) := (-1)^{n-1} \int_0^T \frac{(s-t)^{n-2}}{(n-2)!} y(s) ds$ ($t \in S$) die obige Evolutionsgleichung n -ter Ordnung.

Die obige Variationsungleichung ergibt sich aus der Variationsungleichung (17), wobei ΔB , ΔB_i und ΔC die entsprechenden Richtungsgrenzwerte sind, und aus der folgenden Umrechnung:

$$\begin{aligned} & ({}^0D)^* A_x^*(x_0^{(n-1)}, x_0, u_0) y (\Delta v_{n-2}, \dots, \Delta v_0) \\ & = ({}^0D)^* (B_{n-2}^*(u_0) y, \dots, B_0^*(u_0) y) (\Delta v_{n-2}, \dots, \Delta v_0) \\ & = \sum_{j=0}^{n-2} \left(\int_0^T \sum_{i=0}^j \frac{s^{j-i}}{(j-i)!} b_i^*(u_0) y(s) ds; \Delta v_j \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j b_i^*(u_0) \int_0^T \frac{s^{j-i}}{(j-i)!} y(s) ds; \Delta v_j \right) \\
 &= \sum_{j=0}^{n-2} \left(\sum_{i=0}^j (-1)^{i+j+1} b_i^*(u_0) z^{(n-2-j+i)}(0); \Delta v_j \right).
 \end{aligned}$$

Bemerkung 3: Ist U ein normierter Raum und ist U_0 eine konvexe Menge, so ist eine Realisierung der Richtungsgrenzwerte aus (11) über (schwache) Richtungsableitungen bez. u möglich:

$$u_k := u_0 + \gamma_k(u - u_0),$$

wobei $u \in U_0$ und $\{\gamma_k\}$ eine Nullfolge positiver Zahlen ist,

$$\Delta F = F_u((x_0, u_0); u - u_0), \quad \Delta A = A_u((x_0^{(n-1)}, x_0, u_0); u - u_0),$$

$$\Delta v_i = v_{iu}(u_0; u - u_0), \quad \Delta h = h_u(u_0; u - u_0).$$

4. Die notwendige Bedingung als hinreichend

In einem einfachen Spezialfall ist die notwendige Optimalitätsbedingung auch hinreichend. Unsere spezielle Aufgabe lautet:

$$F^1(x) + F^2(u) = \min!$$

bei

$$x^{(n)} + Bx^{(n-1)} + B_{n-2}x^{(n-2)} + \dots + B_0x + Cu + c = 0,$$

$$x^{(i)}(0) = v_i u + v_{i0} \quad (i = 0, 1, \dots, n-2), \quad (19)$$

$$x^{(n-1)}(0) = hu + h_0, \quad x \in W_n, \quad u \in U_0.$$

Wir setzen hier folgendes voraus:

U sei ein normierter Raum, $U_0 \subset U$ sei konvex. $F^1: W_n \rightarrow \mathbb{R}$ und $F^2: U \rightarrow \mathbb{R}$ seien konvex. F^1 sei stetig Fréchet-differenzierbar und $(f_{n-2}^*, \dots, f_0^*, f^*, f) \in [C^*(S; V)]^{n-1} \times X^* \times X$ stelle $F_x^1(x_0) \in W_n^*$ gemäß (14) dar. F^2 sei Gâteaux-differenzierbar. $B: X \rightarrow X^*$ sei ein linearer Volterra-Operator und genüge der Bedingung (5). Die $B_i: C_X(S; V) \rightarrow X^*$ seien lineare, stetige Volterra-Operatoren.³⁾ $C: U \rightarrow X^*$ sei linear und $c \in X$ sei gegeben. Ebenso seien $v_i: U \rightarrow V$ und $h: U \rightarrow H$ linear sowie $v_{i0} \in V$ und $h_0 \in H$ vorgegeben.

Dann gilt der folgende Satz.

