Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd 2 (1) (1983), S. 51–55

Existenz einer schwachen Lösung eines entarteten parabolischen Rand-Anfangswertproblems zwischen schwachen Ober- und Unterlösungen

D. SOSNA

Für ein entartetes parabolisches Rand-Anfangs-Wert-Problem über einem beschränkten Gebiet wird bei vorausgesetzter Existenz von glatten schwachen Ober- und Unterlösungen die Existenz einer schwachen Lösung gezeigt, die fast überall zwischen schwacher Ober- und Unterlösung liegt.

Доказано существование слабого решения вырожденного уравнения параболического типа в случае существования слабых верхного и нижнего решений. Слабое решение лежит между ними почти всюду.

Considering a degenerate parabolic initial-boundary-value-problem on a bounded domain which has smooth weak upper and lower solutions we proof the existence of a weak solution, being between upper and lower solutions almost everywhere.

Wir stellen die Aufgabe, die Einschließung der schwachen Lösung des Rand-Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \operatorname{div}_x \left(|u(x,t)|^{p-2} \operatorname{grad}_x u(x,t)\right) &= 0, \qquad && (x,t) \in G \times (0,T) \\ u(x,t) &= 0, && (x,t) \in \partial G \times (0,T) \qquad (1) \\ u(x,0) &= u_0(x), && x \in G \end{aligned}$$

zwischen schwache Ober- und Unterlösungen dieses Problems mittels Monotoniemethoden zu zeigen. Der Faktor $|u(x,t)|^{p-2}$ in der vorgelegten Gleichung bewirkt, daß bei $p > 2$ die Differentialgleichung entarten kann und sich für die energetische Erweiterung des Differentialoperators keine Monotonieeigenschaft zeigen läßt. In [7] wurde durch eine andere Erweiterung des Operators ein d-monotones Problem formuliert, dessen schwache Lösungstheorie dort ebenfalls dargestellt wird. Diese Probleme der nichtlinearen Diffusion wurden vielfach untersucht, genannt seien z. B. [1–3, 6–9]. Eine Definition schwacher Ober- und Unterlösungen wird in [4, 5] gegeben, ebenso die zum Beweis der Einschließung benutzte Konstruktion.

1. Problemstellung und Definitionen

Im folgenden bezeichne G ein beschränktes Gebiet des $\mathbf{R}^n$, $n \geqq 1$. Den Hilbertraum $\mathsf{H} = \left(\mathsf{W}_0^{1,2}(G)\right)^*$ versehen wir mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) := \int_G \tilde{u} v \, dx, \qquad -\Delta \tilde{u} = u, \qquad \tilde{u} \in \mathsf{H}^* = \mathsf{W}_0^{1,2}(G) =: \mathsf{H}_0^1.$$

Dabei ist $-\Delta$ die Dualitätsabbildung von H_0^1 auf H. Wenn wir H mit H^* identifizieren, ergibt sich mit dem Raum $\mathsf{V} = \mathsf{L}^p(G)$, $2 < p < \infty$, das Evolutionstripel $\mathsf{V} \subset \mathsf{H} \subset \mathsf{V}^*$. Wir werden deshalb auch in der üblichen Weise den Wert des Funktionals $f \in \mathsf{V}^*$ an der Stelle $u \in \mathsf{V}$ mit (f, u) bezeichnen. Für das beschränkte Intervall $S = [0, T]$ werden mit Hilfe der Räume des Evolutionstripels Räume vektorwertiger Funktionen definiert, die mit ihren Eigenschaften z. B. in [6] beschrieben werden. Für die folgende Definition benutzen wir die Darstellung der Funktionale über $\mathsf{L}^p(S, \mathsf{V})$ durch Funktionen aus $\mathsf{L}^q(S, \mathsf{V}^*)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Zu (1) stellen wir das folgende *schwache Problem*:
Gegeben sei $u_0 \in \mathsf{L}^2(G)$. $u \in \mathsf{L}^p(Q) = L^p(S, \mathsf{V})$, $Q = G \times S$, heißt *schwache Lösung* von (1), falls gilt

$$\left.\begin{aligned} &\int_G \big(u'(t), v(t)\big)\, dt + \tilde{a}(u, v) = 0 \qquad \forall v \in \mathsf{L}^p(S, \mathsf{V}) \\ &\text{mit} \\ &\tilde{a}(u, v) = \frac{1}{p-1} \int_S \int_G |u|^{p-2}\, uv\, dx\, dt \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und $u(0) = u_0$ im Raum H. Dabei ist u' im distributiven Sinn und als Element des Raumes $\big(\mathsf{L}^p(S, \mathsf{V})\big)$ zu verstehen.

Die Funktion $\Psi \in \mathsf{L}^p(Q)$ heißt *schwache Oberlösung* zu (2), falls

$$\begin{aligned} &\int_S \big(\Psi'(t), v(t)\big)\, dt + \tilde{a}(\Psi, v) \geqq 0 \qquad \forall v \in \mathsf{L}^p(S, \mathsf{V}), \qquad v \geqq 0 \quad \text{f. ü.} \\ &\Psi(0) \geqq u_0 \end{aligned} \tag{3}$$

gilt. Entsprechend nenne man Φ eine *schwache Unterlösung* zu (2), wenn in (3) die umgekehrte Ungleichung gilt.

Bemerkung: Wegen $p \geqq 2 > 2n/(n+2)$ ist es korrekt, die Lösungen von (2) und (3) in $\mathsf{L}^p(S, \mathsf{V}) = \mathsf{L}^p\big(S, \mathsf{L}^p(G)\big) = \mathsf{L}^p(Q)$ zu suchen. Um die Existenz der Lösungen zu erhalten, muß für die Anfangswerte auch nur gelten $u_0 \in \mathsf{H}$.

Vorbereitend führen wir noch den Raum W ein:
$\mathsf{W} = \{u \mid u \in \mathsf{L}^p(S, \mathsf{V}),\ u' \in L^p(S, \mathsf{V})^*\}$ mit der Norm $\|u\|_W = \|u\|_{\mathsf{L}^p(S,\mathsf{V})} + \|u'\|_{\mathsf{L}^p(S,\mathsf{V})}$ wird zu einem Banachraum, der stetig in $\mathsf{C}(S, \mathsf{H})$ eingebettet ist.

Durch

$$(\mathcal{A}u, v) := \frac{1}{p-1} \int_G |u|^{p-2}\, uv\, dx \qquad (u, v \in V)$$

wird ein Operator $\mathcal{A}: \mathsf{V} \to \mathsf{V}^*$ definiert, der demistetig und d-monoton ist, da die Wachstumsbedingung $\big||u|^{p-2}\, u\big| \leqq |u|^{p-1}$ und die Monotonieabschätzung

$$\big(|t|^{p-2}\, t - |s|^{p-2}\, s\big)\,(t - s) \geqq \big(|t|^{p-1} - |s|^{p-1}\big)\,\big(|t| - |s|\big) \qquad (t, s - \text{reell}) \tag{4}$$

erfüllt sind. Es folgt

$$(\mathcal{A}u - \mathcal{A}v, u - v) \geqq \{\alpha(\|u\|) - \alpha(\|v\|)\}\,(\|u\| - \|v\|) \qquad (u, v \in V) \tag{4'}$$

mit $\alpha(s) = s^{p-1}$. Aus der letzten Ungleichung folgt die Koerzitivität, wenn man $v = 0$ einsetzt.

Mit diesen Eigenschaften des Operators $\mathcal{A}$ ist die Existenz einer Lösung $u \in \mathsf{W}$ nach Beispiel 1 in [6: S. 215] gegeben.

2. Gestörtes Problem

[4] folgend definieren wir ein Funktional

$$\tilde{b}(u, v) = \int_Q \gamma\big(x, t, u(x, t)\big) \cdot v(x, t)\, dx\, dt \tag{5}$$

mit

$$\gamma(x, t, s) = \begin{cases} \big(s - \Psi(x, t)\big)^{p-1}, & s > \Psi(x, t) \\ 0, & 0 \leqq s \leqq \Psi(x, t) \\ -(-s)^{p-1}, & s < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Lemma 1:

a) *$\tilde{b}(u, v)$ ist auf $\mathsf{L}^p(Q) \times \mathsf{L}^p(Q)$ definiert und erfüllt die Ungleichung*

$$\tilde{b}(u, v) \geqq \|u\|^p - c_1 \|u\|^{p-1} - c_2 \qquad (c_1, c_2 \text{ Konstante}).$$

b) $\tilde{b}(u, u) \geqq 0$ *und*

c) $\tilde{b}(u, u - v) - b(v, u - v) \geqq 0.$

Beweis: a) Die Funktion $\gamma(x, t, s)$ erfüllt die Wachstumsbedingung $|\gamma(x, t, s)| \leqq |s|^{p-1}$ und eine Carathéodory-Bedingung, die die Existenz des Integrals bei $u, v \in \mathsf{L}^p(Q)$ sichern. Die Koerzitivitätsungleichung wurde in [4] hergeleitet. (7)

b) Die Positivität ist offensichtlich.

c) Die Behauptung folgt aus $\gamma(x, t, s_1) - \gamma(x, t, s_2) (s_1 - s_2) \geqq 0$, wobei $s_1, s_2 \in \mathbf{R}$ beliebig sind ∎

Durch die Gleichung

$$b(t, u, v) = \int_G \gamma\big(x, t, u(x)\big)\, v(x)\, dx$$

wird auf $\mathsf{V} \times \mathsf{V}$ ein beschränktes Funktional definiert, das die Eigenschaften b) und c) aus Lemma 1 auf $\mathsf{V} \times \mathsf{V}$ besitzt. Die Abbildung $t \mapsto b(t, u, v)$ ist meßbar (u, v fest), da $t \mapsto \Psi(\cdot, t)$ bzw. $t \to \Phi(\cdot, t)$ meßbar sind und γ eine Carathéodory-Bedingung erfüllt.

Wir stellen neben (2) ein *gestörtes schwaches Problem*: Gesucht wird eine Funktion $u \in \mathsf{W}$, so daß

$$\int_S \big(u'(t), v(t)\big)\, dt + \tilde{a}(u, v) + b(u, v) = 0 \quad \text{für alle} \quad v \in \mathsf{L}^p(S, \mathsf{V}) \tag{8}$$

und

$$u(0) = u_0 \quad \text{in } \mathsf{H}$$

zutreffen.

Lemma 2: *Der durch $b(t, u, v) = \big(\mathscr{B}(t)\, u, v\big)$ definierte Operator $\mathscr{B}(t) : \mathsf{V} \to \mathsf{V}^*$ is demistetig und erfüllt $\big(\mathscr{B}(t)\, u, u\big) \geqq 0$ $(u \in \mathsf{V})$ und $\big(\mathscr{B}(t)\, u - \mathscr{B}(t)\, v, u - v\big) \geqq 0$ $(u, v \in \mathsf{V}; t \in S)$.*

Beweis: Wiederum folgt die Demistetigkeit aus der Wachstumsbedingung für γ, die anderen behaupteten Eigenschaften aus der Vorschrift (6) für die Bildung von γ ∎

Der Operator $\mathscr{C}(t) = \mathscr{A} + \mathscr{B}(t) : \mathsf{V} \to \mathsf{V}^*$ ist damit demistetig, d-monoton und koerzitiv. Ferner gilt

$$\left.\begin{aligned} &\big(\mathscr{C}(t)\, u, u\big) \geqq (\mathscr{A}u, u) \geqq \|u\|_{\mathsf{V}}^p \\ &\|\mathscr{C}(t)\, u\|_{\mathsf{V}^*} \leqq \|\mathscr{A}u\|_{\mathsf{V}^*} + \|\mathscr{B}(t)\, u\|_{\mathsf{V}^*} \leqq 2\|u\|_{\mathsf{V}}^{p-1} \end{aligned} \quad (u \in \mathsf{V}) \right\} \tag{9}$$

und $t \mapsto \big(\mathscr{C}(t)\, u, v\big)$ ist für feste $u, v \in \mathsf{V}$ meßbar.
Wegen dieser Eigenschaften der Operatorfamilie $\mathscr{C}(t)$ sichert ein Satz aus [6: Satz 1.1/Kap. VI] die Existenz genau einer Lösung $u \in \mathsf{W}$ des Problems (8).

3. Einschließung der Lösung

Satz 1: *Sei* $u_0 \in \mathsf{L}^2(G)$, $u_0 \geqq 0$ *f. ü. Das Problem* (8) *mit* $p > 2$ *habe die Lösung* $u \in \mathsf{W}$. $\Psi \in \mathsf{W}$ *sei schwache Oberlösung und* $\varphi \equiv 0$ *eine schwache Unterlösung zu* (2). *Dann gilt* $0 \leqq u(x, t) \leqq \Psi(x, t)$ *in* Q *f. ü.*, u *löst* (2).

Wir zeigen zunächst die Gültigkeit einer Aussage aus [7] auch in unserem Fall.

Lemma 3: *Sei* $g \in \mathsf{W}$ *mit* $g(0) = 0$ *in* H. *Dann gilt*

$$(g', g^+) \geqq 0 \quad \text{mit} \quad g^+ = \sup\{g, 0\}.$$

Beweis: Er läßt sich analog zu [7] geben, dabei ist die Isometrie zwischen H und H^* $\left(= \mathsf{W}_0^{1,2}(G)\right)$ zu beachten.

(i) Es gibt eine Folge g_j aus der Klasse $\mathsf{C}^1\left(S, \mathsf{C}^\infty(\bar{G})\right)$ mit $g_j \to g$ im Raum W.

(ii) Die Abbildung $g \mapsto g^+$ ist stetig in den Raum $\mathsf{L}^p(G) \cap \mathsf{C}\left(S, \mathsf{L}^2(G)\right)$, da $2g^+ = g + |g|$ und die Stetigkeit von $g \mapsto |g|$ aus den folgenden Abschätzungen folgt:

$$\begin{aligned} &\big||g(x, t)| - |g(x, t_1)|\big| \leqq |g(x, t) - g(x, t_1)| \\ &\big\||g(t)| - |g(t_1)|\big\|_{\mathsf{L}^2(G)} \leqq \|g(t) - g(t_1)\|_{\mathsf{L}_2(G)} \leqq \|g(t) - g(t_1)\|_{\mathsf{H}_0^1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Da die Elemente $g \in \mathsf{W}$ im Raum $\mathsf{C}(S, \mathsf{H})$ stetig eingebettet sind, folgt aus (10), daß $g \in \mathsf{C}\left(S, \mathsf{L}^2(G)\right)$. Für $g, h \in \mathsf{W}$ ergibt sich

$$\big\||g| - |h|\big\|_{\mathsf{C}(S, \mathsf{L}^2(G))} \leqq \|g - h\|_{\mathsf{C}(S, \mathsf{H})} \leqq c\|g - h\|_{\mathsf{W}}.$$

(iii) Damit gilt für die Folge g_j

$$\lim_{j\to\infty} (g_j', g_j^+) = (g', g^+)$$

und, da man das Funktional als Skalarprodukt im L^1 auffassen kann, $\lim\limits_{j\to\infty} (g_j', g_j^+) \geqq 0$, wie in [4] beschrieben ∎

Beweis von Satz 1:
Wir bilden $v = (u - \Psi)^+$. Es gilt $v \in \mathsf{L}^p(Q)$, $v \geqq 0$ in Q und $v(x, 0) = 0$ für $x \in G$. Subtraktion der Relationen (3), (8) für Ψ bzw. u liefert bei Einsetzen der soeben gebildeten speziellen Funktion v:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial t}, (u - \Psi)^+\right) + \tilde{a}\left(u, (u - \Psi)^+\right) - \tilde{a}\left(\Psi, (u - \Psi)^+\right) \\ &+ \tilde{b}\left(u, (u - \Psi^+)\right) \leqq 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Sei $Q^+ = \{(x, t) \mid (x, t) \in Q, v(x, t) > 0\}$. Das Funktional $\tilde{a}$ braucht nur über Q^+ betrachtet zu werden, da die Integration über $Q \setminus Q^+$ keinen Beitrag liefert. Der Integrand ist wegen $u > \Psi$ auf Q^+ und der d-Monotonie nichtnegativ, so daß $a\left(u, (u - \Psi)^+\right) - a\left(u, (u - \Psi)^+\right) \geqq 0$. Nach Lemma 3 gilt $\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \Psi}{\partial t}, (u - \Psi)^+\right) \geqq 0$. Wegen $b\left(u, (u - \Psi)^+\right) = \|(u - \Psi)^+\|_{L^p(Q)}^p \geqq 0$ läßt sich (11) nur erfüllen, wenn Q^+ eine Menge vom Maße Null ist.

Analog zeigt man $0 \leqq u$ f. ü. in Q ∎

Bemerkung (zur Existenz von Oberlösungen): Da auf Grund der angegebenen Voraussetzungen die Gleichung (2) für jede rechte Seite $f \in \mathsf{L}^q(G)$, $1/p + 1/q = 1$, anstelle von $f = 0$ lösbar ist, erhält man bei $f(x, t) > 0$ f. ü. in Q die Aussage, daß die Lösung des quellenbehafteten Problems eine Oberlösung für das quellenfreie Problem darstellt.

LITERATUR

[1] AMES, W. F.: Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering. New York 1965.
[2] BERGER, A. E., BREZIS, H., and J. C. W. ROGERS: A Numerical Method for Solving the Problem $u_t - \Delta f(u) = 0$, RAIRO analyse numerique **13** (1979), 297—312.
[3] CAFFARELLI, L. A., and A. FRIEDMAN: Continuity of the Density of a Gas Flow in a Porous Medium. Trans. Amer. Math. Soc. **252** (1979), 99—113.
[4] DEUEL, J.: Nichtlineare parabolische Randwertprobleme mit Unter- und Oberlösungen. ETH Diss. **5750**: Zürich 1976.
[5] DEUEL, J., and P. HESS: Nonlinear Parabolic Boundary Value Problems with Upper and Lower Solutions. Israel Math. J. **29** (1978), 92—104.
[6] GAJEWSKI, H., GRÖGER, K. und K. ZACHARIAS: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. Berlin 1974.
[7] LIONS, J. L.: Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris 1969.
[8] OLEJNIK, O. A.: On some Degenerate Quasilinear Parabolic Equations. Seminari dell'Instituto Nazionale di Alta Matematica 1962—1963, Oderisi, Gubbio 1964, 355—371.
[9] САБИНИНА, Е. С.: О задаче Коши для уравнения нестационарной фильтрации газа с многими пространственными переменными. ДАН **136** (1961), 1034—1037.

Manuskripteingang: 6. 10. 1981; in revidierter Fassung: 29. 4. 1982

VERFASSER:

Dr. DIETER SOSNA
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz