Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (1) (1983), S. 75 – 88

Maximale Strömungen vollergodischer Automorphismen mit quasidiskretem Spektrum

E. WEIHERT

Jeder auf einem Lebesgueschen Maßraum definierte vollergodische Automorphismus mit quasidiskretem Spektrum ist in eine maximale diskrete Strömung einbettbar, die aus allen Wurzeln dieses Automorphismus erzeugt wird. Zu jeder Untergruppe der additiven Gruppe der rationalen Zahlen und jeder natürlichen Zahl n existiert ein vollergodischer Automorphismus mit quasidiskretem Spektrum, dessen Halmosinvariante gleich n ist und der in eine diskrete Strömung einbettbar ist, dessen Parametergruppe gerade die vorgegebene Untergruppe der rationalen Zahlen ist. Damit wird der Strukturreichtum möglicher Strömungen belegt.

Доказывается, что каждый на Лебеговом пространстве определенный вполне-эргодический автоморфизм с квазидискретным спектром может быть вложенным в максимальный дискретный поток, который образуется с помощью всех корней данного автоморфизма. Дальше показывается, что для каждой подгруппы аддитивной группы рациональных чисел и любого натурального числа n существует вполнеэргодический автоморфизм с квазидискретным спектром, инвариант Халмоша которого равень n и который может быть вложен в дискретный поток, группа параметров которого есть данная подгруппа рациональных чисел. Этим показывается структурное богатство возможных потоков.

Every totally ergodic automorphism with quasi-discrete spectrum on a Lebesgue space can be embedded in a maximal discrete flow which is generated by all roots of the automorphism. It is also shown, that for every subgroup of the additive group of the rationals and every natural n a totally argodic automorphism with quasidiscrete spectrum exists which Halmos-invariant is equal to n and which can be embedded in a discrete flow which parametergroup is the given subgroup of the rationals.

0. Einleitung

Ein klassisches Problem der Ergodentheorie stellt die Frage nach der Existenz von k-ten Wurzeln ($k \in \mathbf{N}$) für eine maßtreue Transformation T eines Maßraumes $(X, \mathcal{S}, m)$, d. h. die Frage nach der Existenz einer maßtreuen Transformation W mit der Eigenschaft $W^k = T$, dar. Damit im Zusammenhang ist das Problem der Einbettbarkeit einer maßtreuen Transformation T in eine einparametrige Gruppe $\{T_\gamma\}$, *Strömung* genannt, zu sehen. Hierbei sind die T_γ maßtreue Transformationen mit den Eigenschaften $T_1 = T$ und $T_{\gamma_1}T_{\gamma_2} = T_{\gamma_1+\gamma_2}$, wobei diese Gleichungen mod m-Nullmengen zu verstehen sind, und die γ durchlaufen die additive Gruppe der reellen Zahlen oder eine ihrer Untergruppen.

HAHN und PARRY [3] bewiesen, daß ein auf einem Lebesgueschen Raum $(X, \mathcal{S}, m)$ definierter vollergodischer Automorphismus T mit quasidiskretem Spektrum, dessen Eigenfunktionen noch nicht den ganzen Raum $L_2(X, \mathcal{S}, m)$ aufspannen, nicht in eine Strömung $\{T_\gamma\}$ mit der gesamten Menge der reellen Zahlen als Parameterbereich einbettbar ist. Für jeden vollergodischen Automorphismus T mit quasidiskretem Spektrum existiert aber die triviale Strömung, bestehend aus den Potenzen $T^n (n \in \mathbf{Z})$

von T, und wenn T eine k-te Wurzel W besitzt, so ist T sogar in die Strömung, bestehend aus den Potenzen $W^n \doteq (T^{1/k})^n$ $(n \in \mathbf{Z})$ von W, einbettbar. Damit drängt sich natürlich die Frage auf, wie eine sinnvoll definierte maximale Strömung aussehen kann. Eine solche Definition wurde in [6] von H. MICHEL gegeben. Dort wurde gezeigt, daß alle vollergodischen Automorphismen mit R_T-direkt zerlegbarem quasidiskretem Spektrum maximal einbettbar sind und wie reich die Klasse der Strömungen ist, die solche Automorphismen einbetten. In der vorliegenden Arbeit werden diese Resultate auf die ganze Klasse der vollergodischen Automorphismen mit quasidiskretem Spektrum auf Lebesgueschen Räumen verallgemeinert.

1. Grundlegende Definitionen und Hilfsmittel

1.1. Maß- und ergodentheoretische Hilfsmittel

Es sei $(X, \mathscr{S}, m)$ stets ein Lebesguescher Maßraum, d. h. insbesondere normiert und separabel. Eine maßtreue Transformation $T : X \to X$ heißt *ergodisch*, wenn für alle $A \in \mathscr{S}$ mit $T^{-1}(A) = A$ $m(A) = 0$ oder $m(X \setminus A) = 0$ gilt. *Vollergodisch* wird eine maßtreue Transformation $T : X \to X$ genannt, wenn T^n ergodisch ist für alle $n \in \mathbf{N}$. Der Hilbertraum $L_2(X, \mathscr{S}, m)$ der auf X definierten, komplexwertigen, quadratisch integrierbaren, mod m-Nullmengen identifizierten Funktionen soll im weiteren kurz $L_2(X)$ genannt werden. Die maßtreue Transformation $T : X \to X$ induziert einen linearen isometrischen Operator $U_T : L_2(X) \to L_2(X)$, der durch $U_T f = f \circ T$ für alle $f \in L_2(X)$ definiert ist. Es sei $H_1(T)$ die Menge der Eigenwerte von U_T, d. h.

$$H_1(T) \doteq \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \exists f \in L_2(X) \quad \text{mit} \quad U_T f = \lambda f\}.$$

$H_1(T)$ erweist sich als Untergruppe der Randlinie des Einheitskreises K. Mit $G_1(T)$ soll die Menge der normierten Eigenfunktionen von U_T bezeichnet werden, d. h.

