Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (1) 1983, S. 159–173

Gleichmäßige asymptotische Entwicklungen für Parameterintegrale mit zwei reellen Parametern[1])

H.-J. Schell

In [8] wurden für eine Klasse von Integralen, die von zwei reellen Parametern s, α abhängen, mehrere asymptotische Darstellungen erhalten, die für eine Bewegung $s \to s_0$ und gleichmäßig für alle α gelten. Diese Ergebnisse werden in dieser Arbeit verallgemeinert, indem für dieselbe Klasse von Integralen asymptotische Entwicklungen hergleitet werden. Wieder werden zwei Fälle unterschieden: a) der Integrand hat ein einfaches inneres Maximum, b) er hat keine stationäre Stelle im Inneren des Integrationsintervalls. Die Resultate werden auf die Anger-Funktion und die unvollständige Gamma-Funktion angewendet.

В более ранней работе [8] для интегралов, зависящих от двух действительных параметров s и α, были получены асимптотические равенства, имеющие место для того случая, когда s стремится к определённому пределу равномерно для всях α из некторово отрезка. В данной работе эти результаты обобщаются: выводятся асимптотические разложения. Снова рассмотрены два случая: а) подинтегральная функция имеет точку максимума внутри отрезка интегрирования, б) она не имеет стационарной точки внутри отрезка интегрирования. Результаты применяются к функции Ангера и непольной гамма-функции.

In [8] asymptotic approximations for a class of integrals depending on two real parameters s, α were obtained. They are valid if s tends to s_0 and hold uniformly in certain α intervals. Now these results are generalized by deriving asymptotic expansions for the same class of integrals. Again, two cases are considered: a) the integrand has a simple maximum interior to the interval of integration, b) this interval contains no inner stationary point. The results are applied to the Anger function and to the incomplete gamma function.

1. Einleitung

In [8] wurden für Parameterintegrale

$$F(s, \alpha) = \int_{x(s,\alpha)}^{b(s,\alpha)} e^{-g(s,\alpha,t)}\, dt \tag{1}$$

asymptotische Darstellungen erhalten, die für $s \to s_0$ und gleichmäßig in bezug auf α gelten. Diese Resultate werden im folgenden verallgemeinert, indem für die gleiche Funktionenklasse asymptotische Entwicklungen hergeleitet werden. Wie in [8] sei also vorausgesetzt, daß $g(s, \alpha, t)$ für alle $(s, \alpha, t) \in S \times A \times [x, b]$ definiert ist, wobei S eine Menge reeller Zahlen mit dem Häufungspunkt s_0 und A ein (eventuell von s abhängiges) Intervall ist. Die untere Grenze x sei für alle $(s, \alpha) \in S \times A$ endlich, während für die obere Grenze b auch $b = \infty$ gelten darf. Für alle betrachteten (s, α, t) sei $g(s, \alpha, t)$ bezüglich α stetig und bezüglich t beliebig oft differenzierbar; partielle Ableitungen nach t werden wieder durch Indizierung bezeichnet, und es wird der Ein-

[1]) Überarbeitete Fassung des zweiten Teils der Dissertation B des Autors (Gutachter: Prof. Dr. L. Berg, Prof. Dr. L. Jentsch, Prof. Dr. E. Krätzel).

fachheit halber nur das letzte Argument geschrieben. Es sei

$$g_r(x) = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, n-1, n+1, \ldots, m-1, \quad \text{mit} \quad m > n \geqq 1;$$
$$g_m(x) > 0 \tag{2}$$

erfüllt, so daß, wenn $n > 1$ ist, die Funktion $g(t)$ in x eine stationäre Stelle der Ordnung $n-1$ hat. Ferner sei $A = A' \cup A''$, $A' \cap A'' = \{\alpha_0\}$, wobei $-g(t)$ für alle $(s, \alpha) \in S \times [A' \setminus \{\alpha_0\}]$ ein einziges Maximum bei $t = y = x + z$, $x < y < b$, mit $g_2(y) > 0$ habe und für $(s, \alpha) \in S \times [A'' \setminus \{\alpha_0\}]$ keine stationäre Stelle mit $t > x$ besitzen möge und $g_n(x) > 0$ gelte. z sei für festes $s \in S$ eine streng monotone Funktion von α. Für $s \in S$ und $\alpha = \alpha_0$ endlich sei $g_n(x) = 0$, so daß die Ordnung der stationären Stelle $t = x$ jetzt $m-1$ ist, und es sei keine weitere stationäre Stelle mit $t > x$ vorhanden.

Die beiden Fälle $\alpha \in A'$ und $\alpha \in A''$ werden, wie auch in [8], getrennt behandelt, und es werden jeweils asymptotische Entwicklungen für $s \to s_0$ hergeleitet, die bezüglich $\alpha \in A'$ bzw. $\alpha \in A''$ gleichmäßig gelten. Die in [8] benutzte Methode, die dort zu asymptotischen Darstellungen führte, wird dazu ausgebaut. Die Ergebnisse werden wieder auf die Funktion $A_{-s}(\alpha s)$ sowie auf die unvollständige Gamma-Funktion angewendet.

2. Gleichmäßige asymptotische Entwicklung im Falle $\alpha \in A'$

Entsprechend wie in [8] substituieren wir zunächst $t = y + (u - \sigma)/\beta$, $\sigma = \tau^{1/(m-n)}$, wobei wir über die Funktionen $\tau \geqq 0$, $\beta > 0$ noch verfügen, und erhalten

$$F(s, \alpha) = \frac{1}{\beta} \int_{\sigma - \beta z}^{\sigma + \beta(b-y)} e^{-\Phi(u) + h(u)}\, du \quad \text{mit}$$
$$\Phi(u) = u^m - \frac{m}{n} \tau u^n, \qquad h(u) = \Phi(u) - g\big(y + (u - \sigma)/\beta\big) \tag{3}$$

(in den Argumenten von Φ und h bringen wir der Einfachheit halber nur die Abhängigkeit von u zum Ausdruck). Für τ, β wählen wir entweder

$$\tau = (\beta z)^{m-n}, \quad \beta = \big(g_2(y)/m(m-n)\, z^{m-2}\big)^{1/m} \quad \text{für} \quad z > 0,$$
$$\beta = \beta_0 = \big(g_m(x)/m!\big)^{1/m} \quad \text{für} \quad z = 0 \tag{4}$$

oder

$$\tau = \left[\frac{n}{m-n} \big(g(x) - g(y)\big)\right]^{(m-n)/m}, \quad \beta = \big(g_2(y)/m(m-n)\, \sigma^{m-2}\big)^{1/2}$$
$$\text{für} \quad \sigma > 0 \tag{5}$$

(und $\beta = \beta_0$ für $\sigma = 0$, vgl. [8]).

Es mögen folgende Voraussetzungen erfüllt sein. Für $s \to s_0$, $\alpha \in A'$ (hierauf beziehen sich in diesem und im 3. Abschnitt alle asymptotischen Aussagen) existiere für jede der gewählten τ-β-Kombinationen eine Funktion $\omega(s, \alpha)$ mit $0 < \omega \leqq b - y$, so daß

$$\beta\omega \to \infty, \qquad \beta^3 \omega^3 h_3(\xi) = o(0) \quad \text{für jedes} \quad \xi \in [\sigma - \beta z, \sigma + \beta\omega] \tag{6}$$

gelten. Für solche α, für die (bei festem s) $z > \omega$ ausfällt, existiere ein ω^* mit $0 < \omega^* \leqq \min(z, b - y)$, so daß

$$\begin{aligned}&\omega^{*2} g_2(y) \to \infty, \qquad \beta^3 \omega^{*3} \Phi_3(\xi) = o(1), \qquad \omega^{*3} g_3(\xi) = o(1)\\ &\text{für jedes} \quad \xi = \sigma + \vartheta\beta\omega^*, \qquad |\vartheta| \leqq 1\end{aligned} \tag{7}$$

gilt (analog wie oben bei g bezeichnen Indizes bei h, Φ partielle Ableitungen nach dem mitgeschriebenen Argument, also nach u). Es sei $g_1(y + (u - \sigma)/\beta)$ monoton wachsend für $0 < u < \sigma - \beta \min(\omega, \omega^*)$ und $u > \sigma + \beta \min(\omega, \omega^*)$, $(s, \alpha) \in S \times A'$ (vgl. [8: Satz 1]). Ferner möge sich $h(u)$ um $u = \sigma$ in eine konvergente Potenzreihe entwickeln lassen, die in den Intervallen $(\sigma - \beta z, \sigma + \beta\omega]$ bzw. $[\sigma - \beta\omega^*, \sigma + \beta\omega^*]$ konvergiert:

$$h(u) = h(\sigma) + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{h_k(\sigma)}{k!} (u - \sigma)^k \tag{8}$$

(aufgrund der Festlegung von τ und β ist $h_1(\sigma) = h_2(\sigma) = 0$). Durch Einsetzen von (8) in $F^{(1)}(s, \alpha) = \int_x^{y+\omega} \exp\big(-g(t)\big)\,dt$ bzw. $F^{(2)}(s, \alpha) = \int_{y-\omega^*}^{y+\omega^*} \exp\big(-g(t)\big)\,dt$ und Vertauschen von Summation und Integration ergibt sich, wenn man auf der linken Seite wieder zu $F(s, \alpha)$ übergeht und auf der rechten Seite von 0 bis ∞ integriert (die Berechtigung dieser Schritte wird noch gezeigt),

$$F(s, \alpha) \doteq \frac{1}{\beta} e^{h(\sigma)} \sum_{k=0}^{\infty} I_k^{(m,n)}(\tau) \sum_{(*)} \left(\prod_{i=3}^{k} \frac{1}{\lambda_i!} \left(\frac{h_i(\sigma)}{i!} \right)^{\lambda_i} \right). \tag{9}$$

Dabei soll $(*)$ bedeuten, daß über alle nicht-negativen ganzzahligen λ_i mit $\sum_{i=3}^{k} i\lambda_i = k$ zu summieren ist; $\doteq$ soll einen formalen Zusammenhang zwischen beiden Seiten ausdrücken. Mit $I_k^{(m,n)}(\tau)$ sind die Integrale

$$I_k^{(m,n)}(\tau) = \int_0^{\infty} \exp\left(-u^m + \frac{m}{n} \tau u^n\right) (u - \sigma)^k \, du \tag{10}$$

bezeichnet. Die rechte Seite von (9) wird im allgemeinen nicht den Charakter einer asymptotischen Entwicklung haben, doch läßt sich durch Umordnung der Glieder eine asymptotische Entwicklung für $F(s, \alpha)$ erhalten, wie jetzt gezeigt werden soll.

Zunächst sei der Fall betrachtet, daß

$$\delta = z g_{m+1}(y)/g_m(y) = o(1) \tag{11}$$

und zusätzlich $g_{m+1}(\xi) = O\big(g_{m+1}(y)\big)$ für alle ξ aus dem jeweils betrachteten Integrationsintervall erfüllt ist. Dann folgt aus dem Hilfssatz in [8], daß die Beziehungen

$$h_r(\sigma) = O(\delta\sigma^{(m-r)}), \qquad r = 3, \ldots, m \ (m \geqq 3), \qquad h_{m+1}(\sigma) \asymp \delta\sigma^{-1} \tag{12}$$

gelten, für diese r ist also $h_r(\sigma) = O\big(h_{m+1}(\sigma)\big)$, solange $\tau = O(1)$ gilt. Zur Abschätzung der $h_r(\sigma)$ für $r \geqq m + 1$ setzen wir voraus, daß eine Funktion $\varphi(s, \alpha)$ mit

$$\varphi(s, \alpha) = o(1) \tag{13}$$

existiert, so daß für diese

$$h_r(\sigma) = O\big(\varphi^{(r-m)}(s, \alpha)\big), \qquad r \geqq m + 1 \tag{14}$$

erfüllt ist. Für $r = m + 1$ erhält man $\delta = O(\sigma\varphi)$, so daß man prüfen wird, ob $\varphi = \delta\sigma^{-1}$ gewählt werden kann; allgemeiner sei $\delta \asymp (\sigma\varphi)^\nu$ mit einem $\nu \geqq 1$ angenommen. Somit folgt, wenn $\tau = O(1)$ ist,

$$\prod_{i=3}^{k} h_i^{\lambda_i}(\sigma)\, I_k(\tau) = O\big((\varphi(s, \alpha))^{\lambda_3+\cdots+\lambda_m+\lambda_{m+1}+2\lambda_{m+2}+\cdots+k\lambda_{m+k}}\big). \tag{15}$$

Es liegt nun nahe, in (9) alle Glieder zusammenzufassen, für die der Exponent von $\varphi(s, \alpha)$ in (15) konstant ausfällt. Tatsächlich ergibt sich so, wie sich im weiteren herausstellen wird, eine verallgemeinerte asymptotische Entwicklung für $F(s, \alpha)$, nämlich

$$F(s, \alpha) \approx \frac{1}{\beta}\, e^{h(\sigma)} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{(*)} \left[I_k^{(m,n)}(\tau) \prod_{i=3}^{m+l} \frac{1}{\lambda_i!} \left(\frac{h_i(\sigma)}{i!}\right)^{\lambda_i} \right];$$

$$\text{Summationsbedingung } (*)\colon \sum_{i=3}^{m} \lambda_i + \sum_{j=1}^{l} j\lambda_{m+j} = l,\ \lambda_i \geqq 0 \text{ ganz}; \tag{16}$$

$$k = \sum_{i=3}^{m+l} i\lambda_i.$$

Für $l = 0$ erhält man die Resultate (13) bzw. (28) aus [8]. In dem zunächst betrachteten Fall $\tau = O(1)$ liegt der Entwicklung wegen (15) die asymptotische Skala $\{g_2^{-1/2}(y)\, e^{-g(y)}\, \varphi^l(s, \alpha)\}$ zugrunde. Die Berechnung der $I_k^{(m,n)}(\tau)$ in (16) kann für $m \geqq 3$ mittels der Rekursionsformel

$$I_k^{(m,n)}(\tau) = \frac{1}{m} (-\sigma)^{k+1-m} - \sum_{i=1}^{m-2} d_{m-i} \sigma^i I_{k-i}^{(m,n)}(\tau) + \frac{k+1-m}{m} I_{k-m}^{(m,n)}(\tau),$$

$$k \geqq m-1, \quad d_i = \binom{m-1}{i-1} - \binom{n-1}{i-1} \tag{17}$$

auf die Berechnung der $I_k^{(m,n)}(\tau)$ für $k = 0, 1, \ldots, m-2$ zurückgeführt werden. Für $m = 2$ ist $I_0^{(2,1)}(\tau) = \sqrt{\pi}\, e^{\tau^2} \dfrac{1 + \operatorname{erf} \tau}{2}$, $I_1^{(2,1)}(\tau) = \dfrac{1}{2}$; die $I_k^{(2,1)}(\tau)$ mit $k \geqq 2$ können mit (17) berechnet werden, wobei der mittlere Summand verschwindet. Für $\tau \to \infty$ kann mittels einer Verallgemeinerung der Laplaceschen Methode [6] eine asymptotische Entwicklung der $I_k^{(m,n)}(\tau)$ hergeleitet werden, ihr Anfangsglied ist für $m \geqq 3$ durch

$$I_{2l}^{(m,n)}(\tau) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{m(m-n)\,\sigma^{m-2}}}\; e^{\frac{m-n}{n}\sigma^m} \frac{(2l)!}{l!} [2m(m-n)\,\sigma^{m-2}]^{-l},$$

$$I_{2l+1}^{(m,n)}(\tau) \sim -\sqrt{\frac{2\pi}{m(m-n)\,\sigma^{m-2}}}\; e^{\frac{m-n}{n}\sigma^m} \tag{18}$$

$$\times \frac{(2l+4)!\, m d_3}{3 \cdot 2^{l+2} (l+2)!\, \big(m(m-n)\big)^{l+2}}\, \sigma^{-(m-2)l-m+1}$$

gegeben.

Mit (18) kann die Ordnung der Glieder in (16) für $\tau \to \infty$ im Fall $m \geqq 3$ bestimmt werden. Solange noch $\delta = o(1)$ erfüllt ist, gilt wegen $\delta = O(\sigma\varphi)$, (18) und [8], (10) mit $k = \sum_{i=3}^{m+l} i\lambda_i$:

$$\frac{1}{\beta}\, e^{h(\sigma)} \prod_{i=3}^{m+l} h_i^{\lambda_i}(\sigma)\, I_k^{(m,n)}(\tau)$$

$$= O\left(g_2^{-1/2}(y)\, e^{-g(y)} \sigma^{-q} \left(\frac{\delta}{\sigma}\right)^{\lambda_3+\cdots+\lambda_m} \varphi(s, \alpha)^{\lambda_{m+1}+2\lambda_{m+2}+\cdots+l\lambda_{m+l}}\right)$$

$$= O\big(g_2^{-1/2}(y)\, e^{-g(y)} \varphi^l(s, \alpha)\big), \tag{19}$$

wobei

$$q = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=3}^{m}\bigl((i-2)\,m-2\bigr)\,\lambda_i + (m+2)\sum_{i=m+1}^{m+l} i\lambda_i\right] > 0$$

ist. Das heißt, daß die obengenannte Skala auch jetzt noch gültig bleibt; allerdings sind die Ordnungen der Glieder in (16) kleiner als die der Skalenfunktionen.

Im Fall $\delta^{-1} = O(1)$ schließlich, der wegen $\delta = o(\sigma)$ nur zusammen mit $\tau \to \infty$ auftreten kann, sind die Abschätzungen (12) nicht mehr gültig. Wenn jetzt

$$h_r(\sigma) \asymp g_r(y)/\beta^r, \quad r = 3, \ldots, m, \tag{20}$$

und anstelle von (14)

$$g_r(y)/g_2^{r/2}(y) = O\bigl(\varphi^{m(r-2)/2}(s, \alpha)\bigr), \qquad r \geqq 3, \tag{21}$$

vorausgesetzt wird ((21) besagt $h_r(\sigma) = O\bigl((\sigma\varphi)^{(m-2)r/2}\varphi^{r-m}\bigr)$), so ergibt sich wegen $\frac{m}{2}\sum_{i=3}^{m+l}(i-2)\,\lambda_i \geqq l$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\beta}\,e^{h(\sigma)}\prod_{i=3}^{m+l} h_i^{\lambda_i}(\sigma)\,I_k(\tau) &= O\left(e^{-g(y)}\prod_{i=3}^{m+l} g_i^{\lambda_i}(y)\,g_2^{(k-1)/2}(y)\right)\\ &= O\bigl(g_2^{-1/2}(y)\,e^{-g(y)}\varphi^l(s,\alpha)\bigr),\end{aligned} \tag{22}$$

wobei $k = \sum_{i=3}^{m+l} i\lambda_i$ ist. Somit sind die Glieder von (16) auch in diesem Fall von der Ordnung der Glieder der oben genannten Skala. In dem teilweise ausgeklammerten Fall $m = 2$ ist (20) überflüssig, (14) und (21) besagen das gleiche, und es ist $I_{2l}^{(2,1)}(\tau) \asymp e^{\tau^2}$, $I_{2l+1}^{(2,1)}(\tau) \asymp \tau^{2l}$ für $\tau \to \infty$; also gelten (19) und (22) auch für $m = 2$.

Speziell ergibt sich für $\alpha = \alpha_0$ mit $\tau = 0$, $\beta = \beta_0$, $h_r(0) = 0$ für $r = 3, \ldots, m$, $I_k^{(m,n)}(0) = \frac{1}{m}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right)$ für $k = 0, 1, \ldots$, aus (16) die asymptotische Entwicklung

$$\begin{aligned}F(s, \alpha_0) \approx \frac{1}{m}\,e^{-g(x)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_0^{l+1}}\\ \times\sum_{(*)}\left[(-1)^r\,\Gamma\left(\frac{l+1+mr}{m}\right)\beta_0^{-mr}\prod_{i=1}^{l}\frac{1}{\lambda_{m+i}!}\left(\frac{g_{m+i}(x)}{(m+i)!}\right)^{\lambda_{m+i}}\right]\end{aligned} \tag{23}$$

Summationsbedingung $(*)$: $\sum_{i=1}^{l} i\lambda_{m+i} = l$, $\lambda_i \geqq 0$ ganz; $r = \sum_{i=1}^{l}\lambda_{m+i}$.

Es ist nun noch die Ordnung des Restgliedes der Entwicklung (16) zu untersuchen. Dazu verwenden wir statt (8) die Taylor-Entwicklung mit Restglied,

$$h(u) = h(\sigma) + \sum_{k=3}^{2q-1}\frac{h_k(\sigma)}{k!}(u-\sigma)^k + \frac{h_{2q}(\xi)}{(2q)!}(u-\sigma)^{2q}, \quad 2q \geqq m+1, \tag{24}$$

wobei ξ innerhalb der vor (8) angegebenen Intervalle liegt. Dann entfallen in (9) die Glieder mit $k > 2q$ und in (16) außer den Gliedern mit $l > 2q - m$ noch alle diejenigen, für die $k > 2q$ wird, und endlich ist für $h_{2q}(\sigma)$ $l = 2q - m$ durch $h_{2q}(\xi)$ zu ersetzen. Die Summanden von (16) für $l = 0, 1, \ldots, l^* = [2q/(m+1)]$ bleiben unverändert (außer für $2q = m + 1$). Setzt man analog zu (14)

$$h_{2q}(\xi) = O\bigl(\varphi^{2q-m}(s, \alpha)\bigr) \quad \text{für alle } q \text{ mit } \quad 2q \geqq m+1 \tag{25}$$

voraus, so hat die Differenz aus $F(s, \alpha)$ und der rechten Seite von (16) bei Summierung bis $l = l^* - 1$, also das Restglied der Ordnung $l^* - 1$, die Ordnung $O\big(g_2^{-1/2}(y)\, e^{-g(y)} \times (\varphi(s, \alpha))^{l^*}\big)$. Dabei ist angenommen worden, daß die Integralbeiträge von den vernachlässigten seitlichen Intervallen (vgl. die Bemerkung von (9)) unter die Restgliedordnung fallen, was jetzt gezeigt werden soll. Dazu stützen wir uns auf die Vorgehensweise in [1], Wie in [8] im Anschluß an (14) zeigt man unter den Voraussetzungen (6) und (7)

$$\int\limits_{\sigma+\beta\omega}^{\infty} e^{-\Phi(u)}(u-\sigma)^k\,du = O\big(e^{-\Phi(\sigma+\beta\omega)}(\beta\omega)^{-m+1+k}\big),$$

so daß man, wenn man noch die Ordnung des Exponenten des e-Faktors berücksichtigt,

$$\frac{1}{\beta}\, e^{h(\sigma)} \prod_{i=3}^{2q} h_i^{\lambda_i}(\sigma) \int\limits_{\sigma+\beta\omega}^{\infty} e^{-\Phi(u)}(u-\sigma)^k\,du$$

$$= O\left(g_2^{-1/2}(y)\, e^{-g(y)-\frac{1}{2}(\beta\omega)^2\Phi_2(\xi)}\, \varphi^l(s, \alpha)\, (\beta\omega)^{k-\frac{m}{2}}\right) \tag{26}$$

erhält, wobei die λ_i und l gemäß der Summationsvorschrift zu (16) mit der Zusatzbedingung $k \leqq 2q$ verbunden sind und $\xi \in (\sigma, \sigma + \beta\omega)$ gilt. Unter der weiteren Voraussetzung

$$\frac{1}{\varphi(s, \alpha)} = O\big((\beta\omega)^{\varrho}\big), \qquad \varrho \text{ beliebig}, \tag{27}$$

ist die rechte Seite von (26) ein $o\big(g_2^{-1/2}(y)\, e^{-g(y)}\varphi^l(s, \alpha)\big)$. Entsprechend zeigt man

$$\int\limits_{y+w}^{b} e^{-g(t)}\,dt = O\big(\beta^{-1}(\beta\omega)^{1-m}\, e^{h(\sigma)-\Phi(\sigma+\beta\omega)}\big)$$

$$= O\left(g_2^{-1/2}(y)\, e^{-g(y)-\frac{1}{2}(\beta\omega)^2\Phi_2(\xi)}(\beta\omega)^{-\frac{m}{2}}\right) = o\big(g_2^{-1/2}(y)\, e^{-g(y)}\varphi^{l^*}(s, \alpha)\big).$$

Analog kann man bei der Abschätzung der Integrale über $0 \leqq u \leqq \sigma - \beta z$ vorgehen, und endlich erhält man das gleiche Resultat auch im Fall $z > \omega$, sofern (27) auch für ω^* statt ω gilt.

Die Ergebnisse lassen sich zu folgendem Satz zusammenfassen.

Satz: *Wenn $(s, \alpha) \in S \times A'$ ist und die in der Einleitung für diesen Fall genannten allgemeinen Voraussetzungen über $g(t)$ sowie die im Anschluß an* (5) *bis einschließlich* (8) *genannten Voraussetzungen und außerdem die nach* (11) *genannte Forderung über $g_{m+1}(\xi)$ unter der Bedingung* (11) *erfüllt sind, im Fall $\delta = o(1)$* (14), *im Fall $1 = O(\delta)$* (20) *und* (21) *gelten und schließlich* (25) *und* (27) *erfüllt sind (letztere auch dann, wenn ω durch ω^* ersetzt wird), so ist* (16) *eine verallgemeinerte asymptotische Entwicklung für* (1) *mit der asymptotischen Skala $\{g_2^{-1/2}(y)\, e^{-g(y)}\varphi^l(s, \alpha)\}$*, wobei *$s \to s_0$, $\alpha \in A'$ ist.*

3. Beziehungen zur Methode von Chester, Friedman und Ursell

Eine andere Möglichkeit, eine gleichmäßige asymptotische Entwicklung für (1) zu erhalten, besteht in der Anwendung der Methode von CHESTER, FRIEDMAN und URSELL [4]. Dies ist von OLVER [6] für die Funktion $A_{-\delta}(\alpha s)$ durchgeführt worden (siehe Abschnitt 7). Ein Zusammenhang zwischen dieser und unserer Methode kann wie folgt hergestellt werden. Wenn man die lineare Substitution $t = y + (u - \sigma)/\beta$ mit τ

nach (5) durch eine Transformation der Form

$$t = y + \lambda(u), \qquad \lambda(u) = \sum_{k=1}^{\infty} (u - \sigma)^k/\beta_k \tag{28}$$

mit noch zu bestimmendem $\lambda(u)$ ersetzt, wobei angenommen wird, daß sie das für die Asymptotik von $F(s, \alpha)$ wesentliche t-Intervall ($[x, y + \omega]$ bzw. $[y - \omega^*, y + \omega^*]$) eineindeutig auf ein gewisses u-Intervall $[u_1, u_2]$ abbildet, so erhält man

$$F^*(s, \alpha) = \int_{u_1(s,\alpha)}^{u_2(s,\alpha)} e^{-s(y+\lambda(u))} \lambda'(u)\, du \tag{29}$$

anstelle von $F^{(1)}(s, \alpha)$ bzw. $F^{(2)}(s, \alpha)$. Setzt man, entsprechend wie bisher, weiter

$$h(u) = u^m - \frac{m}{n} \tau u^n - g\big(y + \lambda(u)\big), \tag{30}$$

so daß $h_1(\sigma) = 0$ wird, und bestimmt die Koeffizienten $1/\beta_k = \lambda^{(k)}(\sigma)/k!$ (und damit auch $\lambda(u)$) aus der Forderung $h_r(\sigma) = 0$, $r = 2, 3, \ldots$, wird $h(u) = h(\sigma) = -g(x)$. Also besagt (30):

$$g(t) - g(x) = u^m - \frac{m}{n} \tau u^n, \tag{31}$$

und das ist gerade die Transformation von Chester, Friedman und Ursell. Die asymptotische Entwicklung von $F(s, \alpha)$ ergibt sich nun durch Einsetzen der Taylorentwicklung von $\lambda'(u)$ in (29):

$$F(s, \alpha) \approx e^{-g(x)} \sum_{k=1}^{\infty} (k + 1)\, I_k^{(m,n)}(\tau)/\beta_{k+1}. \tag{32}$$

Hierbei stimmt β_1 mit dem β überein, das zu dem hier benutzten τ — siehe (5) — gehört, und nach der Berechnung der $h_r(\sigma)$ findet man für $k \geqq 2$, $\sigma > 0$:

$$\frac{1}{\beta_k} = \frac{\beta_1}{g_2(y)} \left[\frac{m d_{k+1} \sigma^{m-k-1}}{k+1} - \sum_{(*)} \left((g_r(y) \Big/ \prod_{j=1}^{k-1} \lambda_j!\, \beta_j^{\lambda_j} \right) \right],$$

$$\text{Summationsbedingung } (*)\colon \sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j = k + 1,\ \lambda_j \geqq 0 \text{ ganz};\ r = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j, \tag{33}$$

$$d_{k+1} = \binom{m-1}{k} - \binom{n-1}{k}.$$

Für $\sigma = 0$ sind jeweils die Grenzwerte der $1/\beta_k$ für $\sigma \to 0$ zu nehmen, und es wird dann

$$\beta_1 = \big(g_m(x)/m!\big)^{1/m},\ \frac{1}{\beta_k} = -\frac{(m-1)!\, \beta_1^{m-1}}{g_m(x)} \sum_{(*)} \left(g_r(x) \Big/ \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j!\, \beta_j^{\lambda_j} \right),\ k \geqq 2,$$

$$\text{Summationsbedingung } (*)\colon \sum_{j=1}^{k-1} j\lambda_j = m - 1 + k,\ \lambda_j \geqq 0 \text{ ganz};\ r = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j. \tag{34}$$

Offenbar müssen die $1/\beta_k$ im Fall $\tau = O(1)$ eine asymptotische Skala bilden, wenn die rechte Seite von (32) eine asymptotische Entwicklung ist.

4. Eine im Fall $\tau \to \infty$ gültige asymptotische Entwicklung

Ergänzend sei nun noch eine weitere asymptotische Entwicklung hergeleitet, die zwar nur solche $\alpha \in A'$ erfaßt, für die $\tau \to \infty$ gilt (also nicht gleichmäßig für alle $\alpha \in A'$ gültig ist), aber wegen ihres Aufbaus und ihrer Genauigkeit von Interesse ist. Die sich im Fall $\tau \to -\infty$ ergebende analoge Entwicklung (siehe Abschnitt 6) ist darüber hinaus für eine spezielle Funktionenklasse auch gleichmäßig gültig, und zwar sogar für alle $\alpha \in A$ (eine Veröffentlichung hierfür ist in Vorbereitung; vgl. auch das spezielle Beispiel in [7]).

Wenn $\tau \to \infty$ (oder $z^2 g_2(y) \to \infty$) erfüllt ist und ein ω^* existiert, das den Voraussetzungen genügt, kann zunächst eine asymptotische Entwicklung von $F(s, \alpha)$ mittels einer Verallgemeinerung der Laplaceschen Methode wie bei von einer Variablen abhägigen Integralen erhalten werden (siehe dazu Berg [1, 2: 33.2]). Formal ergibt sie sich, wenn man wie in Abschnitt 2 vorgeht, wobei $g(t)$ um $t = y$ zu entwickeln ist und statt der $I_r(\tau)$ auswertbare Integrale entstehen. Sie lautet

$$F(s, \alpha) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{g_2(y)}}\, e^{-g(y)} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{(*)} \left[(-1)^{p+l} \frac{(2l)!}{l!\big(2g_2(y)\big)^l} \prod_{i=3}^{2p+2} \frac{1}{\lambda_i!} \left(\frac{g_i(y)}{i!}\right)^{\lambda_i}\right], \tag{35}$$

$$\text{Summationsbedingung } (*)\colon \sum_{i=3}^{2p+2} (i-2)\,\lambda_i = 2p,\ \lambda_i \geqq 0 \text{ ganz};\ 2l = \sum_{i=3}^{2p+2} i\lambda_i.$$

Modifiziert man die Voraussetzungen in [1] dahingehend, daß man $g_r(y)/g_2^{r/2}(y) = O\big(\psi^{(r-2)/2}(s, \alpha)\big)$, $r \geqq 3$, mit einer Funktion $\psi(s, \alpha) = o(1)$ für $s \to s_0$, $\tau \to \infty$ fordert, so erkennt man, daß die Folge $\{g_2^{-1/2}(y)\, e^{-g(y)} \psi^p(s, \alpha)\}$ eine asymptotische Skala für (35) bildet (wenn die Voraussetzungen (14) und (21) erfüllt sind, ergibt sich $\psi = \sigma^{-m}$ für $\varphi\sigma = O(1)$ und $\psi = \varphi^m$ für $1 = O(\varphi\sigma)$, sofern $\delta \asymp (\sigma\varphi)^\nu$ mit einem $\nu \geqq 1$ gilt). Die Entwicklung (35) berücksichtigt nicht explizit, daß ein zweiter Parameter vorkommt, was sich in den vorhergehenden Entwicklungen im Aufteten von τ ausdrückt. Insbesondere wird die gute Approximation für $F(s, \alpha)$, die durch die asymptotische Darstellung (also das Führungsglied von (16)) erhalten werden konnte, nicht ausgenutzt. Um diesen Nachteil zu vermeiden, schlagen wir den folgenden Weg zur Herleitung einer verbesserten asymptotischen Entwicklung ein; dabei beschränken wir uns auf $b = \infty$ und die Wahl von τ, β nach (5). Wir gehen von der Identität

$$F(s, \alpha) = \frac{1}{\beta}\, e^{-g(x)} I_0(\tau) + \frac{1}{\beta}\, e^{-g(x)} \left\{\int_0^\infty e^{-g(y+(u-\sigma)/\beta)+g(x)}\, du - \int_0^\infty e^{-\Phi(u)}\, du\right\} \tag{36}$$

aus, die als ersten Summanden das Hauptglied von (16) enthält, und entwickeln den Rest, ersetzen also das erste Integral in der geschweiften Klammer durch (35) und das zweite durch seine asymptotische Entwicklung für $\tau \to \infty$. Dies führt auf

$$F(s, \alpha) \approx \frac{1}{\beta}\, e^{-g(x)} I_0(\tau) + \sqrt{\frac{2\pi}{g_2(y)}}\, e^{-g(y)} \sum_{p=1}^{\infty} c_p \quad \text{mit}$$

$$c_p = \sum_{(*)} (-1)^{p+l} \frac{(2l)!}{2^l l!} \left\{\frac{1}{g_2^{\,l}(y)} \prod_{i=3}^{2p+2} \left(\frac{1}{\lambda_i!} \left(\frac{g_i(y)}{i!}\right)^{\lambda_i}\right) \right. \tag{37}$$

$$\left. - \frac{1}{(m-n)^l\, (m\sigma^m)^p} \prod_{i=3}^{2p+2} \frac{1}{\lambda_i!} \left(\frac{d_i}{i}\right)^{\lambda_i}\right\},$$

Summationsbedingung und l wie in (35). Auch ist die Skala die gleiche wie zuvor. Während sich für große τ die vom letzten Summanden in (36) herrührenden Entwicklungsglieder und der erste Summand fast aufheben, so daß im wesentlichen die Entwicklung (35) übrigbleibt, werden für mittlere τ die ersten c_p klein und wirken korrigierend auf den ersten Summanden in (37).

5. Gleichmäßige asymptotische Entwicklungen im Falle $\alpha \in A''$

Im Fall $\alpha \in A''$ lassen sich gleichmäßige asymptotische Entwicklungen wie im Abschnitt 2 herleiten. Die Funktion $h(u)$ definieren wir jetzt durch

$$h(u) = \Phi(u) - g(x + u/\beta), \qquad \Phi(u) \text{ wie in (3).} \tag{38}$$

Zunächst beschränken wir uns auf die Kombination

$$\beta = \big(g_m(x)/m!\big)^{1/m}, \qquad \tau = -g_n(x)/m(n-1)!\,\beta^n, \tag{39}$$

auf die sich Satz 2 in [8] bezieht. Wie dort erfülle $\omega(s, \alpha)$ mit $0 < \omega \leqq b - x$ für $s \to s_0$, $\alpha \in A''$ die Beziehungen

$$\beta\omega \to \infty, \quad \omega^{m+1} g_{m+1}(x) = o(1), \quad g_{m+1}(\xi) = O\big(g_{m+1}(x)\big) \quad \text{für jedes}$$
$$\xi \in [x, x + \omega] \tag{40}$$

mit $g_{m+1}(x) \neq 0$, und $g_1(t)$ sei für $x + \omega < t < b$ monoton wachsend. Wenn $h(u)$ im Intervall $[0, \beta\omega]$ in eine konvergente Potenzreihe

$$h(u) = -g(x) - \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{g_k(x)}{k!\,\beta^k} u^k \tag{41}$$

entwickelbar ist und die Ordnungsbeziehungen

$$g_r(x) = O\big(\beta^r \varphi^{r-m}(s, \alpha)\big), \qquad r \geqq m + 1 \tag{42}$$

(vgl. (14)) mit einer Funktion $\varphi(s, \alpha)$ erfüllt sind, für die $\varphi(s, \alpha) = o(1)$ gilt, ergibt sich die für $s \to s_0$ und für alle $\alpha \in A''$ gleichmäßig gültige asymptotische Entwicklung

$$F(s, \alpha) \approx \frac{1}{\beta} e^{-g(x)} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{(*)} \left[(-1)^r \frac{J_{l+mr}^{(m,n)}(\tau)}{\beta^{l+mr}} \prod_{i=1}^{l} \frac{1}{\lambda_{m+i}!} \left(\frac{g_{m+i}(x)}{(m+i)!}\right)^{\lambda_{m+i}}\right],$$
$$\text{Summationsbedingung } (*)\colon \sum_{i=1}^{l} i\lambda_{m+i} = l,\ \lambda_i \geqq 0 \text{ ganz};\ r = \sum_{i=1}^{l} \lambda_{m+i}, \text{ mit} \tag{43}$$

$$J_k^{(m,n)}(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-\Phi(u)} u^k\, du. \tag{44}$$

Hierbei sind wieder gewisse Restabschätzungen als richtig angenommen worden, was sich aber unter der Zusatzvoraussetzung (27) wie in Abschnitt 2 nachprüfen läßt. Als Skala der Entwicklung (43) ergibt sich, zunächst für $\tau = O(1)$, $\{g_m^{-l/m}(x) \times e^{-g(x)} \varphi^l(s, \alpha)\}$; da aber für $\tau \to -\infty$ die asymptotische Darstellung

$$J_k^{(m,n)}(\tau) \sim \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{k+1}{n}\right)\left(-\frac{m}{n}\tau\right)^{-\frac{k+1}{n}} \tag{45}$$

gilt, die $J_k^{m,n}(\tau)$ also gegen 0 streben, ist die Skala für alle $\alpha \in A''$ gültig. Man sieht unmittelbar, daß (44) für $\tau = 0$ in (23) übergeht.

Aus den $J_k^{(m,n)}(\tau)$, $k = 0, 1, \ldots, m-2$, können die weiteren mittels der Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} J_k^{(m,n)}(\tau) &= \tau J_{k-m+n}^{(m,n)}(\tau) \frac{k-m+1}{m} J_{k-m}^{(m,n)}(\tau), \qquad k \geqq m, \\ J_{m-1}^{(m,n)}(\tau) &= \tau J_{n-1}^{(m,n)}(\tau) + \frac{1}{m} \end{aligned} \tag{46}$$

berechnet werden. Ferner gilt die Potenzreihenentwicklung

$$J_k^{(m,n)}(\tau) = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \Gamma\left(\frac{rn+k+1}{m}\right) \left(\frac{m}{n} \tau\right)^r. \tag{47}$$

Speziell ist $J_k^{(2,1)}(\tau) = e^{\frac{\tau^2}{2}} 2^{-\frac{k+1}{2}} k! \, D_{-k-1}\left(-\sqrt{2}\tau\right)$. Wenn anstelle von (39) die Kombination

$$\tau = -\left[\frac{n}{m-n} |g(x) - g(y)|\right]^{\frac{m-n}{m}}, \qquad \beta = \left(-g_n(x)/m(n-1)! \, \tau\right)^{1/n} \tag{48}$$

verwendet wird, ist die Summationsbedingung zu (43) in $\lambda_m + \sum_{i=1}^{l} i\lambda_{i+m} = l$ abzuändern, und es wird $r = \sum_{i=0}^{l} \lambda_{m+i}$. In der inneren Summe in (43) ist der Faktor $\left(-h_m(0)\,\beta^m/m!\right)^{\lambda_m}/\lambda_m!$ hinzuzufügen, und der Index von $J^{(m,n)}(\tau)$ und der Exponent von β sind in $l + mr - \lambda_m$ abzuändern. Skala dieser Entwicklung ist die gleiche wie für (43), wenn $\delta \asymp (\sigma\varphi)^\nu$ mit $\nu \geqq 1$ gilt und für $1 = O(\delta)$ die Bedingungen $h_m(0)\,\beta^m = O(\beta^m)$ und

$$g_r(x)/g_n^{r/n}(x) = O\left(\varphi^{m(r-n)/n}(s, \alpha)\right) \quad \text{für} \quad r \geqq m \tag{49}$$

erfüllt sind.

Die Anwendung der im Abschnitt 3 beschriebenen Methode der Herleitung einer gleichmäßigen asymptotischen Entwicklung führt im vorliegenden Fall $\alpha \in A''$ mit τ nach (48) auf

$$F(s, \alpha) \approx e^{-g(x)} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\, J_k^{(m,n)}(\tau)/\beta_{k+1}, \tag{50}$$

wobei sich die β_k aus $h_r(0) = 0$ mit $h(u) = \Phi(u) - g\left(x + \lambda(u)\right)$, $\lambda(u) = \sum_{k=1}^{\infty} u^k/\beta_k$, ergeben. Für $\tau < 0$ folgt aus $h_n(0) = 0$, daß $\beta_1 = \beta$ nach (48) ist, und aus der Voraussetzung $g_r(x) = 0$, $r = n+1, \ldots, m-1$, folgt $\lambda^{(k)}(0) = 0$, $1/\beta_k = 0$, für $k = 2, 3, \ldots, m-n$. Aus der Forderung $h_r(0) = 0$ für $r \geqq m$ erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_{m-n+1}} &= \frac{(n-1)!\,\beta_1^{n-1}\left(m! - g_m(x)/\beta_1^m\right)}{m!\, g_n(x)}, \\ \frac{1}{\beta_{k-n+1}} &= -\frac{(n-1)!\,\beta_1^{n-1}}{g_n(x)} \sum_{(*)} \left(g_r(x)/\lambda_1!\,\beta_1^{\lambda_1} \prod_{j=m-n+1}^{k-n} \lambda_j!\,\beta_j^{\lambda_j}\right), \qquad k > m, \end{aligned} \tag{51}$$

Summationsbedingung $(*)$: $\lambda_1 + \sum_{j=m+1}^{k} (j-n)\,\lambda_{j-n} = k$, $\lambda_j \geqq 0$ ganz;

$$r = \sum_{j=m+1}^{k} \lambda_{j-n}.$$

Für $\tau = 0$ sind die Grenzwerte der $1/\beta_i$ für $\tau \to 0$ zu nehmen, und das ergibt wieder (34).

6. Eine im Fall $\tau \to -\infty$ gültige asymptotische Entwicklung

Eine asymptotische Entwicklung, die nur im Fall $\tau \to -\infty$, τ nach (48), gültig ist, kann entsprechend wie für $\tau \to \infty$ in Abschnitt 4 hergeleitet werden. Um jedoch eine Verallgemeinerung zu [8], (39), zu erhalten, ändern wir (36) dahingehend ab, daß wir im ersten und dritten Summanden mit $\beta = \beta^-$, im zweiten mit $\beta = \beta^+$ arbeiten, wobei

$$\beta^- = \left(-g_n(x)/m(n-1)!\,\tau\right)^{1/n}, \qquad \beta^+ = \left(g_2(y)/m(m-n)\,\sigma^{m-2}\right)^{1/2} \tag{52}$$

ist (für $\tau = 0$ ist der gemeinsame Grenzwert $\left(g_m(x)/m!\right)^{1/m}$ zu setzen). Dann erhält man, wenn (40) erfüllt ist, $g_1(t)$ für $x + \omega < t < b$ monoton wächst sowie

$$g_r(x)/g_n^{r/n}(x) = O\left(\psi^{(r-n)/(m-n)}(s, \alpha)\right), \qquad r \geqq m, \qquad \psi(s, \alpha) = o(1) \tag{53}$$

für $s \to s_0$ und $\tau \to -\infty$ gelten,

$$F(s, \alpha) \approx \frac{1}{\beta^+} e^{-g(x)} I_0(\tau) + \frac{1}{n} e^{-g(x)} \sum_{p=0}^{\infty} c_p,$$

$$c_p = \sum_{q=(m-n)p}^{(m-n)(p+1)-1} \left\{ \sum_{(*)} \left[(-1)^r \Gamma\left(\frac{q + rn + 1}{n}\right) \left(\frac{n!}{g_n(x)}\right)^{\frac{q+rn+1}{n}} \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \prod_{i=m}^{q+n} \frac{1}{\lambda_i!} \left(\frac{g_i(x)}{i!}\right)^{\lambda_i} \right] - \frac{(-1)^p}{\beta^+ p!} \Gamma\left(\frac{pm+1}{n}\right) \left(\frac{n}{-m\tau}\right)^{\frac{mp+1}{n}} \right\}, \tag{54}$$

Summationsbedingung $(*)$: $\sum_{i=m}^{q-n} (i-n)\lambda_i = q$, $\lambda_i \geqq 0$ ganz; $r = \sum_{i=m}^{q+n} \lambda_i$.

Skala dieser asymptotischen Entwicklung ist $\{g_n^{1/n}(x)\, e^{-g(x)} \psi^p(s, \alpha)\}$ mit $\psi = \tau^{-m/n}$ bzw. $\psi = \varphi^{m(m-n)/n}$, falls $\varphi^{m-n}\tau = O(1)$ bzw. $1 = O(\varphi^{m-n}\tau)$ gilt. Aus (54) folgt [8], (39) für $p = q = 0$.

7. Beispiele

Zunächst wird das Beispiel

$$A_{-s}(\alpha s) = \int_0^\infty e^{-s(\alpha \sinh t - t)}\, dt, \qquad \alpha > 0, \quad \text{für} \quad s \to \infty$$

betrachtet, das zu $m = 3$, $n = 1$ gehört (vgl. [8]). Mit $\gamma = \operatorname{arcosh} \dfrac{1}{\alpha}$ für $\alpha \in A' = (0, 1]$, $\sigma = \tau^{1/2}$ ergibt sich mit $\beta = (s \tanh \gamma / 6\gamma)^{1/3}$, $\sigma = \beta\gamma$ aus (16) die asymptotische Entwicklung

$$A_{-s}\left(\frac{s}{\cosh \gamma}\right) \approx \frac{1}{\beta} e^{s\left(\gamma - \tanh\gamma - \frac{1}{3}\gamma^3 \tanh\gamma\right)} \sum_{l=0}^{\infty} s^{-l/3}$$
$$\times \sum_{(*)} \left[(-1)^r \left(\frac{s - 6\beta^3}{s^{2/3}}\right)^{\lambda_3} \left(\frac{6\gamma}{\tanh \gamma}\right)^{k/3} \tanh^\mu \gamma\, I_k(\tau) \Big/ \prod_{j=3}^{l+3} \lambda_j!\, j!^{\lambda_j} \right], \tag{55}$$

Summationsbedingung $(*)$: $\lambda_3 + \sum_{i=1}^{l} i\lambda_{i+3} = l$, $\lambda_i \geqq 0$ ganz; $r = \sum_{i=1}^{l} \lambda_{i+3}$,

$$k = l + 3r - \lambda_3, \qquad \mu = \lambda_4 + \lambda_6 + \cdots + \lambda_{2[(l+3)/2]}$$

und mit $\tau = [s(\gamma - \tanh\gamma)/2]^{2/3}$, $\beta = (s/6)^{1/3}\tanh^{1/2}\gamma/[3(\gamma - \tanh\gamma)]^{1/6}$:

$$A_{-s}\left(\frac{s}{\cosh\gamma}\right) \approx \left(\frac{6\sigma}{s\tanh\gamma}\right)^{1/2}\sum_{l=0}^{\infty} s^{-l/3}\sum_{(*)}\left[(-1)^r\left(\frac{s-6\beta^3}{s^{2/3}}\right)^{\lambda_3}\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{108(\gamma - \tanh\gamma)}{\tanh^3\gamma}\right)^{k/6}\tanh^\mu\gamma I_k(\tau)\Big/\prod_{j=3}^{l+3}\lambda_j!\, j!^{\lambda_j}\right], \tag{56}$$

Summationsbedingung und weitere Bezeichnungen wie in (55).
Mit demselben τ folgt aus (32)

$$\begin{aligned}
&A_{-s}\left(\frac{s}{\cosh\gamma}\right)\approx\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{\beta_{k+1}}\int_0^\infty e^{-u^3+3\tau u}(u-\sigma)^k\,du, \qquad \beta_1=\beta \quad \text{wie in (56)},\\
&\frac{1}{\beta_2}=\frac{6\beta_1^3-s}{6\beta_1^2 s\tanh\gamma}\quad \text{für}\quad \gamma>0, \qquad \frac{1}{\beta_2}=0 \quad\text{für}\quad \gamma=0,\\
&\frac{1}{\beta_3}=-\left[\frac{\beta_1}{2\beta_2^2}+\frac{1}{2\beta_1\beta_2\tanh\gamma}+\frac{1}{24\beta_1^3}\right]\quad\text{für}\quad \gamma>0,\\
&\frac{1}{\beta_3}=-\frac{1}{10s}\quad \text{für}\ \gamma=0
\end{aligned} \tag{57}$$

(vgl. (33), (34)). Diese Entwicklung ist — ohne die Rekursionsformel für die $1/\beta_i$ — in [6] angegeben. Endlich ergibt sich aus (37) für $s\to\infty$, $\tau\to\infty$ (τ wie in (56))

$$\begin{aligned}
&A_{-s}\left(\frac{s}{\cosh\gamma}\right)\approx\left(\frac{6\sigma}{s\tanh\gamma}\right)^{1/2} I_0^{(3,1)}(\tau)+\left(\frac{2\pi}{s\tanh\gamma}\right)^{1/2} e^{s(\gamma-\tanh\gamma)}\sum_{p=1}^{\infty}c_p,\\
&c_1=\frac{1}{24}\left(\frac{5-3\tanh^2\gamma}{s\tanh^3\gamma}-\frac{5}{6}\tau^{-3/2}\right),\\
&c_2=\frac{1}{1152}\left(\frac{385-462\tanh^2\gamma+81\tanh^4\gamma}{s^2\tanh^6\gamma}-\frac{385}{36}\tau^{-3}\right).
\end{aligned} \tag{58}$$

Tabelle 1 enthält neben den genauen Werten die sich aus (55) bis (58) ergebenden Werte für $A_{-s}(10\alpha)$ und einige $\alpha < 1$. Bei der Berechnung sind außer dem Führungsglied, das schon in [8] angegeben ist, noch die jeweils folgenden zwei von 0 verschiedenen Glieder der asymptotischen Entwicklungen berücksichtigt worden.

Tabelle 1: Werte für $A_{-10}(10\alpha)$, $0 < \alpha \leqq 1$

α	exakt	nach (55)	nach (56)	nach (57)	nach (58)
0.3	8113.4	8110.5	8110.6	8107.7	8113.4
0.4	560.07	559.91	559.67	560.25	560.09
0.5	78.735	78.747	78.679	78.762	78.757
0.6	17.847	17.873	17.805	17.852	17.861
0.7	5.7434	5.7437	5.7204	5.7443	5.7559
0.8	2.4133	2.4132	2.4010	2.4116	2.4232
0.9	1.2419	1.2417	1.2384	1.2416	1.2519
0.95	0.94560	0.94535	0.94424	0.94522	0.95248
1.0	0.74360	0.74363	0.74363	0.74363	—

Im Fall $\alpha \geqq 1$ erhält man mit $\tau = -6^{1/3}s(\alpha - 1)/3(s\alpha)^{1/3}$ aus (43)

$$A_{-s}(\alpha s) \approx \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{6}{\alpha s}\right)^{\frac{2l+1}{3}} \sum_{(*)} \left[(-1)^r 6^r J^{(3,1)}_{2l+3r}(\tau) \Big/ \prod_{i=1}^{l} \lambda_{2i+3}!\,(2i+3)!^{\lambda_{2i+3}}\right],$$

$$\text{Summationsbedingung } (*)\colon \sum_{i=1}^{l} i\lambda_{2i+3} = l;\ \lambda_i \geqq 0 \text{ ganz};\ r = \sum_{i=1}^{l} \lambda_{2i+3}. \tag{59}$$

Hieraus entnimmt man sofort die Entwicklung für $\alpha = \alpha_0 = 1$, indem man $J^{(3,1)}_{2l+3r}(0) = \frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{2l+1}{3} + r\right)$ einsetzt, und diese Entwicklung geht auch aus (55) bis (57) hervor. Für $\tau = -\left[\frac{s}{2}\sqrt{\alpha^2 - 1} - \arccos\frac{1}{\alpha}\right]^{2/3}$, $\beta = -s(\alpha - 1)/3\tau$ folgt aus (43) (vgl. die Bemerkungen im Anschluß an (48))

$$A_{-s}(\alpha s) \approx \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{(*)} \left[(-1)^r (s\alpha - 6\beta^3)^{\lambda_3} (\alpha s)^{\mu} J_k(\tau)/\beta^{k+1} \prod_{i=0}^{p} \lambda_{2i+3}!\,(2i+3)!^{\lambda_{2i+3}}\right]$$

$$\text{Summationsbedingung } (*)\colon \lambda_3 + \sum_{i=1}^{p} 2i\lambda_{2i+3} = l,\ \lambda_i \geqq 0 \text{ ganz};\ p = [l/2], \tag{60}$$

$$k = \sum_{i=0}^{l} (2i+3)\,\lambda_{2i+3}, \quad r = \sum_{i=0}^{l} \lambda_{2i+3}, \quad \mu = \lambda_5 + \lambda_7 + \cdots + \lambda_{2p+3},$$

aus (50), (51)

$$A_{-s}(\alpha s) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{\beta_{k+1}} J_k^{(3,1)}(\tau) \quad \text{mit} \quad \beta_1 = \beta,$$

$$\frac{1}{\beta_{2l}} = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, \quad \frac{1}{\beta_3} = \frac{6\beta_1^3 - s\alpha}{6s\beta_1^3(\alpha - 1)} \quad \text{für} \quad \alpha > 1,$$

$$\frac{1}{\beta_3} = -\frac{1}{10s} \quad \text{für} \quad \alpha = 1, \quad \frac{1}{\beta_5} = -\frac{\alpha}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{120\beta_1^5} + \frac{1}{2\beta_1^2\beta_3}\right) \tag{61}$$

$$\text{für} \quad \alpha > 1, \quad \frac{1}{\beta_5} = \frac{9}{350s^2}\left(\frac{s}{6}\right)^{1/3} \quad \text{für} \quad \alpha = 1,$$

und schließlich aus (54) für $s \to \infty$, $\tau \to -\infty$ mit $\frac{1}{\beta^+} = \left(\frac{6}{s}\right)^{1/3}\left(\frac{\tau}{1 - \alpha^2}\right)^{1/4}$:

$$A_{-s}(\alpha s) \approx \frac{1}{\beta^+} I_0^{(3,1)}(\tau) + \sum_{p=0}^{\infty} c_p, \qquad c_0 = \frac{1}{s(\alpha - 1)} + \frac{1}{3\beta^+\tau},$$

$$c_1 = -\frac{\alpha}{s^3(\alpha - 1)^4} + \frac{2}{27\beta^+\tau^4}, \qquad c_2 = \frac{\alpha(9\alpha + 1)}{s^5(\alpha - 1)^7} + \frac{40}{243\beta^+\tau^7}. \tag{62}$$

Tabelle 2 enthält für einige $\alpha \geqq 1$ die exakten Werte für $A_{-10}(\alpha s)$ und die sich aus (59) bis (62) ergebenden Werte (zusätzlich werden (60) und (61) auf einige $\alpha < 1$ angewendet, und es zeigt sich, daß in der Nähe von $\alpha = 1$ sehr gute Approximationen erhalten werden).

Als zweites Beispiel führen wir die unvollständige Famma-Funktion

$$\Gamma(s + 1, a) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^s\,dt \quad \text{mit} \quad s_0 = \infty$$

Tabelle 2: Werte für $A_{-10}(10\alpha)$, $\alpha \geqq 1$

α	exakt	nach (59)	nach (60)	nach (61)	nach (62)
1.0	0.74360	0.74363	0.74363	0.74363	—
1.05	0.60111	0.60112	0.60151	0 60113	0.60637
1.1	0.497508	0.497513	0.497484	0.497518	0.498643
1.5	0.1856076	0.1856075	0.1856077	0.1856062	0.1856150
2.0	0.0982683	0.0982683	0.9082683	0.0982683	0.0982689
4.0	0.03328460	0.03328460	0.03328460	0.03328460	0.03328461
0.95	0.94560		0.94566	0.94566	
0.9	1.2419		1.2420	1.2421	
0.8	2.4133		2.4140	2.4138	

an, für die noch allgemeinere Resultate in [7] zu finden sind. Hier ist $m = 2$, $n = 1$, und die erste Wahl von β, τ im Fall $z = s - a \geqq 0$ führt auf $\beta = (2s)^{-1/2}$, $\tau = (s - a)/\sqrt{2s}$. Wegen (17) ergibt sich aus (16)

$$\Gamma(s + 1, e) \approx \sqrt{2\pi s}\, e^{-s} s^s \left\{ \frac{1 + \operatorname{erf} \tau}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{s^k} \right.$$
$$\left. + \frac{e^{-\tau^2}}{\sqrt{2\pi s}} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2}{s}\right)^{l/2} \sum_{(*)} \left[(-1)^{r+1}\, 2^r P_{l+1+2r}(\tau) \Big/ \prod_{i=3}^{l+3} \lambda_i!\, i^{\lambda_i} \right] \right\}, \tag{63}$$

Summationsbedingung $(*)$: $\sum_{i=1}^{l+1} i\lambda_{i+2} = l + 1$, $\lambda_i \geqq 0$ ganz; $r = \sum_{i=1}^{l+1} \lambda_{i+2}$

mit

$$\gamma_k = \sum_{(*)} \left[(-1)^r \frac{(2k + 2r)!}{2^{k+r}(k + r)!} \Big/ \prod_{i=3}^{2k+2} \lambda_i!\, i^{\lambda_i} \right], \tag{64}$$

Summationsbedingung $(*)$: $\sum_{i=1}^{k} i\lambda_{i+2} = 2k$, $\lambda_i \geqq 0$ ganz; $r = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{i+2}$

und

$$P_k(\tau) = \begin{cases} \dfrac{(2\varkappa)!}{\varkappa!} \displaystyle\sum_{j=0}^{\varkappa-1} \frac{(\varkappa - j)!}{2^{2j}(2\varkappa - 2j)!}\, \tau^{2\varkappa-2j-1}, & k = 2\varkappa, \\ \varkappa! \displaystyle\sum_{j=0}^{\varkappa} \frac{1}{(\varkappa - j)!}\, \tau^{2\varkappa-2j}, & k = 2\varkappa + 1, \quad \varkappa = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

Zur Schreibweise in (63) ist zu bemerken, daß man sich die beiden Teilreihen „ineinandergeschoben" denken muß, so daß die Entwicklung nach der Skala $\{s^{-l/2}\}$ fortschreitet. Die γ_k sind die Koeffizienten der asymptotischen Entwicklung der Gamma-Funktion: $\Gamma(s + 1) \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{s^k}$ $(s \to \infty)$. (63) ist auch für $a > s$ eine asymptotische Entwicklung, solange $s - a = O(\sqrt{s})$ erfüllt ist. Wenn man (63) mit der asymptotischen Entwicklung $\frac{1}{\Gamma(s + 1, a)} \approx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{s^k}$ multipliziert, ergibt sich die zweite der von TRICOMI [10] hergeleiteten Entwicklungen (die dort allerdings nicht in der hier verwendeten expliziten Form angegeben ist). Die erste Tricomi-Entwicklung ergibt sich aus unseren Resultaten wie folgt. Es werden — Fall $\alpha \in A''$ — β, τ nach (39) gewählt; das ist $\beta = \sqrt{s/2}/a$, $\tau = (s - a)/\sqrt{2s}$, $a \geqq s$. Dann werden in der zugehörigen asymptotischen Entwicklung (43) — bei Beschränkung auf den Fall $\tau \to -\infty$ — die Funktionen erf τ und $J_k^{(2,1)}(\tau)$ durch ihre asymptotischen Entwicklungen für $\tau \to -\infty$ ersetzt. So ergibt sich unter den Bedingungen $a > s$, $\sqrt{s} = o(a - s)$, für $s \to \infty$

$$\begin{aligned} \Gamma(s + 1, a) &\approx \frac{e^{-a}a^{s+1}}{a - s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{s^k} \\ &\quad \times \sum_{(*)} \left[(k + r)!\, \mu^{-(k+r)} \Big/ \prod_{i=1}^{k} \lambda_{i+1}!\,(i + 1)^{\lambda_{i+1}}\right], \\ \mu &= \frac{a - s}{s}, \end{aligned} \tag{65}$$

Summationsbedingung $(*)$: $\sum_{i=1}^{k} i\lambda_{i+1} = k$, $\lambda_i \geqq 0$ ganz; $r = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{i+1}$.

Die Summe erscheint in [10] in der Form $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{(a - s)^k}$ mit $F(t) = e^{-st}(1 + t)^s$.

LITERATUR

[1] Berg, L.: Asymptotische Entwicklungen für Parameterintegrale II. Math. Nachr. **27** (1963/64), 133—143.

[2] Berg, L.: Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen. Berlin 1968.

[3] Bleistein, N.: Uniform asymptotic expansions of integrals with stationary point near algebraic singularity. Comm. Pure Appl. Math. **19** (1966), 353—370.

[4] Chester, C., Friedman, B., and F. Ursell: An extension of the method of steepest descents. Proc. Camb. Phil. Soc. **53** (1957), 599—611.

[5] Erdélyi, A., and M. Wyman: The asymptotic evaluation of certain integrals. Arch. Rat. Mech. Anal. **14** (1963), 217—260.

[6] Olver, F. W. J.: Asymptotics and special functions. New York—London 1974.

[7] Schell, H.-J.: Asymptotische Entwicklungen für die unvollständige Gammafunktion. Wiss. Z. TH Karl-Marx-Stadt **22**, (1980), 477—485.

[8] Schell, H.-J.: Gleichmäßige asymptotische Darstellungen für Parameterintegrale mit zwei reellen Parametern. Z. Anal. Anw. (im Druck).

[9] Temme, N. M.: The asymptotic expansion of the incomplete gamma functions. SIAM J. Math. Anal. **10** (1979), 757—766.

[10] Tricomi, F. G.: Asymptotische Eigenschaften der unvollständigen Gammafunktion. Math. Z. **53** (1950), 136—148.

[11] Wong, R.: On uniform asymptotic expansion of definite integrals. J. Appr. Th. **7** (1973), 76—87.

Manuskripteingang: 15. 01. 1982, in revidierter Fassung: 30. 04. 1982

VERFASSER:

Dr. sc. nat. Hans-Joachim Schell
Sektion Mathematik der Technischen Hochschule
DDR-9010 Karl-Marx-Stadt, Str. der Nationen 62