Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (1) (1983), S. 11 – 23

Eine Methode zur näherungsweisen Lösung einer Randwertaufgabe einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung

J. D. MAMEDOV, G. BERGER und H. DÖRNER

Es wird eine Näherungsmethode zur Lösung der Randwertaufgabe

$$x''(t) - a(t)\,x(t) = g(t) \tag{1}$$

$$x(-1) = x_{-1}, \qquad x(1) = x_1 \tag{2}$$

angegeben. Mit Hilfe von Integraloperatoren K_i, T_i:

$$\mathsf{K}_i x \equiv \int_1^t \int_{-1}^1 \mathsf{R}_i(t, \sigma, \tau)\, x(\sigma\tau)\, d\tau\, d\sigma,$$

$$\mathsf{T}_i x \equiv \int_{-1}^1 k_i(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau,$$

die den Bedingungen $\mathsf{K}_i ax = \mathsf{T}_{i+1}x + \mathsf{K}_{i+1}x''$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ genügen, wird die Randwertaufgabe (1)–(2) in eine Integralgleichung vom VOLTERRA-FREDHOLMschen Typ überführt. Durch Vernachlässigung des Restgliedes $\mathsf{K}_n ax$, für das eine Abschätzung angegeben wird, entsteht eine FREDHOLMsche Integralgleichung, die einen entarteten Kern besitzt, wenn $a(t)$ ein Polynom ist. Dies wird nachgewiesen, die entsprechenden Integralgleichungen sowie Beispiele werden angegeben.

Даётся один приближенный метод решения краевой задачи

$$x''(t) - a(t)\,x(t) = g(t) \tag{1}$$

$$x(-1) = x_{-1}, \qquad x(1) = x_1. \tag{2}$$

С помощью интегральных операторов K_i, T_i:

$$\mathsf{K}_i x \equiv \int_1^t \int_{-1}^1 \mathsf{R}_i(t, \sigma, \tau)\, x(\sigma\tau)\, d\tau\, d\sigma,$$

$$\mathsf{T}_i x \equiv \int_{-1}^1 k_i(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau,$$

удовлетворяющих условиям $\mathsf{K}_i ax = \mathsf{T}_{i+1}x + \mathsf{K}_{i+1}x''$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, краевая задача (1)–(2) приводится к интегральному уравнению типа Вольтерра-Фредгольма. Отбрасывая остаточный член $\mathsf{K}_n ax$, оценка которого даётся, получено интегральное уравнение Фредгольма, которое будет с вырожденным ядром, если $a(t)$ многочлен. Доказан индуктивно этот факт и построены соответствующие им интегральные уравнения с вырожденным ядром. Даются некоторые примеры.

A numerical method is presented for solving the two-point boundary value problem

$$x''(t) - a(t)\,x(t) = g(t) \tag{1}$$

$$x(-1) = x_{-1}, \qquad x(1) = x_1. \tag{2}$$

The problem is transformed by special integral operators K_i and T_i to an integral equation of VOLTERRA-FREDHOLM-type. These operators are defined by

$$\mathsf{K}_i x \equiv \int_1^t \int_{-1}^1 \mathsf{R}_i(t, \sigma, \tau)\, x(\sigma\tau)\, d\tau\, d\sigma,$$

$$\mathsf{T}_i x \equiv \int_{-1}^1 k_i(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

and satisfy the relations $\mathsf{K}_i ax = \mathsf{T}_{i+1}x + \mathsf{K}_{i+1}x''$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. By neglecting the residual $\mathsf{K}_n ax$, which is estimated, we get an integral equation of FREDHOLM-type with an degenerated kernel if $a(t)$ is a polynomial. These statements are proved, the corresponding integral equations as well as some examples are given.

In dieser Arbeit wird eine Näherungsmethode zur Lösung linearer Randwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Hilfe spezieller Integraloperatoren [2] vorgestellt. Der Grundgedanke des Verfahrens besteht darin, die Randwertaufgabe in eine FREDHOLM-VOLTERRASche Integralgleichung zu überführen, den VOLTERRASchen Anteil auf der Basis gegebener Fehlerabschätzungen zu vernachlässigen und die Lösung der dadurch entstehenden Näherungsgleichung, die eine FREDHOLMsche Integralgleichung 2. Art ist, als Näherungslösung der Randwertaufgabe zu verwenden. Der Vorteil der Methode besteht darin, daß der durch das Verfahren entstehende Kern der Näherungsintegralgleichung eine — in Abhängigkeit von einer Koeffizientenfunktion — mindestens einmal differenzierbare Funktion der äußeren Variablen ist und die Lösung der Näherungsgleichung im Falle des entarteten Kernes exakt bestimmt werden kann. Des weiteren sind Koeffizientenfunktionen zugelassen, die quadratisch integrable Singularitäten aufweisen können.

In diesem Artikel wird der Einfachheit halber die Lösung der Randwertaufgabe 1. Art

$$x''(t) = a(t)\, x(t) + g(t) \tag{1}$$

$$x(-1) = x_{-1}, \qquad x(1) = x_1 \tag{2}$$

mit $a, g \in \mathsf{C}[-1, 1]$ betrachtet. Die Aufgabe (1)—(2) besitze eine eindeutige Lösung $x(t) \in \mathsf{C}^2[-1, 1]$.

