Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (3) 1983, S. 281–286

Разбиения вполне несвязных бикомпактов

Д. А. Владимиров и П. Зенф

In der Arbeit wird der Zusammenhang zwischen Unteralgebren einer Booleschen Algebra und Zerlegungen des entsprechenden Stoneschen Raumes (total unzusammenhängendes Kompaktum) untersucht. Für den Fall eines extremalen Kompaktums wird bewiesen, daß den regulär eingebetteten Unteralgebren genau die stetigen Zerlegungen (im Sinne von K. Kuratowski) entsprechen. Die Begriffe Gewicht einer vollständigen Booleschen Algebra und Gewicht einer Zerlegung werden untersucht.

В статье изучается связь между подалгебрами булевой алгебры и разбиениями соответствующего пространства Стоуна (вполне несвязного бикомпакта). Для случая экстремально несвязного бикомпакта доказывается, что правильным подалгебрам в точности соответствуют непрерывные (в смысле К. Куратовского) разбиения. Изучаются понятия веса полной булевой алгебры и веса разбиения.

In the paper is studied the connection between subalgebras of a Boolean algebra and partitions of the corresponding Stone space (totally disconnected compact space). In case of extremally disconnected space it is proved that regularly embedded subalgebras correspond exactly to continuous partitions (in the sense of K. Kuratowski). The concepts of a weight of a Boolean algebra and of a weight of a partition are studied.

Хорошо известна теорема М. Стоуна о том, что всякая булева алгебра изоморфна алгебре всех открыто-замкнутых подмножеств некоторого вполне несвязного бикомпакта. В данной работе мы исучаем такие разбиения вполне несвязных бикомпактов, которые порождаются подалгебрами алгебр открыто-замкнутых подмножеств. Для случая экстремально несвязного бикомпакта доказывается, что правильные подалгебры и только они порождают непрерывные (в смысле К. Куратовского) разбиения.

§ 1. Подалгебры и разбиения

Пусть Q — произвольный вполне несвязный бикомпакт и пусть ξ — какое-нибудь разбиение бикомпакта Q на замкнутые множества. В таком случае можно рассматривать фактор-пространство Q/ξ. Элементами этого пространства служат элементы разбиения ξ; оно наделено фактор-топологией, т.е. сульнейшей топологией в Q/ξ, при которой проектор

$$P : Q \to Q/\xi$$

является непрерывным отображением.

Если упомянутый проектор P — замкнутое отображение, то разбиение ξ называется *полунепрерывным сверху*, если P — открытое отображение, то разбиение ξ называется *полунепрерывным снизу*. В случае одновременного выполенния обоих условий разбиение ξ называется *непрерывным* (см. [1: стр. 194]).

Мы рассмотрим сейчас специальный класс разбиений бикомпакта Q, связанный с булевой алгеброй X всех открыто-замкнутых подмножеств пространства Q.

Разбиение ξ назовём *допустимым*, если в X существует подалгебра X_ξ, порождающая разбиение ξ в следующем смысле: элементы разбиения ξ суть всевозможные пересечения вида

$$\bigcap_{x \in X_\xi} \tilde{x},$$

где $\tilde{x}$ равен либо x, либо Cx.

Тривиальной подалгебре $\{\Lambda, Q\}$ соответствует разбиение Q, состоящее из одного множества Q, всей алгебре X соответствует разбиение Q на точки. Вообще, более широкой подалгебре соответствует более мелкое разбиение и наоборот.

Лемма 1: *Пусть даны разбиение ξ и подалгебра $X_0 \subset X$. Для того чтобы X_0 порождала разбиение ξ, необходимо и достаточно, чтобы элементы разбиения ξ разделялись множествами из X_0 и всякое $x \in X_0$ было ξ-множеством. (Множество называем ξ-множеством, если оно является объединением каких-то элементов разбиения ξ.)*

Доказательство: Если X_0 порождает разбиение ξ, что ясно, что она разделяет элементы разбиения. Возьмём произвольный $x_0 \in X_0$, $x_0 \neq \Lambda$ и покажем, что x_0 есть ξ-множество. Для этого достаточно проверить, что $x_0 = \bigcup_{z \in \xi, z \leq x_0} z$. Включение $x_0 \supset \bigcup_{z \in \xi, z \leq x_0} z$ ясно. Пусть $q \in x_0$, тогда $P(q) = z_q \in \xi$, следовательно, z_q имеет вид $z_q = \bigcap_{x \in X_0} \tilde{x}$. Если $\tilde{x}_0 = Cx_0$, то $z_q \subset Cx_0$ и, следовательно, $z_q \cap x_0 = \Lambda$; значит $\tilde{x}_0 = x_0$, а тогда $z_q \subset x_0$. Таким образом, $q \in \bigcup_{z \in \xi, z \leq x_0} z$.