Satz 5: $(x_0, u_0) \in W_n \times U_0$ ist genau dann optimal für die Aufgabe (19), wenn gilt:

$$\begin{aligned}
 &F_u^2(u_0)(u - u_0) + ({}^0D)^*(f_{n-2}^*, \dots, f_0^*)(v_{n-2}(u - u_0), \dots, v_0(u - u_0)) \\
 &- \langle C(u - u_0); y + f \rangle - ({}^0D)^*(B_{n-2}^*(y + f), \dots, B_0^*(y + f)) \\
 &\times (v_{n-2}(u - u_0), \dots, v_0(u - u_0)) \\
 &+ (y(0); h(u - u_0))_H \geq 0 \quad \forall u \in U_0.
 \end{aligned}$$

³⁾ $C_X(S; V)$ sei mengenmäßig der Raum $C(S; V)$, normiert durch $\|\cdot\|_X$.

wobei $y \in W$ die eindeutig bestimmte Lösung der adjungierten Evolutionsgleichung (1. Ordnung)

$$\begin{aligned} & -y' + B^*y + (D^0)^*(B_{n-2}^*y, \dots, B_0^*y) \\ & = (D^0)^*(f_{n-2}^* - B_{n-2}^*f, \dots, f_0^* - B_0^*f) + f^* - B^*f, \quad y(T) = 0 \end{aligned}$$

ist.

Beweis: Wir überführen die Aufgabe (19) in eine Aufgabe (6) mit einer Evolutionsgleichung 1. Ordnung analog wie im vorigen Abschnitt. Die Notwendigkeit der Optimalitätsbedingung ergibt sich mit Satz 4, wobei die Richtungsgrenzwerte wie in Bemerkung 3 erzeugt werden. Die Hinlänglichkeit der Bedingung erhält man mit Satz 12 aus [8] ■

Wir gehen zu einem *Demonstrationsbeispiel* über.

Während Anfangswertaufgaben für Evolutionsgleichungen 1. Ordnung bestimmte Klassen von Rand-Anfangswertaufgaben für parabolische Differentialgleichungen erfassen, sind Anfangswertaufgaben für Evolutionsgleichungen 2. Ordnung als eine funktionalanalytische Verallgemeinerung gewisser Klassen von Rand-Anfangswertproblemen für hyperbolische Differentialgleichungen aufzufassen (vgl. [4] und [9]). Ein sehr einfaches Beispiel für letzteres ist die Aufgabe $x'' - \alpha_1 \Delta x' - \alpha_0 \Delta x - \beta \cdot p = 0$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$, $x|_{\partial G} = 0$, wobei G ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^2 , $x = x(t, s_1, s_2)$, $t \in [0, T]$, $s \equiv (s_1, s_2) \in G$, $p = p(t, s_1, s_2)$, $\alpha_1, \alpha_0, \beta$ Konstanten ($\alpha_1 > 0$) sind, die die Schwingungen einer eingespannten Platte aus visko-elastischem (Voigtschem) Material beschreibt (siehe [5]).

Wir wollen zwei einfache Steuerungsaufgaben betrachten, zum einen eine Steuerung in den Anfangsbedingungen, zum anderen eine Steuerung durch die Funktion p . Wir setzen zunächst für beide Aufgaben:

$$V = \dot{W}_2^{(1)}(G), \quad H = L_2(G),$$

$$F^1(x) := \frac{1}{2} \|x'(T) - w_1\|_H^2 + \frac{1}{2} \|x(T) - w_0\|_V^2 \quad (x \in W_2),$$

mit gegebenen $w_1 \in H$ und $w_0 \in V$,

$$(Bx)(t) := \alpha_1 ax(t) \quad (t \in S, x \in X),$$

wobei $a: V \rightarrow V^*$ durch

$$(av; w) := \int_G \left\{ \frac{\partial}{\partial s_1} v(s) \cdot \frac{\partial}{\partial s_1} w(s) + \frac{\partial}{\partial s_2} v(s) \cdot \frac{\partial}{\partial s_2} w(s) \right\} ds \quad (v, w \in V)$$

definiert ist,

$$(B_0x)(t) := \alpha_0 ax(t) \quad (t \in S, x \in X).$$

1. Steuerung in den Anfangsbedingungen:

Wir wählen $U = V \times H$, $U_0 = V_0 \times H_0 \subset U$ sei konvex, und setzen für $u = (u^1, u^2) \in U$:

$$F^2(u) := \frac{1}{2} \|u^1\|_V^2 + \frac{1}{2} \|u^2\|_H^2, \quad (Cu)(t) := 0 \quad (t \in S),$$

$$v_0 u := u^1, \quad v_0 0 := 0, \quad hu := u^2, \quad h_0 := 0,$$

$c \in X^*$ sei definiert durch

$$(c(t); w) := -\beta \int_G p(t, s) \cdot w(s) ds \quad (t \in S, w \in V).$$

Unsere Aufgabe lautet nun:

$$\frac{1}{2} \{ \|x'(T) - w_1\|_H^2 + \|x(T) - w_0\|_V^2 + \|u^1\|_V^2 + \|u^2\|_H^2 \} = \min! \quad (20)$$

bei

$$\begin{aligned} x'' + Bx' + B_0x + c &= 0, & x(0) &= u^1, & x'(0) &= u^2, \\ x &\in W_2, & u^1 &\in V_0, & u^2 &\in H_0. \end{aligned}$$

Für die Optimalität von $(x_0, u_0) = (x_0, u_0^1, u_0^2) \in W_2 \times U_0$ für die Aufgabe (20) sind nun die folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend:

$$\begin{aligned} (u_0^1 + x_0(T) - w_0 + \alpha_0 z(0); u^1 - u_0^1) &\geq 0 \quad \forall u^1 \in V_0, \\ (u_0^2 + z'(0); u^2 - u_0^2)_H &\geq 0 \quad \forall u^2 \in H_0, \end{aligned}$$

wobei $z \in W_2$ die eindeutig bestimmte Lösung der adjungierten Evolutionsgleichung (2. Ordnung)

$$-z'' + Bz' - B_0z = x_0(T) - w_0, \quad z(T) = 0, \quad z'(T) = x_0'(T) - w_1$$

ist.

2. Steuerung durch die Funktion p :

Hier wählen wir $U = L_2([0, T] \times G)$ und $U_0 = \{p \in U: p(t, \cdot) \in H_0 \text{ f. ü.}\}$, wobei $H_0 \subset H$ konvex sei. Die Anfangselemente $\hat{x}_0 \in V$ und $\hat{x}_1 \in H$ seien gegeben. Wir setzen nun für $p \in U$:

$$\begin{aligned} F^2(p) &:= \frac{1}{2} \|p\|_{\sigma}^2, \\ ((Cp)(t); w) &:= -\beta \int_G p(t, s) \cdot w(s) ds \quad (t \in S, w \in V), \\ c &:= 0, \quad v_0 p := 0, \quad v_{00} := \hat{x}_0, \quad hp := 0, \quad h_0 := \hat{x}_1. \end{aligned}$$

Unsere Aufgabe lautet:

$$\frac{1}{2} \{ \|x'(T) - w_1\|_H^2 + \|x(T) - w_0\|_V^2 + \|p\|_{\sigma}^2 \} = \min! \quad (20')$$

bei

$$\begin{aligned} x'' + Bx' + B_0x + Cp &= 0, & x'(0) &= \hat{x}_1, & x(0) &= \hat{x}_0, \\ x &\in W_2, & p &\in U_0. \end{aligned}$$

Für die Optimalität von $(x_0, p_0) \in W_2 \times U_2$ für die Aufgabe (20') ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend:

$$(p_0(t) + \beta \cdot z(t); u - p_0(t))_H \geq 0 \quad \text{für f. a. } t \in S \text{ und alle } u \in H_0,$$

wobei $z \in W_2$ die eindeutig bestimmte Lösung der obigen adjungierten Evolutionsgleichung (2. Ordnung) ist.

In beiden Fällen ergeben sich die Optimalitätsbedingungen aus Satz 5 mit Verwendung der Aussagen der Folgerungen 1 und 2 sowie der Berechnungen für das zweite spezielle Zielfunktional in den Bemerkungen 1 und 2.