$$G_1(T) = \{f \in L_2(X) \mid \|f\| = 1, \quad \exists \lambda \in K, \quad \text{so daß} \quad U_T f = \lambda f \quad \text{ist}\}.$$

Dann lassen sich die Mengen der *Quasieigenfunktionen n-ter Ordnung* $G_n(T)$ durch

$$G_n(T) = \{f \in L_2(X) \mid \|f\| = 1, \quad \exists g \in G_{n-1}(T) \quad \text{mit} \quad U_T f = g f\}$$

und die Menge der *Quasieigenwerte n-ter Ordnung* $H_n(T)$ durch

$$H_n(T) = \{g \in G_{n-1}(T) \mid \exists f \in G_n(T) \quad \text{mit} \quad U_T f = g f\}$$

für alle $n \in \mathbf{N}$ definieren. Somit gilt

$$H_n(T) \subseteqq H_{n+1}(T) \subseteqq G_n(T) \subseteqq G_{n+1}(T) \quad \text{für alle} \quad n \in N.$$

$G(T) \doteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n(T)$ nennt man die Menge der *Quasieigenfunktionen* und $H(T) = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n(T)$ die Menge der *Quasieigenwerte* der Transformation T. Existiert eine und somit auch eine kleinste natürliche Zahl n, für die $G_n(T) \doteq G_{n+1}(T)$ gilt, so ergeben sich folgende Gleichungen: $G(T) = G_n(T)$ und $H(T) = H_n(T)$. Die Größe

$$n(T) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } G_n(T) \neq G_{n+1}(T) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbf{N} \\ \min\left(n \in \mathbf{N} \mid G_n(T) = G_{n+1}(T)\right), & \text{sonst} \end{cases}$$

wird *Halmosinvariante* von T genannt. Für ergodische Transformationen T haben die eingeführten Objekte folgende Eigenschaften (vgl. [1]):

1. Aus $f \in G(T)$ folgt $|f(x)| = 1$ für m-fast alle $x \in X$.
2. Jede der Mengen $G_n(T)$, $H_n(T)$, $G(T)$ und $H(T)$ ist eine multiplikative Gruppe.
3. Gehören $f_1, f_2 \in G(T)$ zum gleichen Quasieigenwert g, so gilt $f_1 = cf_2$, wobei $c \in K$ eine Konstante ist.
4. Ordnet man jeder Funktion $f \in H(T)$ durch $R_T f = g$ ihren Quasieigenwert g zu, d. h. $U_T f = gf$, so ist R_T ein algebraischer Endomorphismus der Gruppe $H(T)$.
5. $R_T H_{n+1}(T) \subseteqq H_n(T)$ für alle $n \in \mathrm{N}$.
6. Der Kern des Endomorphismus $R_T{}^n$ ist $H_n(T)$ für alle $n \in \mathrm{N}$.
7. Die Gruppe $H(T)$ ist abzählbar.
8. Ist die Transformation T vollergodisch, so sind die Quasieigenfunktionen, die zu verschiedenen Quasieigenwerten gehören, orthogonal.

Auf Grund der letzten der genannten Eigenschaften ist die folgende Definition sinnvoll: Eine vollergodische Transformation $T : X \to X$ heißt Transformation mit *quasidiskretem Spektrum*, falls die Gruppe der Quasieigenfunktionen $G(T)$ den Hilbertraum $L_2(X)$ aufspannt. Die Klasse der auf Lebesgueschen Räumen definierten vollergodischen Automorphismen mit quasidiskretem Spektrum soll im folgenden mit $\mathcal{K}^*$ bezeichnet werden.

Zwei Folgen $\{H_n\}$ und $\{H_n'\}$ von Gruppen mit den Eigenschaften:

(i) $H_1 \subset H_2 \subset \cdots$ und $H_1' \subset H_2' \subset \cdots$,

(ii) in jeder Gruppe $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$ und $H' = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n'$ ist ein Endomorphismus S bzw. S' definiert, so daß $SH_{n+1} \subseteqq H_n$ und $S'H'_{n+1} \subseteqq H_n'$ für alle $n \in \mathrm{N}$ gilt,

(iii) $H_1 = H_1'$ und

(iv) es existiert ein Isomorphismus $V : H \to H'$, der die Elemente von $H_1 = H_1'$ fest läßt, die Gruppen H_n auf H_n' $(n = 2, 3, \ldots)$ abbildet, d. h. $VH_n = H_n'$ $(n = 2, 3, \ldots)$ und die Gleichung $VS = S'V$ erfüllt,

heißen *äquivalent* und man schreibt $\langle H, S\rangle \approx \langle H', S'\rangle$.

Die auf $(X_i, \mathcal{S}_i, m_i)$ $(i = 1, 2)$ definierten maßtreuen Transformationen $T_1 : X_1 \to X_1$ und $T_2 : X_2 \to X_2$ heißen *isomorph* $(T_1 \simeq T_2)$, wenn Mengen $M_i \in \mathcal{S}_i$ mit $m_i(M_i) = 1$ $(i = 1, 2)$ existieren, so daß $T_i(M_i) \subseteqq M_i$ $(i = 1, 2)$ gilt und eine invertierbare maßtreue Transformation $\Phi : M_1 \to M_2$ existiert, für die die Bedingung $\Phi T_1(x) = T_2\Phi(x)$ für alle $x \in M_1$ erfüllt ist.

Für vollergodische Transformationen mit quasidiskretem Spektrum auf Lebesgueschen Räumen bewies Abramow [1], daß $T_1 \simeq T_2$ dann und nur dann gilt, wenn $\langle H(T_1), R_{T_1}\rangle \approx \langle H(T_2), R_{T_2}\rangle$ gilt. Es gilt außerdem der folgende Existenzsatz (vgl. [1]): Ist H_1 eine abzählbare Untergruppe der Randlinie des Einheitskreises, die keine Elemente endlicher Ordnung enthält außer der 1, $H_1 \subseteqq H_2 \subseteqq \cdots$ eine Folge abzählbarer kommutativer Gruppen und S ein Endomorphismus auf der Gruppe $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} H_n$, so daß H_n der Kern von S^n ist $(n = 1, 2, \ldots)$, so existiert ein Lebesguescher Raum und darauf ein vollergodischer Automorphismus T mit quasidiskretem Spektrum, für den gilt: $\langle H(T), R_T\rangle \approx \langle H, S\rangle$.