Возьмём произвольный $z \in \xi$ и проверим сначала, что

$$z = \bigcap_{x \in X_0, x \supset z} x. \tag{*}$$

Левая часть этого равенства, очевидно, содержится в правой части. Если q — любой элемент из $\bigcap \ldots x$, то допущение $q \,\bar{\in}\, z$ проводит к противоречию. Действительно, существует такой $x \in X_0$, что $x \supset z$ и $Cx \supset P(q)$ (т. к. $z \cap P(q) = \Lambda$), значит $q \,\bar{\in} \bigcap \ldots x$. Тем самым (*) установлено.

Поскольку всякое $x \in X_0$ есть ξ-множество, то оно либо содержит z, либо оно дизъюнктно к нему. Следовательно, в правой части равенства (*) стоит пересечение вида $\bigcap_{x \in X_0} \tilde{x}$, т. е. X_0 порождает ξ ∎

Теорема 1: *Каждое измеримое разбиение полунепрерывно сверху.*

Доказательство: Из леммы 1 вытекает, что если разбиение ξ допустимо, то фактор-пространство Q/ξ хаусдорфово. Но непрерывное отображение $P: Q \to Q/\xi$ бикомпактного пространства в хаусдорфово пространство всегда замкнуто ∎

Теорема 2: *Разбиение допустимо в том и только в том случае, когда соответствующее ему фактор-пространство вполне несвязно; причём это фактор-пространство представляет собой реализующий (стоуновский) бикомпакт для подалгебры, порождающей разбиение.*

Доказательство: Если разбиение ξ допустимо, то существует подалгебра $X_\xi \subset X$, порождающая это разбиение. Множества из X_ξ разделяют элементы разбиения, они открыто-замкнуты в Q и представляют собой ξ-множества. Поэтому канонические образы этих множеств открыто-замкнуты в Q/ξ. Значит, Q/ξ вполне несвязно. С другой стороны, если фактор-пространство Q/ξ вполне несвязно, то открыто-замкнутые подмножества этого пространства разделяют точки Q/ξ, т. е. элементы разбиения ξ. Прообразы при каноническом отображении P образуют искомую подалгебру

$$X_\xi \subset X.$$

Второе утверждение теоремы ясно, ибо, очевидно, канонические образы элементов подалгебры X_ξ исчерпывают все открыто-замкнутые подмножества фактор-пространства ∎

Из наших предыдущих рассмотрений следует возможность классификации допустимых разбиений по различным свойствам порождающей его подалгебры всех открыто-замкнутых подмножеств бикомпакта. Каким свойством должна обладать подалгебра, чтобы порождённое ею разбиение бикомпакта было непрерывным? Ответ на этот вопрос в случае экстремальности бикомпакта даётся следующей теоремой.

Теорема 3: *Пусть Q — произвольный экстремально несвязный бикомпакт и пусть X — алгебра всех открыто-замкнутых подмножеств Q. Для того чтобы допустимое разбиение ξ бикомпакта Q было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы порождающая подалгебра $X_\xi \subset X$ была правильной. (Подалгебра X_0 полной булевой алгебры называется правильной, если для любого непустого подмножества $E \subset X_0$ имеет место* $\sup E \in X_0$, $\inf E \in X_0$; см. [2]).

Доказательство: *Достаточность.* Предположим, что X_ξ — правильная подалгебра. Покажем, что тогда разбиение ξ непрерывно. В силу теоремы 1 достаточно проверить, что проектор P — открытое отображение. Поскольку все открыто-замкнутые подмножества в Q образуют базис, для проверки последнего достаточно убедиться в том, что для всякого открыто-замкнутого $x \subset Q$ $P(x)$ открыто в Q/ξ.

Возьмём произвольное открыто-замкнутое множество $x \in X$ и обозначим $\bar{x} = \inf x'$, где infimum берётся по всем $x' \in X_\xi$, $x' \geqq x$. Так как X_ξ — правильная подалгебра, то $\bar{x} \in X_\xi$. Следовательно, наше утверждение будет доказано, если мы проверим, что $\bar{x} = P(x)$. Ясно, что $\bar{x} \geqq P(x)$. Допустим, что $\bar{x} > P(x)$, тогда существует такой элемент разбиения $z \in \xi$, что $z \in \bar{x}$, $z \cap P(x) = \Lambda$. Мы уже знаем, что P — замкнутое отображение, следовательно, фактор-пространство отделимо и бикомпактно. Тогда замкнутое множество $P(x)$ можно отделить от z открыто-замкнутым ξ-множество. Действительно, в силу леммы для каждого $z' \in P(x)$ существует открыто-замкнутое ξ-множество $x' \in X_\xi$, содержащее z' и дизъюнктное к z. Если z' пробегает все $P(x)$, то все такие x' образуют открытое покрытие бикомпактного множества $P(x)$. Из этого покрытия можно извлечь конечное покрытие $x_1' \cup u_2' \cup \cdots \cup x_n' = \tilde{x} \in X_\xi$. Это $\tilde{x}$ — искомое открыто-замкнутое ξ-множество (точнее, образ $\tilde{x}$ при P). Для так выбранного $\tilde{x}$ мы имеем

