Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (2) 1983, S. 175 – 187

Normabschätzungen für die Inversen von Toeplitz-Matrizen

A. Pomp

Für diskrete und paarige diskrete Wiener-Hopfsche Gleichungen vom Normaltyp, deren Symbol eine quadratisch summierbare erste Ableitung besitzt, werden die in den Fehlerabschätzungen für das Reduktionsverfahren auftretenden Konstanten abgeschätzt.

Для дискретных и парных дискретных уравнений Винера-Хопфа эллиптического типа, символ которых имеет квадратично суммируемую первую производную, оцениваются константы, возникающие в оценках погрешности метода редукции.

For discrete and paired discrete Wiener-Hopf equations of normal type, the symbol of which possesses a quadratic summable first derivative, we estimate the constants arising in error estimates for the reduction method.

1. Einleitung

Für die praktische Rechnung mit Toeplitz-Matrizen

$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{-n} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots & a_{1-n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

und paarigen Toeplitz-Matrizen

$$B_n = \begin{pmatrix} b_0 & b_{-1} & \dots & b_{1-n} & a_{-n} & a_{-1-n} & \dots & a_{-2n} \\ b_1 & b_0 & \dots & b_{2-n} & a_{1-n} & a_{-n} & \dots & a_{1-2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2n} & b_{2n-1} & \dots & b_{n+1} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

sowie

$$C_n = \begin{bmatrix} b_0 & b_{-1} & \dots & b_{-2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_{-1-n} \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_{-n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n} & a_{2n-1} & \dots & a_0 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

wie sie z. B. bei der Diskretisierung von Faltungsgleichungen und singulären Integralgleichungen auftreten, spielen solche Fragen wie die der Existenz der Inversen und einer Abschätzung der Konditionszahl bzw. der Norm der Inversen eine große Rolle.

Im Abschnitt 2 geben wir eine Übersicht über diejenigen Fälle, in denen Normabschätzungen für die Inversen oder wenigstens Existenzaussagen bereits bekannt sind.[1]) Nach den vorbereitenden Abschnitten 3, 4, 5 und 6 gelangen wir in den Abschnitten 7 und 8 zu Existenzaussagen und Normabschätzungen für A_n^{-1}, B_n^{-1} und C_n^{-1} unter folgenden Voraussetzungen:

1. Es existiert eine Funktion $A(z) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_k z^k$ bzw. ein Funktionenpaar $A(z)$, $B(z) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} b_k z^k$, deren Fourierkoeffizienten mit den entsprechenden Matrixelementen übereinstimmen.
2. $A(z)$ bzw. $A(z)$ und $B(z)$ besitzen auf dem Einheitskreis $|z| = 1$ eine quadratisch summierbare erste Ableitung, keine Nullstellen und den funktionentheoretischen Index Null.

Für das Reduktionsverfahren zur näherungsweisen Lösung diskreter Wiener-Hopf-Gleichungen mit dem Symbol $A(z)$ und paariger diskreter Wiener-Hopf-Gleichungen mit dem Funktionenpaar $A(z)$, $B(z)$ als Symbol werden unter obigen Voraussetzungen Fehlerabschätzungen angegeben.

Die zugrunde liegende Methode besteht im Aufstellen expliziter Formeln für A_n^{-1}, B_n^{-1}, C_n^{-1}, wobei gewisse, durch Faktorisierungen entstandene Terme auftreten, die im allgemeinen als unbekannt angesehen werden müssen, deren Normen sich jedoch abschätzen lassen.

Die vorliegende Arbeit stellt eine Weiterentwicklung eines Teiles der Dissertation [4] des Autors dar.

2. Einige klassische Resultate

Es sei $A(z)$ eine auf dem Einheitskreis $\Gamma := \{e^{i\varphi} \mid 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\}$ definierte komplexwertige, Lebesgue-integrierbare Funktion, deren Fourierkoeffizienten

$$a_k = \int\limits_0^{2\pi} A(e^{i\varphi})\, e^{-ik\varphi}\, d\varphi$$

für $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$ mit den Elementen der Toeplitz-Matrix A_n übereinstimmen. Bezeichnet $u = \{u_0, u_1, \ldots, u_n\}'$ einen beliebigen Spaltenvektor komplexer Zahlen, so gilt für die quadratische Form

$$(A_n u, u) := \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} a_{j-k} u_k \overline{u_j}$$

bekanntlich die Darstellung [3]:

$$(A_n u, u) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} A(e^{i\varphi})\, |u_0 + u_1 e^{i\varphi} + \cdots + u_n e^{in\varphi}|^2\, d\varphi. \tag{4}$$

Falls die wesentliche abgeschlossen-kovexe Hülle der Bildmenge von $A(z)$ den Nullpunkt der komplexen Ebene nicht enthält oder, was dasselbe ist, wenn ein Dreh-

[1]) Derartige Fragestellungen werden auch in [7] behandelt, wie durch ein Referat im Zentralblatt für Math. u. ihre Grenzgebiete, Bd. 452 (1981) angekündigt wurde. Leider war uns diese Arbeit bisher nicht zugänglich.

winkel $\psi \in [0, 2\pi]$ existiert, so daß

$$M := \operatorname*{ess\,inf}_{\varphi \in [0,2\pi]} \operatorname{Re}\,[e^{i\psi} A(e^{i\varphi})] > 0 \tag{5}$$

erfüllt ist, dann folgt aus (4):

$$|(A_n u, u)| \geqq M \sum_{k=0}^{n} |u_k|^2.$$

Folglich sind die Toeplitz-Matrizen A_n in diesem Fall für alle $n \geqq 0$ invertierbar und für die l^2-Norm gilt die Abschätzung $\|A_n^{-1}\| \leqq M^{-1}$. Für reellwertige Funktionen $A(z)$ läßt sich durch Untersuchungen des asymptotischen Verhaltens der Eigenwerte von A_n sogar $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_n^{-1}\| = M^{-1}$ nachweisen [3].

Wenn die Bedingung (5) nicht erfüllt ist, so gilt die Aussage, daß A_n^{-1} für alle $n \geqq 0$ existiert, i. a. nicht mehr. Ist $A(z)$ stetig auf Γ, so sind die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} &A(z) \neq 0 \qquad \forall z \in \Gamma, \\ &\operatorname{ind} A(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d \arg A(e^{i\varphi}) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

hinreichend dafür, daß eine natürliche Zahl n_0 existiert, so daß für alle $n \geqq n_0$ die Matrix A_n invertierbar und $\|A_n^{-1}\|$ bezüglich n gleichmäßig beschränkt ist [2].

Falls $A(z)$ und $B(z)$ stetige Funktionen auf Γ sind, deren Fourierkoeffizienten mit den entsprechenden Koeffizienten der paarigen Toeplitz-Matrizen B_n, C_n übereinstimmen, so sind die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} &B(z) \neq 0 \qquad \forall z \in \Gamma \\ &\operatorname{ind} B(z) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

zusammen mit den Bedingungen (6) hinreichend für die Existenz zweier natürlicher Zahlen n_1, n_2, so daß B_n für alle $n \geqq n_1$ und C_n für alle $n \geqq n_2$ invertierbar und die l^2-Normen $\|B_n^{-1}\|$, $\|C_n^{-1}\|$ bezüglich n gleichmäßig beschränkt sind [2].

Die folgenden Aussagen über die Zahlen n_0, n_1, n_2 sind seit längerem bekannt und lassen sich leicht beweisen (siehe Abschnitt 7 und 8):

a) Erfüllt die Funktion $A(z)$ die Bedingungen (6) und besitzt die inverse Funktion $A^{-1}(z)$ eine abbrechende Fourierreihe, also gilt

$$A^{-1}(z) = \sum_{k=-\infty}^{m} \alpha_k z^k \quad \text{oder} \quad A^{-1}(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} \alpha_k z^k,$$

($m \geqq 0$, ganz), so ist $n_0 \leqq m - 1$.

b) Erfüllen $A(z)$ und $B(z)$ die Bedingungen (6) und (7) und besitzen die inversen Funktionen abbrechende Fourierreihen,

$$A^{-1}(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} \alpha_k z^k \quad \text{und} \quad B^{-1}(z) = \sum_{k=-\infty}^{m_1} \beta_k z^k$$

($m, m_1 \geqq 0$, ganz), so ist $n_1 \leqq \max\,(m - 1, m_1)$. Durch Übergang zu den konjugiert-komplexen Funktionen und den adjungierten Operatoren erhält man eine entsprechende Aussage für die Matrizen der Gestalt (3).

3. Allgemeine Invertierungsformeln

In einem Banachraum $\mathfrak{B}$ sei ein linearer, invertierbarer Operator W und ein System von Projektoren P_n gegeben, wobei n die natürlichen Zahlen oder eine Teilmenge durchläuft. Q_n bezeichnet die ergänzenden Projektoren $Q_n := I - P_n$.

Für das Projektionsverfahren zur näherungsweisen Lösung der Gleichung

$$Wx = y, \tag{8}$$

welches bekanntlich darin besteht, daß man zu Näherungsgleichungen

$$P_n W P_n x = P_n y \tag{9}$$

übergeht, benötigt man:

1. Kriterien, wann die Gleichung (9) eine eindeutig bestimmte Lösung $x^{(n)} \in im\, P_n$ besitzt, d. h. Kriterien, wann der Operator $P_n W P_n$ im Bildraum $im\, P_n$ eine (mit $(P_n W P_n)^{(-1)}$ bezeichnete) Inverse besitzt;
2. Aussagen, unter welchen Bedingungen $x^{(n)}$ gegen die Lösung x der Ausgangsgleichung (8) konvergiert;
3. Abschätzungen für den Fehler $x - x^{(n)}$.

Zur Beantwortung dieser Fragen leistet der folgende Satz 1 oftmals nützliche Dienste. Die zugrunde liegende Idee des Ausnutzens der Äquivalenz: $\exists\, (P_n W P_n)^{(-1)} \Leftrightarrow \exists\, (Q_n W^{-1} Q_n)^{(-1)}$, geht auf A. V. Kozak zurück. (Vgl. [6].)

Es seien in $\mathfrak{B}$ zwei weitere lineare, invertierbare Operatoren E, F gegeben, für die

$$P_n E^{\pm 1} Q_n = Q_n F^{\pm 1} P_n = 0 \tag{10}$$

gilt. Der Operator $I - FW^{-1}E$ sei als Superposition

$$I - FW^{-1}E = XY \tag{11}$$

darstellbar, wobei Y ein linearer Operator von $\mathfrak{B}$ in einen Banachraum $\mathfrak{B}_1$ ist (der mit $\mathfrak{B}$ übereinstimmen kann) und X ein linearer Operator von $\mathfrak{B}_1$ in $\mathfrak{B}$ ist. $(Q_n F W^{-1} \times EQ_n)^{(-1)}$ bezeichnet die Inverse des Operators $Q_n F W^{-1} E Q_n = Q_n - Q_n X Y Q_n$ im Bildraum $im\, Q_n$, falls sie existiert.

