Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (1) (1983), S. 41–49

Existenzsätze für einige Randsteuerprobleme bei verallgemeinerten analytischen Funktionen

D. Oestreich

Es werden das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem bei analytischen und verallgemeinerten analytischen Funktionen sowie das Riemannsche und damit in Zusammenhang stehende Randsteuerprobleme betrachtet. Für diese Probleme werden Existenzsätze für den Fall bewiesen, daß die Kostenfunktionale als Integrale gegeben sind, Nebenbedingungen auftreten und die Koeffizienten in der Randbedingung (stückweise) Hölder-stetig sind.

Рассматриваются краевая задача управления Римана-Гильберта для аналитических и обобщенно аналитических функций, краевая задача управления Римана и подобные проблемы. Для этих задач доказываются теоремы существования для того случая, когда функционалы стоимости заданы интегралом, имеются ограничения и коэффициенты в граничном условии являются (кусочно) Гельдеровыми функциями.

There are considered the Riemann-Hilbert boundary control problem with analytic and generalized analytic functions, the Riemann and similar boundary control problems. Existence theorems are proved for these problems with integral cost functionals, constraints and (piecewise) Hölder-continuous coefficients in the boundary condition.

In dieser Arbeit werden Existenzsätze für einige Randsteuerprobleme, insbesondere für das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem, bei analytischen und verallgemeinerten analytischen Funktionen aufgestellt. Der Beweis des Existenzsatzes für das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem bei analytischen Funktionen stützt sich dabei auf die explizite Darstellung der Lösung des entsprechenden Riemann-Hilbert-Problems; die Benutzung einer a-priori-Abschätzung der Lösung scheint uns wegen deren vom Index abhängigen Darstellung im allgemeinen nicht möglich. Der Existenzbeweis des Riemann-Hilbertschen Randsteuerproblems bei verallgemeinerten analytischen Funktionen — hier lassen sich die Zustandsfunktionen nicht explizit angeben — beruht auf der Zurückführung dieses Problems auf das erstere. Weiterhin betrachten wir das Riemannsche Randsteuerproblem, sowie das Problem der gesteuerten Richtungsableitung bei verallgemeinerten analytischen Funktionen. Diese Probleme lassen sich entweder analog wie das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem behandeln bzw. ebenfalls darauf zurückführen.

Existenzsätze für das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem wurden von v. Wolfersdorf [9] für den Fall betrachtet, daß die rechte Seite der Randbedingung linear von der Steuerfunktion abhängt. Für andere optimale Steuerprobleme bei (in komplexer Form geschriebenen) elliptischen Differentialgleichungen wurden Existenzaussagen vom gleichen Autor [10, 11] sowie von C. und Cl. Simionescu [6] gemacht. Das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem gestattet Anwendungen auf einige Fragen der Theorie des momentefreien Spannungszustandes von Schalen [7, 8].

§ 1. Das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem

Sei D ein (endliches oder unendliches) Gebiet in der komplexen Ebene $\mathbf{C}$, das von einer geschlossenen Ljapunowkurve begrenzt wird [5: § 43].

Formulierung des Problems: Gesucht werden eine in D holomorphe, sowie auf Γ stetig fortsetzbare Zustandsfunktion $w(z)$ und eine Hölder-stetige Steuerfunktion $u(\cdot) \in U$, die die Randbedingung

$$\begin{aligned} &a\big(t, u(t)\big) \operatorname{Re} w(t) + b\big(t, u(t)\big) \operatorname{Im} w(t) \\ &\equiv \operatorname{Re} \left[\overline{\lambda\big(t, u(t)\big)}\, w\right] = c\big(t, u(t)\big) \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \tag{1}$$

erfüllen, den Nebenbedingungen[1])

$$\left.\begin{aligned} &M_k{}^0\big(t, w(t), u(t)\big) \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad t \in \Gamma \quad \text{und} \quad k \in K_1{}^0, \\ &M_k{}^*\big(z, w(z)\big) \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad z \in D \quad \text{und} \quad k \in K_1{}^*, \\ &N_k{}^0 = \int_\Gamma n_k{}^0\big(t, w(t), u(t)\big)\, dt \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad k \in K_2{}^0, \\ &N_k{}^* = \iint_D n_k{}^*\big(z, w(z)\big)\, dx\, dy \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad k \in K_2{}^* \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

genügen und das Kostenfunktional

$$J(u) = J^0 + J^* \tag{3}$$

mit[1])

$$J^0 = \int_\Gamma F^0\big(t, w(t), u(t)\big)\, dt \tag{3.1}$$

$$J^* = \iint_D F^*\big(z, w(z)\big)\, dx\, dy \tag{3.2}$$

minimieren.

Dabei sind $a, b, c, M_k{}^0, M_k{}^*, n_k{}^0, n_k{}^*, F^0, F^*$ vorgegebene reellwertige Funktionen, $K_i{}^0$ und $K_i{}^*$ $(i = 1, 2)$ beliebige Indexmengen. Die Koeffizientenfunktion $\lambda = a + ib$ genügt für jedes $u(\cdot) \in U$ der *Normalitätsbedingung*

$$\lambda(t, u) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad t \in \Gamma. \tag{4}$$

Weiter machen wir folgende *Voraussetzungen*:

1. Die Steuermenge U ist eine in $H\mu(\Gamma)$[2]), $0 < \mu < 1$, beschränkte und in $C(\Gamma)$ abgeschlossene Menge mit dem Steuerbereich Ω.
2. Für alle $u \in \Omega$ sind $a(\cdot, u), b(\cdot, u), c(\cdot, u) \in H\mu(\Gamma)$ gleichmäßig bezüglich $u \in \Omega$ und alle $a(t, \cdot), b(t, \cdot), c(t, \cdot) \in H_1(\Omega)$ gleichmäßig bezüglich $t \in \Gamma$.
3. $M_k{}^0, n_k{}^0, F^0$ bzw. $M_k{}^*, n_k{}^*, F^*$ sind stetig hinsichtlich (w, u) bzw. w für alle $t \in \Gamma$ bzw. $z \in D$ und meßbar hinsichtlich $t \in \Gamma$ bzw. $z \in D$ für alle (w, u) bzw. w.

---

[1]) Falls in den Nebenbedingungen oder Kostenfunktionalen Funktionen mit Komplexen Argumenten auftreten, verstehen wir im weiteren darunter stets (reellwertige) Funktionen dieser Argumente, also zum Beispiel

$$M_k{}^0(t, w(t), u(t)) \doteq M_k{}^0(t, \bar{t}, w(t), \overline{w(t)}, u(t)).$$

[2]) Im weiteren bezeichnen wir reelle Hölderräume mit dem Exponenten μ durch H_μ und komplexe durch C_μ.

Wie üblich bezeichnet

$$n(u) = \frac{1}{2\pi}[\arg \lambda(t, u)]_\Gamma \tag{5}$$

den *Index* des Riemann-Hilbertschen Randsteuerproblems mit stetigen Koeffizienten. Falls $n \geqq 0$ ist, stellen wir an die Zustandsfunktion w folgende *Zusatzbedingungen*:

$$\operatorname{Im}\left[\overline{\lambda(t_k, u(t_k))}\, w(t_k)\right] = h_k^0(u) \quad (k = 1, 2, \ldots, 2r + 1), \tag{6.1}$$

wobei $0 \leqq r \leqq n$ eine fixierte ganze Zahl, t_k $(k = 1, 2, \ldots, 2r + 1)$ fixierte Punkte auf Γ und h_k^0 vorgegebene reellwertige auf $C(\Omega)$ stetige Funktionale sind. Im Falle $n > 0$ und $r < n$ gelte weiterhin:

$$w(z_l) = h_l^*(u) \qquad (l = 1, 2, \ldots, n - r), \tag{6.2}$$

wo z_l $(l = 1, 2, \ldots, n - r)$ vorgegebene Punkte im Innern von D und h_l^* gegebene komplexwertige auf $C(\Omega)$ stetige Funktionale darstellen.

Bemerkung: Die Zusatzbedingungen können auch in Form einer Integralbedingung

$$\int_\Gamma \operatorname{Im}\left[\overline{\lambda(t, u(t))}\; w\right] \varrho(t)\, ds = h^0(u) \tag{6.1'}$$

und den Bedingungen

$$w(z_l) = h_l^*(u) \qquad (l = 1, 2, \ldots, n) \tag{6.2'}$$

gegeben sein, wobei $\varrho(t) \in L_1(\Gamma)$ eine vorgegebene positive Funktion auf Γ und h^0 ein reellwertiges auf $C(\Omega)$ stetiges Funktional sind. (Zur Verallgemeinerung auf den Fall von $2r + 1$ Bedingungen der Form (6.1′) und $n-r$ Bedingungen der Form (6.2′) siehe J. Nitsche [12].)