$$\bar{x} > \bar{x} \wedge \tilde{x} \geqq x \quad \text{и} \quad \bar{x} \wedge \tilde{x} \in X_\xi,$$

что несовместимо с определением элемента $\bar{x}$. Полученное противоречие показывает, что $\bar{x} = P(x)$.

Необходимость. Пусть ξ — непрерывное разбиение; покажем, что X_ξ-правильная подалгебра алгебры X. Возьмём произвольное семейство $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ элементов из X_ξ и положим $G = \bigcup_\alpha x_\alpha$. Множество G открыто и является ξ-множеством. В силу экстремальности бикомпакта Q замыкание множества G в Q, $F = \overline{G}$, открыто-замкнуто. Значит, $F = \sup x_\alpha$ в X, остаётся показать, что F является ξ-множеством.

Лемма 2: *Если ξ—непрерывное разбиение, то замыкание в Q произвольного ξ-множества есть снова ξ-множество.*

Доказательство: Пусть E—произвольное ξ-множество и $\overline{E}$ — его замыкание. Взяв произвольный элемент z разбиения ξ, мы покажем, что если $\overline{E} \cap z \neq \Lambda$, то z целиком содержиться в $\overline{E}$. Это и будет означать, что $\overline{E}$ ξ-множество. Пусть $q_0 \in \overline{E} \cap z$, рассмотрим любую точку $q \in z$. Если $U(q)$ — какая-нибудь окрестность точки q, то $P(U(q))$ есть окрестность множества z, значит и точки q_0. Это следует из того, что P — открытое отображение. Далее, поскольку $q_0 \in \overline{E}$, пересечение $E \cap P(U(q))$ представляет собой непустое ξ-множество. Следовательно, существует элемент z_0 разбиения, который содержится в пересечении $E \cap P(U(q))$. Для этого z_0 имеем $z_0 \subset P(U(q))$ и $z_0 \cap U(q) \neq \Lambda$, а тем более $E \cap U(q) \neq \Lambda$. Мы показали, что $q \in \overline{E}$. Лемма доказана и вместе с ней и теорема ∎

Предложение: *Всякое непрерывное разбиение произвольного вполне несвязного бикомпакта допустимо.*

Доказательство: Пусть ξ—непрерывное разбиение бикомпакта Q, тогда проектор $P: Q \to Q/\xi$ — открытое и замкнутое отображение. Отсюда следует, что образ $P(x)$ любого открыто-замкнутого множества x также открыто-замкнут. Всевозможные открыто-замкнутые множества вида $P(x)$, $x \in X$, очевидно, образуют подалгебру; обозначим её через X_ξ и проверим, что она обладает всеми свойствами из леммы 1. В силу замкнутости отображения P для любых $z_1, z_2 \in \xi$ $(z_1 \neq z_2)$ найдётся открытое ξ-множество G, отделяющее z_1 от z_2 (см. [1: стр. 194—195]). Открытое множество G имеет вид $G = \bigcup\limits_\alpha x_\alpha$, где x_α — открыто-замкнутое множество при любом α. Пусть q — какая-нибудь точка из z_1, $q \in z_1 \subset G$; существует такое α_0, что $q \in x_{\alpha_0}$. Для этого открыто-замкнутого множества $x = x_\alpha$ имеем

$$G \supset P(x) \supset z_1.$$

Таким образом, элементы из X_ξ являются ξ-множествами, они разделяют точки разбиения ξ. Значит, подалгебра X_ξ порождает разбиение ξ ∎

Замечание: В доказательстве необходимости теоремы 3 мы видели, что если на экстермально несвязном бикомпакте дано непрерывное разбиение ξ, то порождающая подалгебра, существование которой следует из только что доказанного предложения, будет правильной в X. Таким образом, мы имеем следующее.