Ist $T \in \mathcal{K}^*$ und k eine natürliche Zahl, so heißt der ergodische Automorphismus W auf $(X, \mathcal{S}, m)$ eine *k-te Wurzel* von T, wenn $W^k \simeq T$ gilt. Es zeigt sich, daß jede Wurzel eines Automorphismus $T \in \mathcal{K}^*$ ein vollergodischer Automorphismus ist. Für Wurzeln von Automorphismen $T \in \mathcal{K}^*$ gilt der folgende Existenzsatz [5]: Ist $T \in \mathcal{K}^*$, so ist für die Existenz einer k-ten Wurzel W $(k = 1, 2, \ldots)$ von T notwendig und hinreichend, daß in $H(T)$ ein Endomorphismus R_k existiert mit den Eigenschaften

$$R_T g = \prod_{j=1}^{k} (R_k{}^j g)^{(k/j)} \qquad (g \in H(T)) \tag{1.1}$$

und

$$H_n(T) = \{g \in H(T) \mid R_k{}^n g = 1\} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.2}$$

In [5] wurde außerdem gezeigt, daß der hier alles entscheidende Endomorphismus R_k, wenn er existiert, sogar eindeutig bestimmt ist.

1.2. Lokalnilpotente Endomorphismen auf torsionsfreien abelschen Gruppen

Es sei G eine multiplikative abelsche Gruppe, dann bildet die Menge aller auf G definierten Endomorphismen einen Ring E, in dem Summe und Produkt durch

$$(R_1 + R_2)\, g = R_1 g \cdot R_2 g \quad \text{bzw.} \quad (R_1 R_2)\, g = R_1(R_2 g) \qquad (g \in G; \quad R_1, R_2 \in E)$$

definiert sind. Ein Endomorphismus R der Gruppe G heißt *lokalnilpotent*, wenn zu jedem $g \in G$ ein natürliches n existiert, so daß $R^n g = 1$ gilt. Sind alle Elemente einer multiplikativen Gruppe außer dem Einselement von unendlicher Ordnung, so heißt die Gruppe *torsionsfrei*. Mit I soll die identische Abbildung auf G bezeichnet werden. Ist R ein lokalnilpotenter Endomorphismus aus E, so ist der Wert der Reihe $I - R + R^2 - R^3 + \cdots$ für jedes $g \in G$ das Produkt von höchstens endlich vielen Elementen aus G, die ungleich 1 sind, und man rechnet schnell folgende Behauptung nach:

Lemma 1.1: *Zu jedem lokalnilpotenten Endomorphismus R, der auf einer torsionsfreien abelschen Gruppe G definiert ist, existiert im Endomorphismenring E von G stets ein Inverses zu $(I + R)$ in der Form $(I + R)^{-1} = I - R + R^2 - R^3 + \cdots$.*

Bezeichnet $K_G(R)$ den Kern des Endomorphismus $R \in E$, so läßt sich der folgende Satz formulieren:

Satz 1.2: *Sind R, R_m, R_n $(m, n \in N)$ lokalnilpotente Endomorphismen, definiert auf einer torsionsfreien abelschen Gruppe G, und den Bedingungen*

$$(I + R_m)^m = (I + R) = (I + R_n)^n \tag{1.3}$$

und

$$K_G(R_m{}^i) = K_G(R_n{}^i) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

genügend, so gilt

$$R_m \cdot R_n = R_n \cdot R_m.$$

Beweis: Aus (1.3) folgt für jedes $j = 1, 2, \ldots$

$$R_m(I + R_n)^{nj} = (I + R_n)^{nj} R_m,$$

d. h.

$$\sum_{k=0}^{nj} \binom{nj}{k} R_m \cdot R_n{}^k = \sum_{k=0}^{nj} \binom{nj}{k} R_n{}^k \cdot R_m \qquad (j = 1, 2, \ldots).$$

Für die Kerne $K_G(R_m{}^{i+1}) = K_G(R_n{}^{i+1})$ $(i = 1, 2, \ldots)$ läßt sich somit folgendes Gleichungssystem aufstellen

$$\sum_{k=0}^{i-1} \binom{nj}{k} R_m \cdot R_n{}^k = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{nj}{k} R_n{}^k \cdot R_m \qquad (j = 1, 2, \ldots, i),$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{i-1} \\ 1 & \binom{2n}{1} & \binom{2n}{2} & \cdots & \binom{2n}{i-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \binom{in}{1} & \binom{in}{2} & \cdots & \binom{in}{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_m \\ R_m R_n \\ \vdots \\ R_m R_n{}^{i-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{i-1} \\ 1 & \binom{2n}{1} & \binom{2n}{2} & \cdots & \binom{2n}{i-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \binom{in}{1} & \binom{in}{2} & \cdots & \binom{in}{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_m \\ R_m R_n \\ \vdots \\ R_m R_n{}^{i-1} \end{bmatrix}.$$

Nach GRÖBNER [2] gilt:

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{x_1}{1} & \binom{x_1}{2} & \cdots & \binom{x_1}{i-1} \\ 1 & \binom{x_2}{1} & \binom{x_2}{2} & \cdots & \binom{x_2}{i-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \binom{x_i}{1} & \binom{x_i}{2} & \cdots & \binom{x_i}{i-1} \end{vmatrix} = \frac{\prod\limits_{l<k} (x_k - x_l)}{1! \cdot 2! \ldots (i-1)!} \quad (x_j \text{ reell}, j = 1, \ldots, i).$$