Satz 1: *Der Index $n = n(u)$ sei konstant für alle $u(\cdot) \in U$. Falls $n \geqq 0$ ist, erfülle die Zustandsfunktion die Zusatzbedingungen* (6) (*bzw.* (6′)). *Im Falle eines unbeschränkten Gebietes D konvergiere das Integral* (3.2) *gleichmäßig für jede kompakte Teilmenge aus $\mathbf{C}_r^2$, wenn $n \leqq 0$, bzw. für $(w, \overline{w}) \in \mathbf{C}^2$, wenn $n > 0$ ist. Dann hat das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem, falls mindestens eine zulässige Lösung existiert, unter den Voraussetzungen* 1—3 (*mindestens*) *eine* optimale *Lösung* $(u_0, w_0) \in H_\mu(\Gamma) \times C_\mu(\overline{D})$.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall, daß D das Kreisgebiet $|z| < 1$ ist. Sei $n \geqq 0$. Wir fixieren $u(\cdot) \in U$. Das zugehörige Riemann-Hilbert-Problem hat die allgemeine Lösung [5: § 41]:

$$w(z, u) = w^0(z, u) + \sum_{i=1}^{2n+1} d_i w^i(z, u). \tag{7}$$

Hierbei sind w^0 eine spezielle Lösung des inhomogenen Problems, d_i reelle Konstanten und w^i $(i = 1, 2, \ldots, 2n + 1)$ ein vollständiges Lösungssystem des homogenen Problems. Diese Funktionen lassen sich explizit angeben [5: § 41]. Die Konstanten d_i, die im allgemeinen von u abhängen, können aus den Zusatzbedingungen (6) (bzw. (6′)) eindeutig bestimmt werden und sind von u stetig abhängig [7: S. 232—233]. Es existiert also für jedes $u(\cdot) \in U$ genau eine Zustandsfunktion $w(\cdot) \in C_\mu(\overline{D})$ [5: § 21].

Für $n < 0$ hat das zugehörige Riemann-Hilbert-Problem bei fixiertem $u(\cdot) \in U$ bei Erfüllung von $-2n - 1$ Lösbarkeitsbedingungen, die die Form verschwindender hinsichtlich u nichtlinearer Integrale besitzen [5: § 41], eine eindeutige Lösung.

Wir bezeichnen mit $Z = U_0 \times W_0$ die Menge der zulässigen Lösungen (u, w) des Riemann-Hilbertschen Randsteuerproblems, d. h. alle Paare $u(\cdot) \in U$ und die zugehörigen w, die den Nebenbedingungen (2), sowie im Falle $n < 0$ den Lösbarkeitsbedingungen [5: § 41] genügen. Wir wählen eine Minimalfolge $(u_n, w_n) \in Z$ für das Kostenfunktional (3), d. h. $J_n = J(u_n) \to \inf\limits_{u \in U_0} J(u)$ für $n \to \infty$.
Aus der Voraussetzung 1 und der vollstetigen Einbettung von $H_\mu(\Gamma)$ in $C(\Gamma)$ folgt die Existenz einer Teilfolge $\{u_n\} \in U_0$ mit der Eigenschaft

$$u_n \xrightarrow{C(\Gamma)} u_0 \in U.$$

Dieser Folge entspricht eine Folge $\{w_n\} \in W_0$. Wir benutzen nunmehr die explizite Darstellung von $w_n = w(u_n)$ [5: § 41]. Der darin eingehende singuläre Operator ist in $C_\mu(\Gamma)$ und $L_2(\Gamma)$ beschränkt [3: Kap. II]. Da $C_\mu(\Gamma)$ eine Banachsche Algebra ist und mit Hilfe des Maximumprinzips für holomorphe Funktionen läßt sich zeigen, daß

$$w_n \xrightarrow{C(\bar{D})} w_0 = w(u_0),$$

falls das Gebiet D beschränkt ist.

