Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (1) (1983), S. 57–74

Dualität bei Steuerungsproblemen und zugeordneten Flußproblemen II

R. Klötzler

In dieser Arbeit werden Dualitätsbeziehungen zu Steuerungsproblemen mehrfacher Integrale vorgestellt sowie zu verwandten, durch Verschmieren entstehenden mehrdimensionalen Flußproblemen. Beide Optimierungsaufgaben besitzen (wie schon im eindimensionalen Fall gemäß Teil I) das gleiche Dualproblem. Die Eigenschaft der starken Dualität läßt sich unter zusätzlichen Voraussetzungen bei den Flußproblemen wiederum über die Rockafellarsche Theorie dualer Optimierungsprobleme herleiten.

В данной работе представляются соотношения двойственности для задач оптимального управления с кратными интегралами как и для соответствующих многомерных потоковых проблем, возникающих, если „размазывать“ первую проблему. Их двойственные задачи совпадают (как и в одномерном случае: см. часть I). С помощью теории двойственности Рокафеллара можно для потоковых проблем показать свойство сильной двойственности.

In this paper a duality is presented for problems of optimal control with multiple integrals. The same is performed for related more-dimensional flow problems which are generated from the first problems by a relaxing procedure (as in the one-dimensional case according to Part I). Both of these optimization problems have the same dual problem. For flow problems one can prove the validity of strong duality by means of Rockafellars Duality Theory under some additional assumptions.

1. Einleitung

Im Teil I dieser gleichlautenden Arbeit [7] wurde zu Steuerungsproblemen einfacher Integrale eine duale Optimierungsaufgabe aufgestellt, die sich zugleich als duale Aufgabe eines zugeordneten neuartigen Flußproblems erwies. Auf diese Weise konnte zwischen dem primalen gewöhnlichen Steuerungsproblem und diesem Flußproblem eine Wesensverwandtschaft herausgearbeitet werden, die darin ihre Ursache findet, daß man letzteres als ein verschmiertes Problem („relaxed problem“) zum ersteren auffassen kann. Einer solchen Erkenntnis kommt neben einer analytischen eine rechentechnisch-numerische Bedeutung zu, wenn man angenäherte Lösungen des Primalproblems über Lösungen des Dualproblems aufzubauen wünscht (vgl. [8]). Vom theoretischen Standpunkt ist der Übergang zu Flußproblemen deswegen lohnend, weil man bei diesen i. allg. leichter als beim Steuerungsproblem starke Dualität bez. des aufgestellten dualen Optimierungsproblems nachweisen kann. Aus methodischer Sicht bildeten diese Darlegungen von [7] (und auch von [6] für Steuerungsprobleme in Parameterdarstellung) einen neuartigen anschaulichen Zugang zu Flußproblemen innerhalb der sehr allgemeinen und abstrakten Konzeption verallgemeinerter Kurven und Flüsse nach L. C. Young [11], R. B. Vinter und R. M. Lewis [10].

All diese dargelegten Überlegungen sollen nunmehr auch auf Steuerungsprobleme mehrfacher Integrale übertragen werden unter Zustandsgleichungen in Gestalt partieller Differentialgleichungen von Dieudonné-Rashevskyscher Form (im Sinne der Bezeichnung von L. CESARI [1]). Gegenüber Teil I werden dabei einige darstellungsmäßige Verbesserungen vorgenommen, die sich einerseits in der Wahl von Bezeichnungen und andererseits in konsequenterer Nutzung der Matrizenschreibweise äußern.

2. Steuerungsprobleme mehrfacher Integrale in Dieudonné-Rashevskyscher Form

Wir studieren Steuerungsprobleme des Typs

$$J_0(x, u) = \int_\Omega f_0(t, x(t), u(t))\,dt \to \inf \tag{1}$$

bezüglich aller $x \in W_p^{1,n}(\Omega)$, $u \in L_p^l(\Omega)$ unter den

Zustandsgleichungen

$$x_{t^\alpha}^i = g_\alpha^i(t, x, u)$$

für $i = 1, \ldots, n$, $\alpha = 1, \ldots, m$, oder in Kurzform $x_t = g(t, x, u)$

Zustandsbeschränkungen

$$x(t) \in X(t) \subset \mathbf{E}^n \quad \forall t \in \bar{\Omega},$$

Steuerbeschränkungen

$$u(t) \in U(t, x(t)) \text{ für fast alle } t \in \Omega$$

und den

Randbedingungen

$$x(s) \in \mathfrak{M}_s \subset X(s) \quad \forall s \in \partial\Omega.$$

Zur Vereinfachung und konsequenten Nutzung der Matrizenschreibweise vereinbaren wir dabei, daß alle hier und später auftretenden Vektoren stets als Spaltenvektoren zu verstehen sind, sofern sie nicht ausdrücklich in anderem Sinne eingeführt werden. Das gilt in (1) also schon für x und u; x_t bzw. g stellen hingegen $(n \times m)$-Matrizen dar.

Wir stellen weiterhin folgende *Grundvoraussetzungen*: (2)

(i) $p > m$, und Ω ist ein Lipschitzgebiet des $\mathbf{E}^m$ im Sinne der entsprechenden, schon im Teil I benutzten Begriffsbildung;

(ii) $G = \{(t, \xi) \in \mathbf{E}^m \times \mathbf{E}^n \mid \xi \in X(t), t \in \Omega\}$ ist ein Lipschitzgebiet des $\mathbf{E}^{m+n}$;

(iii) $U(\cdot, \cdot)$ ist eine normale mengenwertige Abbildung von $\bar{G}$ in den $\mathbf{E}^l$ (im Sinne von [4]) und für sämtliche $x \in W_p^{1,n}(\Omega)$ mit $x(t) \in X(t)$ auf $\bar{\Omega}$ sei $U(\cdot, x(\cdot))$ eine normale mengenwertige Abbildung von $\bar{\Omega}$ in den $\mathbf{E}^l$;

(iv) die $U(t, \xi)$ sind gleichmäßig beschränkt im $\mathbf{E}^l$ für alle $(t, \xi) \in \bar{G}$;

(v) $\mathfrak{A} = \{(s, \xi) \in \mathbf{E}^m \times \mathbf{E}^n \mid s \in \partial\Omega, \xi \in \mathfrak{M}_s\}$ ist ein regulärer Randstreifen von ∂G in folgendem Sinne: $\mathfrak{A}$ gestattet eine Zerlegung in endlich viele Teilgebiete $\mathfrak{A}_k$, die mittels je einer regulären Abbildung der Klasse C^1 (im Sinne von C. B. MORREY [9]) auf ein Lipschitzgebiet des $\mathbf{E}^{m-1} \times \mathbf{E}^n$ transformiert werden können;

(vi) die Funktionen f_0 und g_α^i sind stetig auf $\bar{G} \times \mathbf{E}^l$;

(vii) die Menge $\mathfrak{P}$ aller zulässigen Prozesse (x, u) von (1) sei nicht leer.

Dann gilt in geringer Modifikation der Resultate von R. KLÖTZLER [5][1]) der folgende *Dualitätssatz*.

---

[1]) In Analogie zu Anhang II von Teil I [7].

Satz 1: *$J_0(x, u) \geqq L(S) := \int\limits_{\partial\Omega} S(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do$ für alle $(x, u) \in \mathfrak{P}$ und beliebige Zeilenvektoren $S = (S^1, \ldots, S^m) \in W^{1,m}_\infty(G)$, welche auf G den Nebenbedingungen*

$$S^\alpha_{t^\alpha}(t, \xi) + S^\alpha_{\xi^i}(t, \xi)\, g_\alpha{}^i(t, \xi, v) \leqq f_0(t, \xi, v) \quad \forall v \in U(t, \xi) \tag{3}$$

fast überall genügen[2]) *und auf $s \times \mathfrak{M}_s$ einen von ξ unabhängigen Wert $S(s, \cdot)$ besitzen $\forall s \in \partial\Omega$. $\mathfrak{n}(s)$ ist dabei der äußere Normalen-Einheitsvektor von $\partial\Omega$ in S.*

Die Menge der in Satz 1 zulässigen vektorwertigen Funktionen S bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}$, sie ist offensichtlich konvex. Zur Umschreibung dieser Menge verwenden wir nachstehend den ∇-Operator stets als Spaltenvektor mit

$$\nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t^m}, \frac{\partial}{\partial \xi^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi^n}\right).$$

Somit ist ∇S die $(m + n) \times m$-Matrix

$$\begin{pmatrix} S^\alpha_{t^\beta} \\ S^\alpha_{\xi^i} \end{pmatrix}^{\alpha,\beta=1,\ldots,m}_{i=1,\ldots,n}.$$

Bezeichnen wir weiterhin mit $\mathfrak{F}_0(t, \xi)$ die Menge aller $(m + n) \times m$-Matrizen

$$\begin{pmatrix} z_\beta{}^\alpha \\ z_i{}^\alpha \end{pmatrix}^{\alpha,\beta=1,\ldots,m}_{i=1,\ldots,n}$$

mit der Eigenschaft

$$z_\alpha{}^\alpha + z_i{}^\alpha g_\alpha{}^i(t, \xi, v) \leqq f_0(t, \xi, v) \qquad \forall v \in U(t, \xi),$$

so kann (3) auch durch die Forderung

$$\nabla S(t, \xi) \in \mathfrak{F}_0(t, \xi) \quad \text{für fast alle} \quad (t, \xi) \in G \tag{3'}$$

ausgedrückt werden. Die Menge $\mathfrak{F}_0(t, \xi)$ bezeichnen wir in Analogie zu Teil I als *Figuratrixkörper* zu Problem (1) an der Stelle $(t, \xi) \in G$. Im $(m + n) \cdot m$-dimensionalen Vektorraum aller $(m + n) \times m$-Matrizen — versehen mit der Metrik des $E^{(m+n)m}$ — ist offensichtlich $\mathfrak{F}_0(t, \xi)$ ein abgeschlossene und konvexe Menge.