Следствие: *Пусть Q-экстремально несвязный бикомпакт и ξ — его разбиение на замкнутые множества; через X, попрежнему, обозначим алгебру всех открыто-замкнутых подмножеств Q. Для того чтобы существовала правильная подалгебра алгебры X, порождающая разбиение ξ, необходимо и достаточно, чтобы разбиение ξ было непрерывным.*

§ 2. Вес полной булевой алгебры

В этом параграфе мы рассматриваем только полные булевы алгебры. Для таких алгебр имеет смысл понятие веса [2: стр. 262; oder dt. Übers. S. 197].

Определение: Пусть X — полная булева алгебра; подмножество $E \subset X$ называется *плотным* в X, если наименьшая правильная подалгебра, содержащая множество E, совпадает с X. Такая правильная подалгебра всегда существует в силу того, что пересечение любого семейства правильных подалгебр — снова правильная подалгебра [2: стр. 108; oder dt. Übers. S. 79]. Минимальная из мощностей подмножеств, плотных в X, называется *весом* булевой алгебры X. Мы даём здесь на языке разбиений топологическое описание веса алгебры X.

Лемма 3: *Пусть ξ — произвольное разбиение экстремально несвязного бикомпакта Q на замкнутые множества. Всегда существует непрерывное измельчение разбиения ξ, и среди этих измельчений есть самое крупное.*

Доказательство: Если разбиение ξ' мельче, чем разбиение ξ, то мы коротко будем писать $\xi' \succ \xi$. Кроме того, разбиение бикомпакта Q на отдельные точки мы обозначим символом ν. Разбиение ν, очевидно, непрерывно, и для любого другого разбиения ξ имеет место

$$\nu \succ \xi.$$

Для всякого разбиения ξ на замкнутые множества можно найти систему открыто-замкнутых подмножеств, разделяющую точки фактор-пространства Q/ξ (т. е. разделяющую элементы разбиения ξ). Пересечение всевозможных таких „разделяющих" систем есть наименьшая система с таким свойством. Обозначим её через U; она порождает в X правильную подалгебру, которую обозначим X_ξ. Подалгебра определяет вполне определённое разбиение $\bar{\xi}$ бикомпакта Q. Это разбиение допустимо, и по доказанному в предыдущем параграфе $\bar{\xi}$ — непрерывное разбиение. Покажем, что $\bar{\xi} \succ \xi$. Для этого возьмём произвольный $\bar{z} \in \bar{\xi}$ и покажем, что существует $z \in \xi$, такой что $\bar{z} \subset z$. По крайней мере, существует $z \in \xi$, такой что $\bar{z} \cap z \neq \Lambda$. Допустим, что найдется еще другой элемент $z_1 \in \xi$ $(z_1 \neq z)$, пересекающийся с $\bar{z} : \bar{z} \cap z_1 \neq \Lambda$. Для двух различных $z_1 \neq z$ мы можем указать открыто-замкнутое ξ-множество V, такое что $V \supset z$, $z_1 \cap V = \Lambda$. Так как V $\bar{\xi}$-множество, то $V \supset \bar{z}$, следовательно, $\bar{z} \cap z_1 = \Lambda$, что неверно. Таким образом, мы видим, что $\bar{z} \subset z$ и, значит, $\bar{\xi}$ есть подразбиение ξ. Ясно, что $\bar{\xi}$ есть наибольшее среди всех непрерывных подразбиений ∎

Весом разбиения ξ называем мощность системы U открыто-замкнутых множеств, построенной в доказательстве предыдущей леммы. Если разбиение ξ такое, что $\bar{\xi} = \nu$, то U плотно В X. Обратно, если U — произвольное подмножество в X, плотное там, то всегда указать можно разбиение ξ такое, что U для него — отделяющая система. Итак, доказано следующее равенство:

$$\tau(X) = \inf \{\tau(\xi) : \bar{\xi} = \nu\},$$

где $\tau(\xi)$ — вес разбиения ξ, $\tau(X)$ — вес алгебры X.

Заметим, что кардинальное число, определяемое правой частью последнего равенства, есть топологический инвариант, полезный не только для экстремальных компактов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Куратовский, К.: Топология I. Изд-во Мир: Москва 1966.
[2] Владимиров, Д. А.: Булевы алгебры. Изд-во Наука: Москва 1969.
Dt. Übers.: Vladimirov, D. A.: Boolesche Algebren. Akademie-Verlag: Berlin 1972.

Manuskripteingang: 05. 02. 1982

VERFASSER:

Д-р Денис Артемьевич Владимиров
Математико-механический факультет
Ленинградского Государственного Университета им. А. А. Жданова
СССР-Ленинград, Университетская наб. 7/9

Dr. Peter Senf
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz 10/11