Somit ist die Determinante $\det D$ der Matrix

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{i-1} \\ 1 & \binom{2n}{1} & \binom{2n}{2} & \cdots & \binom{2n}{i-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \binom{in}{1} & \binom{in}{2} & \cdots & \binom{in}{i-1} \end{bmatrix}$$

ungleich Null, d. h. D^{-1} existiert und $(\det D) \cdot D^{-1}$ ist eine Matrix mit ganzzahligen Elementen. Dadurch ist es möglich, aus dem obigen Gleichungssystem das Gleichungssystem

$$(\det D) \cdot D^{-1} \cdot D \begin{pmatrix} R_m \\ R_m R_n \\ \vdots \\ R_m R_n{}^{i-1} \end{pmatrix} = (\det D) \cdot D^{-1} \cdot D \begin{pmatrix} R_m \\ R_n R_m \\ \vdots \\ R_n{}^{i-1} R_m \end{pmatrix}$$

bzw.

$$(\det D)\cdot\begin{pmatrix} R_m \\ R_mR_n \\ \vdots \\ R_mR_n{}^{i-1}\end{pmatrix} = (\det D)\cdot\begin{pmatrix} R_m \\ R_nR_m \\ \vdots \\ R_n{}^{i-1}R_m\end{pmatrix}$$

zu erhalten. Aus der zweiten Zeile der letzten Gleichung, d. h. aus $(\det D)\cdot R_mR_n = (\det D)\cdot R_mR_n$ folgt wegen der Torsionsfreiheit von G die Behauptung des Satzes ∎

1.3. Zur Struktur von Binomialkoeffizienten

Da nach dem Existenzsatz für Wurzeln von Automorphismen T die Gleichung $(I + R_T) = (I + R_k)^k$ gilt, wobei R_T bzw. R_k die Eigenwertendomorphismen von T bzw. der k-ten Wurzel sind, und auf diese Gleichung in den Beweisen der Sätze der Kapitel 2 und 3 zurückgegriffen wird, soll hier eine Aussage über die Darstellbarkeit von Binomialkoeffizienten der Form $\binom{1/k}{n}$ $(k, n \in \mathrm{N})$ gemacht werden. Dabei soll von folgendem Satz ausgegangen werden: Sind a und d ganze Zahlen mit dem größten gemeinsamen Teiler 1 und durchläuft x ein volles Restsystem mod d, so durchläuft auch $ax + b$ für jede beliebige ganze Zahl b ein volles Restsystem mod d (vgl. [7]). Dieser Satz ermöglicht den Beweis des folgenden Lemmas.

Lemma 1.3: *Es seien $s, h, n \in \mathrm{N}$, p und q Primzahlen mit $p \neq q$ und $p^s \leqq n$. Dann existiert in der Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ mindestens eine Lösung t der Kongruenz*

$$tq^h - 1 \equiv 0 \bmod p^s. \tag{1.4}$$

Beweis: Da der größte gemeinsame Teiler von q^h und p^s die 1 ist und die Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ ein volles Restsystem mod p^s enthält, muß nach obigem Satz für mindestens ein Element t dieser Menge die Kongruenz (1.4) gelten ∎

Lemma 1.4: *Es seien $s, h, n \in \mathrm{N}$, p und q Primzahlen mit $p \neq q$ und $p \leqq n$, und sei s der Exponent von p in der kanonischen Zerlegung von $n!$. Dann gilt:*

$$\prod_{t=0}^{n-1}(tq^h - 1) \equiv 0 \bmod p^s.$$

Beweis: Es sei j die natürliche Zahl, für die $p^j \leqq n < p^{j+1}$ gilt. Dann existieren natürliche Zahlen l_i $(i = 0, \ldots, j-1)$, so daß

$$p^s = p^{\sum_{i=0}^{j-1} l_i(j-i)}$$

und

$$\left(\sum_{i=0}^{k} l_i\right)p^{j-k} \leqq n < \left(1 + \sum_{i=0}^{k} l_i\right)p^{j-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, j-1)$$

gilt. Aus der letzten Ungleichung folgt, daß jede aus n aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen bestehende Menge genau $\sum_{i=0}^{k} l_i$ volle Restsysteme mod p^{j-k} enthält $(k = 0, 1, \ldots, j-1)$. Das heißt nach Lemma 1.3 enthält die Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ mindestens

$\sum_{i=0}^{k} l_i$ Lösungen der Kongruenz

$$tq^h - 1 \equiv 0 \bmod p^{j-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, j-1), \tag{1.5}$$

nämlich jeweils mindestens die $\sum_{i=0}^{k} l_i$ Lösungen der Kongruenz

$$tq^h - 1 \equiv 0 \bmod p^{j-k+1} \tag{1.6}$$

und mindestens l_k weitere Lösungen von (1.5), die aber nicht Lösung von (1.6) sein müssen. Daraus folgt aber unter Berücksichtigung der obigen Darstellung von p^s die Behauptung des Lemmas ∎

Nun läßt sich der folgende Satz leicht beweisen.

Satz 1.5: *Es seien $k, n \in \mathbb{N}$. Dann existieren natürliche Zahlen r_i und eine ganze Zahl v, so daß gilt:*

$$\binom{1/k}{n} = \frac{v}{\prod\limits_{p_i \in \operatorname{supp} k} p_i^{r_i}}.^{1)}$$

Beweis: Nach der Definition der Binomialkoeffizienten gilt

$$\binom{1/k}{n} = \frac{1/k\,(1/k-1)\ldots(1/k-(n-1))}{n!} = \frac{(-1)^n \prod\limits_{t=0}^{n-1}(tk-1)}{k^n \cdot n!}.$$

Aus Lemma 1.4 folgt

$$\prod_{t=0}^{n-1}(tk-1) \equiv 0 \bmod p_i^{s_i}$$

für jede Primzahl $p_i \in (\operatorname{supp}(n!) \setminus \operatorname{supp} k)$, wobei s_i der Exponent von p_i in der kanonischen Zerlegung von $n!$ ist. Damit gilt aber

$$\prod_{t=0}^{n-1}(tk-1) \equiv 0 \bmod \prod_{p_i \in B} p_i^{s_i}$$

mit $B = \operatorname{supp}(n!) \setminus \operatorname{supp} k$ und somit die Behauptung des Satzes ∎

2. Maximale Einbettbarkeit vollergodischer Automorphismen mit quasidiskretem Spektrum

In diesem Kapitel soll auf Grund der Wurzelstruktur eines vollergodischen Automorphismus mit quasidiskretem Spektrum eine einparametrige Gruppe vollergodischer Automorphismen $\{T_\gamma\}$ definiert werden, deren Parameterbereich als Untergruppe der additiven Gruppe der rationalen Zahlen maximal gewählt werden darf. Es wird gezeigt, daß eine solche Gruppe für jeden Automorphismus $T \in \mathcal{K}^*$ existiert.