Die Aufgabe

$$L(S) \to \sup \text{ auf } \mathfrak{S} \tag{4}$$

stellt eine *duale Aufgabe* zu (1) dar in der allgemeinen Auffassung von [5]. Wegen der Konvexität aller $\mathfrak{F}_0(t, \xi)$ und der Funktionenmenge $\mathfrak{S}$ ist (4) ein konvexes Optimierungsproblem mit linearem Zielfunktional L bez. S.

Entsprechend Teil I vermögen wir das Steuerungsproblem (1) durch ein äquivalentes Variationsproblem zu ersetzen. Wir stützen uns dabei auf den nachfolgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 1: *Es sei für alle $(t, \xi) \in \overline{G}$ und $z \in V(t, \xi)$*

$$f(t, \xi, z) := \operatorname*{Min}_v \{f_0(t, \xi, v) \mid z = g(t, \xi, v), v \in U(t, \xi)\} \tag{5}$$

mit

$$V(t, \xi) := \{g(t, \xi, v) \mid v \in U(t, \xi)\}. \tag{6}$$

---

[2]) Es wird in dieser Arbeit stets über doppelt auftretende Indizes in Produkten summiert.

Dann ist das Variationsproblem

$$J(x) := \int_\Omega f(t, x(t), x_t(t))\,dt \to \inf \quad auf\ \mathfrak{X} \tag{7}$$

mit

$$\mathfrak{X} = \{x \in W_p^{1,n}(\Omega) \mid (t, x(t)) \in \overline{G} \quad auf\ \Omega,$$
$$x_t(t) \in V(t, x(t)) \quad fast\ überall\ auf\ \Omega,$$
$$x(s) \in \mathfrak{M}_s \quad \forall s \in \partial\Omega\}$$

äquivalent zu (1). *Das heißt, es ist* $\inf_{\mathfrak{X}} J = \inf_{\mathfrak{P}} J_0$.

Der Beweis dieses Hilfssatzes verläuft völlig analog zum Beweis des Hilfssatzes 1 von Teil I für den dort behandelten Fall $m = 1$. Eine Erhöhung von m bringt dabei grundsätzlich keine weiteren Komplikationen, so daß wir hier auf eine ausführliche Darlegung dieses Beweises verzichten können.

Satz 2: $J(x) \geqq L(S) = \int_{\partial\Omega} S(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do$ *für alle* $x \in \mathfrak{X}$ *und* $S \in \mathfrak{S}$. *Die Probleme* (1) *und* (7) *haben gleiche Figuratrixkörper.*

Beweis: Nach Satz 1, angewandt auf das spezielle Steuerungsproblem (7), gilt zunächst der Dualitätssatz in der Gestalt

$$J(x) \geqq L(S) \quad \forall x \in \mathfrak{X} \quad \text{und} \quad S \in W_\infty^{1,m}(G),$$

welche auf G fast überall den Nebenbedingungen

$$S_{t^\alpha}^\alpha(t, \xi) + S_{\xi^i}^\alpha(t, \xi)\, w_\alpha^i \leqq f(t, \xi, w) \quad \forall w \in V(t, \xi) \tag{8}$$

genügen und auf $s \times \mathfrak{M}_s$ einen von ξ unabhängigen Wert $S(s, \cdot)$ besitzen $\forall s \in \partial\Omega$. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}(t, \xi)$ die Menge aller $(m + n) \times m$-Matrizen

$$z = \begin{pmatrix} z_\beta^\alpha \\ z_i^\alpha \end{pmatrix}_{i=1,\dots,n}^{\alpha,\beta=1,\dots,m}$$

mit der Eigenschaft

$$z_\alpha^\alpha + z_i^\alpha w_\alpha^i \leqq f(t, \xi, w) \qquad \forall w \in V(t, \xi),$$

so bedeutet (8) letztlich

$$\nabla S(t, \xi) \in \mathfrak{F}(t, \xi) \quad \text{für fast alle} \quad (t, \xi) \in G. \tag{8'}$$

Zum Beweis von Satz 2 genügt es folglich zu zeigen, daß $\mathfrak{F}(t, \xi) = \mathfrak{F}_0(t, \xi)\ \forall (t, \xi) \in \overline{G}$ ist. Dieser Nachweis erfolgt ganz analog zur entsprechenden Passage von Teil I. Ist nämlich $z \in \mathfrak{F}(t, \xi)$, dann ist gemäß Definition von $\mathfrak{F}$

$$z_\alpha^\alpha + z_i^\alpha w_\alpha^i \leqq f(t, \xi, w) \quad \forall w \in V(t, \xi);$$

somit gilt diese Relation erst recht für jene w, die gemäß (6) die Darstellung $w = g(t, \xi, v)$ zu beliebigen $v \in U(t, \xi)$ haben. Das bedeutet nach (5)

$$z_\alpha^\alpha + z_i^\alpha g_\alpha^i(t, \xi, v) \leqq f(t, \xi, g(t, \xi, v)) \leqq f_0(t, \xi, v) \quad \forall v \in U(t, \xi)$$

und somit $z \in \mathfrak{F}_0(t, \xi)$ bzw. $\mathfrak{F}(t, \xi) \subset \mathfrak{F}_0(t, \xi)$.

Ist umgekehrt $z \in \mathfrak{F}_0(t, \xi)$, so gilt

$$z_\alpha^\alpha + z_i^\alpha g_\alpha^i(t, \xi, v) \leqq f_0(t, \xi, v) \quad \forall v \in U(t, \xi).$$

Deshalb ist wegen (5) und (6)

$$z_\alpha^\alpha + z_i^\alpha g_\alpha^i(t, \xi, v) \leqq f\big(t, \xi, g(t, \xi, v)\big) \quad \forall v \in U(t, \xi)$$

bzw. mit $w = g(t, \xi, v)$ und (6)

$$z_\alpha^\alpha + z_i^\alpha w_\alpha^i \leqq f(t, \xi, w) \quad \forall w \in V(t, \xi).$$

Das bedeutet $z \in \mathfrak{F}(t, \xi)$ bzw. $\mathfrak{F}_0(t, \xi) \subset \mathfrak{F}(t, \xi)$. In Zusammenfassung beider Überlegungen resultiert daraus $\mathfrak{F}(t, \xi) = \mathfrak{F}_0(t, \xi) \quad \forall (t, \xi) \in \overline{G}$ ∎

3. Mehrdimensionale Flußprobleme erster Art

In Analogie zu der in Teil I erläuterten Vorgehensweise ordnen wir dem Variationsproblem (7) ein verwandtes „verschmiertes" Optimierungsproblem zu in Gestalt eines Flußproblems. Wir tun dies wiederum aus methodischen Gründen in zwei Etappen über *Flußprobleme erster* und *zweiter Art.*

Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$J_1(\mathfrak{v}) := \int_G f\big(t, \xi, v(t, \xi)\big)\, v_0(t, \xi)\, dt\, d\xi \to \inf \tag{9a}$$

bzgl. aller $(m + n) \times m$-Matrizen

$$\mathfrak{v} = v_0 \cdot \begin{pmatrix} E_m \\ v \end{pmatrix}^{3)} = (\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m) \in C^1(\overline{G}) \tag{9b}$$

mit den Eigenschaften

$$v_0(t, \xi) \geqq 0, \quad v(t, \xi) \in V(t, \xi) \quad \text{fast überall auf } G, \tag{9c}$$

$$\nabla' \mathfrak{v}_\alpha = 0 \quad \text{auf } G \quad \text{für} \quad \alpha = 1, \ldots, m, \tag{9d}$$

$$\int_{\mathfrak{M}_s} v_0(s, \xi)\, d\xi = 1 \qquad \forall s \in \partial\Omega \tag{9e}$$

und

$$\mathfrak{v}_\alpha' \cdot do_G = 0 \quad \text{auf} \quad \partial G_0 := \partial G \setminus \mathfrak{A}, \tag{9f}$$

wobei do_G das im $\mathbf{E}^{m+n}$ nach außen orientierte Oberflächenelemente zu ∂G darstellt. Indem wir auch hier wieder die Grundvoraussetzungen (2) übernehmen, ist nach [4: § 8.1] die Funktion $f\big(\cdot, \cdot, v(\cdot, \cdot)\big)$ summierbar auf G sogar für beliebige summierbare v; außerdem ist $V(\cdot, \cdot)$ gemäß (5) eine normale mengenwertige Abbildung auf $\overline{G}$. Wir bezeichnen das Optimierungsproblem (9) in bezug auf (7) (oder (1)) als das zugeordnete *mehrdimensionale Flußproblem erster Art.* Seine zulässigen Elemente $\mathfrak{v}$ gemäß (9b)—(9f) nennen wir *Flüsse*, ihre Gesamtheit bezeichnen wir mit $\mathfrak{V}$.