1. Wir betrachten auf der Mannigfaltigkeit

$$\Omega = \{x(t) \mid x \in \mathsf{C}^2[-1, 1], x(-1) = x_{-1}, x(+1) = x_1\}$$

die in [2] angegebenen Operatorfolgen $\{\mathsf{K}_i\}$, $\{\mathsf{T}_i\}$:

$$\mathsf{K}_i x \equiv \int_1^t \int_{-1}^1 \mathsf{R}_i(t, \sigma, \tau)\, x(\sigma\tau)\, d\tau\, d\sigma \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

mit

$$\mathsf{R}_0(t, \sigma, \tau) = \frac{1}{2}(\sigma + \tau t),$$

$$\mathsf{R}_{i+1}(t, \sigma, \tau) = \frac{1}{2} \int_t^\sigma \int_{-1}^\tau [a(\sigma_1\tau_1)\, \mathsf{R}_i(t, \sigma_1, \tau_1)\, (\sigma\tau_1 + \sigma_1\tau) - a(-\sigma_1\tau_1)$$

$$\times\, \mathsf{R}_i(t, -\sigma_1, \tau_1)\, (\sigma\tau_1 - \sigma_1\tau)]\, d\tau_1\, d\sigma_1 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$\mathsf{T}_i x \equiv \int_{-1}^{1} k_i(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

mit

$$k_{i+1}(t, \tau) = \frac{1}{2} \int_{1}^{t} [a(\sigma\tau)\, \mathsf{R}_i(t, \sigma, \tau)\, (1 + \sigma) - a(-\sigma\tau)\, \mathsf{R}_i(t, -\sigma, \tau)\, (1 - \sigma)]\, d\sigma$$

$(i = 0, 1, 2, \ldots)$.

Für diese Operatoren gelten die Beziehungen

$$\mathsf{K}_i a x = \mathsf{T}_{i+1} x + \mathsf{K}_{i+1} x'' \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

und

$$x = \mathsf{T}_0 x + \mathsf{K}_0 x'' \tag{4}$$

mit

$$\mathsf{T}_0 x = \frac{1 + t}{2} x(1) + \frac{1 - t}{2} x(-1).$$

Für die Lösung der Aufgabe (1)—(2) erhalten wir dann aus (4) unter Berücksichtigung von (1) die Gleichung

$$x = \mathsf{T}_0 x + \mathsf{K}_0 g + \mathsf{K}_0 a x, \tag{5.0}$$

aus der unter Beachtung von (3) (für $i = 0$) und (1) zunächst

$$x = \mathsf{T}_0 x + (\mathsf{K}_0 + \mathsf{K}_1)\, g + \mathsf{T}_1 x + \mathsf{K}_1 a x \tag{5.1}$$

und bei Wiederholung ((3) für $i = 1$)

$$x = \mathsf{T}_0 x + (\mathsf{K}_0 + \mathsf{K}_1 + \mathsf{K}_2)\, g + (\mathsf{T}_1 + \mathsf{T}_2)\, x + \mathsf{K}_2 a x \tag{5.2}$$

folgt. Nach n Schritten erhält man schließlich für die Lösung x der Aufgabe (1)—(2) die Gleichung

$$x = h_n + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{T}_i x + \mathsf{K}_n a x \tag{5.n}$$

mit

$$h_n = \mathsf{T}_0 x + \sum_{i=0}^{n} \mathsf{K}_i g,$$

eine FREDHOLM-VOLTERRASche Integralgleichung 2. Art, wobei der Kern des FREDHOLMschen Anteils eine — in Abhängigkeit von $a(t)$ — mindestens differenzierbare Funktion der äußeren Variablen ist (s. [2]).

Da

$$|\mathsf{K}_n a x| \leqq c_1 \frac{[A(1 - t^2)]^{n+1}}{(2n + 2)!}$$

mit

$$c_1 = \max_{-1 \leqq t \leqq 1} |x(t)|, \qquad A = \max_{-1 \leqq t \leqq 1} |a(t)|,$$

gilt (siehe [2]), wird $\mathsf{K}_n a x$ für hinreichend großes n beliebig klein, und wir werden es als Restglied vernachlässigen. Dann erhält man aus (5.n) die FREDHOLMsche Integralgleichung 2. Art

$$x_n = h_n + \sum_{i=1}^{n} \mathsf{T}_i x_n$$

bzw.

$$x_n(t) = h_n(t) + \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{n} k_i(t, \tau) \right] x_n(\tau)\, d\tau. \tag{6}$$

Unter der Voraussetzung, daß die zu (6) gehörige Resolvente $\mathsf{P}_n(t, \tau)$ existiert, ist die Lösung von (6) durch

$$x_n(t) = h_n(t) + \int_{-1}^{1} \mathsf{P}_n(t, \tau)\, h_n(\tau)\, d\tau$$

gegeben. Es sei

$$\int_{-1}^{1} |\mathsf{P}_n(t, s)|\, ds \leqq \mathsf{P}_n{}^*.$$

Dann erhält man aus der Lösung der Integralgleichung

$$x - x_n = \mathsf{K}_n a x + \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{n} k_i(t, \tau) \right] [x(\tau) - x_n(\tau)]\, d\tau,$$

die mit

$$x - x_n = \mathsf{K}_n a x + \int_{-1}^{1} \mathsf{P}_n(t, \tau)\, \mathsf{K}_n a x\, d\tau$$

gegeben ist, als eine Fehlerabschätzung für das Verfahren

$$\|x - x_n\|_{\mathsf{C}} \leqq c_1(1 + \mathsf{P}_n{}^*) \frac{\mathsf{A}^{n+1}}{(2n+2)!}.$$

Wenn darüber hinaus $\mathsf{P}_n(t, \tau)$ gleichmäßig beschränkt ist, so ist auch die eindeutige Lösbarkeit von (5.n) gesichert, deren Lösung dann die eindeutige Lösung der Randwertaufgabe (1)—(2) ist, weshalb mit $x_n(t)$ eine Näherungslösung der Randwertaufgabe gegeben ist.