Satz 1: $\exists\, (P_n W P_n)^{(-1)} \Leftrightarrow \exists\, (Q_n F W^{-1} E Q_n)^{(-1)} \Leftrightarrow \exists\, (I - YQ_nX)^{-1}$. *Falls diese Inversen existieren, so gelten die Formeln*

$$\begin{aligned} (P_n W P_n)^{(-1)} &= W^{-1} - W^{-1} E Q_n (Q_n F W^{-1} E Q_n)^{(-1)} Q_n F W^{-1} \\ &= F^{-1} P_n [I - X(I - YQ_nX)^{-1} Y]\, P_n E^{-1}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} x - x^{(n)} &= W^{-1} y - (P_n W P_n)^{(-1)} P_n y \\ &= W^{-1} E Q_n (Q_n F W^{-1} E Q_n)^{(-1)} Q_n F Q_n x \\ &= W^{-1} E Q_n [I + X(I - YQ_nX)^{-1} Y]\, Q_n F Q_n x. \end{aligned} \tag{13}$$

Beweis: Die Formeln

$$\begin{aligned} (P_n W P_n)^{(-1)} &= W^{-1} - W^{-1} E Q_n (Q_n F W^{-1} E Q_n)^{(-1)} Q_n F W^{-1}, \\ (Q_n F W^{-1} E Q_n)^{(-1)} &= E^{-1} [W - W P_n (P_n W P_n)^{(-1)} P_n W]\, F^{-1}, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} (Q_n F W^{-1} E Q_n)^{(-1)} &= (Q_n - Q_n X Y Q_n)^{(-1)} \\ &= Q_n + Q_n X (I - YQ_nX)^{-1} Y Q_n, \end{aligned} \tag{15}$$

$$(I - YQ_nX)^{-1} = I + YQ_n (Q_n F W^{-1} E Q_n)^{(-1)} Q_n X$$

lassen sich auf einfache Weise direkt nachweisen, so daß aus der Existenz der im rechtsstehenden Term auftretenden Inversen jeweils die Existenz der linksstehenden Inversen folgt. Damit ist die erste Aussage des Satzes gezeigt.

Aus (10), (14) und (15) ergibt sich die Formel (13). Es bleibt

$$F(P_nWP_n)^{(-1)}E = P_n - P_nX(I - YQ_nX)^{-1}\,YP_n$$

zu zeigen. Dies geschieht, indem man den durch (15) gegebenen Ausdruck für $(Q_nFW^{-1} \times EQ_n)^{(-1)}$ in (14) einsetzt und ausmultipliziert. Der Satz ist damit bewiesen ∎.

4. Darstellung der Matrizen als Operatoren

Im Hilbertraum l^2 aller quadratisch summierbaren, beidseitigen Zahlenfolgen $\xi = \{\xi_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$ bezeichnen wir mit I den identischen Operator, mit P, P_n, Q, Q_n die Projektoren

$$P\xi := \{\ldots, 0, 0, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots\},$$

$$P_n\xi := \{\ldots, 0, \xi_{-n}, \ldots, \xi_0, \ldots, \xi_n, 0, \ldots\},$$

$Q := I - P$, $Q_n := I - P_n$ und mit U^k (k ganzzahlig) die Verschiebungsoperatoren

$$U^k\xi := \{\xi_{j-k}\}_{j=-\infty}^{\infty}.$$

Offensichtlich gilt $\|P\| = \|Q\| = \|P_n\| = \|Q_n\| = \|U^k\| = 1$. Hier wie im weiteren bedeutet die Symbolik $\|.\|$ im Falle einer Zahlenfolge oder eines Operators die Euklidische Norm, also die Norm im Raum l^2, und im Falle einer Funktion die Norm im Hilbertraum $L^2(\Gamma)$.

Für jede Funktion $A(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k \in L^\infty(\Gamma)$ stellt die unendliche Matrix $(a_{j-k})_{j,k=-\infty}^{\infty}$ einen in l^2 stetigen Opertor A dar, den man als *Laurent-Operator* bezeichnet [1]. Gehört die Funktion $A(z)$ der Wienerschen Algebra $\mathfrak{W}$ an,

$$A(z) \in \mathfrak{W} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \sum_{-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty,$$

so läßt sich A als eine in der Operatornorm konvergente Reihe $A = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k U^k$ darstellen.

Die Toeplitz-Matrix (1) läßt sich mit dem Operator P_nPAPP_n identifizieren, wobei $A(z)$ eine beliebige, absolut konvergente Fortsetzung der Reihe $\sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$ ist. Die paarigen Toeplitz-Matrizen (2) und (3) lassen sich mit den Operatoren $P_n(AP + BQ)\,P_n$ bzw. $P_n(PA + QB)\,P_n$ identifizieren, wobei $A(z)$ und $B(z)$ beliebige, absolut konvergente Fortsetzungen der Reihen $\sum a_k z^k$ und $\sum b_k z^k$ (mit den entsprechenden Summationsgrenzen) sind.