Satz 3: *Das Optimierungsproblem* (4) *ist ein duales Problem zum Flußproblem* (9).

Beweis: Für beliebige $\mathfrak{v} \in \mathfrak{V}$ und $S \in \mathfrak{S}$ ist wegen (9d)

$$J_1(\mathfrak{v}) = \int_G \big[f\big(t, \xi, v(t, \xi)\big)\, v_0(t, \xi) + S^\alpha(t, \xi)\, (\nabla' \mathfrak{v}_\alpha)\big]\, dt\, d\xi. \tag{10}$$

---

3) E_m bezeichnet die $m \times n$-Einheitsmatrix.

Wegen der leicht zu verifizierenden Gleichung

$$\nabla'(S^\alpha \mathfrak{v}_\alpha) = (\nabla S^\alpha)' \mathfrak{v}_\alpha + S^\alpha(\nabla' \mathfrak{v}_\alpha) \tag{11}$$

können wir unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes für (10) auch schreiben

$$J_1(\mathfrak{v}) = \int_G \left[f\big(t, \xi, v(t, \xi)\big) v_0(t, \xi) - (\nabla S^\alpha)' \mathfrak{v}_\alpha(t, \xi)\right] dt\, d\xi \tag{12}$$
$$+ \int_{\partial G} \big(S^\alpha(t, \xi)\, \mathfrak{v}_\alpha(t, \xi)\big)' \, d\mathfrak{o}_G.$$

Wegen (9c) ist $v_0 \geqq 0$ und wegen $S \in \mathfrak{S}$ und Satz 2 zugleich $\nabla S(t, \xi) \in \mathfrak{F}_0(t, \xi) = \mathfrak{F}(t, \xi)$. Deshalb ist der Integrand des ersten Integrals von (12) nicht negativ und folglich

$$J_1(\mathfrak{v}) \geqq \int_{\partial G} \big(S^\alpha(t, \xi)\, \mathfrak{v}_\alpha(t, \xi)\big)' \cdot d\mathfrak{o}_G. \tag{13}$$

Wir beachten weiterhin (9f) und können somit in (13) die Integration auf den Randstreifen $\mathfrak{A}$ beschränken. Infolge der zylindrischen Struktur von $\mathfrak{A}$ gemäß unserer Grundvoraussetzungen (2) läßt sich jedes orientierte Oberflächenelement $d\mathfrak{o}_G$ auf $\mathfrak{A}$ in der Gestalt

$$d\mathfrak{o}_G = \begin{pmatrix} \mathfrak{n}\, do \\ \mathfrak{o}_n \end{pmatrix} d\xi$$

darstellen; dabei ist wiederum do das skalare Oberflächenelement zu $\partial\Omega$, $\mathfrak{n}$ der äußere Normalen-Einheitsvektor zu $\partial\Omega$ und $\mathfrak{o}_n$ der n-dimensionale Nullvektor. Diese Darstellung erlaubt die Umformung von (13) auf

$$J_1(\mathfrak{v}) \geqq \int_{\partial\Omega} \int_{\mathfrak{M}_s} \big(S^\alpha(s, \xi)\, \mathfrak{v}_\alpha(s, \xi)\big)' \, d\xi \begin{pmatrix} \mathfrak{n}(s) \\ \mathfrak{o}_n \end{pmatrix} do$$

und unter Beachtung von (9b) und der Eigenschaft von S auf $\mathfrak{A}$ zu

$$J_1(\mathfrak{v}) \geqq \int_{\partial\Omega} S(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s) \left(\int_{\mathfrak{M}_s} v_0(s, \xi)\, d\xi\right) do.$$

Dieses Resultat hat schließlich mit (9e) zur Folge

$$J_1(\mathfrak{v}) \geqq \int_{\partial\Omega} S(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do = L(S) \quad \forall S \in \mathfrak{S} \quad \text{und} \quad \mathfrak{v} \in \mathfrak{V}. \tag{14}$$

Ungleichung (14) charakterisiert damit das Problem (4) als eine duale Optimierungsaufgabe zum Flußproblem (9) ∎

4. Mehrdimensionale Flußprobleme zweiter Art

Als Verallgemeinerung vorangehender Flußprobleme führen wir nachfolgend dazu verwandte Flußprobleme zweiter Art ein, bei denen auf die bisher gestellten Differezierbarkeitsforderungen an die Flüsse $\mathfrak{v}$ verzichtet wird. Wir führen dazu ein den Banachraum

$$\mathfrak{S}_0 = \{\sigma = (\sigma^1, \ldots, \sigma^m) \in W_\infty^{1,m}(G) \mid \sigma(s, \cdot) = \text{const} \quad \text{auf } \mathfrak{M}_s \ \forall s \in \partial\Omega\}; \tag{15}$$

er bildet einen Unterraum des $W_\infty^{1,m}(G)$. Weiterhin erklären wir $\forall (t, \xi) \in \bar{G}$

$$\mathfrak{K}(t, \xi) := \left\{ \mathfrak{v} = v_0 \cdot \begin{pmatrix} E_m \\ v \end{pmatrix} \middle| \, v_0 \in \mathbf{R}^+, v \in V(t, \xi) \right\}, \tag{16}$$

$$X_0 := \{\mathfrak{v} \in L_1^{(m+n)m}(G) \mid \mathfrak{v}(t, \xi) \in \mathfrak{K}(t, \xi) \quad \text{für fast alle } (t, \xi) \in G\} \tag{17}$$

und

$$\mathfrak{W} := \{\mathfrak{v} = (\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_m) \in X_0 \mid \forall \sigma \in \mathfrak{S}_0 \quad \text{ist} \quad \int_G (\nabla \sigma^\alpha)' \, \mathfrak{v}_\alpha \, dt \, d\xi = \int_{\partial \Omega} \sigma(s, \cdot) \, \mathfrak{n}(s) \, do\}. \tag{18}$$

Wir bezeichnen dann die Aufgabe

$$J_2(\mathfrak{v}) := \int_G f\big(t, \xi, v(t, \xi)\big) \, v_0(t, \xi) \, dt \, d\xi \to \inf \quad \text{auf } \mathfrak{W} \tag{19}$$

bezüglich (7) oder (1) als das zugeordnete *mehrdimensionale Flußproblem zweiter Art* und seine zulässigen Elemente $\mathfrak{v}$ aus $\mathfrak{W}$ wiederum als *Flüsse*.

Hilfssatz 2: $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{W}$.

Beweis: Für $\mathfrak{v} \in \mathfrak{V}$ ist wegen (9b) und (11) nach dem Gaußschen Integralsatz $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_0$

$$\int_G (\nabla \sigma^\alpha)' \, \mathfrak{v}_\alpha \, dt \, d\xi = -\int_G \sigma^\alpha (\nabla' \mathfrak{v}_\alpha) \, dt \, d\xi + \int_{\partial G} (\sigma^\alpha \mathfrak{v}_\alpha)' \, do_G. \tag{20}$$

Infolge (9b), (9d) und (9f) resultiert daraus

$$\int_G (\nabla \sigma^\alpha)' \, \mathfrak{v}_\alpha \, dt \, d\xi = \int_{\partial \Omega} \int_{\mathfrak{M}_s} (\sigma^\alpha \mathfrak{v}_\alpha)' \, d\xi \begin{pmatrix} \mathfrak{n} \\ \mathfrak{v}_n \end{pmatrix} \cdot do$$

$$= \int_{\partial \Omega} \sigma(s, \cdot) \, \mathfrak{n}(s) \cdot \left(\int_{\mathfrak{M}_s} v_0(s, \xi) \, d\xi \right) do$$

und wegen (9e) schließlich

$$\int_G (\nabla \sigma^\alpha)' \, \mathfrak{v}_\alpha \, dt \, d\xi = \int_{\partial \Omega} \sigma(s, \cdot) \, \mathfrak{n}(s) \, do.$$

In Verbindung mit (9c) besagt dieses Resultat nach (18):

$\forall \mathfrak{v} \in \mathfrak{V}$ gilt stets $\mathfrak{v} \in \mathfrak{W}$, bzw. $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{W}$.

Hilfssatz 3: $\mathfrak{W} \cap C^1(\bar{G}) \subset \mathfrak{V}$.

Beweis: Es sei $\mathfrak{v} \in \mathfrak{W} \cap C^1(\bar{G})$. Dann gilt für diesen Fluß wiederum die Gleichung (20) zu beliebigen $\sigma \in \mathfrak{S}_0$. Wählen wir speziell σ willkürlich aus $\mathring{W}_\infty^{1,m}(G)$, so folgt aus (20) und (18) wegen $\mathfrak{v} \in \mathfrak{W}$ die Variationsgleichung

$$\int_G \sigma^\alpha(t, \xi) \left(\nabla' \mathfrak{v}_\alpha(t, \xi)\right) dt \, d\xi = 0 \qquad \forall \sigma \in \mathring{W}_\infty^{1,m}(G).$$

Und weil die Funktionenmenge $\mathring{W}_\infty^{1,m}(G)$ dicht in $L_1^m(G)$ liegt, entnehmen wir aus dieser Variationsgleichung unmittelbar die Schlußfolgerung: $\nabla' \mathfrak{v}_\alpha(t, \xi) = 0$ auf G; damit erfüllt unser vorgegebenes $\mathfrak{v}$ notwendig die Bedingung (9d).

Unter Beachtung des soeben erhaltenen Resultats reduziert die sich Gleichung (20) für unser $\mathfrak{v}$ auf die Gestalt

$$\int_G (\nabla\sigma^\alpha)' \mathfrak{v}_\alpha \, dt\, d\xi = \int_{\partial G} (\sigma^\alpha \mathfrak{v}_\alpha)' \, d\mathfrak{o}_G = \int_{\partial G_0} (\sigma^\alpha \mathfrak{v}_\alpha)' \, d\mathfrak{o}_G + \int_{\mathfrak{A}} (\sigma^\alpha \mathfrak{v}_\alpha)' \, d\mathfrak{o}_G. \tag{21}$$

Speziell für alle $\sigma \in \mathfrak{S}_0$ mit der Eigenschaft $\sigma|_{\mathfrak{A}} = 0$ erhalten wir aus (21) nach (18)

$$\int_{\partial G_0} \bigl(\sigma^\alpha(t, \xi)\, \mathfrak{v}_\alpha(t, \xi)\bigr)' \, d\mathfrak{o}_G = 0.$$

Da die Menge der Spuren aller dieser σ auf ∂G_0 in $L_1{}^m(\partial G_0)$ dicht liegt, hat die vorangehende Variationsgleichung die Eigenschaft $\mathfrak{v}_\alpha' d\mathfrak{o}_G = 0$ auf ∂G_0 zur Folge und damit (9f).

Mit dieser neugefundenen Eigenschaft vereinfacht sich (21) schließlich zu

$$\int_G (\nabla\sigma^\alpha)' \mathfrak{v}_\alpha \, dt\, d\xi = \int_{\mathfrak{A}} (\sigma^\alpha \mathfrak{v}_\alpha)' \, d\mathfrak{o}_G$$

und wegen (18) zu der Forderung

$$\int_{\partial\Omega} (\sigma(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do = \int_{\mathfrak{A}} (\sigma^\alpha \mathfrak{v}_\alpha)' \, d\mathfrak{o}_G \qquad \forall \sigma \in \mathfrak{S}_0.$$

Unter Beachtung der zylindrischen Struktur von $\mathfrak{A}$ können wir dafür auch schreiben:

$$\int_{\partial\Omega} \sigma(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do = \int_{\partial\Omega} \int_{\mathfrak{M}_s} (\sigma^\alpha \mathfrak{v}_\alpha)' \, d\xi \begin{pmatrix} \mathfrak{n} \\ \mathfrak{o}_n \end{pmatrix} do,$$

und wegen (18):

$$\int_{\partial\Omega} \sigma(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do = \int_{\partial\Omega} \sigma(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s) \left(\int_{\mathfrak{M}_s} v_0(s, \xi)\, d\xi \right) do. \tag{22}$$

Da die Menge aller Spuren der $\sigma \in \mathfrak{S}_0$ auf $\partial\Omega$ in $L_1{}^m(\partial\Omega)$ dicht liegt, folgt aus (22)

$$\int_{\mathfrak{M}_s} v_0(s, \xi)\, d\xi = 1 \quad \forall s \in \partial\Omega,$$

also die Bedingung (9e). Da die Elemente von $\mathfrak{W}$ außerdem per definitionem die Eigenschaft (9c) besitzen, entnehmen wir aus den vorangehenden Folgerungen, daß aus $\mathfrak{v} \in \mathfrak{W} \cap C^1(\bar{G})$ stets $\mathfrak{v} \in \mathfrak{B}$ und damit die Behauptung von Hilfssatz 3 folgt ∎

Satz 4: *Das Optimierungsproblem* (4) *ist auch ein duales Problem zum Flußproblem* (19).

Beweis: Für beliebige $\mathfrak{v} \in \mathfrak{W}$ und $S \in \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_0$ gilt gemäß (18)

$$J_2(\mathfrak{v}) = \int_G \bigl[f\bigl(t, \xi, v(t, \xi)\bigr)\, v_0(t, \xi) - (\nabla S^\alpha)' \mathfrak{v}_\alpha\bigr] \, dt\, d\xi + \int_{\partial\Omega} S(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do. \tag{23}$$

Wegen $S \in \mathfrak{S}$ ist $\nabla S(t, \xi) \in \mathfrak{F}_0(t, \xi) = \mathfrak{F}(t, \xi)$ für fast alle $(t, \xi) \in G$. Außerdem ist zu jedem $\mathfrak{v} \in \mathfrak{W}$ stets $v_0 \geqq 0$. Deshalb ist der erste Integrand in (23) nicht negativ und somit

$$J_2(\mathfrak{v}) \geqq \int_{\partial\Omega} S(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do \quad \forall \mathfrak{v} \in \mathfrak{W} \quad \text{und} \quad S \in \mathfrak{S}.$$

Diese Eigenschaft drückt die Dualität zwischen den Problemen (4) und (19) aus ∎

5. Beziehungen zur Dualität von Fenchel und Rockafellar

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, daß für das mehrdimensionale Flußproblem zweiter Art (19) sein duales Problem (4) auch über die Fenchel-Rockafellarsche Theorie der konjugierten Funktionale gefunden werden kann. Wir stützen uns dabei wiederum (wie in Teil I) auf die Fenchel-Rockafellarsche Theorie in der Darstellung von EKELAND/TEMAM [2].

Hilfssatz 4: *Das Optimierungsproblem* (4) *ist auch im Sinne der speziellen Fenchel-Rockafellarschen Dualitätskonzeption ein duales Problem zum Flußproblem* (19).

Beweis: In der allgemeinen Beschreibung der Fenchel-Rockafellarschen Konstruktion dualer Probleme stützen wir uns auf die Darstellungen mittels der Formeln (20) und (22) von Teil I der Arbeit [7]. Wir setzen hier

$$X = L_1^{(m+n)m}(G), \qquad Y = \mathfrak{S}_0^*, \tag{24}$$

und dabei versehen wir Y mit der schwachen-*-Topologie über $\mathfrak{S}_0^*$. Daraus resultiert $Y^* = \mathfrak{S}_0^{**} = \mathfrak{S}_0$. Wie im Teil I erhalten wir auch hier wieder

$$\inf_{\mathfrak{W}} J_2 = \inf_{\mathfrak{v}\in X} \Phi(\mathfrak{v}, 0), \tag{25}$$

wenn wir setzen für beliebige $(\mathfrak{v}, p) \in X \times Y$ (unter Beachtung von (17)):

$$\Phi(\mathfrak{v}, p) := \begin{cases} J_2(\mathfrak{v}) \ \forall\ \mathfrak{v} \in X_0 \ \text{ mit der Eigenschaft} \\ \quad \int\limits_G (\nabla\sigma^\alpha)'\, \mathfrak{v}_\alpha\, dt\, d\xi + \langle\sigma, p\rangle = \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(s,\cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do \\ \quad \forall \sigma \in Y^* \\ \infty \quad \text{andernfalls.} \end{cases} \tag{26}$$

Zur Berechnung des *konjugierten Funktionals*

$$\Phi^*(0, p^*) := \sup_{\mathfrak{v}\in X, p\in Y} [\langle p^*, p\rangle - \Phi(\mathfrak{v}, p)] \tag{27}$$

beachten wir, daß die in (26) benutzte Nebenbedingung

$$\int\limits_G (\nabla\sigma^\alpha)'\, \mathfrak{v}_\alpha\, dt\, d\xi + \langle\sigma, p\rangle = \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(s,\cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do \ \forall\ \sigma \in Y^* \tag{28}$$

zu gegebenem $\mathfrak{v} \in X$ in eindeutiger Weise eine Lösung $p \in Y$ von (28) definiert. Diese von $\mathfrak{v}$ abhängige Lösung bezeichnen wir mit $p = A\mathfrak{v}$. Damit ist nach (27) und (26)

$$\Phi^*(0, p^*) = \sup_{\mathfrak{a}\in X, p=A\mathfrak{a}} [\langle p^*, p\rangle - \Phi(\mathfrak{v}, p)]. \tag{29}$$

Weil $p = A\mathfrak{v}$ die Variationsgleichung (28) identisch befriedigt, folgt speziell mit $\sigma = -p^*$ aus (28)

$$\langle p^*, p\rangle = -\int\limits_G (\nabla p^*\sigma)'\, \mathfrak{v}_\alpha\, dt\, d\xi + \int\limits_{\partial\Omega} p^*(s,\cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do.$$

Dies eingesetzt in (29) erbringt

$$\Phi^*(0, p^*) = \sup_{\mathfrak{v}\in X, p=A\mathfrak{v}} \left[\int\limits_{\partial\Omega} p^*(s,\cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do - \Phi(\mathfrak{v}, p) - \int\limits_G (\nabla p^*\alpha)'\, \mathfrak{v}_\alpha\, dt\, d\xi\right]$$

und, nach (26),

$$\Phi^*(0, p^*) = \sup_{\mathfrak{v} \in X_0} \Big[\int_{\partial\Omega} p^*(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do - \int_G \big((\nabla p^*\alpha)'\, \mathfrak{v}_\alpha + f(t, \xi, v(t, \xi))\, v_0(t, \xi)\big)\, dt\, d\xi \Big].$$

Hieraus resultiert

$$\Phi^*(0, p^*) = \begin{cases} \int_{\partial G} p^*(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do, & \text{wenn fast überall auf } G \\ & -\nabla p^*(t, \xi) \in \mathfrak{F}(t, \xi) \text{ gilt} \\ \infty \quad \text{sonst.} & \end{cases} \tag{30}$$

Mit diesem Ergebnis (30) wird offenkundig, daß die zum Primalproblem

$$\Phi(\mathfrak{v}, 0) \to \inf \text{ auf } X$$

duale Aufgabe

$$-\Phi^*(0, p^*) \to \sup \text{ auf } Y^* \tag{31}$$

letztlich mit der Optimierungsaufgabe (4) identisch ist. Denn (31) bedeutet nach (30) in der Terminologie von (4)

$$L(-p^*) = -\int_{\partial\Omega} p^*(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do \to \sup \tag{32}$$

bezüglich aller $-p^* \in \mathfrak{S}_0$ mit $-\nabla p^*(t, \xi) \in \mathfrak{F}(t, \xi)$ fast überall auf G. Setzen wir wieder $-p^* = S$ in (32) ein, so wird dieses Problem sogar formal identisch mit (4), wenn wir noch die durch Satz 2 geprägte Eigenschaft $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$ beachten. Damit ist Hilfssatz 4 bewiesen ∎

6. Starke Dualität bei mehrdimensionalen Flußproblemen

Entsprechend Teil I sprechen wir von *starker Dualität* zwischen den dualen Problemen (19) und (4), wenn

$$\inf_{\mathfrak{W}} J_2 = \sup_{\mathfrak{S}} L \tag{33}$$

gilt. Wie spezielle Beispiele zeigen (vgl. Abschnitt 7) kann man jedoch die Beziehung (33) selbst bei gutartigen analytischen Eigenschaften von f und V nicht erwarten, wenn die Steuerrestriktionen global gesehen in ungünstiger Lage zum Gebiet G und dessen Randstreifen $\mathfrak{A}$ stehen. Wenn wir jedoch den Bereich $\mathfrak{W}$ zulässiger Flüsse in einem geeigneten Sinne erweitern durch Hinzunahme von asymptotisch zulässigen Flüssen, so werden wir auf der Basis der Rockafellarschen Dualitätstheorie unter Beachtung von Hilfssatz 4 auf dem erweiterten Zulässigkeitsbereich $\mathfrak{W}_0$ starke Dualität erreichen können. Wir führen dazu vorbereitend einige Bezeichnungen und Zusatzvoraussetzungen ein.

Die Mengen $V(t, \xi)$ gemäß (6) seien für alle $(t, \xi) \in \overline{G}$ von jetzt an konvex und $\mathfrak{W}$ gemäß (18) sei nicht leer. Dann sind die durch (16) definierten Mengen $\mathfrak{K}(t, \xi) \;\forall\; (t, \xi) \in \overline{G}$ konvexe abgeschlossene Kegel des $\mathrm{E}^{(m+n)m}$. Unter Beachtung der Grundvoraussetzungen (2) ist $\mathfrak{K}$ nach [4: Kap. 8] eine normale mengenwertige Abbildung von $\overline{G}$ in den $\mathrm{E}^{(m+n)m}$.

Wir fordern weiterhin: r sei ein auf $G \times \mathrm{E}^{(m+n)m}$ definierter normaler Integrand im Sinne von [2] und [4] mit folgenden Eigenschaften:

$$r(t, \xi, \cdot) \text{ ist eine konvexe Funktion auf } \mathrm{E}^{(m+n)m} \;\forall\; (t, \xi) \in \bar{G}, \tag{34 a}$$

$$r(t, \xi, \mathfrak{v}) = v_0 f(t, \xi, v) \;\forall\; \mathfrak{v} \in \mathfrak{K}(t, \xi), \qquad (t, \xi) \in \bar{G}, \tag{34 b}$$

$\exists m = \text{const}$ mit der Eigenschaft

$$r(t, \xi, \mathfrak{v}) \geqq m v_0 \;\forall\; \mathfrak{v} = v_0 \cdot \begin{pmatrix} E_m \\ v \end{pmatrix}, \qquad (t, \xi) \in \bar{G}. \tag{34 c}$$

Dann ist $J_2(\mathfrak{v}) = \int\limits_G r\big(t, \xi, \hat{\mathfrak{v}}(t, \xi)\big)\, dt\, d\xi$ offensichtlich ein konvexes Funktional auf X. Wir können dafür auch

$$J_2(\mathfrak{v}) = \int\limits_G \big[r\big(t, \xi, \mathfrak{v}(t, \xi)\big) - m v_0(t, \xi)\big]\, dt\, d\xi + \int\limits_G m v_0(t, \xi)\, dt\, d\xi$$

schreiben. Das zweite Integral hiervon ist schwach unterhalbstetig auf X (als stetiges lineares Funktional). Das erste Integral ist schwach unterhalbstetig gemäß [2: Kap. VIII, Corollaire 1.2] und [3: Kap. II, Satz 25]. Somit ist J_2 schwach unterhalbstetig auf X.

Mit Ξ bezeichnen wir den Banachraum aller linearen stetigen Funktionale auf $L_\infty^{(m+n)m}(G)$, also $\Xi = L_\infty^{(n+m)m}(G)^*$. Bekanntlich gilt $\Xi \supset X$. Weiterhin definieren wir zu beliebigem $p \in Y$ (unter Beachtung von (17))

$$\mathfrak{W}_p := \Big\{\mathfrak{w} \in \Xi_0 \mid \forall \sigma \in \mathfrak{S}_0 \text{ ist } \langle \sigma, p \rangle + \langle \nabla\sigma, \mathfrak{v} \rangle = \int\limits_{\partial\Omega} \sigma(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do\Big\}, \tag{35}$$

wobei Ξ_0 die schwache Abschließung von X_0 in Ξ darstellt. $\mathfrak{W}_0$ speziell können wir dann als ein gegenüber $\mathfrak{W}$ verallgemeinertes *System asymptotisch zulässiger Flüsse* bezeichnen, welche die Steuerrestriktionen strikt einhalten. Wir setzen J_2 von X auf $\mathfrak{W}_0$ fort durch die Definition

$$\bar{J}_2(\mathfrak{w}) = \varliminf_{\mathfrak{v} \to \mathfrak{w},\, \mathfrak{v} \in X_0} J_2(\mathfrak{v}) \;\forall\; \mathfrak{w} \in \mathfrak{W}_0, \tag{36}$$

wobei der Limes inferior im Sinne der schwachen Konvergenz des Ξ zu verstehen ist.

Satz 5: *Erfüllt seien die Grundvoraussetzungen* (2). *Die Mengen* $V(t, \xi)$ *gemäß* (6) *seien für alle* $(t, \xi) \in \bar{G}$ *konvex und* $\mathfrak{W}_0$ *gemäß* (35) *sei nicht leer. Außerdem sei die Voraussetzung* (34) *erfüllt. Dann gilt*

$$\inf_{\mathfrak{W}_0} \bar{J}_2 = \sup_{\mathfrak{S}} L. \tag{37}$$

Beweis: In Erweiterung von (26) benutzen wir das Funktional

$$\bar{\Phi}(\mathfrak{w}, p) := \begin{cases} \varliminf\limits_{\mathfrak{v} \to \mathfrak{w},\, \mathfrak{v} \in X_0} J_2(\mathfrak{v}) & \text{falls } \mathfrak{w} \in \mathfrak{W}_p \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \tag{38}$$

auf $\Xi \times Y$. Es ist schwach unterhalbstetig. Denn ist zu beliebigem fixierten Element $(\mathfrak{w}, p) \in \Xi \times Y$ eine Folge $\{(\mathfrak{w}_k, p_k)\}$ aus $\Xi \times Y$ schwach konvergent gegen $(\mathfrak{w}, p)$, so ist für jede natürliche Zahl k entweder

$$\bar{\Phi}(\mathfrak{w}_k, p_k) = \infty \quad \text{für } \mathfrak{w}_k \notin \mathfrak{W}_{p_k} \quad \text{oder}$$

$$\bar{\Phi}(\mathfrak{w}_k, p_k) = \varliminf_{\mathfrak{v} \to \mathfrak{w}_k,\, \mathfrak{v} \in X_0} J_2(\mathfrak{v}) \quad \text{für } \mathfrak{w}_k \in \mathfrak{W}_{p_k}.$$

Tritt nur für endlich viele k der zweite Fall ein, so ist

$$\overline{\Phi}(\mathfrak{w}, p) \leqq \varliminf_{k\to\infty} \overline{\Phi}(\mathfrak{w}_k, p_k) = \infty. \tag{39}$$

Tritt aber der zweite Fall für unendlich viele k auf, so existiert eine Teilfolge $\{(\mathfrak{w}_{k'}, p_{k'})\}$ mit

$$\varliminf_{k\to\infty} \overline{\Phi}(\mathfrak{w}_k, p_k) = \lim_{k'\to\infty} \overline{\Phi}(\mathfrak{w}_{k'}, p_{k'}), \quad \mathfrak{w}_{k'} \in \mathfrak{W}_{p_{k'}}. \tag{40}$$

Zu jedem $(\mathfrak{w}_{k'}, p_{k'})$ gibt es nach (38) eine Folge $\mathfrak{v}_{k'}^l \rightharpoonup \mathfrak{w}_{k'}$ mit $\mathfrak{v}_{k'}^l \in X_0$ und $\overline{\Phi}(\mathfrak{w}_{k'}, p_{k'}) = \lim_{l\to\infty} J_2(\mathfrak{v}_{k'}^l)$. Dann läßt sich aber auch eine Folge $\{\mathfrak{v}_{k'}^{l(k')}\}$ finden mit

$$\varliminf_{k\to\infty} \overline{\Phi}(\mathfrak{w}_k, p_k) = \lim_{k'\to\infty} J_2(\mathfrak{v}_{k'}^{l(k')}) \tag{41}$$

und $(\mathfrak{v}_{k'}^{l(k')}, p_{k'}) \rightharpoonup (\mathfrak{w}, p)$. Somit ist nach (35) $\mathfrak{w} \in \mathfrak{W}_p$ und nach (38) und (41)

$$\varliminf_{k\to\infty} \overline{\Phi}(\mathfrak{w}_k, p_k) = \lim_{k'\to\infty} J_2(\mathfrak{v}_{k'}^{l(k')}) \geqq \varliminf_{\mathfrak{v}\rightharpoonup\mathfrak{w},\, \mathfrak{v}\in X_0} J_2(\mathfrak{v}) = \overline{\Phi}(\mathfrak{w}, p). \tag{42}$$

Da (39) und (42) für jede gegen $(\mathfrak{w}, p)$ schwach konvergente Folge $\{(\mathfrak{w}_k, p_k)\}$ gilt, ist die schwache Unterhalbstetigkeit von $\overline{\Phi}$ verifiziert.

Schließlich ist $\overline{\Phi}$ auch ein konvexes Funktional, da J_2, X_0, $\mathfrak{W}_p$ konvex sind und die offenkundige Eigenschaft $\mathfrak{W}_{\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2} = \lambda_1 \mathfrak{W}_{p_1} + \lambda_2 \mathfrak{W}_{p_2}$ für beliebige $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}^+$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ bedingen.

Auf Grund dieser Eigenschaft von $\overline{\Phi}$ ist nach [2: Kap. III, Proposition 2.1] die starke Dualität zwischen dem Primalproblem

$$\overline{\Phi}(\mathfrak{w}, 0) \to \inf \quad \text{auf } \Xi \tag{43}$$

und seinem Dualproblem

$$-\overline{\Phi}^*(0, p^*) \to \sup \quad \text{auf } Y^* \tag{44}$$

genau dann gewährleistet, wenn das Problem (44) "normal" ist. Das bedeutet:

$$\inf_{\Xi} \overline{\Phi}(\mathfrak{w}, 0) = \sup_{Y^*} \left(-\overline{\Phi}^*(0, p^*)\right)$$

gilt genau dann, falls das Funktional

$$\varphi(q^*) := \inf_{p^*\in Y^*} \overline{\Phi}^*(q^*, p^*) \tag{45}$$

im Nullelement $q^* = 0$ des Raumes $\Xi^* = L_\infty^{(m+n)m}(G)$ endlich und schwach unterhalbstetig ist.

Zur Überprüfung dieses Sachverhalts gehen wir von der Definition des konjugierten Funktionals $\overline{\Phi}^*$ auf $\Xi^* \times Y^*$ mit

$$\overline{\Phi}^*(q^*, p^*) := \sup_{\mathfrak{w}\in\Xi,\, p\in Y} \left[\langle q^*, \mathfrak{w}\rangle + \langle p^*, p\rangle - \overline{\Phi}(\mathfrak{w}, p)\right] \tag{46}$$

aus. In Analogie zur Berechnung des Ausdrucks (29) beachten wir, daß wir entsprechend zu (28) die Lösung p der in (35) auftretenden Variationsgleichung

$$\langle \sigma, p\rangle + \langle \nabla\sigma, \mathfrak{w}\rangle = \int_{\partial\Omega} \sigma(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do \tag{47}$$

zu gegebenem $\mathfrak{w} \in \Xi$ wiederum in eindeutiger Weise durch $\mathfrak{w}$ ausdrücken können.

Wir bezeichnen diese Lösung auch hier mit $p = A\mathfrak{w}$. Damit läßt sich nach (38) der Ausdruck (46) umformen zu

$$\overline{\Phi}^*(q^*, p^*) = \sup_{\mathfrak{w}\in\Xi, p=A\mathfrak{w}} [\langle q^*, \mathfrak{w}\rangle + \langle p^*, p\rangle - \overline{\Phi}(\mathfrak{w}, p)]. \tag{48}$$

Setzen wir in (47) für $\sigma \in \mathfrak{S}_0$ das spezielle Element $-p^*$ ein, so vermag man in (48) entsprechend das Produkt $\langle p^*, p\rangle$ durch $\langle -\nabla p^*, \mathfrak{w}\rangle + \int_{\partial\Omega} p^*(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do$ zu ersetzen. Wegen $\mathfrak{W}_p \subset \Xi_0$ wird damit

$$\overline{\Phi}^*(q^*, p^*) = \sup_{\mathfrak{w}\in\Xi_0, p=A\mathfrak{w}} \left[\langle q^* - \nabla p^*, \mathfrak{w}\rangle - \overline{\Phi}(\mathfrak{w}, p) + \int_{\partial\Omega} p^*(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do\right] \tag{49}$$

und unter Beachtung von (38)

$$\overline{\Phi}^*(q^*, p^*) = \sup_{\mathfrak{w}\in\Xi_0} \left[\langle q^* - \nabla p^*, \mathfrak{w}\rangle - \varliminf_{\mathfrak{v}\to\mathfrak{w}, \mathfrak{w}\in X_0} J_2(\mathfrak{v}) + \int_{\partial\Omega} p^*(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do\right]. \tag{50}$$

Das wiederum ist gleichwertig mit

$$\begin{aligned}
&\overline{\Phi}^*(q^*, p^*) \\
&= \sup_{\mathfrak{w}\in\Xi_0} \left[\int_{\partial\Omega} p^*(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do - \varliminf_{\mathfrak{v}\to\mathfrak{w}, \mathfrak{v}\in X_0} \left(\langle -q^* + \nabla p^*, \mathfrak{v}\rangle - J_2(\mathfrak{v})\right)\right] \\
&= \sup_{\mathfrak{v}\in X_0} \left[\int_{\partial\Omega} p^*(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do - \int_G \left((\nabla p^* - q^*)\, \mathfrak{v} - f(t, \xi, v)\, v_0\right) dt\, d\xi\right].
\end{aligned}$$

Ausgerechnet erhalten wir

$$\overline{\Phi}^*(q^*, p^*) = \begin{cases} \int_{\partial\Omega} p^*(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do, & \text{wenn} \quad q^*(t, \xi) - \nabla p^*(t, \xi) \in \mathfrak{F}(t, \xi) \text{ ist} \\ \infty & \text{sonst}. \end{cases} \tag{51}$$

Wegen der Voraussetzung $\mathfrak{W}_0 \neq \emptyset$ existiert ein $\mathfrak{w} \in \mathfrak{W}_0$, so daß infolge der Dualität zwischen den Problemen (43) und (44) gilt:

$$\begin{aligned}
\infty > \overline{\Phi}(\mathfrak{w}, 0) &\geqq \sup_{p^*\in Y^*} \left(-\overline{\Phi}^*(0, p^*)\right) = -\inf_{p^*\in Y^*} \overline{\Phi}^*(0, p^*) \\
&= -\varphi(0) \geqq -\overline{\Phi}^*(0, \underline{p}^*),
\end{aligned} \tag{52}$$

wenn $\underline{p}^* = (\underline{p}^{*1}, \ldots, \underline{p}^{*m}) \in \mathfrak{S}_0 = Y^*$ gewählt wird mit

$$\underline{p}^{*1}(t, \xi) = (1 + |m|)\, t^1, \qquad \underline{p}^{*\alpha'} \equiv 0 \ (\alpha' = 2, \ldots, m).$$

$\underline{p}^*$ ist aber sogar ein Element von $\mathfrak{S}$, da für alle $v \in V(t, \xi)$ und $(t, \xi) \in \overline{G}$ wegen (34)

$$-\underline{p}^{*\alpha}_{t\alpha} - \underline{p}^{*\alpha}_{\xi^i} v^i = -1 - |m| < m \leqq f(t, \xi, v) \tag{53}$$

ist. Deshalb gilt nach (51)

$$\overline{\Phi}(0, \underline{p}^*) = \int_{\partial\Omega} \underline{p}^*(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do = \int_\Omega \underline{p}^{*1}_{t^1}(t, \xi)\, dt\, d\xi = (1 + |m|) \operatorname{mes} \Omega < \infty. \tag{54}$$

Das bedeutet: $\varphi(0)$ ist endlich.