Die punktweise Formulierung der Variationsungleichung im zweiten Fall erhält man, indem bei der Realisierung der Richtungsgrenzwerte wie in Bemerkung 3 gesetzt wird:

$$p_k := p_0 + \gamma_k(p - p_0) \quad \text{mit} \quad p(t) = \begin{cases} u, & t \in [t_1, t_2] \\ p_0(t), & t \in S \setminus [t_1, t_2], \end{cases}$$

wobei $u \in H_0$, $t_1, t_2 \in S$ mit $t_1 < t_2$ beliebig sind.

Wir merken noch an, daß für beide Aufgaben die Existenz einer eindeutig bestimmten optimalen Steuerung gesichert ist, falls für U_0 neben der Konvexität noch die Abgeschlossenheit gefordert wird.

5. Schlußbemerkungen

Mit der Betrachtung der Aufgabe (1) werden Aufgaben optimaler Steuerung erfaßt, die durch gewisse Klassen partieller Differentialgleichungen beliebiger Ordnung beschrieben werden. Dabei werden die Prozeßgleichungen in abstrakter Form als Evolutionsgleichungen behandelt, das heißt, die Lösung der Differentialgleichung wird als verallgemeinerte Lösung im Sinne der Evolutionsgleichungen betrachtet. Die in allgemeiner Weise vorgelegten Optimalitätsbedingungen tragen Modellcharakter und müssen im gegebenen Fall entsprechend präzisiert werden, das betrifft das Zielfunktional F , insbesondere die Darstellung von $F_x(x_0, u_0)$, den Operator A , die Realisierung der Richtungsgrenzwerte, so wie dies im vorigen Abschnitt angedeutet wurde. Weitere konkrete Beispiele für Aufgaben optimaler Steuerung, die durch einfache Evolutionsgleichungen 2. Ordnung beschrieben werden, findet man bei LIONS [10, 11]. Neben Optimalitätsbedingungen werden dort auch Existenzaussagen gegeben.

LITERATUR

- [1] BITTNER, L.: On optimal control of processes governed by abstract functional, integral and hyperbolic differential equations. *Math. Operationsforsch. Statist.* **6** (1975), 107–134.
- [2] BITTNER, L.: Ein Modell für eine Klasse von Aufgaben optimaler Steuerung. *Z. Angew. Math. u. Mech.* **58** (1978), 251–260.
- [3] BROWDER, F. E.: Nonlinear functional analysis and nonlinear partial differential equations. *Differ. equat. and their applic. J. Acta fac. rerum natur. Univ. Comen.* 1967, pp. 45–64.
- [4] GAJEWSKI, H., GRÖGER, K., und K. ZACHARIAS: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. Berlin 1974.
- [5] GAJEWSKI, H.: Über eine Klasse nichtlinearer abstrakter Wellengleichungen im Hilbert-Raum. *Math. Nachr.* **52** (1972), 371–383.
- [6] GAJEWSKI, H., und K. GRÖGER: Zur Lösbarkeit einer Klasse von Differentialgleichungen 2. Ordnung im Hilbert-Raum. *Math. Nachr.* **53** (1973), 111–124.
- [7] GRÖGER, K.: Zur Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung mit Gedächtnis in Banach- bzw. Hilbert-Räumen. *Math. Nachr.* **56** (1973), 161–167.
- [8] KAMPOWSKY, W.: Optimalitätsbedingungen für Prozesse in Evolutionsgleichungen 1. Ordnung. *Z. Angew. Math. u. Mech.* **61** (1981), 501–512.
- [9] LIONS, J. L.: Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires. Paris 1969.
- [10] LIONS, J. L.: Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Paris 1968.

- [11] LIONS, J. L.: Remarks on the theory of optimal control of distributed systems. In: Control Theory of Systems governed by Partial Differential Equations (editors: AZIZ, K., WINGATE, J. M., and M. J. BALAS). Academic Press 1977, pp. 1—103.
- [12] LIONS, J. L., und W. STRAUSS: Some non linear evolution equations. Bull. Math. France **93** (1965), 43—96.

Manuskripteingang: 18. 11. 1981

VERFASSER:

Dr. WINFRIED KAMPOWSKY
Sektion Mathematik der Ernst-Moritz-Arndt-Universität
DDR-2200 Greifswald, Fr.-L.-Jahn-Straße 15a