2.1. Definition von Strömungen

Es ist gut bekannt (vgl. Kurosch [4]), daß jeder additiven, 1 enthaltenden Untergruppe D der additiven Gruppe Q der rationalen Zahlen umkehrbar eindeutig eine auf der Menge der Primzahlen p_i, die in natürlicher Reihenfolge geordnet seien, defi-

1) p_i — Primzahlen; supp k — Menge der Primzahlen p_i, die Teiler von k sind.

nierte Funktion ε mit

$$\varepsilon(p_i) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } p_i^{-1} \notin D \\ 1, \text{ wenn } p_i^{-1} \in D \text{ und } p_i^{-l-1} \notin D \\ \infty, \text{ wenn } p_i^{-1} \in D \text{ für alle } l = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

zugeordnet werden kann. Dann ist D erzeugbar durch alle Zahlen $1/k$, für welche

$$k = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{k_i} \quad \text{mit} \quad 0 \leqq k_i < \varepsilon(p_i) + 1^{2)}, \quad \text{aber nur endlich viele} \quad k_i \neq 0,$$

gilt. Ist ε eine auf den Primzahlen definierte Funktion, die die Werte $0, 1, \ldots, \infty$ annehmen kann, dann bezeichne im folgenden $[\varepsilon]$ stets diejenige 1 enthaltende Untergruppe von Q, die durch die Zahlen $1/k$ mit

$$k = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{k_i} \quad \text{und} \quad 0 \leqq k_i < \varepsilon(p_i) + 1, \quad \text{aber nur endlich viele } k_i \neq 0,$$

erzeugt wird.

Bezeichnet $\mathfrak{T}$ die Gruppe aller Automorphismen eines Lebesgueschen Maßraumes $(X, \mathscr{S}, m)$ und ist $T \in \mathfrak{T}$ vollergodisch, so heiße eine einparametrige Untergruppe

$$\mathfrak{S} = \{T^\gamma \in \mathfrak{T} \mid \gamma \in [\varepsilon]\}$$

von $\mathfrak{T}$ eine T *einbettende* $[\varepsilon]$-*Strömung* in $\mathfrak{T}$ bzw. T heiße $[\varepsilon]$-*einbettbar*, falls

$$T^1 \simeq T \quad \text{und} \quad T^{\gamma_1+\gamma_2} \simeq T^{\gamma_1} \cdot T^{\gamma_2} \qquad (\gamma_1, \gamma_2 \in [\varepsilon])$$

gilt.

Es sei $T \in \mathscr{K}^*$, dann heißt die durch

$$\varepsilon_T(p_i) = \sup \{n \in \mathrm{N} \cup \{0\} \mid \exists\, W \in \mathfrak{T} \quad \text{mit} \quad W^{p_i^n} \simeq T\} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

definierte Funktion ε_T die *Wurzelfunktion* von T. Damit gilt also für jede $[\varepsilon]$-Strömung, die einen Automorphismus $T \in \mathscr{K}^*$ einbettet,

$$\varepsilon(p_i) \leqq \varepsilon_T(p_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

und man definiert deshalb eine maximale Strömung wie folgt: Eine $[\varepsilon]$-Strömung $\mathfrak{S}$, die einen Automorphismus $T \in \mathscr{K}^*$ einbettet, heißt *maximal*, wenn

$$\varepsilon(p_i) = \varepsilon_T(p_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

gilt.

2.2. Existenz maximaler Strömungen

Zum Beweis der maximalen Einbettbarkeit benötigt man den folgenden Satz.

Satz 2.1: *Besitzt ein Automorphismus $T \in \mathscr{K}^*$ k_i-te Wurzeln $(i = 1, 2)$, $k_1 \neq k_2$, so besitzt er auch eine $[k_1, k_2]$-te Wurzel.*[3]

---

[2]) Damit stets $k_i < \infty$ gilt, aber auch $k_i = \varepsilon(p_i)$ für endliche Werte $\varepsilon(p_i)$ möglich ist, wird $k_i < \varepsilon(p_i) + 1$ gefordert.

[3]) $[k_1, k_2]$ — kleinstes gemeinsames Vielfaches von k_1 und k_2.

Beweis: $\frac{[k_1, k_2]}{k_1}$ und $\frac{[k_1, k_2]}{k_2}$ sind teilerfremd, deshalb existieren ganze Zahlen α und β, so daß

$$\alpha \frac{[k_1, k_2]}{k_1} + \beta \frac{[k_1, k_2]}{k_2} = 1$$

gilt. Weil $\frac{[k_1, k_2]}{k_i} \geqq 1$ ist $(i = 1, 2)$, muß eine der Zahlen α, β größer als Null und die andere kleiner als Null sein. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf man $\beta < 0$ annehmen. Dann ist $\beta' = -\beta > 0$ und somit

$$\alpha \frac{[k_1, k_2]}{k_1} - \beta' \frac{[k_1, k_2]}{k_2} = 1. \tag{2.1}$$

Bezeichnen R_i $(i = 1, 2)$ die (nach dem Existenzsatz für Wurzeln vollergodischer Automorphismen mit quasidiskretem Spektrum) zu den k_i-ten Wurzeln von T existierenden Endomorphismen, so existiert nach Lemma 1.1 der Endomorphismus $(I + R_2)^{-1}$, denn $H(T)$ ist eine torsionsfreie abelsche Gruppe, und somit der Endomorphismus

$$R \doteq (I + R_1)^{\alpha} \cdot (I + R_2)^{-\beta'} - I \tag{2.2}$$

im Endomorphismenring über $H(T)$. Aus (2.2) erhält man

$$(I + R)^{[k_1,k_2]} = [(I + R_1)^{k_1}]^{\alpha\frac{[k_1,k_2]}{k_1}} [(I + R_2)^{k_2}]^{-\beta'\frac{[k_1,k_2]}{k_2}}$$

bzw. wegen (1.1)

$$(I + R)^{[k_1,k_2]} = (I + R_T)^{\alpha\frac{[k_1,k_2]}{k_1}} \cdot (I + R_T)^{-\beta\frac{[k_1,k_2]}{k_2}},$$

d. h. nach (2.1) gilt

$$(I + R)^{[k_1,k_2]} = (I + R_T)$$

und somit

$$R_T g = \prod_{i=1}^{[k_1,k_2]} (R^i g)^{\binom{[k_1,k_2]}{i}} \qquad (g \in H(T)). \tag{2.3}$$