Im Falle eines unbeschränkten Gebietes D kann man stets eine (kompakte) Teilmenge $\tilde{D} \subset D$ hinreichend groß wählen, so daß für jedes beliebig fixierte $\varepsilon > 0$

$$|J(u) - \tilde{J}(u)| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{8}$$

mit

$$\tilde{J}(u) = J^0 + \iint\limits_{\tilde{D}} F^*\big(z, w(z)\big)\, dx\, dy \tag{3.2'}$$

ist. Demnach ist auch $w_n \xrightarrow{C(\tilde{D})} w_0$. Dann ergibt sich nach Voraussetzung 3

$$J(u_n) \to J(u_0) \tag{9}$$

bzw. $\tilde{J}(u_n) \to J(u_0)$ und wegen (8) gleichfalls (9). Also gilt $J(u_0) = \inf\limits_{u \in U} J(u)$. Offensichtlich genügt $(u_0, w_0) \in H_\mu(\Gamma) \times C_\mu(\bar{D})$ den Nebenbedingungen (2), sowie für $n < 0$ den Lösbarkeitsbedingungen, d. h. (u_0, w_0) ist eine optimale Lösung.

Sei D nunmehr ein einfach-zusammenhängendes Gebiet. Dann läßt sich das Problem mittels konformer Abbildung ([2: Kap. X]; siehe auch [7; S. 17]) auf das Problem für den Kreis zurückführen ▮

Anmerkung 1: Der Index $n(u)$ braucht nicht notwendig konstant zu sein; es genügt dessen Beschränktheit, falls für $n(u) \geq 0$ die Anzahl der Zusatzbedingungen in Abhängigkeit von $n(u)$ gegeben ist. Dabei gilt es zu beachten, daß bei Änderung des Index die Normalitätsbedingung (4) nicht verletzt wird, da sonst die Lösungen der entsprechenden Randwertaufgaben entarten. Das ist gewährleistet, wenn der Steuerbereich in disjunkte Mengen zerfällt, die konstanten Werten des Index entsprechen.

Anmerkung 2: Falls keine Nebenbedingungen der Form (2) gegeben sind, kann für $n \geq 0$ die Forderung, daß das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem eine zulässige Lösung besitzt, entfallen.

§ 2. Das Randsteuerproblem A (Riemann-Hilbertsches Randsteuerproblem bei verallgemeinerten analytischen Funktionen)

Sei D ein einfach-zusammenhängendes Gebiet der komplexen Ebene, das von einer geschlossenen Ljapunowkurve Γ berandet wird.

Problemstellung: Gesucht werden eine reguläre Lösung der Differentialgleichung

$$\widehat{\partial \bar{z} w} + A(z)\, w + B(z)\, \overline{w} = F(z) \tag{10}$$

($A, B, F \in L_p(D)$, $p > 2$) im Gebiet D und eine Steuerfunktion $u(\cdot) \in U$, die die Randbedingung (1) erfüllen, den Nebenbedingungen (2) genügen und das Kostenfunktional (3) minimieren; $\lambda = a + ib$ genüge für jedes $u(\cdot) \in U$ der Normalitätsbedingung (4).

Satz 2: *Der Index $n = n(u) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg \lambda(t, u(t))\right]_\Gamma$ sei konstant für alle $u(\cdot) \in U$. Falls $n \geq 0$, erfülle die Zustandsfunktion w die Zusatzbedingungen* (6) (*bzw.* (6′)). *Außerdem erfülle im Falle eines unbeschränkten Gebietes D das Integral* (3.2) *dieselben Bedingungen wie in Satz* 1. *Dann hat das Randsteuerproblem* A, *falls es mindestens eine zulässige Lösung besitzt, unter den Voraussetzungen* 1—3 (*mindestens*) *eine* optimale *Lösung* $(u_0, w_0) \in H_\mu(\Gamma) \times C_\nu(\overline{D})$, $\nu = \min\left(\mu, \frac{p-2}{p}\right)$.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir für den Koeffizienten λ: $|\lambda(t, u(t))| = 1$ annehmen. Sei $u(\cdot) \in U$ fixiert. Wir erhalten dann das bekannte Riemann-Hilbert-Problem für verallgemeinerte analytische Funktionen (von I. N. Vekua auch Aufgabe A genannt) [7: S. 182]. Wir betrachten zunächst den Fall $n \geq 0$. Unter den Zusatzbedingungen (6) (bzw. (6′)) hat die entsprechende Aufgabe A dann eine eindeutige Lösung $w(z) \in C_\nu(D)$, $\nu = \min\left(\mu, \frac{p-2}{p}\right)$ [7: S. 232, 183]. Diese Lösung läßt sich darstellen in der Form $w = W^0 + W^1$, wobei W^0 eine geeignete Lösung der homogenen Differentialgleichung zu (10) und W^1 eine spezielle Lösung von (10) sind. Es gilt:

$$W^0(z, u) = \Phi(z, u)\, e^{\omega(z, u)}, \tag{11.1}$$

$$\omega(z, u) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_D \left(A + B \frac{\overline{W^0}}{W^0}\right) \frac{d\xi\, d\eta}{\zeta - z}, \tag{11.2}$$

$$W^1(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \Omega_1(z, \zeta)\, F(\zeta)\, d\xi\, d\eta - \frac{1}{\pi} \iint\limits_D \Omega_2(z, \zeta)\, \overline{F(\zeta)}\, d\xi\, d\eta, \tag{12}$$

wobei $\Phi(z, u)$ eine in D holomorphe Funktion ist, die der Randbedingung

$$\operatorname{Re}\left[\overline{\lambda^0(t, u(t))}\, \Phi(z, u)\right] = c^0(t, u(t)) \quad \text{auf } \Gamma \tag{13}$$

mit

$$\overline{\lambda^0(t, u(t))} = \overline{\lambda(t, u(t))}\, e^{\omega(t, u)}, \tag{13.1}$$

$$c^0(t, u(t)) = c(t, u(t)) - \operatorname{Re}\left[\overline{\lambda(t, u(t))}\, W^1\right] \tag{13.2}$$

genügt [7: S. 183] und Ω_i ($i = 1, 2$) die Grundkerne der Differentialgleichung (10) sind, die nur von deren Koeffizienten A und B abhängen [7: Kap. III, § 8]. (Aus den Formeln (11) erkennt man, daß die Lösung dieses Problems hier *nicht* explizit gegeben ist.) Somit ist W^1 unabhängig von u und gehört außerdem zur Klasse $C_\nu(\overline{D})$. Offensichtlich hat das Riemann-Hilbert-Problem (13) für Φ gleichfalls eine eindeutige Lösung, da Φ analogen Zusatzbedingungen wie (6) (bzw. (6')) genügt. Der Index n bleibt gleichfalls unverändert [7: S. 195].

Für $n < 0$ existiert eine Lösung der Aufgabe A nur bei Erfüllung gewisser Lösbarkeitsbedingungen [7: Kap. IV, § 4].

Sei $\{u_n\}$ eine Minimalfolge des Ausgangsproblems und $w_n = W_n^0 + W^1$ die zugehörige Folge der Zustandsfunktionen. Es läßt sich eine Teilfolge $\{u_n\}$ derart wählen, daß $u_n \xrightarrow{C(\Gamma)} u_0 \in U$. Wegen $\|\omega_n\|_{C_\nu(\overline{D})} \leqq \text{const}$ [7: S. 125] ist infolge der Lösungsstellung (11.1) für die Kompaktheit von $\{w_n\}$ die Kompaktheit von $\{\Phi_n\}$ notwendig und hinreichend. Diese ergibt sich analog wie im Beweis von Satz 1. Somit existiert eine Teilfolge $\{w_n\}$: $w_n \xrightarrow{C(\overline{D})} w^*$. Folglich gilt

$$\widehat{\partial_{\bar z} w_n} = -A(z)\, w_n - B(z)\, \overline{w}_n + F(z) \xrightarrow{C(\overline{D})} -A(z)\, w^* - B(z)\, \overline{w}^* + F(z)$$

und wegen der Abgeschlossenheit des Operators $\widehat{\partial_{\bar z}}$ (vgl. [7: Kap. III])

$$\partial_{\hat{\bar z}} w^* = A(z)\, w^* + B(z)\, \overline{w}^* + F(z). \tag{10'}$$

Offensichtlich genügt w^* auch der Randbedingung (1) sowie den Zusatzbedingungen (6) (bzw. (6')) mit $u(t) = u_0(t)$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung ergibt sich $w^* = w_0 = w(u_0)$. Daher gilt $J(u_n) \to J(u_0)$, also $J(u_0) = \inf_{u \in U} J(u)$.

Für $n < 0$ läßt sich zeigen, daß u_0 den entsprechenden Lösbarkeitsbedingungen genügt, d. h. (u_0, w_0) ist zulässig. Somit ist $(u_0, w_0) \in H_\mu(\Gamma) \times C_\nu(\overline{D})$ in beiden Fällen optimale Lösung des Randsteuerproblems A. ∎

§ 3. Weitere Randsteuerprobleme. Einige Verallgemeinerungen

a) Ein ähnlicher Existenzsatz wie für das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem läßt sich für das *Riemannsche Randsteuerproblem*[3]) formulieren.

Problemstellung: Sei Γ ein geschlossenes Ljapunowsches Kurven*system*, das die komplexe Zahlenebene in die Mengen D^+ und D^- zerlegt. Gesucht werden eine stückweise holomorphe Zustandsfunktion $w(z)$ mit dem Randkurvensystem Γ, die im Unendlichen eine endliche Ordnung hat, und eine Steuerfunktion $u(\cdot) \in U$, die die Randbedingung

$$w^+(t) = G\big(t, u(t)\big)\, w^-(t) + g\big(t, u(t)\big) \quad \text{auf } \Gamma^{4)} \tag{14}$$

erfüllen, den Nebenbedingungen

$$\left.\begin{aligned}
&M_k{}^0\big(z, w^+(t), w^-(t), u(t)\big) \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad t \in \Gamma \quad \text{und} \quad k \in K_1{}^0,\\
&M_k{}^\pm\big(z, w(z)\big) \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad z \in D^\pm \quad \text{und} \quad k \in K_1{}^\pm,\\
&N_k{}^0 = \int_\Gamma n_k{}^0\big(t, w^+(t), w^-(t), u(t)\big)\, dt \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad k \in K_2{}^0,\\
&N_k{}^\pm = \iint_{D^\pm} n_k{}^\pm\big(z, w(z)\big)\, dx\, dy \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad k \in K_2{}^\pm
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

---

[3]) Für das zugehörige Randwertproblem gibt es in der Literatur keine einheitliche Bezeichnung. N. I. MUSCHELISCHWILI [5] verwendet den Terminus „Kopplungsproblem".

[4]) $w^+(t)$ bzw. $w^-(t)$ bezeichnen die Randwerte von $w(t)$, wenn wir zum Grenzwert $z \to t$ von links ($z \in D^+$) bzw. von rechts ($z \in D^-$) übergehen.

genügen und das Kostenfunktional

$$J(u) = J^0 + J^+ + J^- \tag{16}$$

mit

$$J^0 = \int_\Omega F^0\big(t, w^+(t), w^-(t), u(t)\big)\, dt, \tag{16.1}$$

$$J^\pm = \iint_{D^\pm} F^\pm\big(z, w(z)\big)\, dx\, dy \tag{16.2}$$

minimieren. Dabei sind G, g bzw. $M_k{}^0$, $M_k{}^\pm$, $n_k{}^0$, $n_k{}^\pm$, F^0, $F^\pm$ vorgegebene komplex- bzw. reellwertige Funktionen. Die Funktion G genüge für jedes $u(\cdot) \in U$ der *Normalitätsbedingung*

$$G(t, u) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad t \in \Gamma. \tag{17}$$

Wir machen folgende *Voraussetzungen*:

1. U ist beschränkt in $C_\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < 1$, und abgeschlossen in $C(\Gamma)$ und habe den Steuerbereich Ω.
2. Es sind $G(\cdot, u), g(\cdot, u) \in C_\mu(\Gamma)$ gleichmäßig bezüglich $u \in \Omega$ und $G(t, \cdot), g(t, \cdot) \in C_1(\Omega)$ gleichmäßig bezüglich $t \in \Gamma$.
3. $M_k{}^0$, $M_k{}^\pm$, $n_k{}^0$, $n_k{}^\pm$, F^0, $F^\pm$ erfüllen dieselben Voraussetzungen wie in § 1, wobei wir auf Γ unter $w = (w^+, w^-)$ verstehen.

Mit

$$\varkappa(u) = \frac{1}{2\pi} \big[\arg G\big(t, u(t)\big)\big]_\Gamma \tag{18}$$

bezeichnen wir den *Index* des Problems.

Satz 3: *Die Ordnung der Zustandsfunktionen im Unendlichen sei nicht größer als p, der Index $\varkappa = \varkappa(u)$ konstant für alle $u(\cdot) \in U$. Für $\varkappa > -p - 1$ erfülle die Zustandsfunktion in $\varkappa + p + 1$ Punkten folgende Zusatzbedingungen:*

$$w(z_i, u) = h_i(u) \qquad (z_i \notin \Gamma; \qquad i = 1, 2, \ldots, \varkappa + p + 1), \tag{19}$$

wobei h_i (komplexwertige) auf $C(\Omega)$ stetige Funktionale sind. Weiterhin sei das Integral $J^-(w)$ gleichmäßig konvergent für jede kompakte Teilmenge aus $\mathbf{C}^2$, falls $\varkappa \leq -p$, bzw. für $(w, \overline{w}) \in \mathbf{C}^2$, falls $\varkappa > -p$. Dann hat das Riemannsche Randsteuerproblem, falls es mindestens eine zulässige Lösung besitzt, unter den Voraussetzungen 1—3 eine optimale *Lösung.*

Der Beweis erfolgt nach demselben Schema wie in § 1 auf Grundlage der expliziten Darstellung der Lösung der entsprechenden Randwertaufgaben [5: § 37].

b) Das folgende *Randsteuerproblem* B (Problem der gesteuerten Richtungsableitung bei verallgemeinerten analytischen Funktionen) läßt sich auf das oben betrachtete Randsteuerproblem A zurückführen.

Problemstellung: Gesucht sind eine Zustandsfunktion $w(x, y)$, die ein einem einfach-zusammenhängenden Gebiet D, das von einer Ljapunowkurve Γ berandet wird, die Differentialgleichung

$$\Delta w + A(x, y)\, w_x + B(x, y)\, w_y = F(x, y) \tag{20}$$

($A, B, F \in L_p(D)$, $p > 2$) erfüllt, und eine Steuerfunktion $u(\cdot) \in U$, die auf Γ der Randbedingung

$$a\big(t, u(t)\big)\, w_x + b\big(t, u(t)\big)\, w_y = c\big(t, u(t)\big) \tag{21}$$

genügen, die Nebenbedingungen

$$\left.\begin{aligned} &M_k^0\big(t, w(t), w_x(t), w_y(t), u(t)\big) \leqq 0 \quad \text{für alle } t \in \Gamma \quad \text{und} \quad k \in K_1^0, \\ &M_k^*\big(x, y, w(x, y), w_x, w_y\big) \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad (x, y) \in D \quad \text{und} \quad k \in K_1^*, \\ &N_k^0 = \int_\Gamma n_k^0\big(t, w(t), w_x(t), w_y(t), u(t)\big)\, dt \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad k \in K_2^0, \\ &N_k^* = \iint_D n_k^*\big(x, y, w(x, y), w_x, w_y\big)\, dx\, dy \leqq 0 \quad \text{für alle} \quad k \in K_2^* \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

erfüllen und das Kostenfunktional

$$J(u) = J^0 + J^* \tag{23}$$

mit

$$J^0 = \int_\Gamma F^0(t, w, w_x, w_y, u)\, dt, \tag{23.1}$$

$$J^* = \iint_D F^*\big(x, y, w(x, y), w_x, w_y\big)\, dx\, dy \tag{23.2}$$

minimieren.

Es seien im Falle eines nichtnegativen Index

$$n(u) = \frac{1}{2\pi} \left[\arg \big(a(t, u) + ib(t, u)\big)\right]_\Gamma \tag{24}$$

zum Beispiel folgende *Zusatzbedingungen* gegeben:

$$w_x(t_k) = \tilde{h}_k^0(u), \qquad w_y(t_k) = \tilde{\tilde{h}}_k^0(u) \qquad (k = 1, \ldots, 2r + 1) \tag{25.1}$$

mit $t_k \in \Gamma (0 \leqq r \leqq n)$, sowie für $n > 0$ und $r < n$

$$w_x(z_l) = \tilde{h}_k^*(u), \; w_y(z_l) = \tilde{\tilde{h}}_k^*(u) \qquad (l = 1, \ldots, n - r). \tag{25.2}$$

Außerdem sei in einem Punkt $(x_0, y_0) \in \overline{D}$ die Bedingung

$$w(x_0, y_0, u) = h(u) \tag{25.3}$$

mit dem auf $C(\Omega)$ stetigen Funktional h erfüllt.

Satz 4: *Das Randsteuerproblem* B *hat bei konstantem Index* $n = n(u)$ *unter den Voraussetzungen von Satz* 2, *sowie den Zusatzbedingungen* (25), *falls mindestens eine zulässige Lösung existiert, (mindestens) eine* o p t i m a l e *Lösung* $(u_0, w_0) \in H_\mu(\Gamma) \times H_\mu(\overline{D})$.

c) Die betrachteten Randsteuerprobleme lassen sich auf den Fall übertragen, wenn die Koeffizienten in der Randbedingung stückweise Hölder-stetig sind und Γ keine stückweise Ljapunowsche Kurve darstellt. Als Beispiel betrachten wir das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem *im allgemeinen Fall.* Wir formulieren dieses Problem analog wie das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem, lediglich in der Nähe der Knoten $c_1, \ldots, c_m$ (zu den Knoten wollen wir wie üblich auch die Unstetigkeitsstellen der Koeffizienten a, b, c rechnen) soll

$$|w(z)| < \frac{\text{const}}{|z - c_j|^\alpha} \qquad (0 \leqq \alpha = \text{const} < 1) \tag{26}$$

gelten. Die Zustandsfunktion $w(z)$ sei in der Nähe der Knoten $c_1, c_2, \ldots, c_q$ fastbeschränkt, d. h. $|z - c_j|^\varepsilon w(z) \to 0$ für $z \to c_j$ mit jeder beliebigen Konstanten $\varepsilon > 0$. Diese Lösungen nennen wir *Lösungen der Klasse* $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$; den Index $\varkappa$ des Problems definieren wir wie N. I. MUSCHELISCHWILI [5: § 93].

Satz 5. *Der Index* $\varkappa = \varkappa(u)$ *sei konstant. Falls* $\varkappa \geqq 0$ *sei der Index eine gerade Zahl und die Zustandsfunktion erfülle die Zusatzbedingungen* (6), *wobei* $n = \frac{\varkappa}{2}$ *gesetzt wird. Wenn das Gebiet* D *unbeschränkt ist, genüge* J^* *denselben Bedingungen wie in Satz* 1. *Dann hat das Riemann-Hilbertsche Randsteuerproblem im allgemeinen Falle, falls (mindestens) eine zulässige Lösung existiert, die Voraussetzungen* 1—3 *auf allen Ljapunowschen Teilkurven* Γ_j *erfüllt sind und die Funktionen* n_k^0, n_k^*, F^0, F^* *außerdem noch stückweise Lipschitz-stetig bezüglich der w-Komponenten in der Nähe der Knoten sind, eine* optimale *Lösung.*

Analoge Sätze lassen sich schließlich auch für die anderen betrachteten Randsteuerprobleme aufstellen.

LITERATUR

[1] Гахов, Ф. Д.: Краевые задачи (3. изд.). Изд.-во Наука: Москва 1977.

[2] Golusin, G. M.: Geometrische Funktionentheorie. Dt. Verlag der Wissenschaften: Berlin 1957.

[3] Michlin, S. G., und S. Prössdorf: Singuläre Integraloperatoren. Akademie-Verlag: Berlin 1980.

[4] Монахов, В. Н.: Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Изд.-во Наука (Сибирское отд.): Новосибирск 1977.

[5] Muschelischwili, N. I.: Singuläre Integralgleichungen. Akademie-Verlag: Berlin 1963.

[6] Simionescu, C., and Cl. Simionescu: Complex analysis methods in control theory. Bul. Univ. Brasov, Ser. C: Mat. Fiz. Chim. **19** (1977), 71—88.

[7] Vekua, I. N.: Verallgemeinerte analytische Funktionen. Akademie-Verlag: Berlin 1963.

[8] Vekua, I. N.: Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben. Dt. Verlag der Wissenschaften: Berlin 1956.

[9] Wolfersdorf, L. v.: On some optimal control problems for linear elliptic systems in the plane. Beiträge zur Analysis **17** (1981), 95—98.

[10] Wolfersdorf, L. v.: A class of coefficients control problems with elliptic systems in the plane. Math. Nachr. **99** (1980), 285—300.

[11] Wolfersdorf, L. v.: The linear-quadratic control problem for generalized analytic functions. Math. Nachr. (im Druck).

[12] Nitsche, J.: Untersuchungen über die linearen Randwertaufgaben linearer und quasilinearer elliptischer Differentialgleichungssysteme I, II. Math. Nachr. **14** (1955), 75—127 und 157—183.

Manuskripteingang: 30. 11. 1981; in revidierter Fassung: 12. 2. 1982

VERFASSER:

Dieter Oestreich
Sektion Mathematik der Bergakademie Freiberg
DDR-9200 Freiberg, Bernhard-v.-Cotta-Str. 2