5. Die Faktorisierung

Mit R_+ und R_- bezeichnen wir die für alle Funktionen $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_k z^k \in L^2(\Gamma)$ definierten Operatoren:

$$R_+f(z) := \frac{1}{2} f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k, \qquad R_-f(z) := \frac{1}{2} f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_{-k} z^{-k}.$$

R_+ und R_- sind stetige Operatoren in $L^2(\Gamma)$. Offensichtlich ist $R_+ + R_- = I$. Bezeichnet H den Hilbertschen singulären Integraloperator

$$(Hf)\,(e^{i\varphi}) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - \varphi}{2}\, f(e^{i\sigma})\, d\sigma,$$

so gilt weiterhin $H = i(R_+ - R_-)$ (siehe z. B. [5]). Für alle reellwertigen Funktionen $f(z) \in L^2(\Gamma)$ ist $R_-f(z) = \overline{R_+f(z)}$ (konjugiert-komplexer Wert). Daraus folgt für die Real- und Imaginärteile bei einer reellwertigen Funktion $f(z)$:

$$\operatorname{Re} R_+f(z) = \operatorname{Re} R_-f(z) = \frac{1}{2} f(z), \qquad -\operatorname{Im} R_+f(z) = \operatorname{Im} R_-f(z) = \frac{1}{2} Hf(z).$$

Setzen wir für eine Funktion $A(z) \in \mathfrak{W}$ das Erfülltsein der Bedingungen (6) voraus, so liegt das Bild dieser Funktion im Holomorphiegebiet der komplexen Logarithmus-Funktion und folglich gilt:

$$\ln A(z) = \ln |A(z)| + i \arg A(z) \in \mathfrak{W}.$$

Auch die Funktionen

$$R_\pm \ln A(z) = \frac{1}{2} [\ln |A(z)| \mp iH \ln |A(z)| + i \arg A(z) \pm H \arg A(z)]$$

gehören der Wienerschen Algebra $\mathfrak{W}$ an. Die Darstellung $A(z) = A_-(z)\, A_+(z)$ mit $A_\pm(z) = \exp\,[R_\pm \ln A(z)]$ bezeichnet man als *Faktorisierung* der Funktion $A(z)$. Es gilt $A_\pm{}^{\pm 1}(z) \in \mathfrak{W}$ sowie

$$\begin{aligned} |A_\pm(z)| &= \sqrt{|A(z)|}\, \exp\left[\pm \frac{1}{2} H \arg A(z)\right], \\ \arg A_\pm(z) &= \frac{1}{2} \arg A(z) \mp \frac{1}{2} H \ln |A(z)|. \end{aligned} \tag{16}$$

Es läßt sich zeigen, daß alle Fourierkoeffizienten von $A_+{}^{\pm 1}(z)$ mit negativem und alle Koeffizienten von $A_-{}^{\pm 1}(z)$ mit positivem Index verschwinden. Für die zugeordneten Laurent-Operatoren $A_+, A_+^{-1}, A_-, A_-^{-1}$ gelten folglich die Beziehungen $QA_+{}^{\pm 1}P = PA_-{}^{\pm 1} = 0$. Die Normen dieser Operatoren sind gleich dem Maximum der erzeugenden Funktionen (vgl. [1, 2]):

$$\|A_\pm\| = \max_{z \in \Gamma} |A_\pm(z)|, \qquad \|A_\pm{}^{-1}\| = \max_{z \in \Gamma} |A_\pm{}^{-1}(z)|. \tag{17}$$

6. Einige Bezeichnungen und Abschätzungen

Es sei $A(z) \in \mathfrak{W}$ eine Funktion, die den Bedingungen (6) genügt. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\min |A(z)| := \min_{z \in \Gamma} |A(z)|, \qquad \max |A(z)| := \max_{z \in \Gamma} |A(z)|,$$

$$h(A) := \exp \left(\max_{z \in \Gamma} |H \arg A(z)| \right),$$

$$\gamma_0(A) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \arg A(e^{i\varphi})\, d\varphi,$$

$$g(A) := \max\, (\|A_+\|, \|A_-\|).$$

Aus (16) und (17) folgt

$$g(A) \leqq \sqrt{h(A) \max |A(z)|},$$

$$g(A^{-1}) = \max (\|A_+^{-1}\|, \|A_-^{-1}\|) \leqq \sqrt{\frac{h(A)}{\min |A(z)|}}.$$

Falls die Bedingung

$$\frac{d}{d\varphi} A(e^{i\varphi}) \in L^2(\Gamma) \tag{18}$$

erfüllt ist, so setzen wir

$$\mu(A) := \left\| \frac{A'(z)}{A(z)} \right\| \exp \left(\|\arg A(z) - \gamma_0(A)\| \right).$$

Wir erinnern daran, daß $\|\cdot\|$ im Falle einer Funktion die Norm in $L^2(\Gamma)$ und im Falle eines Operators die Norm in l^2 bedeutet.

Für eine Abschätzung der Zahl $h(A)$ gibt es mehrere Möglichkeiten. Genügt $\arg (Az)$ einer Lipschitz-Bedingung

$$|\arg A(z) - \arg A(z')| \leqq K\, |z - z'| \qquad \forall\, z, z' \in \Gamma,$$

so gilt [5]:

$$|H \arg A(z)| \leqq \frac{4K}{\pi} \Rightarrow h(A) \leqq \exp \left(\frac{4K}{\pi} \right).$$

Genügt $A(z)$ den Bedingungen (6) und (18), so besitzt auch die Funktion $\arg A(z)$ eine quadratisch summierbare erste Ableitung. Bezeichnet $\arg A(z) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma_k z^k$ (mit $\gamma_{-k} = \overline{\gamma_k}$, $\gamma_0 = \gamma_0(A)$) die Fourierreihe dieser Funktion, so folgt für $h(A)$ die Abschätzung:

$$\ln h(A) \leqq 2 \sum_1^{\infty} |\gamma_k| \leqq 2 \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\gamma_k|^2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left\| \frac{d}{d\varphi} \arg A(e^{i\varphi}) \right\|.$$

Hilfssatz 1: *Unter den Voraussetzungen* (6) *und* (18) *gelten für* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *die Abschätzungen:*

$$\|PQ_n A_+^{-1} A_- Q\| \leqq (n + 3/2)^{-1/2} \mu(A), \tag{19}$$

$$\|QA_+ A^{-1} PQ_n\| \leqq (n + 3/2)^{-1/2} \mu(A), \tag{20}$$

$$\|PA_+^{-1} A_- QQ_n \leqq (n + 1/2)^{-1/2} \mu(A), \tag{21}$$

$$\|QQ_n A_+ A_-^{-1} P\| \leqq (n + 1/2)^{-1/2} \mu(A). \tag{22}$$

Beweis: Zunächst sei bemerkt, daß aus (18) $A(z) \in \mathfrak{W}$ folgt. Setzen wir

$$e^{iH \ln A(z)} = A_+^{-1}(z)\, A_-(z) =: D(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k z^k \in \mathfrak{W},$$

so folgt aus

$$\|D'(z)\| = \left\| iD(z) \frac{d}{d\varphi} H \ln A(e^{i\varphi}) \right\| \leqq \|D(z)\| \left\| H \frac{d}{d\varphi} \ln A(e^{i\varphi}) \right\|$$

$$= \|e^{-\operatorname{Im} H \ln A(z)}\| \left\| \frac{A'(z)}{A(z)} \right\| = \|e^{-H \arg A(z)}\| \left\| \frac{A'(z)}{A(z)} \right\| \leqq \mu(A),$$

und aus $PU^kQQ_n = 0$ (für $k \leqq n$) für die linke Seite der Ungleichung (21) die Abschätzung:

$$\|PA_+^{-1}A_-QQ_n\| = \left\| P \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k U^k QQ_n \right\| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty} |d_k|$$

$$\leqq \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-2}} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} k^2 |d_k|^2} \leqq \sqrt{\int_{n+1/2}^{\infty} t^{-2}\, dt}\, \|D'(z)\|$$

$$\leqq (n + 1/2)^{-1/2} \mu(A).$$

Analog zeigt man (19), (20) und (22). Hilfssatz 1 ist damit bewiesen ∎

7. Aussagen für die Matrizen A_n und die Operatoren PAP

Es sei $A(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k$ eine Funktion, die den Bedingungen (6) und (18) genügt, und A der zugeordnete Laurent-Operator. Für die Schar der durch $A(z)$ erzeugten Toeplitz-Matrizen A_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ und für das Reduktionsverfahren zur näherungsweisen Lösung der diskreten Wiener-Hopf-Gleichung

$$PAPx = y \qquad (y \in \operatorname{im} P) \tag{23}$$

im Raum $l_+^2 = \operatorname{im} P$ lassen sich die im nachstehenden Satz 2 genannten Aussagen treffen. Interessiert man sich lediglich für ein Invertierbarkeitskriterium und die Inversen-Abschätzung einer einzelnen Matrix der Gestalt (1), so kann man unter allen, die Bedingungen (6) und (18) erfüllenden Fortsetzungen der Reihe $\sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$ eine solche auswählen, mit der man möglichst günstige Aussagen erhält.

Satz 2: *Aus*

$$\vartheta_n := \frac{\mu(A)}{\sqrt{n + 3/2}} < 1$$

folgt die Existenz der Inversen A_n^{-1} *sowie die Abschätzung*

$$\|A_n^{-1}\| \leqq \frac{2h(A)}{(1 - \vartheta_n) \min |A(z)|}.$$

Die Näherungsgleichung $PP_nAPP_n = P_ny$ *besitzt also in diesem Fall eine eindeutig bestimmte Lösung* $x^{(n)} \in \operatorname{im} PP_n$ *und für den Abstand zur exakten Lösung der Gleichung* (23) *gilt*:

$$\|x - x^{(n)}\| \leqq \sqrt{\frac{\max |A(z)|}{\min |(Az)|}} \frac{h(A)}{1 - \vartheta_n} \|Q_n x\|.$$

Beweis: Wir werden den Satz 1 anwenden. Zu diesem Zweck setzen wir $\mathfrak{B} = l_+^2$, $\mathfrak{B}_1 = l^2$, $W = PAP$, $E = PA_+P$, $F = PA_-P$. Dann ist $X = PA_+^{-1}A_-P$,

$Y = QA_+A_-^{-1}P$, $W^{-1} = PA_+^{-1}PA_-^{-1}P$ und die Gleichungen (10) und (11) sind, wie man leicht nachprüfen kann, erfüllt.
Aus der Abschätzung

$$\|YQ_nX\| \leqq \|YQ_n\| \, \|Q_nX\| \leqq (n + 3/2)^{-1} \mu^2(A) = \vartheta_n^2 \tag{24}$$

folgt, daß für $\vartheta_n < 1$ der Operator $I - YQ_nX$ invertierbar ist, und damit ist auch der Operator PP_nAPP_n im Bildraum *im* PP_n invertierbar, d. h., es existiert A_n^{-1}.

Die Formeln (15) und (24) liefern $\|(Q_nFW^{-1}EQ_n)^{(-1)}\| \leqq (1 - \vartheta_n^2)^{-1}$. Aus (12) und den Abschätzungen

$$\begin{aligned}\|W^{-1}EQ_n\| &= \|A_+^{-1}PA_-^{-1}A_+PQ_n\| = \|A_-^{-1}PQ_n - A_+^{-1}YQ_n\| \\ &\leqq (1 + \vartheta_n)\, g(A^{-1}),\\ \|Q_nFW^{-1}\| &= \|Q_nPA_-A_+^{-1}PA_-^{-1}\| \leqq \|Q_nPA_+^{-1} - Q_nXA_-^{-1}\| \\ &\leqq (1 + \vartheta_n)\, g(A^{-1})\end{aligned}$$

folgt nun

$$\|(PP_nAPP_n)^{(-1)}\| \leqq g^2(A^{-1}) + \frac{(1 + \vartheta_n)^2\, g^2(A^{-1})}{1 - \vartheta_n^2} = \frac{2g^2(A^{-1})}{1 - \vartheta_n}.$$

Aus (13) und obigen Abschätzungen ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}\|x - x^{(n)}\| &\leqq (1 - \vartheta_n^2)^{-1} \, \|W^{-1}EQ_n\| \, \|Q_nF\| \, \|Q_nx\| \\ &\leqq \frac{g(A)\, g(A^{-1})}{1 - \vartheta_n} \|Q_nx\| \;\blacksquare\end{aligned}$$

Andere Invertierbarkeitskriterien und Abschätzungen erhält man durch eine andere Wahl der Operatoren E und F. Nehmen wir z. B. $E = PA_+^{-1}P$ und $F = PA_-^{-1}P$, so ist

$$Q_nF(PAP)^{-1}EQ_n = Q_nPA^{-2}PQ_n - Q_nPA^{-1}QA^{-1}PQ_n.$$

Dieser Operator ist invertierbar, falls

$$\|Q_nPA^{-1}QA^{-1}PQ_n\| \, \|(PA^{-2}P)^{-1}\| < 1.$$

Bezeichnet $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha_k z^k$ die Fourierentwicklung der Funktion $A^{-1}(z)$, so ist die Bedingung

$$\left|\sum_{k=n+2}^{\infty} \alpha_{-k} z^{-k}\right| \left|\sum_{k=n+2}^{\infty} \alpha_k z^k\right| \|A_+^2PA_-^2\| < 1$$

hinreichend für die Existenz von A_n^{-1}. Daraus ergibtsich unmittelbar die Aussage **a** aus Abschnitt 2.

Bemerkung: Durch Abschätzung der Normen von $A_\pm^{-1}(z)$ in $\mathfrak{W}$ mittels der Hölderschen Ungleichung lassen sich auch die l^p-Normen $(1 \leqq p \leqq \infty)$ der Matrizen A_n^{-1} nach oben abschätzen.

8. Aussagen für paarige Toeplitz-Matrizen und paarige diskrete Wiener-Hopf-Gleichungen

Es seien $A(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k z^k$, $B(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k z^k$ zwei Funktionen, die den Bedingungen (6) und (18) genügen, A und B die zugeordneten Laurent-Operatoren und $A = A_- A_+$, $B = B_- B_+$ ihre Faktorisierungen. Die dem Satz 2 vorangestellte Bemerkung ist sinngemäß auch hier anzuwenden, wenn man sich nur für eine spezielle Matrix der Gestalt (2) interessiert.

Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein:

$$h(AB^{-1}) := \exp \{\max |H[\arg A(z) - \arg B(z)]|\},$$

$$\bar{g} := h(AB^{-1}) \max [g(A^{-1})\, g(B),\, g(A)\, g(B^{-1})],$$

$$\delta_n := \bar{g}(AB^{-1}) \max \left[\frac{g(A)\, g(A^{-1})\, \mu(B)}{\sqrt{n + 1/2}}, \frac{g(B)\, g(B^{-1})\, \mu(A)}{\sqrt{n + 3/2}}\right].$$

Satz 3: *Für $\delta_n < 1$ existiert B_n^{-1} und es gilt die Abschätzung*

$$\|B_n^{-1}\| \leqq \sqrt{\frac{h(AB^{-1})}{\min |A(z)\, B(z)|}} \left\{\max [g(A)\, g(B^{-1})\, h(B),\, g(A^{-1})\, g(B)\, h(A)] + \frac{\bar{g}\delta_n}{1 - \delta_n}\right\}$$
$$+ \frac{\bar{g} g(A^{-1})\, g(B^{-1})}{1 - \delta_n} \max \left[\frac{\mu(A)}{\sqrt{n + 3/2}}, \frac{\mu(B)}{\sqrt{n + 1/2}}\right]. \tag{25}$$

Die somit eindeutig bestimmte Lösung $x^{(n)} \in$ im P_n der Näherungsgleichung $P_n(AP + BQ)\, P_n x = P_n y$ konvergiert für alle $y \in l^2$ gegen die Lösung x der Gleichung $(AP + BQ)\, x = y$:

$$\|x - x^{(n)}\| \leqq \Bigg\{\max g[(A)\, g(A^{-1}),\, g(B)\, g(B^{-1})]$$
$$+ \frac{\bar{g}}{1 - \delta_n} \max \left[\frac{g(A)\, g(B^{-1})\, \mu(A)}{\sqrt{n + 3/2}}, \frac{g(A^{-1})\, g(B)\, \mu(B)}{\sqrt{n + 1/2}}\right]\Bigg\} \|Q_n x\|. \tag{26}$$

Beweis: Wir setzen $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 = l^2$, $W = AP + BQ$, $E = A_+ P - B_- Q$, $F = PA_- - QB_+$. Dann gilt, wie man leicht nachprüfen kann:

$$W^{-1} = (A_+^{-1} B_+ P + A_- B_-^{-1} Q)\, A_-^{-1} B_+^{-1},$$

$$FW^{-1}E = I - (PA_+^{-1} A_- B_+ + QA_- B_+ B_-^{-1})\, (QA_+ A_-^{-1} B_+^{-1} P + PA_-^{-1} B_+^{-1} B_- Q),$$

$$X = (PB_- + QA_+)\, A_+^{-1} A_- B_+ B_-^{-1}; \qquad Y = PA_-^{-1} PB_+^{-1} B_- Q + QB_+^{-1} QA_+ A_-^{-1} P.$$

Aus (16) folgt:

$$\|A_+^{-1} A_- B_+ B_-^{-1}\| = \exp \left\{\max_{z \in \Gamma} [H \arg B(z) - H \arg A(z)]\right\} \leqq h(AB^{-1}).$$

Benutzen wir die Ungleichungen (20), (21) und die Tatsache, daß für zwei beliebige lineare, stetige Operatoren $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ im Hilbertraum l^2

$$\|P\mathcal{A}P + Q\mathcal{B}Q\| = \max (\|P\mathcal{A}P\|, \|Q\mathcal{B}Q\|),$$

$$\|P\mathcal{A}Q + Q\mathcal{B}P\| = \max (\|P\mathcal{A}Q\|, \|Q\mathcal{B}P\|)$$

gilt, so gelangen wir zu der Abschätzung $\|YQ_nX\| \leqq \delta_n$. Mittels Satz 1 folgt daraus die Hinlänglichkeit der Bedingung $\delta_n < 1$ für die Existenz von B_n^{-1}. Die Fehlerabschätzung (26) erhält man mit Hilfe der aus (13) abgeleiteten Formel

$$x - x^{(n)} = [F^{-1}Q_nF - F^{-1}P_nX(I - YQ_nX)^{-1}\, YQ_nF]\, Q_nx,$$

aus $\|F^{-1}P_nX\| \leqq \tilde{g}$ und entsprechenden Abschätzungen für $\|F^{-1}Q_nF\|$ und $\|YQ_nF\|$.
Analog ergibt sich mit Hilfe der aus (12) abgeleiteten Formel

$$(P_nWP_n)^{(-1)} = F^{-1}P_nFW^{-1} + F^{-1}P_nX\{[I - (I - YQ_nX)^{-1}]\, YE^{-1} + (I - YQ_nX)^{-1}\, YQ_nE^{-1}\}$$

und entsprechenden Abschätzungen für $\|F^{-1}P_nFW^{-1}\|$, $\|YE^{-1}\|$ und $\|YQ_nE^{-1}\|$ die Ungleichung (25). Da YQ_n und mithin auch der ganze zweite Summand in der Operatornorm gegen Null konvergiert, ergeben sich auf diese Weise für große Zahlen n bessere Abschätzungen, als durch direktes Abschätzen der in Formel (12) auftretenden Terme. Satz 3 ist damit bewiesen ∎

Durch Umstellungen der verwendeten Formeln ergeben sich andere Möglichkeiten der Abschätzung. Wir haben uns hier um eine Variante bemüht, in der nur solche Größen auftreten, die durch als bekannt anzusehende Zahlen abgeschätzt werden können, und bei der die angegebenen Schranken für großes n möglichst klein werden. Die Einführung der Operatoren X und Y diente dem Zweck, in dem Ausdruck YQ_nX die Norm der Summe zweier Operatoren durch das Maximum der Normen abschätzen zu können.

Weitere Möglichkeiten erhält man durch eine andere Wahl der Operatoren E und F. Setzt man z. B. $F = PA_-^{-1}B_- + QA_+B_+^{-1}$ und $E = A_+^{-1}B_+P + A_-B_-^{-1}Q$, so gilt für $W = AP + BQ$:

$$Q_nFW^{-1}EQ_n = Q_n(PA^{-2}BP + QAB^{-2}Q)\, Q_n + Q_n(PA^{-1}B - QAB^{-1})\,(PB^{-1}Q - QA^{-1}P)\, Q_n. \tag{27}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite ist ein invertierbarer Operator in $im\, Q_n$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ und die Operatoren $PB^{-1}QQ_n$, $QA^{-1}PQ_n$ konvergieren in der Operatornorm gegen Null. Aus (27) ergibt sich auch unmittelbar die Aussage **b** aus Abschnitt 2.

Der Fall $W = PA + QB$ läßt sich in analoger Weise behandeln. Wählt man auch hier $E = A_+P + B_-Q$, $F = PA_- + QB_+$, so erhält man für X und Y die Ausdrücke

$$X = PA_+^{-1}A_-QB_-^{-1}Q + QB_+B_-^{-1}PA_+^{-1}P,$$

$$Y = A_+A_-^{-1}B_+^{-1}B_-(B_+P + A_-Q).$$

$\|YQ_nX\|$ läßt sich ebenfalls durch δ_n abschätzen, so daß die Bedingung $\delta_n < 1$ auch hinreichend für die Existenz von C_n^{-1} ist. Abschätzungen für C_n^{-1} und des beim Reduktionsverfahren auftretenden Fehlers kann man in ähnlicher Weise erhalten wie oben.

9. Weitere Anwendungen

Das Reduktionsverfahren zur näherungsweisen Lösung der singulären Integralgleichung

$$\tilde{A}(z)\,x(z) + \frac{\tilde{B}(z)}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{x(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = y(z) \qquad (z \in \Gamma) \tag{28}$$

besteht bekanntlich darin, daß man zu Näherungsgleichungen

$$B_n x^{(n)} = \{y_{-n}, \ldots, y_0, \ldots, y_n\}^\tau \tag{29}$$

übergeht. Dabei ist $\{y_{-n}, \ldots, y_n\}^\tau$ ein Spaltenvektor mit den Fourierkoeffizienten von $y(z)$ und B_n eine Matrix der Gestalt (2), wobei a_k und b_k entsprechend die Fourierkoeffizienten der Funktionen $A(z) = \tilde{A}(z) + \tilde{B}(z)$ und $B(z) = \tilde{A}(z) - \tilde{B}(z)$ sind [(2, 5]). Erfüllen $A(z)$ und $B(z)$ die Bedingungen (6) und (18), so läßt sich der Satz 3 anwenden. Für $\delta_n < 1$ besitzt die Gleichung (29) eine eindeutig bestimmte Lösung $x^{(n)} = \{x_{-n}^{(n)}, \ldots; x_n^{(n)}\}^\tau$ und die daraus gebildete Funktionenfolge $x^{(n)}(z) = \sum_{k=-n}^{n} x_k^{(n)} z^k$ konvergiert für alle $y(z) \in L^2(\Gamma)$ in der Norm von $L^2(\Gamma)$ gegen die (eindeutig bestimmte) Lösung $x(z)$ der Gleichung (28). Der Fehler $\|x(z) - x^{(n)}(z)\|$ läßt sich unter Ausnutzung der Parsevalschen Gleichung mittels (26) abschätzen.

Für singuläre Integralgleichungen, bei denen die Funktion $\tilde{B}(z)$ mit unter dem Integral steht, gelten, bis auf eine andere Fehlerabschätzung, die gleichen Aussagen, wenn man in der Näherungsgleichung (29) B_n durch C_n ersetzt.

Eine Möglichkeit zur näherungsweisen Läsung der Wiener-Hopfschen Integralgleichung

$$(Ax)\,(t) := x(t) - \int_0^\infty k(t-s)\,x(s)\,ds = y(t) \qquad (0 < t < \infty) \tag{30}$$

stellt das Galerkinsche Verfahren nach dem in $L^2(0, \infty)$ orthonormierten System $\{\psi_j(t)\}_{j=0}^\infty$ der Laguerreschen Funktionen dar [2]. Die Näherungsgleichung hat hier die Gestalt

$$\sum_{k=0}^{n} \xi_k \langle A\psi_k, \psi_j\rangle = \langle y, \psi_j\rangle \qquad (j = 0, 1, \ldots, n), \tag{31}$$

wobei $\langle \cdot, \cdot\rangle$ das Skalarprodukt in $L^2(0, \infty)$ ist. Die Koeffizientenmatrix der Gleichung (31) ist eine Toeplitz-Matrix mit der erzeugenden Funktion [2]

$$A(z) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} k(t) \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\,t\right) dt \qquad (z \in \Gamma).$$

Genügt $A(z)$ den Bedingungen (6) und (18), so ist der Satz 2 anwendbar. Für $\vartheta_n < 1$ besitzt (31) eine eindeutig bestimmte Lösung $\xi^{(n)} = \{\xi_0^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}\}$ und die Funktionen $x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k^{(n)} \psi_k(t)$ konvergieren für alle $y \in L^2(0, \infty)$ in der Norm von $L^2(0, \infty)$ gegen die (eindeutig bestimmte) Lösung $x(t)$ der Gleichung (30). Unter Ausnutzung der Parsevalschen Gleichung läßt sich der Fehler $\|x(t) - x^{(n)}(t)\|_{L^2(0,\infty)}$ wie im Satz 2 abschätzen.

LITERATUR

[1] Brown, A., and P. R. Halmos: Algebraic Properties of Toeplitz Operators. Journ. f. reine u. angew. Math. **213** (1964), 89–102.
[2] Gochberg, I. A., and I. A. Feldmann: Faltungsgleichungen und Projektionsverfahren zu ihrer Lösung. Berlin 1974.
[3] Grenander, U., and G. Szegö: Toeplitz Forms and Their Applications. Berkeley and Los Angeles 1958.
[4] Pomp, A.: Zur Konvergenz des Reduktionsverfahrens für Wiener-Hopfsche Gleichungen. Akad. der Wiss. der DDR, Inst. für Math.: Preprint P-Math-03/81 (Teil 1) und Preprint P-Math-05/81 (Teil 2).
[5] Prössdorf, S.: Einige Klassen Singulärer Gleichungen. Berlin 1974.
[6] Верьицкий, И. Э., и Н. Я. Крупник: О применимости проекционного метода к дискретным уравнениям Винера-Хопфа с кусочно-непрерывным символом. Матем. Исслед. **45** (1977), 17–28.
[7] Levin, S.: On invertibility of finite sections of Toeplitz matrices. Applicable Analysis (im Druck).

Manuskripteingang: 17. 02. 1982

VERFASSER:

Dr. Andreas Pomp
Institut für Mathematik
der Akademie der Wissenschaften der DDR
DDR-1080 Berlin, Mohrenstr. 39