Zeigt man nun, daß

$$H_n(T) = \{g \in H(T) \mid R^n g = 1\} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.4}$$

gilt, so ist mit (2.3) und (2.4) nach dem Existenzsatz für Wurzeln von Automorphismen aus $\mathcal{K}^*$ die Existenz einer $[k_1, k_2]$-ten Wurzel von T bewiesen. Aus (2.3) bekommt man

$$R_T{}^n g = (R^n g)^{[k_1,k_2]^n} \cdot \prod (R^i g)^{\nu_i} \quad \text{mit} \quad \nu_i \in \mathbf{Z}, \quad i > n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ist $g \in H(T)$ und $R^n g = 1$ (ein solches $n \in \mathbf{N}$ existiert für jedes $g \in H(T)$, da R lokalnilpotent ist), so gilt also $R_T{}^n g = 1$, d. h. $g \in H_n(T)$. Für beliebige $n \in \mathbf{N}$ ergibt sich aus (2.2) für jedes $g \in H_n(T)$

$$R^n g = (R_1{}^n g)^{\theta_1} \cdot (R_2{}^n g)^{\theta_2} \cdot \prod_{i+j \geqq n} [(R_1{}^i \cdot R_2{}^j)(g)]^{\delta_{ij}}$$

wobei θ_1, θ_2, δ_{ij} ganze Zahlen sind. Da R_i $(i = 1, 2)$ die Bedingung (1.1) erfüllen, ergibt sich aus dieser Gleichung $R_2^n g = 1$, d. h. (2.4) gilt. Damit ist Satz 2.1 bewiesen ∎

Nun kann die Existenz maximaler Strömungen, die vollergodische Automorphismen mit quasidiskretem Spektrum einbetten, gezeigt werden.

Satz 2.2: *Jeder Automorphismus $T \in \mathcal{K}^*$ ist in eine maximale, d. h. in eine $[\varepsilon_T]$-Strömung einbettbar.*

Beweis: Dieser Beweis läuft analog zu dem des Satzes 3.2.3 in [6]. Da die Gruppe $[\varepsilon_T]$ durch die Zahlen $1/k$ mit

$$k = \prod_{i=1}^{\infty} p_i^{k_i} \quad \text{und} \quad 0 \leqq k_i < \varepsilon_T(p_i) \mathop{+}_{0} 1, \quad \text{aber nur endlich viele } k_i \neq 0,$$

erzeugt wird, kann man sich darauf beschränken zu zeigen, daß T für alle solche k k-te Wurzeln besitzt. Bezeichnet man die $k_i \neq 0$ aus der kanonischen Zerlegung von k mit $k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_n}$, so folgt die Existenz von $(p_{i_j})^{k_{i_j}}$-ten Wurzeln $(j = 1, \ldots, n)$ von T sofort aus der Definition von ε_T. Nach Satz 2.1 existiert dann auch eine k-te Wurzel und damit eine T einbettende $[\varepsilon_T]$-Strömung ∎

3. Typen maximaler Strömungen

Nachdem in Kapitel 2 die Existenz von maximalen Strömungen für jedes Element aus $\mathcal{K}^*$ gezeigt wurde, soll jetzt eine Aussage über die Vielfalt der in Frage kommenden Wurzelfunktionen und der dazu auftretenden Automorphismen gemacht werden. In [6] wurde bewiesen, daß zu jeder auf der Menge der Primzahlen definierten Funktion ε, deren Wertevorrat eine Teilmenge von $\mathbf{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$ ist, und zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 2$ ein vollergodischer Automorphismus T mit R_T-direkt zerlegbarem quasidiskretem Spektrum derart existiert, daß für die Wurzelfunktion ε_T von T

$$\varepsilon_T(p_i) = \varepsilon(p_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

gilt und die Halmosinvariante $n(T)$ den Wert n hat. Hierbei heißt eine abzählbare torsionsfreie abelsche Gruppe H genau dann *P-direkt zerlegbar*, wenn P ein lokalnilpotenter Endomorphismus von H ist und für die Kerne $K_H(P^n)$ der Potenzen von P Darstellungen

$$K_H(P^n) \doteq \bigotimes_{i=1}^{n} H_i^* \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.1}$$

mit gewissen Untergruppen $H_i^* \subseteqq H$ sowie Abbildungsrelationen

$$PH_{i+1}^* \subset H_i^* \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{3.2}$$

gelten. Verändert man den im Beweis der obigen Aussage verwendeten Endomorphismus P_1, so läßt sich zeigen:

Satz 3.1: *Zu jeder Funktion ε, die die Primzahlen in die Menge $\mathbf{N} \cup \{0\} \cup \{\infty\}$ abbildet, und zu jeder natürlichen Zahl $n \geqq 2$ existiert ein vollergodischer Automorphismus T mit nicht R_T-direkt zerlegbarem quasidiskretem Spektrum derart, daß für die Wurzelfunktion ε_T von T*

$$\varepsilon_T(p_i) = \varepsilon(p_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

gilt und die Halmosinvariante $n(T)$ gleich n ist.

Beweis: Es seien eine Funktion ε, die die Menge der Primzahlen in die Menge $N \cup \{0\} \cup \{\infty\}$ abbildet, eine natürliche Zahl $n \geqq 2$ und die abzählbare torsionsfreie abelsche Gruppe

$$H = \{(h_1, \ldots, h_{n-2}, h_{n-1}, h_n) \mid h_j \in Q (j = 1, \ldots, n-2), h_{n-1} \in [\varepsilon], h_n \in Z\}$$

mit

$$(h_1, \ldots, h_n) \cdot (h_1', \ldots, h_n') = (h_1 + h_1', \ldots, h_n + h_n')$$

gegeben. In H wird durch

$$P(h_1, \ldots, h_n) = (h_2 + h_3 + \cdots + h_n, h_3 + h_4 + \cdots + h_n, \ldots, h_{n-1} + h_n, h_n, 0)$$

ein lokalnilpotenter Endomorphismus $P : H \to H$ definiert. Es gilt $K_H(P^n) = H$.

(1) *H ist nicht P-direkt zerlegbar:*

Diese Aussage soll indirekt bewiesen werden. Nimmt man an, H ist P-direkt zerlegbar, dann folgt aus

$$K_H(P^i) = \{h \in H \mid h = (h_1, \ldots, h_i, 0, \ldots, 0)\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und (3.1)

$$H_1^* = K_H(P) = \{h \in H \mid h = (h_1, 0, \ldots, 0)\}. \tag{3.3}$$

Da jedes Element aus $K_H(P^2)$ auf genau eine Weise als Produkt von je einem Element aus H_1^* und H_2^* darstellbar sein muß, folgt aus (3.1), (3.2) und (3.3)

$$H_2^* = \{h \in H \mid h = (r, h_2, 0, \ldots, 0)\}, \tag{3.4}$$

wobei r eine fest gewählte rationale Zahl ist. Weiter erhält man wegen (3.1) aus (3.3) und (3.4)

$$H_3^* = \{h \in H \mid h = (r_1, r_2, h_3, 0, \ldots, 0)\}$$

mit fest aus den rationalen Zahlen gewählten r_1 und r_2. Für dieses H_3^* gilt aber

$$PH_3^* = \{h \in H \mid h = (r_2 + h_3, h_3, 0, \ldots, 0)\} \nsubseteq H_2^*.$$

Das ist ein Widerspruch zu (3.2), d. h. es gilt (1).

(2) *Es existiert ein Automorphismus $T \in \mathcal{K}^*$ mit der Halmosinvariante $n(T) = n$, dessen Quasieigenwertgruppe $H(T)$ nicht R_T-direkt zerlegt ist:*

Jede abzählbare torsionsfreie abelsche Gruppe ist isomorph zu einer Untergruppe der Randlinie des Einheitskreises K (vgl. [1]). Es sei λ der Isomorphismus, der H in die Untergruppe H von K überführt, dann ist die durch

$$S(\lambda(h)) = \lambda(P(h)) \qquad (h \in H)$$

definierte Abbildung $S : H \to H$ ein Endomorphismus derart, daß $\langle H, S\rangle$ alle im Existenzsatz von Abramow (vgl. Abschnitt 1.1) geforderten Eigenschaften hat. Das heißt es existiert ein vollergodischer Automorphismus T mit quasidiskretem Spektrum, für welchen

$$\langle H, S\rangle \approx \langle H(T), R_T\rangle$$

gilt. Bezeichnet man den somit existierenden Isomorphismus von H auf $H(T)$ mit V, so erhält man

$$R_T = V \cdot \lambda \cdot P \cdot \lambda^{-1} \cdot V^{-1}$$

und

$$H(T) = V\lambda(H).$$

Da V und λ Isomorphismen sind, folgt aus den letzten beiden Gleichungen sofort, daß $n(T) = n$ gilt und $H(T)$ nicht R_T-direkt zerlegbar ist.

(3) *Für den in* (2) *erhaltenen Automorphismus T gilt $\varepsilon_T(p_i) = \varepsilon(p_i)$ für alle $i = 1, 2, \ldots$:*

(3. a) *Es ist $i \in \mathbf{N}$ und $\varepsilon_i = \varepsilon(p_i) < \infty$. Dann gilt $\varepsilon_i \leqq \varepsilon_T(p_i)$.* Denn ist $g \in H(T)$, so existiert ein $h \in H$, für das gilt:

$$g = V\lambda(h) = V\lambda\big((h_1, \ldots, h_n)\big),$$

und damit ist

$$R_T g = V\lambda\big((h_2 + \cdots + h_n, h_3 + \cdots + h_n, \ldots, h_{n-1} + h_n, h_n, 0)\big).$$

Da alle Koordinaten h_j ($j = 1, \ldots, n$) von h Elemente von Q sind, erhält man

$$(h_j + h_{j+1} + \cdots + h_n)\, p_i^{-\varepsilon_i} \in Q \qquad (j = 2, \ldots, n-1)$$

und auf Grund der Definition von $[\varepsilon]$ und der Ganzzahligkeit von h_n sogar

$$h_n \cdot p_i^{-\varepsilon_i} \in [\varepsilon],$$

d. h.

$$V\lambda\big(((h_2 + \cdots + h_n)\, p_i^{-\varepsilon_i}, \ldots, (h_{n-1} + h_n)\, p_i^{-\varepsilon_i}, h_n p_i^{-\varepsilon_i}, 0))\big) \in H(T).$$

Dieses Element von $H(T)$ erfüllt die Gleichung

$$x^{p_i^{\varepsilon_i}} = R_T g$$

und soll mit $(R_T g)^{p_i^{-\varepsilon_i}}$ bezeichnet werden. Weiter gilt

$$\begin{aligned} R_T{}^j g &= V\lambda\big((h_{j+1} + \cdots + h_n, \ldots, h_n, 0, \ldots, 0)\big) \\ &= \big[V\lambda\big(((h_{j+1} + \cdots + h_n)\, r^{-1}, \ldots, h_n r^{-1}, 0, \ldots, 0)\big)\big]^r \\ &(j = 2, \ldots, n-1;\ r \in \mathbf{N}), \end{aligned}$$

d. h., in $H(T)$ existieren Elemente, sie sollen mit $(R_T{}^j g)^{1/r}$ bezeichnet werden, die der Gleichung $x^r = R_T{}^j g$ ($j = 2, \ldots, n-1$; $r \in \mathbf{N}$) genügen. Setzt man

$$q_j = \binom{1/p_i^{\varepsilon_i}}{j} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

und berücksichtigt das Resultat des Abschnitts 1.3 über die Darstellbarkeit von Binomialkoeffizienten, so folgt aus den obigen Ausführungen

$$(R_T{}^j g)^{q_j} \in H(T), \qquad (j = 1, \ldots, n-1).$$

Dann ist aber die durch

$$R_i g = \prod_{j=1}^{\infty} (R_T{}^j g)^{q_j} = \prod_{j=1}^{n} (R_T{}^j g)^{q_j} \quad \big(g \in H(T)\big) \tag{3.5}$$

definierte Abbildung $R_i : H(T) \to H(T)$ ein lokalnilpotenter Endomorphismus. Im Endomorphismenring E von $H(T)$ kann auf Grund von (3.5)

$$R_i = \sum_{j=1}^{\infty} q_j R_T{}^j \tag{3.6}$$

geschrieben werden. Aus (3.6) folgt nun

$$(I + R_i) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j R_T^j = (I + R_T)^{1/p_i^{\varepsilon_i}} \text{ bzw. } (I + R_i)^{p_i^{\varepsilon_i}} = (I + R_T).$$

Damit hat R_T die folgende Gestalt:

$$R_T = \sum_{t=1}^{p_i^{\varepsilon_i}} \binom{p_i^{\varepsilon_i}}{t} R_i^t, \tag{3.7}$$

d. h. es gilt

$$R_T g = \prod_{t=1}^{p_i^{\varepsilon_i}} (R_i^t g)^{\binom{p_i^{\varepsilon_i}}{t}} \qquad \big(g \in H(T)\big). \tag{3.8}$$

(3.6) und (3.7) liefern

$$R_i^n = \frac{1}{(p_i^{\varepsilon_i})^n} R_T^n + \text{höhere Potenzen von } R_T \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.9}$$

bzw.

$$R_T^n = (p_i^{\varepsilon_i})^n R_i^n + \text{höhere Potenzen von } R_i \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.10}$$

Ist $g \in H_n(T)$, so ertibt sich aus (3.9) $R_i^n g = 1$, während für ein $g \in H(T)$ mit $R_i^n g = 1$ aus (3.10) $R_T^n g = 1$, also $g \in H_n(T)$ folgt. Das heißt aber

$$H_n(T) = \{g \in H(T) \mid R_i^n g = 1\} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.11}$$

Mit (3.8) und (3.11) ist nach dem Existenzsatz für Wurzeln von Automorphismen $T \in \mathcal{K}^*$ gezeigt, daß T eine $p_i^{\varepsilon_i}$-te Wurzel besitzt. Somit gilt $\varepsilon_i \leqq \varepsilon_T(p_i)$.

Wäre $\varepsilon_i + 1 \leqq \varepsilon_T(p_i)$, so würde eine $p_i^{\varepsilon_i+1}$-te Wurzel von T existieren, und der somit nach dem Existenzsatz für Wurzeln von Automorphismen aus $\mathcal{K}^*$ existierende Endomorphismus R_i wäre auf Grund seiner Eindeutigkeit definiert durch

$$R_i g = \prod_{j=1}^{n} (R_T^j g)^{\bar{q}_j} \big(g \in H(T)\big) \quad \text{mit} \quad \bar{q}_j = \binom{1/p_i^{\varepsilon_i+1}}{j} \quad (j = 1, \ldots, n-1).$$

Würde man $g = V\lambda\big((0, \ldots, 0, 1)\big) \in H(T)$ wählen, so bekäme man $R_T g = V\lambda\big((1, \ldots, 1, 0)\big)$ und damit

$$R_T g)^{\bar{q}_1} = V\lambda\left(\left(\frac{1}{p_i^{\varepsilon_i+1}}, \ldots, \frac{1}{p_i^{\varepsilon_i+1}}, 0\right)\right).$$

Da aber $\frac{1}{p_i^{\varepsilon_i+1}} \notin [\varepsilon]$, ist $\varepsilon_i + 1 \nleqq \varepsilon_T(p_i)$ bewiesen.

Aus $\varepsilon_i \leqq \varepsilon_T(p_i)$ und $\varepsilon_i + 1 \nleqq \varepsilon_T(p_i)$ folgt $\varepsilon_i = \varepsilon_T(p_i)$ für $\varepsilon_i < \infty$.

(3.b) *Ist für ein $i \in \mathrm{N}$ $\varepsilon(p_i) = \infty$, so zeigt man wie in (3.a) die Existenz einer $p_i^{k_i}$-ten Wurzel von T für jedes $k_i \in \mathrm{N}$ und damit, daß $\varepsilon_T(p_i) = \infty$ gilt* ∎

LITERATUR

[1] Абрамов, Л. М.: Метрические автоморфизмы с квазидискретным спектром. Изв. Акад. Наук СССР, Серия мат. 26 (1962), 513–530.

[2] Gröbner, W.: Matrizenrechnung. München 1956.

[3] Hahn, F. J., and W. Parry: Some characteristic properties of dynamical systems with quasi-discrete spectra. Math. Systems Theory 2 (1968), 179–190.

[4] KUROSCH, A. G.: Gruppentheorie. Berlin 1953.
[5] MICHEL, W.: Wurzeln vollergodischer Automorphismen mit quasidiskretem Spektrum I. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 9 (1968), 323—340.
[6] MICHEL, H.: Wurzeln vollergodischer Automorphismen mit quasidiskretem Spektrum II. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 16 (1970), 321—335.
[7] ВИНОГРАДОВ, И. М.: Основы теории чисел. Москва 1952.

Manuskripteingang: 26. 06. 1981

VERFASSER:

Dr. EDWIN WEIHERT
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
DDR-4010 Halle (Saale), Universitätsplatz 6