Zum anderen ist nach (53) für alle $(t, \xi) \in \overline{G}$

$$-\nabla \underline{p}^*(t, \xi) \in \operatorname{int} \mathfrak{F}(t, \xi).$$

Da sämtliche $V(t, \xi)$ $\big((t, \xi) \in \bar{G}\big)$ gleichmäßig beschränkt sind, existiert eine Konstante $M > 1$, so daß $|v| \leqq M$ ist für alle $v \in \mathrm{R}(t, \xi)$ und beliebige $(t, \xi) \in \bar{G}$. Wählen wir ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < 1/(4 \cdot [m + n] m \cdot M)$, so sind auch sämtliche Punkte $-\nabla p^*(t, \xi) + q^*(t, \xi) \in \mathfrak{F}(t, \xi)$ für beliebige

$$q^* = \begin{pmatrix} q_\beta^{*\alpha} \\ q_i^{*\alpha} \end{pmatrix}_{i=1,\ldots,n}^{\alpha,\beta=1,\ldots,m} \in \Xi^* = X^* = L_\infty^{(m+n)m}(G),$$

welche die Bedingung $\|q^*\|_{\Xi^*} < \varepsilon$ erfüllen. Denn $\forall v \in V(t; \xi)$ zu $(t, \xi) \in \bar{G}$ ist dann

$$(-p_{t\alpha}^{*\alpha} + q_\alpha^{*\alpha}) + (-p_{\xi^i}^{*\alpha} + q_i^{*\alpha}) v_\alpha^i \leqq -1 - |m| + m\varepsilon + M \cdot m \cdot n\varepsilon$$
$$\leqq 1/4 + 1/4 - 1 - |m| < m \leqq f(t, \xi, v).$$

Somit ist nach (45), (51) und (54) für beliebige $q^* \in \Xi^*$ mit $\|q^*\|_{\Xi^*} < \varepsilon$

$$\varphi(q^*) \leqq \bar{\Phi}^*(q^*, p^*) = \int_{\partial\Omega} p^*(s, \cdot)\, \mathfrak{n}(s)\, do = (1 + |m|) \operatorname{mes} \Omega < \infty,$$

so daß φ nach oben lokal beschränkt ist in einer Umgebung von $q^* = 0$. Diese lokale Beschränktheit des konvexen Funktionals φ bedingt nach [2: Kap. I, Lemma 2.1] die Stetigkeit von φ in $q^* = 0$ und das wiederum nach [3: Kap. II, Satz 25] die schwache Unterhalbstetigkeit von φ in $q^* = 0$. Damit ist nach der zugrundegelegten Rockafellarschen Theorie das Problem (44) normal und

$$\inf_{\mathfrak{w} \in \Xi} \bar{\Phi}(\mathfrak{w}, 0) = \sup_{p^* \in Y^*} \big(-\bar{\Phi}^*(0, p^*)\big). \tag{55}$$

Nach (51) können wir aber mit $-p^* = S \in \mathfrak{S}$ für die rechte Seite von (55), gemäß Definition von L, nach Satz 1 auch schreiben $\sup_{S \in \mathfrak{S}} L(S)$; die linke Seite von (55) läßt sich nach (36) und (38) durch $\inf_{\mathfrak{w} \in \mathfrak{W}_0} \bar{J}_2(\mathfrak{w})$ ausdrücken. Damit sind aber Relation (37) und Satz 5 bewiesen ∎

7. Ein Beispiel

I. Wir untersuchen zu dem abgebildeten Zustandsbereich G das Steuerungsproblem

$$J(x) = \int_0^3 x(t)\, dt \to \inf \quad \text{auf } W_p^1([0,3]) \tag{56}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\dot{x} = 0, \qquad \big(t, x(t)\big) \in \bar{G} \quad \text{auf } [0,3],$$
$$x(0) \in \mathfrak{M}_0 = [1,3],$$
$$x(3) \in \mathfrak{M}_3 = [1,3].$$

Dieses Problem ist vom Typ (7), mit dem Steuerbereich $V = \{0\}$. Für alle zulässigen Trajektorien zu (56) gilt $x(t) = \text{const} \geqq 1$, so daß offensichtlich gilt:

Min $J = 3$ mit der optimalen Lösung $x^* = 1$.

Vom Standpunkt der Dualität zwischen (7) und (4) können wir diesen Sachverhalt auch nochmals bestätigen mittels der zulässigen Lösung S^* zum dualen Problem (4) bzw. unseres speziellen Problems (56), wobei

$$S^*(t, \xi) \doteq \begin{cases} t & \text{für} \quad 1 \leqq \xi \leqq 3 \\ \xi t & \text{für} \quad 0 \leqq \xi \leqq 1 \end{cases} \qquad (0 \leqq t \leqq 3)$$

gewählt wird. In der Tat ist hier $S^* \in \mathfrak{S}$, weil die Randbedingung $S_0^* = S^*(0, \xi) = \text{const}$ auf $\mathfrak{M}_0$ als auch $S_3^* = S^*(3, \xi) = \text{const}$ auf $\mathfrak{M}_3$ erfüllt ist; außerdem ist $S^* \in W^1_\infty(G)$ und die Bedingung (8) bzw. (3) in der Gestalt $S_t^*(t, \xi) \leqq \xi$ in G erfüllt. Damit ist nach Satz 2

$$\operatorname{Min} J = \operatorname{Max} L \doteq L(S^*) = 3. \tag{57}$$

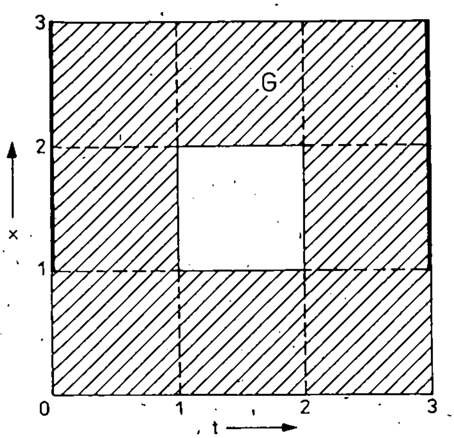

Abb. 1

II. Nunmehr ordnen wir (56) sein Flußproblem erster Art zu gemäß (9). Es lautet

$$J_1(\mathfrak{v}) = \int_G \xi v_0(t, \xi)\, dt\, d\xi \to \inf \tag{58}$$

bez. aller vektorwertigen Funktionen (Flüsse) der Gestalt $\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in C^1(\overline{G})$ mit den Eigenschaften $v_0(t, \xi) \geqq 0$ auf $\overline{G}$, $v_{0t} = 0$ auf G, $\mathfrak{v}' \cdot d\mathfrak{o}_G = 0$ auf ∂G_0,

$$\int_{\mathfrak{M}_s} v_0(s, \xi)\, d\xi = 1 \quad \text{für} \quad s = 0 \quad \text{und} \quad s = 3.$$

Wegen der Randbedingungen sieht man hieraus sofort, daß jeder zulässige Fluß dieses Problems (58) die Eigenschaft hat: $v_0(t, \xi) = 0$ für $0 \leqq \xi \leqq 2$. Mit diesem Ergebnis und den weiteren Eigenschaften von v_0 ersehen wir leicht aus (58): $\inf J_1 \geqq 6$ (ja man kann sogar die Gültigkeit des Gleichheitszeichens nachweisen).

III. Eine ganz ähnliche Situation besteht für das zugeordnete Flußproblem zweiter Art gemäß (19):

$$J_2(\mathfrak{v}) = \int_G \xi v_0(t, \xi)\, dt\, d\xi \to \inf \quad \text{auf } \mathfrak{W} \tag{59}$$

mit

$$\mathfrak{W} = \left\{ \mathfrak{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in L_1^2(G) \mid v_0(t, \xi) \geqq 0 \quad \text{für fast alle} \quad (t, \xi) \in G \quad \text{und} \right.$$

$$\left. \int_G \sigma_t(t, \xi)\, v_0(t, \xi)\, dt\, d\xi = \sigma_3 - \sigma_0 \;\forall\; \sigma \in \mathfrak{S}_0 \right\}. \tag{60}$$

Dabei ist gemäß der Eigenschaften aller Elemente σ von $\mathfrak{S}_0$ $\sigma_0 = \sigma(0, \xi) = \text{const}$ auf $\mathfrak{M}_0$ und $\sigma_3 = \sigma(3, \xi) = \text{const}$ auf $\mathfrak{M}_3$. Wir zeigen, daß jedes zulässige v_0 zum Problem (59) folgende Eigenschaften hat:

$$v_0 = 0 \text{ in } [0,3] \times [0,1],\ [0,1] \times [1,2] \text{ und } [2,3] \times [1,2].$$

a) Zum Nachweis der ersten Eigenschaften setzen wir in (60) ein beliebiges $\sigma \in \mathfrak{S}_0$ des Typs

$$\sigma(t, \xi) = \begin{cases} t\psi(\xi) \text{ in } [0,3] \times [0,1] \quad \text{mit} \quad \psi \in \mathring{C}^1[0,1] \\ 0 \text{ in den übrigen Punkten von } \bar{G}. \end{cases}$$

Hierfür ist $\sigma_0 = \sigma_3 = 0$ und nach (60)

$$\int_0^1 \left(\int_0^3 v_0(t, \xi)\, dt \right) \psi(\xi)\, d\xi = 0 \;\forall \psi \in \mathring{C}^1[0,1].$$

Daraus resultiert aber — weil die Menge $\mathring{C}^1[0,1]$ im $L^1(0,1)$ dicht liegt —

$$\int_0^3 v_0(t, \xi)\, dt = 0 \text{ für fast alle } \xi \in [0,1]. \tag{61}$$

Wegen $v_0 \geqq 0$ fast überall in G hat aber das Ergebnis (61) die Konsequenz $v_0 = 0$ fast überall in $[0,3] \times [0,1]$.

b) Die Eigenschaft $v_0 = 0$ in $[0,1] \times [1,2]$ weisen wir in Analogie zu a) mittels der Funktionenklasse

$$\sigma(t, \xi) = \begin{cases} t\psi(\xi) \text{ in } [0,1] \times [1,2] \text{ mit } \psi \in \mathring{C}^1[1,2] \\ 0 \text{ in den übrigen Punkten von } \bar{G} \end{cases}$$

nach.

c) Die Eigenschaft $v_0 = 0$ in $[2,3] \times [1,2]$ weisen wir in Analogie zu a) mittels der Funktionenklasse

$$\sigma(t, \xi) = \begin{cases} (3 - t)\, \psi(\xi) \text{ in } [2,3] \times [1,2] \text{ mit } \psi \in \mathring{C}^1[1,2] \\ 0 \text{ in den übrigen Punkten von } \bar{G} \end{cases}$$

nach.