2. Wenn $a(t)$ eine solche Funktion ist, für die die $k_i(t, \tau)$ zerfallen:

$$k_i(t, \tau) = \sum_{k=1}^{m_i} \bar{a}_{ik}(t)\, \bar{b}_{ik}(\tau) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

so hat (6) die Gestalt

$$x_n(t) = h_n(t) + \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} \bar{a}_{ik}(t)\, \bar{b}_{ik}(\tau) \right] x_n(\tau)\, d\tau.$$

Es sei $m \left(n \leqq m \leqq \sum_{i=1}^{n} m_i \right)$ die Zahl der linear unabhängigen $\bar{b}_{ik}(\tau)$, die mit $b_i(\tau)$ bezeichnet werden. Dann erhält man die Näherungsgleichung (6) in der Form

$$x_n(t) = h_n(t) + \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{m} a_i(t)\, b_i(\tau) \right] x_n(\tau)\, d\tau, \tag{7}$$

wobei die $a_i(t)$ offensichtlich Linearkombinationen der $\bar{a}_{ik}(t)$ sind. Gleichung (7) ist eine FREDHOLMsche Integralgleichung mit ausgeartetem Kern. Wie aus der Theorie der Integralgleichungen bekannt ist, wird ihre Lösung durch die Formel

$$x_n(t) = h_n(t) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i(t)$$

bestimmt, wenn

$$\mathsf{D}_m = \begin{vmatrix} 1-\beta_{11} & -\beta_{12} & \dots & -\beta_{1m} \\ -\beta_{21} & 1-\beta_{22} & \dots & -\beta_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\beta_{m1} & -\beta_{m2} & \dots & 1-\beta_{mm} \end{vmatrix} \neq 0$$

gilt. Hier sind die β_{ij} durch

$$\beta_{ij} = \int_{-1}^{1} b_i(\tau)\, a_j(\tau)\, d\tau \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

definiert, und die Koeffizienten α_i ergeben sich aus dem linearen Gleichungssystem

$$\alpha_i - \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij}\alpha_j = \gamma_i \quad \text{mit} \quad \gamma_i = \int_{-1}^{1} h_n(\tau)\, b_i(\tau)\, d\tau \qquad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{8}$$

Als Fehlerabschätzung für unsere Methode erhält man hier

$$\|x - x_m\|_{\mathsf{C}} \leqq c_1(1 + \mathsf{P}_m^*)\, \frac{\mathsf{A}^{n+1}}{(2n+2)!},$$

wenn man

$$\int_{-1}^{1} |\mathsf{P}_m(t, s)|\, ds \leqq \mathsf{P}_m^* \tag{9}$$

annimmt, wobei $\mathsf{P}_m(t, s) = \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\mathsf{D}_{ik}^{(m)}}{\mathsf{D}_m} a_k(t)\, b_i(\tau)$ die Resolvente der Integralgleichung (7) ist, und die Größen $\mathsf{D}_{ik}^{(m)}$ die entsprechenden Minoren der Determinante D_m sind.

Im folgenden wird gezeigt, daß man die Fehlerabschätzung in einigen Spezialfällen genauer vornehmen kann.

3. Wir betrachten einige Klassen von Funktionen $a(t)$, für die die Gleichung (6) eine Integralgleichung mit entartetem Kern wird.

3.1. Es sei

$$a(t) = a = \text{const}.$$

Wir erhalten

$$\mathsf{K}_i x \equiv \frac{a^i}{2^{2i+1}} \int_1^t \int_{-1}^{1} \frac{[(\sigma^2 - t^2)(\tau^2 - 1)]^i}{(i!)^2} (\sigma + \tau t)\, x(\sigma\tau)\, d\tau\, d\sigma$$

$(i = 0, 1, 2, \dots)$

und

$$\mathsf{T}_i x \equiv -\frac{a^i(1-t^2)^i}{2^{2i} i!} \int\limits_{-1}^{1} \frac{(\tau^2-1)^{i-1}}{(i-1)!} (1+\tau t)\, x(\tau)\, d\tau \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

sowie anstelle von (6) die Integralgleichung

$$x_n(t) = h_n(t) - \int\limits_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{2n} a_i^0(t)\, b_i^0(\tau)\right] x_n(\tau)\, d\tau \tag{10}$$

mit

$$a_i^0(t) = \begin{cases} \dfrac{(1-t^2)^i}{2^i i!}\, a^i, & 1 \leqq i \leqq n \\ \dfrac{(1-t^2)^{i-n}}{2^{i-n}(i-n)!}\, a^{i-n} t, & n+1 \leqq i \leqq 2n \end{cases}$$

und

$$b_i^0(\tau) = \begin{cases} \dfrac{(\tau^2-1)^{i-1}}{2^i (i-1)!}, & 1 \leqq i \leqq n \\ \dfrac{(\tau^2-1)^{i-1-n}}{2^{i-n}(i-1-n)!}\, \tau, & n+1 \leqq i \leqq 2n. \end{cases}$$

3.2. Es sei

$$a(t) = t^{2j} \qquad (j \geqq 0).$$

Dann besitzen die Kerne der Integraloperatoren K_i, T_i die Form

$$\mathsf{R}_i(t, \sigma, \tau) = \frac{1}{2} (\sigma + \tau t)\, \omega_i(t, \sigma)\, \omega_i(1, \tau) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$k_i(t, \tau) = -\frac{1}{2} (1 + \tau t)\, \tau^{2j} \omega_i(t, 1)\, \omega_{i-1}(1, \tau) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

wobei

$$\omega_i(t, \sigma) = \frac{(\sigma^{2j+2} - t^{2j+2})^i}{(2j+2)^i\, i!}$$

gesetzt wurde. Anstelle von (6) erhalten wir die Integralgleichung

$$x_n(t) = h_n(t) - \int\limits_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{2n} \tilde{a}_i(t)\, \tilde{b}_i(\tau)\right] x_n(\tau)\, d\tau \tag{11}$$

mit

$$\tilde{a}_i(t) = \begin{cases} \omega_i(t, 1), & 1 \leqq i \leqq n \\ t\omega_{i-n}(t, 1), & n+1 \leqq i \leqq 2n \end{cases}$$

und

$$\tilde{b}_i(\tau) = \frac{1}{2}\, \tau^{2j} \begin{cases} \omega_{i-1}(1, \tau), & 1 \leqq i \leqq n \\ \tau\omega_{i-1-n}(1, \tau), & n+1 \leqq i \leqq 2n. \end{cases}$$

Der Fehler der Methode läßt sich hier durch

$$\|x - x_n\|_C \leqq \frac{2c_1(1 + \tilde{\mathsf{P}}_n)}{(2j + 2)^{n+1}(n + 1)! \prod_{k=0}^{n} [2j + 1 + 2k(j + 1)]}$$

abschätzen, wobei $\tilde{\mathsf{P}}_n$ entsprechend (9) eine obere Schranke zur Resolvente von (11) ist. Die Koeffizienten des entsprechenden Gleichungssystems (8) haben die Form

$$\beta_{ik} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{i-1}(k + i - 1)!}{k!(i - 1)! \prod_{l=0}^{i+k-1} [2j + 1 + 2l(j + 1)]} & (i, k = 1, 2, \dots, n) \\ 0 & (i = 1, 2, \dots, n;\ k = n + 1, n + 2, \dots, 2n) \\ 0 & (i = n + 1, n + 2, \dots, 2n;\ k = 1, 2, \dots, n) \\ \dfrac{(-1)^{i-1-n}(k + i - 1 - 2n)!}{(k - n)!(i - 1 - n)! \prod_{l=0}^{i+k-1-2n} [2j + 3 + 2l(j + 1)]}, & (i, k = n + 1,\ n + 2, \dots, 2n) \end{cases}$$

und die Koeffizienten der rechten Seite sind für $i = 1, 2, \dots, n$ durch

$$\gamma_i = \frac{(-1)^{i-1}}{4} \sum_{k=0}^{n} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(\sigma\tau)\, \omega_k(1, \tau) \{(-1)^i \tau\omega_{i+k}(1, \sigma) + \sigma\theta(i, k; \sigma)\}\, d\tau\, d\sigma$$
$$+ \frac{2(x_1 + x_{-1})}{\prod_{m=0}^{i-1} [2j + 1 + 2m(j + 1)]}$$

mit

$$\theta(i, k, \sigma) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{k} \dfrac{\omega_{k-l}(1, \sigma)}{\prod_{m=0}^{i+l-1} [2j + 1 + 2m(j + 1)]} \left[\binom{i - 1 + l}{l} + (-1)^{k+l+1} \right. \\ \left. \times \binom{i - 1 + l}{i - 1 + l - k} \sigma^{2j+1}\sigma^{2(l+i-1)(j+1)}\right] & (k \geqq i - 1) \\ \sum_{l=i-1-k}^{i-1} \dfrac{\omega_{i-1-l}(1, \sigma)}{\prod_{m=0}^{k+l} [2j + 1 + 2m(j + 1)]} \left[\binom{k + l}{k + l + 1 - i} \right. \\ \left. + (-1)^{i+l} \binom{k + l}{l} \sigma^{2j+1}\sigma^{2(k+l)(j+1)}\right] & (k < i - 1) \end{cases}$$

und für $i = n + 1, n + 2, \dots, 2n$ durch

$$\gamma_i = \frac{(-1)^{i-1-n}}{4} \sum_{k=0}^{n} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(\sigma\tau)\, \omega_k(1, \tau) \{(-1)^{i-n} \sigma\omega_{i-n+k}(1, \sigma)$$
$$+ \tau\theta(i, k, \sigma)\}\, d\tau\, d\sigma + \frac{2(x_1 - x_{-1})}{\prod_{m=0}^{i-1-n} [2j + 3 + 2m(j + 1)]}$$

mit

$$\theta(i, k, \sigma) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{k} \frac{\omega_{k-l}(1, \sigma)}{\prod_{m=0}^{i+l-1-n} [2j + 3 + 2m(j+1)]} \left[\binom{i + l - 1 - n}{l} + (-1)^{k+l+1} \right. \\ \left. \times \binom{i - 1 - n + l}{i - 1 - n - k + l} \sigma^{2j+3} \sigma^{2(i-1+l-n)(j+1)}\right] \quad (k \geqq i - 1 - n) \\ \sum_{l=i-1-k}^{i-1-n} \frac{\omega_{i-l-1-n}(1, \sigma)}{\prod_{m=0}^{k+l} [2j + 3 + 2m(j+1)]} \left[\binom{k + l}{k + l + n + 1 - i} + (-1)^{i+l-n} \right. \\ \left. \times \binom{k + l}{l} \sigma^{2j+3} \sigma^{2(k+l)(j+1)}\right] \quad (k < i - 1 - n) \end{cases}$$

bestimmt.

3.3. Es sei

$$a(t) = \sum_{j=0}^{m} p_j t^{2j}.$$

Dann haben die Kerne der Integraloperatoren K_i, T_i die Form

$$\mathsf{R}_i(t, \sigma, \tau) = \frac{\sigma + \tau t}{2^{2i}} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_i = 0}^{m} \prod_{l=1}^{i} p_{j_l} [\mathsf{S}_i(t, \sigma, j)\, \mathsf{S}_i(1, \tau, j)],$$

$$k_i(t, \tau) = -\frac{1 + \tau t}{2^{2i-1}} \sum_{j_1, \dots, j_i = 0}^{m} \prod_{l=1}^{i} p_{j_l} [\tau^{2j_l} \mathsf{S}_{i-1}(1, \tau, j)\, \mathsf{S}_i(t, 1, j)],$$

wobei

$$\mathsf{S}_i(t, \sigma, j) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \frac{\sigma^{2\mathsf{J}_{ik}} t^{2\mathsf{I}_{1,k}}}{\prod_{l=k+1}^{i} \mathsf{J}_{lk} \prod_{l=1}^{k} \mathsf{I}_{lk}}$$

mit

$$\mathsf{J}_{lk} = \sum_{p=k+1}^{l} (j_p + 1), \qquad \mathsf{I}_{lk} = \sum_{p=l}^{k} (j_p + 1)$$

gesetzt wurde.

Anstelle von (6) erhält man hier die Integralgleichung

$$x_n(t) = h_n(t) - \int_{-1}^{1} \left[\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2^{2l-1}} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_l = 0}^{m} \prod_{i=1}^{l} p_{j_i} \sum_{q=1}^{2} [a_l^{(q)}(t)\, b_l^{(q)}(\tau)] \right] x_n(\tau)\, d\tau. \tag{12}$$

Hierbei wurden die Abkürzungen

$$a_l^{(1)}(t) = \mathsf{S}_l(t, 1, j), \qquad a_l^{(2)}(t) + t\mathsf{S}_l(t, 1, j),$$

$$b_l^{(1)}(\tau) = \tau^{2j_l} \mathsf{S}_{l-1}(1, \tau, j), \qquad b_l^{(2)}(\tau) = \tau^{2j_l+1} \mathsf{S}_{l-1}(1, \tau, j)$$

verwendet.

3.4. Es sei

$$a(t) = t^{2j+1} \qquad (j \geqq 0).$$

Die Kerne der Integraloperatoren K_i und T_i besitzen die Form

$$\left.\begin{aligned} \mathsf{R}_{2i}(t,\tau,\sigma) &= \frac{1}{2}\,[\sigma\varphi_{2i}(t,\sigma)\,\psi_{2i}(1,\tau) + \tau t\psi_{2i}(t,\sigma)\,\varphi_{2i}(1,\tau)] \\ \mathsf{R}_{2i+1}(t,\sigma,\tau) &= \frac{1}{2}\,[\tau\psi_{2i+1}(t,\sigma)\,\varphi_{2i+1}(1,\tau) + \sigma t\varphi_{2i+1}(t,\sigma)\,\psi_{2i+1}(1,\tau)] \\ k_{2i+1}(t,\tau) &= -\frac{1}{2}\,\tau^{2j+1}[\psi_{2i+1}(t,1)\,\psi_{2i}(1,\tau) + \tau t\varphi_{2i+1}(t,1)\,\varphi_{2i}(1,\tau)] \end{aligned}\right\}\quad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$k_{2i}(t,\tau) = -\frac{1}{2}\,\tau^{2j+1}[t\psi_{2i}(t,1)\,\psi_{2i-1}(1,\tau) + \tau\varphi_{2i}(t,1)\,\varphi_{2i-1}(1,\tau)] \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Hierbei sind die φ_i und ψ_i durch

$$\varphi_0(t,\sigma) \equiv \psi_0(t,\sigma) \equiv 1,$$

$$\varphi_{i+1}(t,\sigma) = \int_t^\sigma s^{2j+1}\psi_i(t,s)\,ds, \qquad \psi_{i+1}(t,\sigma) = \int_t^\sigma s^{2j+3}\varphi_i(t,s)\,ds$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots)$$

rekursiv definiert.

Hieraus folgt, daß die Beziehungen

$$\psi_{2i}(t,\sigma) = \sum_{k=0}^{i-1}\left\{\frac{\sigma^{d_{2i-2k}}t^{c_{2k}}}{\prod_{l=1}^{2i-2k} d_l \prod_{l=1}^{2k} c_l} - \frac{\sigma^{c_{2i-2k-1}}t^{d_{2k+1}}}{\prod_{l=1}^{2k+1} d_l \prod_{l=1}^{2i-2k-1} c_l}\right\} + \frac{t^{c_{2i}}}{\prod_{l=1}^{2i} c_l},$$

$$\psi_{2i+1}(t,\sigma) = \sum_{k=0}^{i}\left\{\frac{\sigma^{c_{2i+1-2k}}t^{d_{2k}}}{\prod_{l=1}^{2i+1-2k} c_l \prod_{l=1}^{2k} d_l} - \frac{\sigma^{d_{2i-2k}}t^{c_{2k+1}}}{\prod_{l=1}^{2i-2k} d_l \prod_{l=1}^{2k+1} c_l}\right\},$$

$$\varphi_{2i}(t,\sigma) = \sum_{k=0}^{i-1}\left\{\frac{\sigma^{c_{2i-2k}}t^{d_{2k}}}{\prod_{l=1}^{2i-2k} c_l \prod_{l=1}^{2k} d_l} - \frac{\sigma^{d_{2i-2k-1}}t^{c_{2k+1}}}{\prod_{l=1}^{2i-2k-1} d_l \prod_{l=1}^{2k+1} c_l}\right\} + \frac{t^{d_{2i}}}{\prod_{l=1}^{2i} d_l},$$

$$\varphi_{2i+1}(t,\sigma) = \sum_{k=0}^{i}\left\{\frac{\sigma^{d_{2i+1-2k}}t^{c_{2k}}}{\prod_{l=1}^{2i-2k+1} d_l \prod_{l=1}^{2k} c_l} - \frac{\sigma^{c_{2i-2k}}t^{d_{2k+1}}}{\prod_{l=1}^{2i-2k} c_l \prod_{l=1}^{2k+1} d_l}\right\} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

gelten, wobei wir die Konstanten

$$c_{2i} = 2i(2j+3) = d_{2i}, \qquad c_{2i+1} = c_{2i} + 2(j+2),$$

$$d_{2i+1} = d_{2i} + 2(j+1) \qquad (i = 0, 1, \ldots)$$

verwendet haben.

Anstelle von (6) erhalten wir die Integralgleichung

$$x_n(t) = h_n(t) - \int_{-1}^{1}\left[\sum_{i=0}^{2n-1}\bar{a}_i(t)\,\bar{b}_i(\tau)\right]x_n(\tau)\,d\tau, \tag{13}$$

wobei für geradzahlige n die Beziehungen

$$\bar{a}(t) = \begin{cases} \psi_{2i+1}(t, 1), & 0 \leqq i \leqq \frac{n}{2} - 1 \\ t\varphi_{2i+1-n}(t, 1), & \frac{n}{2} \leqq i \leqq n - 1 \\ \varphi_{2i+2-2n}(t, 1), & n \leqq i \leqq \frac{3}{2} n - 1 \\ t\psi_{2i+2-3n}(t, 1), & \frac{3}{2} n \leqq i \leqq 2n - 1 \end{cases}$$

sowie

$$\bar{b}_i(\tau) = \frac{1}{2} \tau^{2j+1} \begin{cases} \psi_{2i}(1, \tau), & 0 \leqq i \leqq \frac{n}{2} - 1 \\ \tau\varphi_{2i-n}(1, \tau), & \frac{n}{2} \leqq i \leqq n - 1 \\ \tau\varphi_{2i+1-2n}(1, \tau), & n \leqq i \leqq \frac{3}{2} n - 1 \\ \psi_{2i+1-3n}(1, \tau), & \frac{3}{2} n \leqq i \leqq 2n - 1 \end{cases}$$

gelten. Für ungeradzahlige n sind die $\bar{a}_i$, $\bar{b}_i$ analog definiert.

3.5. Es sei

$$a(t) = \sum_{j=0}^{m-1} p_j t^{2j+1}.$$

Die Kerne R_i, k_i der Operatoren K_i, T_i ergeben sich für $i = 0, 1, 2, \ldots$ aus

$$\mathsf{R}_{2i}(t, \sigma, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{j_1,\ldots,j_{2i}=0}^{m-1} \prod_{l=1}^{2i} p_{j_l}[\sigma\tilde{\mathsf{S}}_{2i}(t, \sigma, j)\, \overline{\mathsf{S}}_{2i}(1, \tau, j) + \tau t\overline{\mathsf{S}}_{2i}(t, \sigma, j)\, \tilde{\mathsf{S}}_{2i}(1, \tau, j)],$$

$$\mathsf{R}_{2i+1}[t, \sigma, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{j_1,\ldots,j_{2i+1}=0}^{m-1} \prod_{l=1}^{2i+1} p_{j_l}[\tau\tilde{\mathsf{S}}_{2i+1}(t, \sigma, j)\, \overline{\mathsf{S}}_{2i+1}(1, \tau, j) + \sigma t\overline{\mathsf{S}}_{2i+1}(t, \sigma, j)\, \tilde{\mathsf{S}}_{2i+1}(1, \tau, j)],$$

$$k_{2i}(t, \tau) = -\frac{1}{2} \sum_{j_1,\ldots,j_{2i}=0}^{m-1} \tau^{2j_{2i}+1} \prod_{l=1}^{2i} p_{j_l}[\tau\overline{\mathsf{S}}_{2i-1}(1, \tau, j)\, \tilde{\mathsf{S}}_{2i}(t, 1, j) + t\tilde{\mathsf{S}}_{2i-1}(1, \tau, j)\, \overline{\mathsf{S}}_{2i}(t, 1, j)],$$

$$k_{2i+1}(t, \tau) = -\frac{1}{2} \sum_{j_1,\ldots,j_{2i+1}=0}^{m-1} \tau^{2j_{2i+1}+1} \prod_{l=1}^{2i+1} p_{j_l}[\overline{\mathsf{S}}_{2i}(1, \tau, j)\, \tilde{\mathsf{S}}_{2i+1}(t, 1, j) + \tau t\tilde{\mathsf{S}}_{2i}(1, \tau, j)\, \overline{\mathsf{S}}_{2i+1}(t, 1, j)]$$

mit

$$\tilde{\mathsf{S}}_i(t, \sigma, j) = \frac{1}{2^i} \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \frac{\sigma^{2\tilde{\mathsf{J}}_{ik}} t^{2\bar{\mathsf{I}}_{ik}}}{\prod\limits_{l=k+1}^{i} \tilde{\mathsf{J}}_{lk} \prod\limits_{l=1}^{k} \bar{\mathsf{I}}_{lk}}$$

und

$$\bar{S}_{2i}(t, \sigma, j) = \frac{1}{2^i} \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \frac{\sigma^{2\bar{J}_{ik}} t^{2\bar{I}_{ik}}}{\prod\limits_{l=k+1}^{i} \bar{J}_{lk} \prod\limits_{l=1}^{k} \bar{I}_{lk}}.$$

Hierbei werden die Konstanten

$$\bar{J}_{ik} = \begin{cases} \sum\limits_{l=k/2+1}^{i/2} (j_{2l} + j_{2l-1} + 3) & (i,\ k \text{ gerade}) \\ \sum\limits_{l=(k+1)/2}^{i/2-1} (j_{2l} + j_{2l+1} + 3) + j_i + 1 & (i \text{ gerade};\ k \text{ ungerade}) \\ \sum\limits_{l=(k+1)/2}^{(i-1)/2} (j_{2l} + j_{2l+1} + 3) & (i,\ k \text{ ungerade}) \\ \sum\limits_{l=k/2+1}^{(i-1)/2} (j_{2l} + j_{2l-1} + 3) + j_i + 2 & (i \text{ ungerade};\ k \text{ gerade}) \end{cases}$$

und

$$\bar{J}_{ik} = \begin{cases} \sum\limits_{l=k/2+1}^{i/2} (j_{2l} + j_{2l-1} + 3) & (i,\ k \text{ gerade}) \\ \sum\limits_{l=(k+1)/2}^{i/2-1} (j_{2l} + j_{2l+1} + 3) + j_i + 2 & (i \text{ gerade};\ k \text{ ungerade}) \\ \sum\limits_{l=k/2+1}^{(i-1)/2} (j_{2l} + j_{2l-1} + 3) + j_i + 1 & (i \text{ ungerade};\ k \text{ gerade}) \\ \sum\limits_{l=(k+1)/2}^{(i-1)/2} (j_{2l} + j_{2l+1} + 3) & (i,\ k \text{ ungerade}) \end{cases}$$

sowie

$$\bar{I}_{ik} = \sum_{l=i}^{k} (j_l + 1) + \begin{cases} \dfrac{k-i}{2} + 1 & (i,\ k \text{ ungerade}) \\ \dfrac{k-i}{2} & (i,\ k \text{ gerade}) \\ \dfrac{k-i+1}{2} & (k-i \text{ ungerade}) \end{cases}$$

und

$$\bar{I}_{ik} = \sum_{l=i}^{k} (j_l + 1) + \begin{cases} \dfrac{k-i}{2} & (i,\ k \text{ ungerade}) \\ \dfrac{k-i}{2} + 1 & (i,\ k \text{ gerade}) \\ \dfrac{k-i+1}{2} & (k-i \text{ ungerade}) \end{cases}$$

verwendet. Für gerades n erhält man aus (6) die Integralgleichung

$$x_n(t) = h_n(t) - \int_{-1}^{1} \left[\sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j_1,\ldots,j_{2i}=0}^{m-1} \prod_{l=1}^{i} p_{j_l} \sum_{q=1}^{4} a_i^{(q)}(t)\, b_i^{(q)}(\tau) \right] x_n(\tau)\, d\tau. \tag{14}$$

Hier sind die $a_i^{(q)}(t)$, $b_i^{(q)}(\tau)$ durch

$$a_i^{(1)}(t) = \tilde{S}_{2i}(t, 1, j), \quad a_i^{(2)}(t) = t\bar{S}_{2i}(t, 1, j), \quad a_i^{(3)}(t) = \tilde{S}_{2i-1}(t, 1, j),$$
$$a_i^{(4)}(t) = t\bar{S}_{2i-1}(t, 1, j);$$
$$b_i^{(1)}(\tau) = \frac{1}{2}\,\tau^{2j_{ii}+2}\bar{S}_{2i-1}(1, \tau, j), \quad b_i^{(2)}(\tau) = \frac{1}{2}\,\tau^{2j_{ii}+1}\tilde{S}_{2i-1}(1, \tau, j),$$
$$b_i^{(3)}(\tau) = \frac{1}{2}\,\tau^{2j_{ii+1}+1}\bar{S}_{2i-2}(1, \tau, j), \quad b_i^{(4)}(\tau) = \frac{1}{2}\,\tau^{2j_{ii+1}+2}\tilde{S}_{2i-2}(1, \tau, j)$$

definiert. Für ungerades n gelten analoge Beziehungen.

Bemerkung: Die Integralgleichung (6) für die Approximierende x_n der Lösung des Randwertproblems (1)—(2) besitzt für Polynomkoeffizienten $a(t)$ einen entarteten Kern. Allgemeine Koeffizienten $a(t) \in C^n[-1, +1]$ sind dann durch geeignete Polynome so zu approximieren, daß der Fehler in der Größenordnung des Fehlers der Näherungsintegralgleichung (6) liegt. Das kommt einem Ersetzen des Kernes durch einen ausgearteten gleich. Man kann auch nach Konstruktion der Näherungsgleichung (6) diese mit einem bekannten Verfahren (z. B. Ersetzen des Kernes durch einen ausgearteten) näherungsweise lösen. Hierzu wurden keine vergleichenden Untersuchungen vorgenommen.

4. Beispiele

4.1. Es wird $a(t) = \text{const} = 1$ gewählt und das Randwertproblem

$$x''(t) = x(t),$$
$$x(-1) = -1, \quad x(1) = 1$$

betrachtet. Die exakte Lösung lautet

$$x(t) = \frac{e^{1+t} - e^{1-t}}{e^2 - 1}.$$

Die hier vorgelegte Methode ergibt für $n = 3$ die Näherungslösung

$$x_3(t) = t - 0{,}3130352t\,\frac{1 - t^2}{2} + 0{,}0608941t\,\frac{(1 - t^2)^2}{2^2 \cdot 2!}$$
$$- 0{,}0085645617t\,\frac{(1 - t^2)^3}{2^3 \cdot 3!}.$$

Diese erfüllt die Randbedingungen, und zusätzlich ist $x_3(0) = x(0)$.

t	$x_3(t)$	$x(t)$	$\lvert x(t) - x_3(t)\rvert$
0,0	0,0	0,0	0,0
0,25	0,2149520	0,2149525	$5 \cdot 10^{-7}$
0,5	0,4434091	0,4434095	$4 \cdot 10^{-7}$
1,0	1,0	1,0	0,0

4.2. Es wird $a(t) = t$ gewählt und das Randwertproblem

$$x''(t) = tx(t) + 2 - t^3,$$
$$x(-1) = x(1) = 1$$

betrachtet. Die exakte Lösung lautet $x(t) = t^2$. Als Näherungslösung erhält man für $n = 3$

$$x_3(t) = t^2 + 0{,}0000004t^4 - 0{,}0000005t^6 + 0{,}0000002t^{10}.$$

t	$x_3(t)$	$x(t)$	$\lvert x(t) - x_3(t)\rvert$
0,0	0,0	0,0	0,0
0,25	0,0625	0,0625	$< 10^{-8}$
0,5	0,25	0,25	$1{,}7 \cdot 10^{-8}$
1,0	1,0000001	1,0	$1 \cdot 10^{-7}$

4.3. Es wird $a(t) = t^2$ gewählt und das Randwertproblem

$$x''(t) = t^2 x(t) - t^3,$$

$$x(-1) = -1, \qquad x(1) = 1$$

betrachtet. Die exakte Lösung lautet $x(t) = t$. Als Näherungslösung erhalten wir für $n = 3$

$$x_3(t) = t - 0{,}0000001t\,\frac{(1-t^4)^2}{4^2 \cdot 2!} - 0{,}0001005t\,\frac{(1-t^4)^4}{4^4 \cdot 4!}.$$

t	$x_3(t)$	$x(t)$	$\lvert x(t) - x_3(t)\rvert$
0,0	0,0	0,0	0,0
0,25	0,25	0,25	$< 10^{-8}$
0,5	0,5	0,5	$< 10^{-8}$
1,0	1,0	1,0	0,0

LITERATUR

[1] Березин, И. С., и Н. П. Жидков: Методы вычислений II. Изд.-во Физматгиз: Москва 1962.

[2] Berger, G.: Überführung des Randwertproblems 1. Art zur gewöhnlichen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung in eine Fredholmsche Integralgleichung mit glattem Kern. Wiss. Zeitschr. MLU Halle, Naturwiss. Reihe, Bd. **31** (5) 1982, S. 135—140.

[3] Краснов, М. Л.: Интегральные уравнения. Изд.-во Наука: Москва 1975.

[4] Мамедов, Я. Д., и С. Аширов: Нелинейные уравнения Вольтерра. Изд.-во Ылым: Ашхабад 1977.

Manuskripteingang: 15. 04. 1981; Eingang einer revidierten Fassung: 22. 01. 1982

VERFASSER:

Prof. Dr. Jachja Djafarovitsch Mamedov
Lehrstuhl für Numerische Mathematik
der Aserbaidshanischen Staatlichen Universität „S. M. Kirov" Baku
UdSSR-370073 Baku, ul. P. Lumumbij 23

Dr. Gerd Berger und Dr. Hartmut Dörner
Organisations- und Rechenzentrum der Martin-Luther-Universität
Halle—Wittenberg
DDR-4020 Halle (Saale), Weinbergweg 17