Diese Eigenschaften von v_0 bedingen nach (59)

$$J_2(\mathfrak{v}) = \int_G \xi v_0(t, \xi)\, dt\, d\xi = \int_2^3 \int_0^3 \xi v_0(t, \xi)\, dt\, d\xi \geqq 2 \int_2^3 \int_0^3 v_0(t, \xi)\, dt\, d\xi. \tag{62}$$

Weiterhin entnehmen wir diesen Eigenschaften von v_0 nach (60) mittels $\sigma(t, \xi) \equiv t$ die Gleichung

$$\int_2^3 \int_0^3 v_0(t, \xi)\, dt\, d\xi = \int_G v_0(t, \xi)\, dt\, d\xi = 3.$$

Dies, eingesetzt in (62), führt schließlich auf $J_2(\mathfrak{v}) \geqq 6 \ \forall \ \mathfrak{v} \in \mathfrak{W}$. Wir können sogar $\inf\limits_{\mathfrak{w}\in\mathfrak{W}} J_2(\mathfrak{v}) = 6$ zeigen. Dazu wählen wir $\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit

$$v_0(t, \xi) = \begin{cases} 1/\Delta \text{ in } [0,3] \times [2,2 + \Delta] \\ 0 \text{ in den übrigen Punkten von } \bar{G} \end{cases}$$

zu beliebigem $\Delta > 0$. Offensichtlich ist dieser Fluß $\mathfrak{v} \in \mathfrak{W}$, denn $\forall \ \sigma \in \mathfrak{S}_0$ ist

$$\int\limits_G \sigma_t(t, \xi)\, v_0(t, \xi)\, dt\, d\xi = \int\limits_2^{2+\Delta}\int\limits_0^3 \sigma_t(t, \xi)\, \frac{1}{\Delta}\, dt\, d\xi$$

$$= \frac{1}{\Delta}\int\limits_2^{2+\Delta} [\sigma_3 - \sigma_0]\, d\xi = \sigma_3 - \sigma_0\,.$$

Damit ist nach (60) $\mathfrak{v} \in \mathfrak{W}$. Zum anderen ist hierfür

$$J_2(\mathfrak{v}) = \int\limits_2^{2+\Delta}\int\limits_0^3 \xi\, \frac{1}{\Delta}\, dt\, d\xi = \frac{3}{\Delta}\cdot\left[\frac{(2+\Delta)^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right] = 3\cdot 2 + \frac{3}{2}\Delta\,,$$

also $\lim\limits_{\Delta\to 0} J_2(\mathfrak{v}) = 6$ bzw. $\inf\limits_{\mathfrak{W}} J_2 = 6$.

Da nach Satz 3 das Steuerungsproblem (56) und das zugeordnete Flußproblem (59) das gleiche Dualproblem besitzen, ist wegen (57) $\inf\limits_{\mathfrak{W}} J_2 = 6 > \sup L = 3$. Somit liegt hier zwischen dem Flußproblem (59) und seinem Dualproblem eine Dualitätslücke vor. Sie ist im wesentlichen bedingt durch die spezielle Vorgabe von $\mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{M}_3$ in bezug auf G und $V = \{0\}$. Sobald wir den unteren Rand von $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_3$ vergrößern oder verkleinern entfällt diese Dualitätslücke.

IV. Zur Schließung der vorangehend aufgezeigten Dualitätslücke genügt es nach Satz 5, das Funktional J_2 auf $\mathfrak{W}_0$ fortzusetzen und auf diesem erweiterten zulässigen Bereich das Infimum zu bilden. Wir wollen im Beispiel hier direkt bestätigen, daß $\inf\limits_{\mathfrak{W}_0} \bar{J}_2 = 3 = \sup L$ ist.

Wir konstruieren dazu folgende spezielle Flüsse $\mathfrak{v}^\Delta = \begin{pmatrix} v_0^\Delta \\ 0 \end{pmatrix}$

mit $$v_0^\Delta(t, \xi) = \begin{cases} 1/\Delta \text{ in } [0,3] \times [1 - \Delta, 1] \\ 0 \text{ in den übrigen Punkten von } \bar{G} \end{cases}$$

zu $\Delta > 0$. Hierfür ist $J_2(\mathfrak{v}^\Delta) = 3 - \frac{3}{2}\Delta$. Außerdem ist die Menge aller dieser $\mathfrak{v}^\Delta$ als Menge von linearen stetigen Funktionalen auf $L^2_\infty(G)$ mit gleichmäßig beschränkter Norm aufzufassen, weil für beliebige $q^* = \begin{pmatrix} q_0^* \\ q_1^* \end{pmatrix} \in L^2_\infty(G)$ offenbar

$$|\langle q^*, \mathfrak{v}^\Delta\rangle| = \left|\int\limits_G q_0^*(t, \xi)\, v_0^\Delta(t, \xi)\, dt\, d\xi\right|$$

$$\leqq \operatorname*{vrai\,max}_G |q_0^*| \int\limits_G v_0^\Delta(t, \xi)\, dt\, d\xi \leqq 3\, \|q^*\|$$

gilt. Infolgedessen ist die Menge aller $\mathfrak{v}^{\Delta}$ in $\Xi = L^2_\infty(G)^*$ schwach kompakt, so daß eine Folge $\{\mathfrak{v}^{\Delta_k}\}$ und ein $\mathfrak{w} \in \Xi$ existieren mit $\mathfrak{v}^{\Delta_k} \rightharpoonup \mathfrak{w}$ für $\Delta_k \to 0$. Damit erhält man $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_0$

$$\langle \sigma, p_k \rangle := \int_G \sigma_t(t, \xi)\, v_0^{\Delta_k}(t, \xi)\, dt\, d\xi - (\sigma_3 - \sigma_0)$$

$$= \frac{1}{\Delta} \int_{1-\Delta}^{1} [\sigma(3, \xi) - \sigma(0, \xi)]\, d\xi - (\sigma_3 - \sigma_0)$$

und $\lim\limits_{k\to\infty} \langle \sigma, p_k \rangle = 0$. Das bedeutet nach (35): $\mathfrak{w} \in \mathfrak{W}_0$. Damit ist nach (36)

$$\bar{J}_2(\mathfrak{w}) = \varliminf_{\mathfrak{v} \rightharpoonup \mathfrak{w}, \mathfrak{v} \in X_0} J_2(\mathfrak{v}) \leqq \lim_{k\to\infty} J_2(\mathfrak{v}^{\Delta_k}) = 3,$$

so daß wegen $\bar{J}_2(\mathfrak{w}) \geqq \sup L = 3$ hiermit eine direkte Bestätigung von (37) erfolgt ist.

LITERATUR

[1] CESARI, L.: Optimization with partial differential equations in Dieudonné-Rashevsky form and conjugate problems. Arch. Rat. Mech. Anal. **33** (1969), 339–357.

[2] EKELAND, I., et R. TEMAN: Analyse convexe et problèmes variationnels. Paris 1974.

[3] GÖPFERT, A.: Mathematische Optimierung in allgemeinen Vektorräumen. Leipzig 1973.

[4] ИОФФЕ, А. Д., и В. М. ТИХОМИРОВ: Теория экстремальных задач. Москва 1974.

[5] KLÖTZLER, R.: On a general conception of duality in optimal control. In: Proceedings of the Conference EQUADIFF 4, Prague 1977, 189–196.

[6] KLÖTZLER, R.: Flow problems and duality. In: Banach-Center Publications. Warszaw 1983 (to appear).

[7] KLÖTZLER, R.: Dualität bei Steuerungsproblemen und zugeordneten Flußproblemen I. Zeitschr. f. Anal. Anwend., 4 (1982), 47–57.

[8] KLÖTZLER, R.: Apriori-Abschätzungen von Optimalwerten zu Steuerungsproblemen I, II. Math. Operationsforsch. u. Statist. Ser. Optimization **10** (1979), 101–110 und 335–344.

[9] MORREY, C. B.: Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin–Heidelberg–New York 1966.

[10] VINTER, R. B., and R. M. LEWIS: The equivalence of the strong and weak formulation for certain problems in optimal control. SIAM J. on Control and Optim. **16**, 4 (1978), 546–570.

[11] YOUNG, L. C.: Lectures on the calculus of variations and optimal control theory. Philadelphia 1969.

Manuskripteingang: 25. 3. 1982

VERFASSER:

Prof. Dr. ROLF KLÖTZLER
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz