Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (3) 1983, S. 243–264

Axiomatische Bifurkationstheorie

S. Ackermann

Es wird ein Axiomensystem für eine Klasse stetiger Abbildungen in Banach-Räumen und einen dazugehörigen Abbildungsgrad angegeben. Die Axiome sind leicht nachprüfbar. Bei ihrer Gültigkeit können lokale und globale Bifurkationsresultate vom Krasnoselski-Rabinowitz-Typ mit einfachen Mitteln gewonnen werden.

В работе предлагается система аксиом для класса непрерывных отображений в банаховом пространстве и для степени отображения. Аксиомы легко проверяются. В случае их выполнения простыми средствами получены локальные и глобальные результаты теории разветвления (бифуркации) типа Красносельского-Рабиновитца.

A system of axioms for a class of continuous mappings in Banach spaces and their attached degree is given. The axioms are easy to check. If they are valid, local and global bifurcation results of Krasnoselski-Rabinowitz-type can be obtained by simple means.

Eine Reihe physikalischer Probleme führt bei geeigneter Wahl des mathematischen Modells auf nichtlinear gestörte, parameterabhängige Operatorgleichungen der Form

$$T(\lambda, x) := x - \lambda Lx - N(\lambda, x) = 0, \qquad T: K \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}, \tag{1}$$

wobei $\mathfrak{B}$ ein Banachraum, K der Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen, L ein linear beschränkter Operator und N eine in einem gewissen Sinne kleine nichtlineare Störung sind. Physikalisch bedeutungsvoll sind in vielen Fällen nichttriviale Lösungen von (1), Existenzaussagen über solche Lösungen — wenigstens für gewisse Parameter λ — sowie eine qualitative und quantitative Beschreibung der Lösungsmenge.

Da man das Lösungsverhalten der linearisierten Aufgabe $x - \lambda Lx = 0$ meistens genauer kennt, liegt es nahe, (1) in der Nähe der Eigenwerte bzw. charakteristischen Zahlen von L auf nichttriviale Lösungen zu untersuchen. Dies ist eine Hauptaufgabe der Bifurkationstheorie, zu deren Lösung in den letzten Jahren in verstärktem Maße auch topologische Methoden eingesetzt wurden.

1956 bzw. 1971 konnten Krasnoselski [8] bzw. Rabinowitz [15] das Problem (1) für vollstetige Operatoren L und N mit Hilfe des Leray-Schauder-Abbildungsgrades lösen und die Verzweigung lokal bzw. global beschreiben. Mit der Konstruktion von immer neuen Abbildungsgraden auch für nichtkompakte Operatoren [3, 6, 9, 10, 11, 12, 18, 20] wurden dann diese Ergebnisse unter Benutzung der konkreten Eigenschaften der Operatoren und des zugehörigen Abbildungsgrades verallgemeinert.

Nachdem Amann/Weiss [2] und Zeidler [27] 1974 einen axiomatischen Zugang zur Theorie des Abbildungsgrades in Banachräumen gegeben und damit die Fülle der zu diesem Thema erschienenen Arbeiten in einen einheitlichen Rahmen eingeordnet hatten, soll in dieser Arbeit ein axiomatischer Zugang zur Bifurkationstheorie vorgestellt werden. Unser Ziel ist es, allgemeine Bifurkationsaussagen zu formulieren, die für möglichst viele Abbildungsgrade und damit für eine große Klasse von Operatoren gelten. Die hier angegebenen Resultate gestatten es, für eine vorgegebene Operatorenklasse Bifurkationsaussagen zu erhalten, wobei man lediglich gewisse Axiome für den zugehörigen Abbildungsgrad nachzuprüfen hat. Diese Axiome und weitere sechs Eigenschaften, denen die zu betrachtenden Operatorenklassen genügen müssen, werden nach einem einführenden Abschnitt im zweiten Teil dieser Arbeit angegeben. Im dritten Abschnitt wird das zu untersuchende Bifurkationsproblem noch einmal genau vorgestellt. Der vierte Teil enthält die Bifurkationsaussagen in reellen Banachräumen. In einer Erläuterung werden einige Anwendungen und die dabei zu beachtenden Besonderheiten betrachtet. Die Bifurkationsaussage für analytische Fredholmoperatoren in komplexen Banachräumen steht im Mittelpunkt des fünften Abschnittes. Durch Hinzunahme der Voraussetzung, daß alle Operatoren analytisch sein sollen, konnte unter Benutzung eines von Nussbaum [12] definierten Abbildungsgrades der von Ize [7] stammende, mit Cohomologietheorie arbeitende, schwierige Beweis durch einen wesentlich einfacheren ersetzt werden. Der sechste Abschnitt enthält schließlich die Beweise der Resultate des vierten und fünften Abschnittes.

Die vorliegende Arbeit ist ein überarbeiteter Bestandteil der Dissertation A des Verfassers an der KMU Leipzig 1980.

1. Bezeichnungen und Vorbemerkungen

$\mathbf{N}$, $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$ bezeichnen die Mengen der natürlichen, reellen bzw. komplexen Zahlen. $\mathbf{K}$ steht für $\mathbf{R}$ *oder* $\mathbf{C}$. Mit $\mathbf{R}_+$ bezeichnen wir die Menge der positiven reellen Zahlen. Banachräume (B-Räume) und deren Teilmengen werden mit großen Frakturbuchstaben bezeichnet, ihre Elemente mit kleinen lateinischen Buchstaben.

Man beachte, daß für einen B-Raum $\mathfrak{B}$ mit der Norm $\|\cdot\|$ das kartesische Produkt $\mathbf{K}\times\mathfrak{B}$ mit der Norm $|||(\lambda, x)||| := (|\lambda|^2 + \|x\|^2)^{1/2}$ stets wieder ein B-Raum ist.

$A : \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ bezeichne eine Abbildung A von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{B}_2$ mit der Zusatzinformation $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{B}_1$. Die Menge aller linear beschränkten Operatoren $L : \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ wird mit $\mathfrak{L}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ bezeichnet.

Definition 1: $\mathfrak{B}$ sei ein B-Raum über $\mathbf{K}$ und $L \in \mathfrak{L}(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$. Dann nennen wir:

$\mathcal{N}(L) := \{x \in \mathfrak{B} : Lx = 0\}$ *Nullraum* von L,

$\mathcal{R}(L) := \{y \in \mathfrak{B} : y = Lx,\ x \in \mathfrak{B}\}$ *Wertebereich* von L,

$\varrho(L) := \{\lambda \in \mathbf{K} : (\lambda I - L)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})\}$ *Resolventenmenge* von L,

$\sigma(L) := \mathbf{K} \setminus \varrho(L)$ *Spektrum* von L,

$r(L) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(L)\}$ *Spektralradius* von L,

$$\sigma_e(L) := \left\{\lambda \in \sigma(L) : \lambda \text{ ist Häufungspunkt von } \sigma(L) \right.$$
$$\text{oder } \mathcal{R}(\lambda I - L) \text{ ist nicht abgeschlossen}$$
$$\left. \text{oder } \dim \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}\big((\lambda I - L)^n\big) \text{ ist nicht endlich}\right\}$$

wesentliches Spektrum von L,

$r_e(L) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_e(L)\}$ *Radius des wesentlichen Spektrums*

und

$\tau(L) := \{\lambda \in \mathbf{K},\ \lambda^{-1} \in \sigma(L),\ |\lambda| < r_e(L)^{-1}\}$ *Menge der charakteristischen Zahlen* von L.

Für $\lambda \in \tau(\mathsf{L})$ ist

$$\varkappa(\lambda) := \dim \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}\big((\mathsf{I} - \lambda\mathsf{L})^n\big) \text{ die } \textit{algebraische Vielfachheit} \text{ (VFH) von } \lambda.$$

Für charakteristische Zahlen, deren reziproker Wert stets Eigenwert im üblichen Sinne ist, macht die RIESZ-SCHAUDER-Theorie folgende Aussagen.

Satz 1: *Voraussetzungen*:
1. $\mathfrak{B}$ *ist ein B-Raum mit* $\dim \mathfrak{B} = \infty$.
2. $\mathsf{L} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$.
3. $\lambda \in \tau(\mathsf{L})$, $\mathsf{T} := \mathsf{I} - \lambda\mathsf{L}$.

Behauptung:
1. $\dim \mathcal{N}(\mathsf{T}^k) < \infty$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$

2. Die Ketten

$$\mathcal{N}(\mathsf{T}) \subseteq \mathcal{N}(\mathsf{T}^2) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{N}(\mathsf{T}^k) = \mathcal{N}(\mathsf{T}^{k+1}) = \cdots \quad \textit{und}$$

$$\mathcal{R}(\mathsf{T}) \supseteq \mathcal{R}(\mathsf{T}^2) \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{R}(\mathsf{T}^k) = \mathcal{R}(\mathsf{T}^{k+1}) = \cdots$$

brechen nach k Schritten ab.
3. Es existiert ein Projektionsoperator $\mathsf{P} : \mathfrak{B} \to \mathcal{N}(\mathsf{T}^k)$ *mit den Eigenschaften* $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$, $\mathsf{PL} = \mathsf{LP}$, $\mathsf{Q} := \mathsf{I} - \mathsf{P}$ *und der Zerlegung*

$$\mathfrak{B} = \mathsf{P}\mathfrak{B} \oplus \mathsf{Q}\mathfrak{B}, \quad \mathsf{P}\mathfrak{B} = \mathcal{N}(T^k), \quad \mathsf{Q}\mathfrak{B} = \mathcal{R}(\mathsf{T}^k).$$

4. $\mathsf{P}\mathfrak{B}$ *und* $\mathsf{Q}\mathfrak{B}$ *sind invariant unter* L.
5. $\mathsf{PL} = \mathsf{LP}$ *und* PL *sowie die Einschränkung* $\mathsf{L}/\mathsf{P}\mathfrak{B}$ *von* L *auf* $\mathsf{P}\mathfrak{B}$ *besitzen* λ *als einzige charakteristische Zahl.*
6. $\mathsf{QL} = \mathsf{LQ}$, QL *und die Einschränkung* $\mathsf{L}/\mathsf{Q}\mathfrak{B}$ *besitzen* λ *nicht als charakteristische Zahl und* $(\mathsf{I} - \lambda\mathsf{QL})^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$.
7. In $\mathsf{P}\mathfrak{B}$ *gibt es eine kanonische Basis (Jordansche Normalform)*

$$\{\mathsf{x}_{ij},\ i = 1, \ldots, l; \quad j = 1, \ldots, m(i)\},$$

so daß

$$\lambda\mathsf{L}\mathsf{x}_{ij} - x_{ij} = \lambda\mathsf{x}_{i,j+1}, \qquad \mathsf{x}_{i,m(i)+1} := 0.$$

8. Es gilt

$$l = \dim \mathcal{N}(\mathsf{I} - \lambda\mathsf{L}), \qquad m(1) + \cdots + m(l) = \dim \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{N}\big((\mathsf{I} - \lambda\mathsf{L})^n\big) = \varkappa(\lambda).$$

Punkt 1 und 2 der Behauptung sind bereits in der Definition der charakteristischen Zahlen enthalten. Der Beweis verläuft dann völlig analog zu dem für die RIESZ-SCHAUDER-Theorie für vollstetige Operatoren bekannten Beweis (vgl. auch [17] und [28: Bsp. 14.3].

Definition 2: Für Mengen $\mathfrak{A} \subseteq \mathbf{K} \times \mathfrak{B}$ setzen wir

$$\mathfrak{A}_\lambda = \{\mathsf{x} \in \mathfrak{B}, (\lambda, \mathsf{x})\ \mathfrak{A}\} \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}^x = \{\lambda \in \mathbf{K}, (\lambda, \mathsf{x}) \in \mathfrak{A}\}.$$

Für $\mathsf{x} \in \mathfrak{B}$ ist

$$\mathfrak{U}_r(\mathsf{x}) := \{\mathsf{y} \in \mathfrak{B} : \|\mathsf{x} - \mathsf{y}\| < \mathsf{r}\},$$

für $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{B}$ ist

$$\mathfrak{U}_r(\mathfrak{G}) := \{\mathsf{y} \in \mathfrak{B} : \exists \mathsf{x} \in \mathfrak{G} \text{ und } \|\mathsf{x} - \mathsf{y}\| < \mathsf{r}\}.$$

2. Zulässigkeit und Abbildungsgrad

Wir betrachten die mit $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{K}_H$ bezeichneten Klassen von Abbildungen bzw. Homotopien mit den folgenden Eigenschaften.

E1. Stetigkeit und Nullstellenfreiheit auf dem Rand:

a) Die Abbildung A gehöre zu $\mathfrak{K}$, genau dann, wenn gilt:

i) $\mathsf{A} : \overline{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ ist ein Operator auf dem Abschluß des beschränkten, offenen Gebietes $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sind B-Räume.

ii) A ist stetig für alle $\mathsf{x} \in \overline{\mathfrak{G}}$.

iii) $\mathsf{A}^{-1}(0) \cap \partial\mathfrak{G} = \emptyset$.

iv) A ist analytisch, falls $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ komplexe B-Räume sind.

b) Die Homotopie H gehöre zu $\mathfrak{K}_H$ genau dann, wenn gilt:

i) $\mathsf{H} : \overline{\mathfrak{G}} \times [0, 1] \subseteq \mathfrak{B}_1 \times [0, 1] \to \mathfrak{B}_2$ ist ein Operator auf dem Gebiet $\overline{\mathfrak{G}} \times [0, 1]$. $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ sind wie in a).

ii) H ist stetig für alle $(\mathsf{x}, t) \in \overline{\mathfrak{G}} \times [0, 1]$.

iii) Für alle $\mathsf{t} \in [0, 1]$ ist $\mathsf{H}(\cdot, \mathsf{t}) \in \mathfrak{K}$.

Aus $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_H$ werden durch geeignete Vorschriften Klassen zulässiger Abbildungen $\mathfrak{Z}$ und zulässiger Homotopien $\mathfrak{Z}_H$ ausgewählt, deren Elemente gewisse zusätzliche Eigenschaften (z. B. Vollstetigkeit o. ä.) haben sollen. Diese Eigenschaften müssen so beschaffen sein, daß außer *E1* noch folgende Bedingungen erfüllt sind.

E2. Kartesisches Produkt von Abbildungen in reellen B-Räumen:

a) Sind $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ reelle B-Räume, und ist $\mathsf{f} : \overline{\mathfrak{D}} \subseteq \mathbf{R} \times \mathfrak{B}_1 \to \mathbf{R}$ ein beschränktes, stetiges Funktional auf dem Abschluß einer beschränkten, offenen Menge $\mathfrak{D} \subseteq \mathbf{R} \times \mathfrak{B}_1$, ist außerdem $\mathsf{A} : \overline{\mathfrak{D}} \to \mathfrak{B}_2$ ein stetiger Operator auf derselben Menge $\overline{\mathfrak{D}}$, so daß die Abbildungen $\mathsf{A}(\cdot, \mathsf{x}) : \mathbf{R} \to \mathfrak{B}_2$ gleichgradig stetig sind und die Abbildungen $\mathsf{A}(\mathsf{r}, \cdot) : \mathfrak{D}_\mathsf{r} \to \mathfrak{B}_2$ für alle möglichen $\mathsf{r} \in \mathbf{R}$ die oben erwähnten zusätzlichen Eigenschaften haben, dann hat auch die durch $(\mathsf{f} \times \mathsf{A})(\mathsf{r}, \mathsf{x}) := \big(\mathsf{f}(\mathsf{r}, \mathsf{x}), \mathsf{A}(\mathsf{r}, \mathsf{x})\big)$ definierte Abbildung

$$\mathsf{f} \times \mathsf{A} : \mathfrak{D} \to \mathbf{R} \times \mathfrak{B}_2$$

diese Eigenschaften.

Ist noch $(\mathsf{f} \times \mathsf{A})^{-1}(0, 0) \cap \partial\mathfrak{D} = \emptyset$, dann ist sogar $\mathsf{f} \times \mathsf{A} \in \mathfrak{Z}$.

b) Eine analoge Aussage gelte für Homotopien

$$\mathsf{h} : \overline{\mathfrak{D}} \times [0, 1] \to \mathbf{R} \quad \text{und} \quad \mathsf{H} : \mathfrak{D} \times [0, 1] \to \mathfrak{B}_2.$$

E3. Einschränkungen:

a) $\mathsf{A} : \overline{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ sei eine zulässige Abbildung und $\mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{G}$ eine offene Teilmenge von $\mathfrak{G}$ mit $\mathsf{A}^{-1}(0) \cap \partial\mathfrak{G}_1 = \emptyset$. Dann gilt $\mathsf{A}/\overline{\mathfrak{G}}_1 \in \mathfrak{Z}$.

b) Das Analogon für Homotopien gelte.

E4. Abbildungen in endlichdimensionale Teilräume:

a) Für stetige Abbildungen $\mathsf{A} : \overline{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ Teilraum von $\mathfrak{B}$ mit $\dim \mathfrak{B}_1 < \infty$ und $\mathsf{A}(\overline{\mathfrak{G}})$ beschränkt, gilt stets: Ist $\mathsf{I} - \mathsf{A} \in \mathfrak{K}$, dann ist auch $\mathsf{I} - \mathsf{A} \in \mathfrak{Z}$, d. h., Abbildungen dieser Form haben stets die zusätzlich geforderten Eigenschaften.

b) für Homotopien gelte die analoge Aussage.

E5. Verträglichkeit von $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_H$:

Für jede zulässige Homotopie $\mathsf{H} : \overline{\mathfrak{G}} \times [0, 1] \subseteq \mathfrak{B}_1 \times [0, 1] \to \mathfrak{B}_2$ ist $\mathsf{H}(\cdot, \mathsf{t}) \in \mathfrak{Z}$ für alle $\mathsf{t} \in [0, 1]$.

E6. Abbildungsgrad:

Es existiert eine Abbildung $\deg : \mathfrak{Z} \to 2^{\mathbf{Z}'}$, $\mathbf{Z}' = \{\pm\infty, 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, genannt *Abbildungsgrad*, die jedem Quadrupel $(A, \mathfrak{G}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ eine Teilmenge von $\mathbf{Z}'$ zuordnet und folgenden Axiomen genügt:

A1. Normierung und Translationsinvarianz:

a) $\deg(I, \mathfrak{U}_r(0), \mathfrak{B}, \mathfrak{B}) = \{1\}$.
b) Ist $x_0 \in \mathfrak{B}_1$ und sind $A : \overline{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ und $A(\cdot - x_0) : x_0 \oplus \overline{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ zulässig, dann gilt $\deg(A, \mathfrak{G}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) = \deg\big(A(\cdot - x_0), x_0 \oplus \mathfrak{G}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2\big)$.

A2. Existenzaxiom:

$A : \overline{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ sei zulässig. Existiert ein $g \in \deg(A, \mathfrak{G}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ mit $g \neq 0$, dann existiert ein $x \in \mathfrak{G}$ mit $Ax = 0$.

A3. Additivität:

Ist $A : \overline{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ zulässig, und gestattet $\mathfrak{G}$ eine Zerlegung der Art $\overline{\mathfrak{G}} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\mathfrak{G}}_i$ in offene, paarweise disjunkte Teilmengen $\mathfrak{G}_i \subseteq \mathfrak{G}$, so daß $A^{-1}(0) \cap \partial\overline{\mathfrak{G}}_i = \emptyset$ ist, dann sind nach *E3* auch die Einschränkungen $A/\overline{\mathfrak{G}}_i$ zulässig, und es gilt

$$\deg(A, \mathfrak{G}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) \subseteq \sum_{i=1}^{n} \deg(A/\overline{\mathfrak{G}}_i, \mathfrak{G}_i, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2), \tag{*}$$

wobei für Teilmengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von $\mathbf{Z}'$

1. $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \{a + b : a \in \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{B}\}$,
2. $\{+\infty, \ldots\} + \{-\infty, \ldots\} = \mathbf{Z}'$

vereinbart sein möge.
Ist einer der Abbildungsgrade in (*) einelementig, dann steht „=" anstelle von „$\subseteq$".

A4. Homotopieinvarianz:

Ist $H : \overline{\mathfrak{G}} \times [0, 1] \subseteq \mathfrak{B}_1 \times [0, 1] \to \mathfrak{B}_2$ eine zulässige Homotopie, dann gilt

$$\deg\big(H(\cdot, t), \mathfrak{G}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2\big) = \text{constant} \quad \text{für alle} \quad t \in [0, 1].$$

A5. Multiplikativität für reelle B-Räume:

Es sei $A : \overline{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ eine zulässige Abbildung und $f : \overline{\mathscr{I}} \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine stetige, reelle Funktion auf dem Abschluß eines offenen Intervalles $\mathscr{I}$, so daß $f^{-1}(0) \cap \partial\mathscr{I} = \emptyset$. Die durch $(f \times A)(r, x) := \big(f(r), A(x)\big)$ erklärte Abbildung $f \times A : \mathscr{I} \times \mathfrak{G} \subseteq \mathbf{R} \times \mathfrak{B}_1 \to \mathbf{R} \times \mathfrak{B}_2$ ist wegen *E2* zulässig. Weiterhin gelte

$$\deg(f \times A, \mathscr{I} \times \mathfrak{G}, \mathbf{R} \times \mathfrak{B}_1, \mathbf{R} \times \mathfrak{B}_2) = d(f, \mathscr{I}, \mathbf{R}) \deg(A, \mathfrak{G}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2),$$

wobei $d(\cdot, \cdot, \cdot)$ der Abbildungsgrad von Brouwer in $\mathbf{R}$ ist und wir für Teilmengen $\mathfrak{A} \subseteq \mathbf{Z}'$ und $b \in \mathbf{Z}'$ vereinbaren:

1. $\{b\} \cdot \mathfrak{A} = \{ba : a \in \mathfrak{A}\}$,
2. $\{0\} \cdot \{\pm\infty, \ldots\} = \mathbf{Z}'$.

A6. Permanenzaxiom:

Sei $A : \overline{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}$ eine Abbildung in einen endlichdimensionalen Unterraum $\mathfrak{B}_1$ von $\mathfrak{B}$, so daß $I - A \in \mathfrak{K}$ ist. Dann ist nach *E4* auch $I - A \in \mathfrak{Z}$. Weiterhin gilt

$$\deg(I - A, \mathfrak{G}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1) = d(I - A/\overline{\mathfrak{G}} \cap \mathfrak{B}_1, \mathfrak{G} \cap \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1),$$

wobei $d(\cdot, \cdot, \cdot)$ der Abbildungsgrad von BROUWER im $\mathbf{R}^n$ bzw. im endlichdimensionalen B-Raum $\mathfrak{B}_1$ ist.

Bemerkungen: 1. Sind f und A wie in *A5* beschaffen, so erfüllen die Abbildungen

$$\overline{f} : \overline{\mathscr{I} \times \mathfrak{G}} \to \mathbf{R}, \quad \overline{f}(r, x) := f(r) \quad \text{und} \quad \overline{A} : \overline{\mathscr{I} \times \mathfrak{G}} \to \mathfrak{B}_2, \quad \overline{A}(r, x) := A(x)$$

wegen $\overline{A}(r, \cdot) = A \in \mathfrak{Z}$ die Bedingungen von *E2*, d. h. $\overline{f} \times \overline{A} = f \times A$ ist in $\mathfrak{Z}$.

2. Eine Definition des in *A5/A6* verwendeten Abbildungsgrades von BROUWER im $\mathbf{R}^n$ bzw. in endlichdimensionalen orientierten B-Räumen findet man z. B. in [26]. Dort und in [28, 5] wird auch bewiesen, daß dieser Abbildungsgrad die Axiome *A1* bis *A5* erfüllt.

Vereinbarungen: 1. Wenn keine Mißverständnisse auftreten können, schreiben wir für $\deg(A, \mathfrak{G}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ kurz $\deg(A, \mathfrak{G})$ und für $\deg(A/\overline{\mathfrak{G}}_1, \mathfrak{G}_1)$ kurz $\deg(A, \mathfrak{G}_1)$.

2. Ist $\deg(A, \mathfrak{G})$ einelementig, dann identifizieren wir diese Menge unter Beachtung der in *A3/A5* angegebenen Rechenregeln mit der ganzen Zahl, die sie enthält.

Folgerungen: 1. *Aus* $A : \overline{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$, $A \in \mathfrak{Z}$ *und* $A^{-1}(0) \cap \overline{\mathfrak{G}} = \emptyset$ *folgt*

$$\deg(A, \mathfrak{G}) = 0.$$

2. $\deg(A, \emptyset) = 0.$

3. *Ist* x *isolierte Nullstelle von* A *in* $\overline{\mathfrak{G}}$, *dann ist für hinreichend kleine* R *und* $0 < r \leqq R$

$$A^{-1}(0) \cap \mathfrak{U}_r(x) = \{x\} \quad \textit{und} \quad \deg(A, \mathfrak{U}_r(x)) = \deg(A, \mathfrak{U}_R(x)).$$

Beweis: 1. und 2. sind die Negation von *A2*.

Zu 3.: Aus *A3* folgt

$$\deg(A, \mathfrak{U}_R(x)) = \deg(A, \mathfrak{U}_r(x)) + \deg(A, \mathfrak{U}_R(x) \setminus \mathfrak{U}_r(x)) = \deg(A, \mathfrak{U}_r(x))$$

wegen 1. und der Einelementigkeit von $\deg(A, \mathfrak{U}_R(x) \setminus \mathfrak{U}_r(x)) = \{0\}$ ∎

Folgerung 3 gibt Anlaß zu folgender Definition:

Definition 3: Sei $A : \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$, $A \in \mathfrak{Z}$ und $x \in \mathfrak{G}$ isolierte Nullstelle von A. Unter dem *Index* von A bezüglich der Nullstelle x verstehen wir die Menge

$$\operatorname{ind}(A, x) := \deg(A, \mathfrak{U}_r(x)), \; 0 < r \leqq R.$$

Unter Berücksichtigung von *A5* gilt dann

Folgerung 4: *Sind* f *und* A *wie in A5 gegeben und* r, x *bzw.* (r, x) *isolierte Nullstellen von* f, A *bzw.* f × A, *dann ist*

$$\operatorname{ind}(f \times A, (r, x)) = \operatorname{ind}_B(f, r) \cdot \operatorname{ind}(A, x),$$

wobei ind_B *der zum* BROUWER-*Grad definierte Index ist.*

3. Problemstellung

Wir betrachten im folgenden eine Operatorgleichung der Gestalt

$$T(\lambda, x) \equiv x - \lambda L x + N(\lambda, x) = 0,$$
$$T : \mathbf{K} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{B},$$

wobei $\mathsf{L}: \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ ein linear beschränkter Operator und $\mathsf{N}: \mathbf{K} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ ein stetiger Operator mit der Eigenschaft $\lim\limits_{x \to 0} \|\mathsf{N}(\lambda, \mathsf{x})\|/\|\mathsf{x}\| = 0$, gleichgradig auf beschränkten Teilmengen von $\mathbf{K}$, sind. Außerdem seien die $\mathsf{T}(\cdot, \mathsf{x})$ gleichgradig stetig und $\mathsf{T}(\lambda, \cdot)$ besitze für gewisse λ die in E_1 bis E_6 geforderten Eigenschaften.

Definition 4: 1. Offenbar sind Elemente $(\lambda, 0) \in \mathbf{K} \times \mathfrak{B}$ stets Lösungen von (1). Wir nennen ihre Gesamtheit *Menge der trivialen Lösungen* von (1) und bezeichnen sie mit $\mathfrak{T} = \{(\lambda, 0) \in \mathbf{K} \times \mathfrak{B}\}$.

2. Demgegenüber bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{S} = \{(\lambda, \mathsf{x}) \in \mathbf{K} \times \mathfrak{B} : \mathsf{T}(\lambda, \mathsf{x}) = 0, \quad \mathsf{x} \neq 0\}$$

die Menge der nichttrivialen Lösungen von (1).

3. $(\mu, 0) \in \mathbf{K} \times \mathfrak{B}$ heißt *Bifurkationspunkt* von (1) (kurz BP), falls $(\mu, 0) \in \bar{\mathfrak{S}}$.

4. Ist $(\mu, 0)$ BP, dann bezeichnet $\mathfrak{C}_\mu$ die Komponente, d. h. größte zusammenhängende Teilmenge von $\bar{\mathfrak{S}}$, die $(\mu, 0)$ enthält.

Die eingeführten Bezeichnungen erlauben zunächst die Angabe einer von Krasnoselski stammenden notwendigen Bifurkationsbedingung.

Satz 2: *Es sei* $(\mu, 0) \in \mathbf{K} \times \mathfrak{B}$ *ein BP von* (1) *mit* $|\mu| < \mathsf{r_e}(\mathsf{L})^{-1}$. *Dann ist* μ *charakteristische Zahl von* L, *d. h.* $\mu \in \tau(\mathsf{L})$.

Beweis: 1. Nach Definition 4.3 existieren Folgen $(\lambda_n, \mathsf{x}_n) \in \mathbf{K} \times \mathfrak{B}$ mit $\lim \lambda_n = \mu$, $\lim \mathsf{x}_n = 0$ und $\mathsf{x}_n - \lambda_n \mathsf{L}\mathsf{x}_n = \mathsf{N}(\lambda_n, \mathsf{x}_n)$.

2. Ist μ keine charakteristische Zahl, dann ist wegen $|\mu| < \mathsf{r_e}(\mathsf{L})^{-1}$ $\mu^{-1} \in \varrho(\mathsf{L})$ und $(\mathsf{I} - \mu\mathsf{L})^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$, d. h. $\|(\mathsf{I} - \mu\mathsf{L})^{-1}\| \leqq \mathsf{a}$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \|\mathsf{x}_n\| &= \|(\mathsf{I} - \mu\mathsf{L})^{-1} (\mathsf{I} - \mu\mathsf{L})\, \mathsf{x}_n\| \leqq \mathsf{a}\, \|\mathsf{x}_n - \lambda_n \mathsf{L}\mathsf{x}_n + (\lambda_n - \mu)\, \mathsf{L}\mathsf{x}_n\| \\ &\leqq \mathsf{a}\, \|\mathsf{N}(\lambda_n, \mathsf{x}_n)\| + \mathsf{a}\, |\lambda_n - \mu|\, \|\mathsf{L}\|\, \|\mathsf{x}_n\|, \end{aligned}$$

woraus bei Division durch $\|\mathsf{x}_n\| \neq 0$

$$1 \leqq \mathsf{a}\, \|\mathsf{N}(\lambda_n, \mathsf{x}_n)\|/\|\mathsf{x}_n\| + \mathsf{a}\, |\lambda_n - \mu|\, \|\mathsf{L}\|$$

folgt. Die rechte Seite dieser Ungleichung geht aber beim Grenzübergang $n \to \infty$ gegen 0. Aus diesem Widerspruch folgt die Behauptung ∎

4. Bifurkationstheorie in reellen Banachräumen

Im gesamten Abschnitt sei $\mathfrak{B}$ ein reeller B-Raum. Mit μ bezeichnen wir stets ein — gegebenenfalls noch genauer zu kennzeichnendes — Element von $\tau(\mathsf{L})$, also eine charakteristische Zahl, und $\varrho(\mu)$ sei durch $\varrho(\mu) := \frac{1}{4} \operatorname{dist}(\mu, \tau(\mathsf{L}) \setminus \{\mu\})$ definiert. P^+ bzw. P^- seien die nach Satz 1 stets existierenden Projektoren auf die endlichdimensionale direkte Summe der Eigenräume aller charakteristischen Zahlen in $[0, \mu + \varrho]$ bzw. $[0, \mu - \varrho]$ falls $\mu > 0$, oder $[\mu + \varrho, 0]$ bzw. $[\mu - \varrho, 0]$ falls $\mu < 0$ ist. Dabei ist $0 < \varrho \leqq \varrho(\mu)$ zu wählen.

Ist durch eine geeignete Vorschrift eine Zulässigkeitsklasse $(\mathfrak{Z}, \mathfrak{Z}_H)$ festgelegt, dann sagen wir, der Operator T aus (1) erfüllt die Bedingungen $[\mathsf{H}_1(\mu)]$ bis $[\mathsf{H}_3(\mu)]$, wenn folgendes gilt:

$[\mathsf{H}_1(\mu)]$: Es existiert eine Abbildung $\mathsf{H}: \mathbf{R} \times \mathfrak{U}_\varrho(0) \times [0, 1] \to \mathfrak{B}$, so daß für ein hinreichend kleines ϱ mit $0 < \varrho \leqq \varrho(\mu)$ für alle $\lambda \in \mathbf{R}$ mit $|\lambda - \mu| < \varrho$ die $\mathsf{H}(\lambda, \cdot, \cdot)$ in $\mathfrak{Z}_H$ ist und außerdem $\mathsf{H}(\lambda, \cdot, 0) = \mathsf{T}(\lambda, \cdot)$ und $\mathsf{H}(\lambda, \cdot, 1) = \mathsf{I} - \lambda\mathsf{L}$ gilt.

$[\mathsf{H}_2(\mu)]$: Es existieren zwei Abbildungen $\mathsf{H}^\pm : \mathbf{R} \times \mathfrak{U}_\varrho(0) \times [0,1] \to \mathfrak{B}$, so daß für hinreichend kleines $\varrho\big(0 < \varrho \leqq \varrho(\mu)\big)$ für alle $\lambda \in \mathbf{R}$ mit $|\lambda - \mu| < \varrho$ die $\mathsf{H}^\pm(\lambda,\cdot,\cdot)$ in $\mathfrak{Z}_H$ sind und außerdem $\mathsf{H}^\pm(\lambda,\cdot,0) = \mathsf{I} - \mu\mathsf{L}$ und $\mathsf{H}^\pm(\lambda,\cdot,1) = \mathsf{I} - 2\mathsf{P}^\pm$ gilt.

$[\mathsf{H}_3(\mu)]$: Für die durch $\mathsf{H}(\lambda, \mathsf{x}, \mathsf{t}) = \mathsf{x} - \lambda\mathsf{L}\mathsf{x} - \mathsf{t}\mathsf{N}(\lambda, \mathsf{x})$ definierte Abbildung $\mathsf{H} : \mathbf{R} \times \mathfrak{U}_\varrho(0) \times [0,1] \to \mathfrak{B}$ ist für alle λ mit $|\lambda - \mu| \leqq \varrho$ und hinreichend kleinem $\varrho \leqq \varrho(\mu)$ $\mathsf{H}(\lambda,\cdot,\cdot) \in \mathfrak{Z}_H$. μ hat die algebraische VFH $\varkappa(\mu) = 1$.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine beschränkte, offene Menge in $\mathbf{R} \times \mathfrak{B}$. Wir sagen, daß T die Bedingung $[\mathsf{B}(\mathfrak{A})]$ erfüllt, wenn gilt:

$[\mathsf{B}(\mathfrak{A})]$: Die Abbildungen $\mathsf{T}(\lambda,\cdot) : \overline{\mathfrak{A}}_\lambda \to \mathfrak{B}$ sind für alle in Frage kommenden λ zulässig und die Menge $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}) := \{\mathsf{u} \in \mathfrak{B} : \exists\, \lambda \in \mathbf{R},\ (\lambda, \mathsf{u}) \in \mathfrak{A},\ \mathsf{T}(\lambda, \mathsf{u}) = 0\}$ aller Lösungen von (1) in $\mathfrak{A}$ ist relativ kompakt.

Die so definierten Bedingungen ermöglichen die Formulierung von

Theorem 1: *Voraussetzung:*

1. *Gegeben ist eine Zulässigkeitsklasse, die die Eigenschaften E1 bis E6 besitzt.*
2. $\mu \in \tau(\mathsf{L})$ *und* $\varkappa(\mu)$ *ist ungerade.*
3. $\mathsf{x} = 0$ *ist isolierte Nullstelle von* $\mathsf{T}(\mu, \mathsf{x})$.

Behauptung:

a) Lokales Resultat: *Genügt* T *aus* (1) *den Bedingungen* $[\mathsf{H}_1(\mu)]$ *und* $[\mathsf{H}_2(\mu)]$, *dann ist* $(\mu, 0)$ BP *von* (1).

b) Globales Resultat: *Es sei eine Zahl* $\mathsf{p} \in \mathbf{R}_+$, $\mathsf{p} \leqq \mathsf{r}_e(\mathsf{L})^{-1}$ *gegeben, so daß* $[-\mathsf{p}, \mathsf{p}] \cap \tau(\mathsf{L}) = \{\mu = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$. *Genügt* T *aus* (1) *den Bedingungen* $[\mathsf{H}_1(\mu_i)]$ *und* $[\mathsf{H}_2(\mu_i)]$ *für alle* $i = 1, 2, \ldots, n$ *und außerdem für alle offenen, beschränkten Mengen* $\mathfrak{A} \subseteq \mathbf{R} \times \mathfrak{B}$ *mit* $0 \notin \mathsf{T}(\partial\mathfrak{A})$ *der Bedingung* $[\mathsf{B}(\mathfrak{A})]$, *dann besitzt die* $(\mu, 0)$ *enthaltende Lösungskomponente* $\mathfrak{C}_\mu$ *wenigstens eine der folgenden drei Eigenschaften:*

(A) $\mathfrak{C}_\mu$ *ist unbeschränkt in* $[-\mathsf{p}, \mathsf{p}] \times \mathfrak{B}$.
(B) $\mathfrak{C}_\mu$ *enthält genau eine gerade Anzahl von BP* $(\lambda, 0)$ *mit* $\varkappa(\lambda)$ *ungerade.*
(C) *Ist* $\mathsf{p} < \infty$, *dann ist* $\inf\{|\mathsf{p} - |\lambda|| : (\lambda, \mathsf{x}) \in \mathfrak{C}_\mu\} = 0$.

c) Einfacher Eigenwert: *Genügt* T *zusätzlich noch der Bedingung* $[\mathsf{H}_3(\mu)]$, *so läßt sich* $\mathfrak{C}_\mu$ *in zwei disjunkte Komponenten* $\mathfrak{C}_\mu^+$ *und* $\mathfrak{C}_\mu^-$ *unterteilen, die beide wenigstens eine der Eigenschaften* (A), (C) *oder*

(B′): $\mathfrak{C}_\mu^\pm$ *enthält wenigstens noch einen weiteren* BP $(\bar\mu, 0)$ *mit* $\bar\mu \neq \mu$

besitzen.

Interpretation von Theorem 1: Die Voraussetzungen sind auf eine sinnvolle Verallgemeinerung der Ergebnisse von Krasnoselski [8] und Rabinowitz [15] ausgerichtet. Alle Aussagen werden allerdings mindestens auf den Bereich des diskreten Spektrums von L beschränkt — dies wird durch Voraussetzung 2 und die Behauptung b).(C) verdeutlicht. Beispiele (vgl. [28: Bsp. 8.1)] zeigen, daß man im reellen B-Raum auf die Voraussetzungen „$\varkappa(\mu)$ ungerade" nicht verzichten kann. Bemerkenswert ist, daß die Abhängigkeit des nichtlinearen Anteils N von λ bis auf die gleichgradig erfüllte Grenzbedingung und die gleichgradige Stetigkeit in λ im allgemeinen beliebig sein kann, sofern sie nicht wegen zusätzlicher Zulässigkeitseigenschaften in *E2* noch genauer bestimmt wird. Von ausschlaggebender Bedeutung für den Beweis sind die Voraussetzungen $[\mathsf{H}_1(\mu)]$ bis $[\mathsf{H}_3(\mu)]$ und $[\mathsf{B}(\mathfrak{A})]$. Diese lassen sich aber im konkreten Fall meistens sehr leicht überprüfen. Oft kommt man z. B. in den $[\mathsf{H}_i(\mu)]$ mit Homotopien der Form $\mathsf{H}(\cdot,\cdot,\mathsf{t}) = \mathsf{t}\mathsf{A} + (1 - \mathsf{t})\,\mathsf{B}$ aus. Für bestimmte Zulässigkeitsklassen kann es sein, daß der Variationsbereich des Parameters λ noch weiter eingeschränkt werden muß. Dies wird durch die Konstante p in Behauptung b) erreicht.

Im Beweis für das globale Resultat wird ein Definitionsbereich $\mathfrak{A} \subseteq [-\mathsf{p}, \mathsf{p}] \times \mathfrak{B}$ konstruiert, für den $\mathsf{T}(\lambda, \cdot) : \overline{\mathfrak{A}}_\lambda' \to \mathfrak{B}$ zulässig sein muß. In Behauptung b) wird deshalb stärker Zulässigkeit für alle möglichen solcher Mengen $\mathfrak{A}$ gefordert. Wegen der Einschränkungseigenschaft *E3* genügt es hier, Zulässigkeit von $\mathsf{T}(\mu, \cdot)$ für $|\lambda| \leq \mathsf{p}$ über einer hinreichend großen Kugel in $\mathfrak{B}$ zu überprüfen.

Die in $[\mathsf{B}(\mathfrak{A})]$ enthaltene Kompaktheitsforderung für die Mengen $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ sichert die Kompaktheit beschränkter Teilmengen der Menge der nichttrivialen Lösungen, die die Anwendung eines Trennungssatzes von WHYBURN [24] gestattet. Diese Forderung ist trivial erfüllt, wenn die Operatoren $\mathsf{T}(\lambda, \cdot)$ eigentlich sind; dies ist in den bekannten Anwendungen der Fall.

Die Aussagen des Theorems stimmen nun im wesentlichen mit den bekannten Resultaten von KRASNOSELSKI [8], RABINOWITZ [15], THOMAS [22] und STUART [21] für vollstetige Operatoren und k-set-contractions überein. Im Fall (C) kann die Komponente nur bis zur Zulässigkeitsgrenze p verfolgt werden, für $|\lambda| > \mathsf{p}$ sind keine Aussagen möglich. Die Fälle (A) und (B) treten bereits in den zitierten Arbeiten auf. Sie lassen sich grafisch folgendermaßen veranschaulichen, wenn man die Norm der Lösung x in Abhängigkeit vom Parameter λ darstellt.

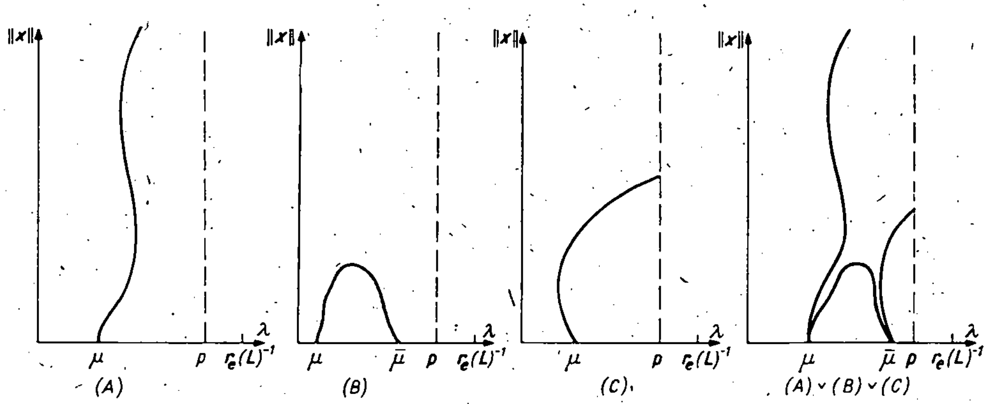

Abb. 1

Theorem 1 stellt nur insofern eine Existenzaussage dar, wie das linearisierte Problem charakteristische Zahlen im Sinne des ersten Abschnittes besitzt.

Durch eine einfache Spiegelung am Einheitskreis kann man eine analoge Aussage zur Bifurkation von ∞ machen.

Im folgenden sollen noch kurz einige Typen von Operatoren vorgestellt werden, die Zulässigkeitsklassen im Sinne der Axiome *E1* bis *E6* bilden. Zur Erläuterung werden in einigen Fällen die Beweisideen für die Eigenschaften *E2, E4* und *E6* angegeben und deren Auswirkungen auf die Bedingungen $[\mathsf{H}_1(\mu)]$ bis $[\mathsf{H}_3(\mu)]$ und $[\mathsf{B}(\mathfrak{A})]$ skizziert:

1. Abbildungen im $\mathbf{R}^n$ *mit E1: E2* bedeutet lediglich Übergang zu $\mathbf{R}^{n+1}$ und ist deshalb erfüllt. Einschränkungen ändern nichts an der Stetigkeit, also ist auch *E4* gesichert. Der z. B. in [5, 26, 28] definierte Abbildungsgrad von BROUWER genügt offenbar *E6*. $[\mathsf{H}_1(\mu)]$ bis $[\mathsf{H}_3(\mu)]$ werden durch einfache Homotopien der Form $\mathsf{tA} + (1 - \mathsf{t})\,\mathsf{B}$ erfüllt. $[\mathsf{B}(\mathfrak{A})]$ ist ebenfalls gesichert, da in endlichdimensionalen Räumen beschränkte Mengen relativ kompakt sind. $\mathsf{p} = \infty$.

2. *Abbildungen in endlichdimensionalen B-Räumen mit E1:* Sie werden mittels eines Abbildungsgrades, der die Isomorphie zum $\mathbf{R}^n$ nutzt, auf 1. zurückgeführt:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{B}_1 \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "l_1"'] & & \mathfrak{B}_2 \arrow[dl, "l_2"] \\ & \mathbf{R}^n & \end{tikzcd}$$

Man definiert dann:

$$\deg(A, \mathfrak{G}) := d(l_2 A l_1^{-1}, l_1 \mathfrak{G})$$

3. *Abbildungen der Form* $I - V$ *mit E1,* V *vollstetiger Operator:* Beweis von *E2*: Seien $f : \overline{\mathfrak{D}} \subseteq \mathbf{R} \times \mathfrak{B} \to \mathbf{R}$ mit $f(\overline{\mathfrak{D}})$ beschränkt und $A : \overline{\mathfrak{D}} \subseteq \mathbf{R} \times \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ mit $A(r, \cdot) = I - V(r)$, $V(r)$ vollstetig für alle r und $V(\cdot)\, x$ gleichgradig stetig, die in geforderter Weise gegebenen Abbildungen. Für die Produktabbildung $f \times A$ gilt dann

$$(f \times A)(r, x) = \big(f(r, x), A(r, x)\big) = (r, x) - \big(r - f(r, x), V(r)\, x\big).$$

Aus beschränkten Folgen $|||(r_n, x_n)||| < c$ kann man Teilfolgen auswählen, so daß r_n gegen $r \in \mathbf{R}$, $f(r_n, x_n)$ gegen $s \in \mathbf{R}$ und $V(r)\, x_n$ gegen $y \in \mathfrak{B}$ konvergieren. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit von $V(\cdot)\, x$ gilt sogar

$$\lim_{n\to\infty} (r_n - f(r_n, x_n), V(r_n)\, x_n) = (r - s, y),$$

d. h., die Abbildung $(r, x) \to \big(r - f(r, x), V(r)\, x\big)$ ist vollstetig.

Zu *E4*: Abbildungen in endlichdimensionale Räume sind vollstetig, wenn sie beschränkt sind.

Der Abbildungsgrad von Leray-Schauder genügt allen Axiomen von *E6* (vgl. [28: Kap. 12; 1]).

Da nach einem Satz von Mazur die konvexe Hülle kompakter Mengen kompakt ist, werden $[H_1(\mu)]$ bis $[H_3(\mu)]$ durch Homotopien der Form $tA + (1 - t)\, B$ erfüllt, wenn nur A und B von der Gestalt $I - V$ sind.

Zum Nachweis von $[B(\mathfrak{A})]$ genügt die Vollstetigkeit von $\lambda L + N(\lambda, \cdot)$ auf einer hinreichend großen Kugel in $\mathbf{R} \times \mathfrak{B}$ und die daraus folgende Eigentlichkeit von T.

4. *Abbildungen der Form* $I - K$ *mit E1,* K *kompakt einschränkbar:* Die Definition und einen Abbildungsgrad findet man in Krasnoselski/Zabreiko [9]. Die Argumentation ist der in 3. sehr ähnlich. Schwierigkeiten treten höchstens bei der Wahl der Homotopien auf (vgl. [1, 9]).

5. *Abbildungen der Form* $I - G$ *mit E1,* G *grenzkompakt:* Dies ist ein Spezialfall von 4. (vgl. [1, 18]).

6. *Abbildungen der Form* $I - K$ *mit E1,* K *k-Mengenkontraktion:* Die Definition und der Abbildungsgrad von Nussbaum [11] rechtfertigen *E2* und *E6*. *E4* folgt aus der Tatsache, daß vollstetige Operatoren 0-Mengenkontraktionen sind. Man kann hier allerdings nur Operatoren der Form $I - \lambda(L + N)$ zulassen. Damit ist gleichzeitig die gleichgradige Stetigkeit der $T(\cdot, x)$ gesichert. p ist so zu wählen, daß

$$p^{-1} \geqq \inf\{k \mid L + N \text{ ist } k\text{-Mengenkontraktion}\} \geqq r_e(L) > 0$$

gilt. Homotopien der Form $tA + (1 - t)\, B$ erfüllen dann die Forderungen $[H_1(\mu)]$ bis $[H_3(\mu)]$. $[B(\mathfrak{A})]$ wird durch die Eigentlichkeit von $I - \lambda(L + N)$ gesichert (vgl. [1]).

7. *A-eigentliche Operatoren mit E1:* Der Abbildungsgrad von BROWDER-PETRYSHYN [3] erfüllt *E6*. Da bei dessen Definition zunächst auf endlichdimensionale Räume zurückgegangen wird, sind auch *E2* und *E4* gesichert. Homotopien der Form $tA + (1 - t)B$ erfüllen $[H_1(\mu)]$ bis $[H_3(\mu)]$ jedoch nur in bestimmten Spezialfällen, so z. B. wenn $T(\lambda, \cdot)$ die Form $I - K - V + M$ hat, wobei V ein vollständiger Operator, K eine lineare k-Mengenkontraktion und M ein c-monotoner Operator mit $k < 1 + c$ sind. Dagegen ist bei gleichgradiger Stetigkeit der $T(\cdot, x)$ wegen der Eigentlichkeit von $T(\lambda, \cdot)$ $[B(\mathfrak{A})]$ weiterhin gesichert (vgl. [1, 23]).

5. Bifurkationsresultate für analytische Fredholmoperatoren in komplexen B-Räumen

Definition 5: $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ seien komplexe B-Räume und $\mathfrak{G}$ eine offene, beschränkte Teilmenge von $\mathfrak{B}_1$.

1. Ein Operator $A : \bar{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ heißt *analytisch in* $x_0 \in \mathfrak{G}$ gdw. er sich in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 in eine Operatorpotenzreihe der Form $Ax = \sum_{i=1}^{\infty} F_i(x - x_0)^i$ mit Potenzoperatoren F_i im Sinne von [28: Kap. 8.2] darstellen läßt. Hierbei muß $\sum_{i=1}^{\infty} \|F_i\| \|x - x_0\|^i$ für $\|x - x_0\| < r$, r hinreichend klein, konvergieren.

2. A heißt *analytisch in* $\mathfrak{G}$ gdw. A analytisch in allen $x \in \mathfrak{G}$ ist.

3. A heißt *Fredholmoperator* gdw. die Frechét-Ableitungen $A'(x)$ für alle $x \in \mathfrak{G}$ Fredholmoperatoren im üblichen Sinne sind.

Folgerungen: 5. A *besitzt Frechét-Ableitungen beliebig hoher Ordnung* [28: Satz 8.2].

6. *Ist* $A^{-1}(0)$ *kompakt, dann ist* $A^{-1}(0)$ *eine endliche Menge.*

Wegen der Kompaktheit von $A^{-1}(0)$ und der Stetigkeit von A ist der Beweis analog zu dem für analytische Funktionen in $\mathbb{C}$ (vgl. etwa PRIWALOW [14: Bd. II Kap. 2.4]).

Sei nun $A^{-1}(0) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dann gilt für $\|x - x_i\| < \delta$ die Zerlegung

$$Ax = A'(x_i)(x - x_i) + R_i(x - x_i)$$

mit $\lim_{h \to 0} \|R_i h\|/\|h\| = 0$ und mit Fredholmoperatoren $A'(x_i) = S_i - V_i$. Dabei existieren die inversen Operatoren S_i^{-1} linear beschränkt und die V_i sind vollstetige lineare Opertoren. Der Operator A läßt sich deshalb in die Form

$$\begin{aligned} Ax &= S_i\big(x - \underbrace{x_i - S_i^{-1}V_i(x - x_i)}_{K_i x} \underbrace{+ S_i^{-1}R_i(x - x_i)}_{U_i x}\big) \\ &:= S_i(x - K_i x - U_i x) \end{aligned}$$

bringen. Die K_i sind dabei vollstetige, lineare Operatoren und die U_i Kontraktionsoperatoren mit $\|U_i x - U_i y\| \leqq c\,\|x - y\|$, $c < 1$ für x, y hinreichend nahe an x_i. Wir setzen

$$\deg(A, \mathfrak{G}) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Deg}\left(I - K_i(I - U_i)^{-1}, (I - U_i)\,\mathfrak{U}_\delta(x_i), \mathfrak{B}\right) & \text{falls } A^{-1}(0) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{falls } A^{-1}(0) = \emptyset. \end{cases}$$

Dieser Abbildungsgrad wurde erstmals von NUSSBAUM [12] eingeführt. Er ist unabhängig von der Zerlegung $S_i + V_i$. $\operatorname{Deg}(.,.,.)$ steht für den bekannten Abbildungsgrad von LERAY-SCHAUDER für vollstetige Operatoren (vgl. [28: Kap. 12 u. 17]).

Satz 3: *Analytische Fredholmoperatoren* A *mit E1, kompakter Nullstellenmenge* $\mathsf{A}^{-1}(0)$ *und dem Abbildungsgrad aus Definition 5 bilden eine Zulässigkeitsklasse gemäß Abschnitt 2.* (Man beachte, daß in komplexen B-Räumen *E2* und *A5* nicht berücksichtigt werden müssen.)

Beweis: *E3* bis *E5* sind trivial erfüllt. Wegen Folgerung 6 ist $\mathsf{A}^{-1}(0)$ endlich und der Nussbaum-Grad erklärt. Zum Beweis von *A1* bis *A4* und *A6* vergleiche man [1] und [12] ∎

Im folgenden Teil des Abschnittes sei $\mathfrak{B}$ ein komplexer B-Raum und μ eine charakteristische Zahl von L aus (1). $\mathfrak{A}$ sei eine offene, beschränkte Teilmenge von $\mathbf{C} \times \mathfrak{B}$. Wir sagen, daß T aus (1) den Bedingungen $[\mathsf{H}(\mu)]$ und $[\mathsf{B}(\mathfrak{A})]$ genügt, wenn folgendes gilt:

$[\mathsf{H}(\mu)]$: Es existiert eine Zahl $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+$, so daß für alle ϱ mit $0 < \varrho \leqq \varrho_0$ die Operatoren $\mathsf{I} - \mathsf{L} : \overline{\mathfrak{U}_\varrho(0)} \to \mathfrak{B}$ und $\mathsf{T}(\lambda, \cdot) : \overline{\mathfrak{U}_\varrho(0)} \to \mathfrak{B}$ für $|\lambda - \mu| \leqq \varrho$ zulässig im Sinne von Satz 2 sind.

$[\mathsf{B}(\mathfrak{A})]$: Die Operatoren $\mathsf{T}(\lambda, \cdot) : \overline{\mathfrak{A}}_\lambda \to \mathfrak{B}$ sind für alle in Frage kommenden λ-Werte zulässig im Sinne von Satz 3 und die Menge

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{A}) := \{\mathsf{u} \in \mathfrak{B} \mid \exists\, \lambda \in \mathbf{C} : (\lambda, \mathsf{u}) \in \mathfrak{A},\ \mathsf{T}(\lambda, \mathsf{u}) = 0\}$$

aller Lösungen von (1) in $\mathfrak{A}$ ist relativ kompakt.

Theorem 2: a) Lokales Resultat: *Ist* $\mu \in \tau(\mathsf{L})$, $0 \in \mathfrak{B}$ *eine isolierte Lösung von* $\mathsf{T}(\mu, \mathsf{x}) = 0$ *und genügt* T *der Bedingung* $[\mathsf{H}(\mu)]$, *dann ist* $(\mu, 0)$ *ein BP von* (1).

b) Globales Resultat: *Ist zu einem gegebenen* $\mathsf{p} \in \mathbf{R}_+$ *mit* $|\mu| < \mathsf{p} \leqq \mathsf{r}_e(\mathsf{L})^{-1}$ *für alle beschränkten, offenen Mengen* $\mathfrak{A} \subseteq \{|\lambda| \leqq \mathsf{p}\} \times \mathfrak{B}$ *mit* $\partial\mathfrak{A} \cap \mathsf{T}^{-1}(0) = \emptyset$ *zusätzlich zu* a) *die Bedingung* $[\mathsf{B}(\mathfrak{A})]$ *erfüllt, dann besitzt die* $(\mu, 0)$ *enthaltende Lösungskomponente* $\mathfrak{C}_\mu \subseteq \mathfrak{S}$ *wenigstens eine der folgenden Eigenschaften:*

(A) $\mathfrak{C}_\mu$ *ist unbeschränkt in* $\{|\mu| \leqq \mathsf{p}\} \times \mathfrak{B}$.
(C) *Ist* $\mathsf{p} < \infty$, *dann ist* $\inf\{|\mathsf{p} - |\lambda|| : (\lambda, \mathsf{u}) \in \mathfrak{C}_\mu\} = 0$.

Interpretation: Im Unterschied zum reellen Fall tritt Bifurkation an allen charakteristischen Zahlen unabhängig von deren algebraischer VFH auf. Die „Zweige" kehren nicht zur Achse der trivialen Lösungen zurück, sondern sie sind unbeschränkt oder verlassen das betrachtete Gebiet.

6. Beweis der Theoreme

Gegeben sei ein Zulässigkeitsbegriff, der *E1* bis *E6* erfüllt.

Lemma 1: *Voraussetzung:*

a) $\mathsf{A} : \overline{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{B}_2$ *sei eine stetige Abbildung auf dem Abschluß eines beschränkten, offenen Gebietes* $\mathfrak{G}$, $\mathsf{x}_0 \in \mathfrak{G}$ *sei eine Nullstelle von* A, *d. h.* $\mathsf{A}\mathsf{x}_0 = 0$.

b) $\mathsf{A}'(\mathsf{x}_0)^{-1}$ *existiert als linear beschränkter Operator von* $\mathfrak{B}_2$ *nach* $\mathfrak{B}_1$ *und wir setzen* $\mathsf{a}^{-1} := \|\mathsf{A}'(\mathsf{x}_0)^{-1}\| > 0$.

c) Es gibt eine zulässige Homotopie $\mathsf{H} : \overline{\mathfrak{G}} \times [0, 1] \to \mathfrak{B}_2$ mit $\mathsf{H}(\cdot, 0) = \mathsf{A}$ und $\mathsf{H}(\cdot, 1) = \mathsf{A}'(\mathsf{x}_0)\,(\cdot - \mathsf{x}_0)$.

Behauptung: x_0 *ist isolierte Nullstelle von* A *und es gilt* $\operatorname{ind}(\mathsf{A}, \mathsf{x}_0) = \operatorname{ind}\big(\mathsf{A}'(\mathsf{x}_0), 0\big)$.

Beweis: Aus der Zerlegung $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{A}'(\mathsf{x}_0)\,(\mathsf{x} - \mathsf{x}_0) + \mathsf{R}(\mathsf{x} - \mathsf{x}_0)$ mit $\|\mathsf{R}(\mathsf{h})\| = o(\|\mathsf{h}\|)$ und aus $\|\mathsf{x} - \mathsf{x}_0\| = \|A'(\mathsf{x}_0)^{-1}\, \mathsf{A}'(\mathsf{x}_0)\,(\mathsf{x} - \mathsf{x}_0)\| \leqq \mathsf{a}^{-1}\, \|\mathsf{A}'(\mathsf{x}_0)\,(\mathsf{x} - \mathsf{x}_0)\| \leqq \mathsf{a}^{-1}(\|\mathsf{A}\mathsf{x}\|$

$+ \|R(x - x_0)\|)$ folgt für hinreichend kleines $\varrho \in \mathbf{R}_+$ und $\|x - x_0\| = \varrho$

$$\|Ax\| \geqq a\,\|x - x_0\| - \frac{a}{2}\,\|x - x_0\| \geqq \frac{a}{2}\,\varrho > 0,$$

d. h., x_0 ist isolierte Nullstelle von A. Aus *A4* und *A1* erhält man

$$\operatorname{ind}(A, x_0) = \operatorname{ind}\big(A'(x_0)(\cdot, -x_0), x_0\big) = \operatorname{ind}\big(A'(x_0), 0\big)$$

unter Verwendung von Definition 3 mit $R = \varrho$ ∎

Folgerungen: 7. Ist $f : \overline{\mathscr{I}} \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine reelle Funktion auf dem Abschluß des offenen, beschränkten Intervalls $\mathscr{I}$, dann gilt für alle $\mu \in \mathbf{R}$ mit $f(\mu) = 0$ und $f'(\mu) \neq 0$

$$\operatorname{ind}(f, \mu) = \operatorname{ind}\big(f'(\mu), 0\big) = \operatorname{sign} f'(\mu).$$

Vgl. dazu auch [28: Kap. 4].

8. Für die in *E2* und *A5* beschriebenen Abbildungen gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}\big(f \times A, (r, x)\big) &= \operatorname{ind}\big((f \times A)'(r, x), (0, 0)\big) = \operatorname{ind}\big(f'(r, x) \times A'(r, x), (0, 0)\big)\\ &= \operatorname{ind}\big((f_r(r, x)(\cdot) + f_x(r, x)(\cdot)) \times \big(A_r(r, x)(\cdot)\\ &\quad + A_x(r, x)(\cdot)\big), (0, 0)\big).\end{aligned}$$

Vgl. auch [28: Kap. 4.3].

Lemma 2: *Voraussetzungen:*

α) $\lambda \in]0, r_e(L)^{-1}[$, $\lambda \notin \tau(L)$, *d. h. λ ist keine charakteristische Zahl.*

β) *Es existiert eine zulässige Homotopie* $H : \overline{\mathfrak{U}_\varrho(0)} \times [0, 1] \to \mathfrak{B}$ *mit* $H(\cdot, 0) = I - \lambda L$ *und* $H(\cdot, 1) = I - 2P$, *wobei* P *der nach Satz 1 existierende Projektionsoperator auf die endlichdimensionale direkte Summe der Eigenräume zu den charakteristischen Zahlen in* $]0, \lambda[$ *ist.*

Behauptung: $\operatorname{ind}(I - \lambda L, 0) = (-1)^{\beta(\lambda)}$ *mit* $\beta(\lambda) := \sum_{\lambda_i \in \tau(L) \cap]0, \lambda[} \varkappa(\lambda_i) = \dim P\mathfrak{B}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(I - \lambda L, 0) &= \operatorname{ind}(I - 2P, 0) && \text{wegen Vor. b) und } A4,\\ &= \deg\big(I - 2P, \mathfrak{U}_\varrho(0), \mathfrak{B}\big) && \text{nach Def.}\\ &= d\big(I - 2P/P\mathfrak{B}, \mathfrak{U}_\varrho(0) \cap P\mathfrak{B}, P\mathfrak{B}\big) && \text{wegen } A6,\\ &= d\big(-I, \mathfrak{U}_\varrho(0) \cap P\mathfrak{B}, P\mathfrak{B}\big)\\ &= \operatorname{sign}\det(-I) && \text{in } P\mathfrak{B}, \text{ vgl. [28: Theorem 12.2]}\\ &= (-1)^{\dim P\mathfrak{B}}\\ &= (-1)^{\beta(\lambda)} \quad ∎\end{aligned}$$

Zusatz: *Für negative* $\lambda \in]-r_e(L)^{-1}, 0[$ *kann man einen analogen Beweis mit* $\beta(\lambda) := \sum_{\lambda_i \in \tau(L) \cap]\lambda, 0[} \varkappa(\lambda_i)$ *führen.*

Satz 4: *Voraussetzung:*

1. $\mathfrak{B}$ ist *ein B-Raum über* $\mathbf{K}$.
2. $\mu \in \tau(L)$.
3. $x = 0$ *ist isolierte Lösung von* $T(\mu, x) = 0$.
4. $\mathfrak{C}_\mu$ *genüge keiner der Bedingungen* (A) *und* (C).

Behauptung: Ist $\mathsf{p} \in \mathbf{R}_+$ mit $|\mu| < \mathsf{p} \leqq \mathsf{r_e(L)}^{-1}$ *vorgegeben und genügt* T *aus* (1) *für alle offenen, beschränkten Mengen* $\mathfrak{D} \subseteq \{|\lambda| \leqq \mathsf{p}\} \times \mathfrak{B}$ *mit* $\mathsf{T}^{-1}(0) \cap \partial\mathfrak{D} = \emptyset$ *der Bedingung* $[\mathsf{B}(\mathfrak{D})]$, *dann gibt es eine derartige Menge* $\mathfrak{A}$, *für die folgende Bedingungen erfüllt sind:*

① $\mathfrak{C}_\mu \subseteq \mathfrak{A}$.
② $\partial\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{S}} = \emptyset$.
③ $\mathfrak{A}$ *enthält genau die gleichen Bifurkationspunkte* $(\mu_i, 0)$ $(i = 1, \ldots, n)$ *wie* $\mathfrak{C}_\mu$ *und es gibt eine Zahl* $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+$, *so daß zu jedem* ϱ *mit* $0 < \varrho \leqq \varrho_0$ *eine Zahl* $\eta(\varrho) \in \mathbf{R}_+$ *existiert mit:*

a) *Für alle* $i (i = 1, \ldots, n)$ *ist* μ_i *einzige charakteristische Zahl von* L *in* $\{\lambda : |\lambda - \mu_i| < \varrho\}$.
b) *Aus* $(\lambda, \mathsf{u}) \in \mathfrak{A}$, $|\lambda - \mu_i| \geqq \varrho$ *für alle* $i = 1, \ldots, n$ *und* $\|\mathsf{u}\| \leqq \eta(\varrho)$ *folgt* $\mathsf{u} = 0$.

④ *Ist* $\mathsf{p} < \infty$, *dann gibt es ein* $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$, *so daß aus* $(\lambda, \mathsf{u}) \in \mathfrak{A}$ $|\lambda| \leqq \mathsf{p} - \varepsilon$ *folgt.*

Bemerkung: Für „$\mathsf{p} = \infty$" ist ④ zur Beschränktheit von $\mathfrak{A}$ äquivalent.

Beweis: (I) Da (A) nicht gilt, ist $\mathfrak{C}_\mu$ beschränkt in $[-\mathsf{p}, \mathsf{p}] \times \mathfrak{B}$, d. h., es existiert ein $\mathsf{K} \in \mathbf{R}$, $\mathsf{K} \leqq \mathsf{p} \leqq \infty$, so daß $|\lambda| < \mathsf{K} < \infty$, falls $(\lambda, \mathsf{u}) \in \mathfrak{C}_\mu$. Da auch (C) nicht gilt, existiert $\varepsilon := \frac{1}{4} \inf\{1, ||\lambda| - \mathsf{p}| : (\lambda, \mathsf{u}) \in \mathfrak{C}_\mu\} > 0$. Wir setzen

$$\mathsf{R} := \begin{cases} \min\{\mathsf{K} + 1, \mathsf{p} - \varepsilon\} & \text{für} \quad \mathsf{p} < \infty \\ \mathsf{K} + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\mathfrak{S}(\mathsf{R}) := \overline{\mathfrak{S}} \cap \{|\lambda| \leqq \mathsf{R}\} \times \mathfrak{B}$. $\mathfrak{C}_\mu$ ist als beschränkte Menge in $\mathfrak{S}(\mathsf{R})$ wegen $\mathfrak{C}_\mu \subseteq \{|\lambda| \leqq \mathsf{R}\} \times \mathfrak{M}(\mathfrak{C}_\mu)$ kompakt, da $[\mathsf{B}(\mathfrak{C}_\mu)]$ gilt.

(II) Nach Konstruktion enthält die Menge $\{\lambda \mid |\lambda| \leqq \mathsf{R}\}$ höchstens endlich viele charakteristische Zahlen $\{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$ von L, insbesondere existiert $\varrho_0 = \frac{1}{4} \min\limits_i \operatorname{dist}(\mu_i, \tau(\mathsf{L}) \setminus \{\mu_i\})$. Man findet weiterhin eine reelle Zahl $\delta : 0 < \delta < \frac{1}{2} \varrho_0$, so daß $\mathfrak{U}_\delta(\mathfrak{C}_\mu)$ genau die gleichen BP wie $\mathfrak{C}_\mu$ enthält und für $0 < \varrho \leqq \varrho_0$

a) aus $(\mu_i, 0) \in \mathfrak{U}_\delta(\mathfrak{C}_\mu)$ $\tau(\mathsf{L}) \cap \{\lambda : |\lambda - \mu_i| < \varrho\} = \{\mu_i\}$ folgt und
b) Zahlen $\eta(\varrho)$ existieren, so daß aus $(\lambda, \mathsf{u}) \in \mathfrak{U}_\delta(\mathfrak{C}_\mu)$, $|\lambda - \mu_i| \geqq \varrho \; \forall_i$ und $\|\mathsf{u}\| \leqq \eta(\varrho)$ $\mathsf{u} = 0$ folgt

Tatsächlich, a) ist nach Konstruktion und Wahl von ϱ_0 sicher erfüllt. Gilt b) nicht, dann existieren Folgen $\{\delta_n\}$, $\{\lambda_n\}$, $\{\mathsf{u}_n\}$, $\{\eta_n\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, $|\lambda_n - \mu_i| \geqq \varrho \; \forall i$, $0 < \|u_n\| \leqq \eta_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$ und $(\lambda_n, \mathsf{u}_n) \in \mathfrak{U}_{\delta_n}(\mathfrak{C}_\mu)$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß kann eine konvergente Teilfolge $(\lambda_n, \mathsf{u}_n) \to (\lambda_0, 0) \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{U}_{\delta_n}(\mathfrak{C}_\mu) = \mathfrak{C}_\mu$ ausgewählt werden, wobei noch $\lambda_0 \neq \mu_i$ für alle $i = 1, \ldots, r$ gilt. λ_0 wäre dann Bifurkationspunkt von (1) und nach Satz 2 charakteristische Zahl von L im Widerspruch zur Konstruktion. Schließlich kann man δ noch kleiner als ε und so wählen, daß aus $(\lambda, \mathsf{u}) \in \overline{\mathfrak{U}_\delta(\mathfrak{C}_\mu)}$ $|\lambda| < \mathsf{R}$ folgt.

(III) $\mathfrak{R} := \mathfrak{S}(\mathsf{R}) \cap \mathfrak{U}_\delta(\mathfrak{C}_\mu)$ ist als abgeschlossene, beschränkte Teilmenge von $\mathfrak{S}(\mathsf{R})$ kompakt und nach Konstruktion ist $\mathfrak{C}_\mu \cap \partial\mathfrak{U}_\delta(\mathfrak{C}_\mu) = \emptyset$. Da $\mathfrak{C}_\mu$ eine Komponente von $\mathfrak{R}$ ist, gibt es keine zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{R}$, die mit $\mathsf{A} := \mathfrak{C}_\mu$ auch $\mathsf{B} := \mathfrak{S}(\mathsf{R}) \cap \partial\mathfrak{U}_\delta(\mathfrak{C}_\mu)$ schneidet. Nach einem Separationssatz von Whyburn [24] existiert dann eine Zerlegung $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_\mathsf{A} \cup \mathfrak{R}_\mathsf{B}$, so daß $\mathfrak{R}_\mathsf{A} \cap \mathfrak{R}_\mathsf{B} = \emptyset$, $\mathsf{A} \subseteq \mathfrak{R}_\mathsf{A}$, $\mathsf{B} \subseteq \mathfrak{R}_\mathsf{B}$ und die Mengen $\mathfrak{R}_\mathsf{A}$ und $\mathfrak{R}_\mathsf{B}$ kompakt sind.

(IV) Die Menge $\mathfrak{A} := \mathfrak{U}_\gamma(\mathfrak{R}_\mathsf{A})$, $0 < \gamma < \operatorname{dist}(\mathfrak{R}_\mathsf{A}, \mathfrak{R}_\mathsf{B})$ erfüllt alle gewünschten Bedingungen.

Zu ①: $\mathfrak{C}_\mu \doteq \mathsf{A} \subseteq \mathfrak{R}_\mathsf{A} \subseteq \mathfrak{U}_\gamma(\mathfrak{R}_\mathsf{A}) = \mathfrak{A}$.

Zu ②: $\overline{\mathfrak{S}} \cap \partial\mathfrak{A} = \mathfrak{S}(\mathsf{R}) \cap \partial\mathfrak{A} = \left(\mathfrak{S}(\mathsf{R}) \cap \overline{\mathfrak{U}_\delta(\mathfrak{C}_\mu)}\right) \cap \partial\mathfrak{A} = \mathfrak{R} \cap \partial\mathfrak{A} = \emptyset$ wegen $\overline{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{U}_\delta(\mathfrak{C}_\mu)$ und der Konstruktion in (III).

Zu ③ und ④: Wegen $\mathfrak{U}_\gamma(\mathfrak{R}_\mathsf{A}) \subseteq \mathfrak{U}_\delta(\mathfrak{C}_\mu)$ übertragen sich die Aussagen aus (II) ∎

Satz 5 (*Verallgemeinerte Homotopieeigenschaft*): *Voraussetzung:*

1. $\mathfrak{B}$ *ist ein B-Baum über* $\mathbf{K}$.
2. $\mathfrak{A} \subseteq \mathbf{K} \times \mathfrak{B}$ *ist ein beschränktes, offenes Gebiet, etwa* $\mathfrak{A} \subseteq \{|\lambda| \leqq \mathsf{p}\} \times \mathfrak{U}_\mathsf{R}(0)$.
3. T *genügt der Bedingung* $[\mathsf{B}(\mathfrak{A})]$.

Behauptung: $\mathsf{d}(\lambda) := \mathsf{deg}\left(\mathsf{T}(\lambda, \cdot), \mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{B}\right) = \text{const.}$

Beweis: Wir zeigen die Stetigkeit von $\mathsf{d}(\lambda)$. Aus der Ganzzahligkeit folgt dann die Konstantheit. Offenbar ist $\mathfrak{A}_\lambda$ offen und $\partial(\mathfrak{A}_\lambda) = (\partial\mathfrak{A})_\lambda$, d. h. $\mathsf{d}(\lambda)$ ist erklärt.

1. *Fall:* $\mathsf{T}(\lambda_0, \mathsf{u}) \neq 0$ für alle $\mathsf{u} \in \mathfrak{A}_{\lambda_0}$.

Dann existiert ein $\varepsilon_0 \in \mathbf{R}_+$, so daß für alle λ mit $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$ und für alle $\mathsf{u} \in \mathfrak{A}_\lambda$ $\mathsf{T}(\lambda, \mathsf{u}) \neq 0$ folgt. Anderenfalls existieren Folgen $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \to \lambda_0$ und $\{u_n \in \overline{\mathfrak{A}}_{\lambda n}\}$ mit $\mathsf{T}(\lambda_n, \mathsf{u}_n) = 0$, d. h. $\mathsf{u}_n \in \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$. Wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ gilt für eine Teilfolge $\{\mathsf{u}_{n'}\}$ $\lim\limits_{n' \to \infty} \mathsf{u}_{n'} = \mathsf{u}_0 \in \overline{\mathfrak{A}}_{\lambda_0}$ und $\mathsf{T}(\lambda_0, \mathsf{u}_0) = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

2. *Fall:* $\{\mathsf{u} \in \mathfrak{A}_{\lambda_0} : \mathsf{T}(\lambda_0, \mathsf{u}) = 0\} \neq \emptyset$, d. h. es gibt Lösungen von (1) in $\mathfrak{A}_{\lambda_0}$. Wir setzen $\mathfrak{M}_{\lambda_0,\varepsilon} := \{\mathsf{u} \in \mathfrak{A}_\lambda : \mathsf{T}(\lambda, \mathsf{u}) = 0,\ |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\}$. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 \in \mathbf{R}_+$, so daß $\mathfrak{U}_{\varepsilon_0}(\mathfrak{M}_{\lambda_0,\varepsilon_0}) \subseteq \mathfrak{A}_\lambda$ für alle λ mit $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$ gilt. Anderenfalls existieren Folgen $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \to \lambda_0$ und $\{\mathsf{u}_n \in \mathfrak{U}_{1/n}(\mathfrak{M}_{\lambda_0,1/n})\}$, so daß $\mathsf{u}_n \notin \mathfrak{A}_{\lambda_n}$ bzw. $(\lambda_n, \mathsf{u}_n) \notin \mathfrak{A}$ gilt. Nach Definition von $\mathfrak{U}_{1/n}(\mathfrak{M}_{\lambda_0,1/n})$ gibt es zu jedem u_n noch ein Element $\mathsf{x}_n \in \mathfrak{M}_{\lambda_0,1/n}$ mit $\|\mathsf{u}_n - \mathsf{x}_n\| < \frac{1}{n}$. $\mathfrak{M}_{\lambda_0,1/n} \subseteq \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ ist relativ kompakt, d. h., man kann $\lim\limits_{k \to \infty} \mathsf{x}_n = \mathsf{u}_0 \in \mathfrak{B}$ annehmen, woraus wegen $\|\mathsf{u}_n - \mathsf{u}_0\| \leqq \|\mathsf{u}_n - \mathsf{x}_n\| + \|\mathsf{x}_n - \mathsf{u}_0\|$ außerdem $\lim\limits_{n \to \infty} \mathsf{u}_n = \mathsf{u}_0 \in \mathfrak{B}$ folgt. Da $\mathfrak{A}$ offen ist, gilt noch $\lim\limits_{n \to \infty} (\lambda_n, \mathsf{u}_n) = (\lambda_0, \mathsf{u}_0) \notin \mathfrak{A}$, also $\mathsf{u}_0 \in \mathfrak{A}_{\lambda_0}$. Andererseits ist $\mathsf{T}(\lambda_0, \mathsf{u}_0) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathsf{T}(\lambda_n, \mathsf{u}_n) = 0$ wegen der Stetigkeit von T, d. h. $\mathsf{u}_0 \in \mathfrak{M}_{\lambda_0,0} \subseteq \mathfrak{A}_{\lambda_0}$. Dieser Widerspruch sichert die Existenz des gewünschten ε_0.

Wir betrachten nun die Homotopie $\mathsf{H}(\mathsf{u}, \mathsf{t}) := \mathsf{T}\left(\lambda_0 + \mathsf{t}(\lambda - \lambda_0), \mathsf{u}\right)$ für $\mathsf{t} \in [0, 1]$ und $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$. Nach Konstruktion und Voraussetzung 3 ist für $\mathsf{u} \in \partial\mathfrak{A}_{\varepsilon_0}(\mathfrak{M}_{\lambda_0,\varepsilon_0})$ $\mathsf{H}(\mathsf{u}, \mathsf{t}) \neq 0$, also

$$\mathsf{deg}\left(\mathsf{T}(\lambda, \cdot), \mathfrak{U}_{\varepsilon_0}(\mathfrak{M}_{\lambda_0,\varepsilon_0}), \mathfrak{B}\right) = \text{const.} \quad \text{für} \quad |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0.$$

Außerdem ist für $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$ und $\mathsf{u} \in \mathfrak{A}_\lambda \setminus \mathfrak{A}_{\varepsilon_0}(\mathfrak{M}_{\lambda_0,\varepsilon_0})$ $\mathsf{T}(\lambda, \mathsf{u})$ nie Null. Vermöge *A2* und *A3* gilt dann sogar

$$\mathsf{d}(\lambda) = \mathsf{deg}\left(\mathsf{T}(\lambda, \cdot), \mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{B}\right) = \mathsf{deg}\left(\mathsf{T}(\lambda, \cdot), \mathfrak{U}_{\varepsilon_0}(\mathfrak{M}_{\lambda_0,\varepsilon_0}), \mathfrak{B}\right) = \text{const.}$$

Im ersten Fall ist $\mathsf{d}(\lambda) \doteq 0 = \text{const.}$ In beiden Fällen ist aber $\mathsf{d}(\lambda)$ stetig ∎

Lemma 3: *Voraussetzung:*

i) $\mathfrak{B}$ *ist ein B-Raum über* $\mathbf{C}$.

ii) $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| < \mathsf{r_e}(\mathsf{L})^{-1}$.

iii) T *aus (1) erfüllt die Bedingung* $[\mathsf{H}(\lambda)]$.

iv) $\mathsf{x} = 0$ *ist isolierte Lösung von* $\mathsf{T}(\lambda, \mathsf{x}) = 0$.

Behauptung:

1. *Ist* λ *keine charakteristische Zahl von* L, *dann ist* $\mathsf{ind}\left(\mathsf{T}(\lambda, \cdot), 0\right) = 1$.
2. *Ist* λ *charakteristische Zahl von* L, *dann ist* $\mathsf{ind}\left(\mathsf{T}(\lambda, \cdot), 0\right) \geq 2$.

Beweis: Wegen iii) ist $I - \lambda L = T_x(\lambda, 0)$ ein linearer Fredholmoperator. Einzige Nullstelle in $\mathfrak{U}_\varrho(0)$ ist $x = 0$.

Zu 1: Wähle die folgende Zerlegung

$$T(\lambda, x) = (I - \lambda L)\left(x - (I - \lambda L)^{-1} N(\lambda, x)\right)$$

mit $S = I - \lambda L$, $V = 0$, $K = 0$ und $U = -(I - \lambda L)^{-1} N(\lambda, \cdot)$. Dann ist nach Definition 3

$$\operatorname{ind}\left(T(\lambda, \cdot), 0\right) = \deg\left(T, (\lambda, \cdot), \mathfrak{U}_\varrho(0)\right) = \operatorname{Deg}\left(I, (I - U)\, \mathfrak{U}_\varrho(0)\right) = 1,$$

da aus $x + (I - \lambda L)^{-1} N(\lambda, x) = 0$ wegen iv) für hinreichend kleines $\varrho \in \mathbf{R}_+$ $x = 0$ folgt.

Zu 2: Sei P der nach Satz 1 eindeutig existierende Projektionsoperator auf den Eigenraum von λ, $Q := I - P$. Dann ist

$$T(\lambda, x) = (I - \lambda QL)\left(x - (I - \lambda QL)^{-1} \lambda PLx - (I - \lambda QL)^{-1} N(\lambda, x)\right)$$

mit $S = I - \lambda QL$, $V = \lambda PL$, $K = (I - \lambda QL)^{-1} \lambda PL$, $U = (I - \lambda QL)^{-1} N(\lambda, \cdot)$ eine mögliche Zerlegung von $T(\lambda, \cdot)$. Für diese gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}\left(T(\lambda, \cdot), 0\right) &= \deg\left(T(\lambda, \cdot), \mathfrak{U}_\varrho(0)\right)\\ &= \operatorname{Deg}\left(I - K(I - U)^{-1}, (I - U)\, \mathfrak{U}_\varrho(0), \mathfrak{B}\right),\end{aligned}$$

wobei $I - U : \mathfrak{U}_\varrho(0) \to (I - U)\, \mathfrak{U}_\varrho(0) \subseteq \mathfrak{B}$ für hinreichend kleine $\varrho \in \mathbf{R}_+$ wegen iv) wieder ein Isomorphismus ist. $K(I - U)^{-1}$ ist eine analytische Abbildung mit der charakteristischen Zahl 1 in einen endlichdimensionalen B-Raum $\mathfrak{B}_1$. Nach *A6* für Deg und einem Resultat von Cronin [4] in endlichdimensionalen Räumen (vgl. auch [19, 26]) erhält man schließlich

$$\operatorname{ind}\left(T(\lambda, \cdot), 0\right) = \operatorname{Deg}\left(I - K(I - U)^{-1} (I - U)\, \mathfrak{U}_\varrho(0) \cap \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_1\right) \geqq 2 \;\blacksquare$$

6.1. Beweis von Theorem 1

Zum lokalen Resultat a): O. B. d. A. sei $\mu > 0$.

(I) Analog zum zweiten Schritt von Satz 4 existieren für $0 < \varrho \leqq \varrho_0$ Zahlen $\eta(\varrho)$, so daß aus $\|x\| \leqq \eta(\varrho)$ und $T(\mu \pm \varrho, x) = 0$ $x = 0$ folgt, denn in $]\mu - \varrho_0, \mu + \varrho_0[$ liegen keine weiteren charakteristischen Zahlen von L.

(II) Auf der Menge $\mathfrak{M}_\varrho(\mu) := \{(\lambda, x) \in \mathbf{R} \times \mathfrak{B} : (\lambda - \mu)^2 + \|x\|^2 < \varrho^2 + \eta^2(\varrho)\}$ betrachten wir die Homotopie $H : \mathbf{R} \times \mathfrak{B} \times [0, 1] \to \mathbf{R} \times \mathfrak{B}$, definiert durch

$$H(\lambda, x, t) := \left(t(\|x\|^2 - \eta^2(\varrho)) - (1 - t)\,((\lambda - \mu)^2 - \varrho^2), T(\lambda, x)\right),$$

die wegen $[H_1(\mu)]$ und *E2* zulässig ist.
$0 = H(\lambda, x, t)$ auf $\partial\mathfrak{M}_\varrho(\mu)$ bedeutet:

a) $(\lambda - \mu)^2 + \|x\|^2 = \varrho^2 + \eta^2(\varrho)$, d. h. $\|x\|^2 - \eta^2(\varrho) = \varrho^2 - (\lambda - \mu)^2$,
b) $t\left(\|x\|^2 - \eta^2(\varrho)\right) + (1 - t)\left(\varrho^2 - (\lambda - \mu)^2\right) = \|x\|^2 - \eta^2(\varrho) = \varrho^2 - (\lambda - \mu)^2 = 0$,
c) $T(\lambda, x) = 0$,
d. h. $\lambda = \mu \pm \varrho$, $\|x\| = \eta(\varrho)$, $T(\mu \pm \varrho, x) = 0$, woraus wegen (I) $x = 0$ im Widerspruch zu $\|x\| = \eta(\varrho) \neq 0$ folgt.

(III) $H(\cdot, \cdot, 0)$ besitzt auf $\mathfrak{M}_\varrho(\mu)$ genau die beiden isolierten Nullstellen $(\mu \pm \varrho, 0)$, so daß nach Axiom *A3* gilt:

$$\deg\left(H(\cdot, \cdot, 0), \mathfrak{M}_\varrho(\mu)\right) = \operatorname{ind}\left(H(\cdot, \cdot, 0), (\mu + \varrho, 0)\right) + \operatorname{ind}\left(H(\cdot, \cdot, 0), (\mu - \varrho, 0)\right).$$

Lemma 1 liefert im Zusammenhang mit der Bedingung $[\mathsf{H}_2(\mu)]$ (Existenz einer zulässigen Homotopie)

$$\operatorname{ind}\left(\mathsf{H}(\cdot,\cdot,0),(\mu\pm\varrho,0)\right)=\operatorname{ind}\left(\mathsf{H}'(\mu\pm\varrho,0,0),(0,0)\right)$$

mit $\mathsf{H}'(\mu\pm\varrho,0,0)(\nu,\mathsf{u})=\left(2(\pm\varrho\nu),\mathsf{T}_x(\mu\pm\varrho,0)\,\mathsf{u}+\mathsf{T}_\lambda(\mu\pm\varrho,0)\,\nu\right)$

$$=\left(\pm 2\varrho\nu,\mathsf{T}_x(\mu\pm\varrho,0)\,\mathsf{u}\right)$$

$$=\left(\pm 2\varrho,\mathsf{I}-(\mu\pm\varrho)\,\mathsf{L}\right)(\nu,\mathsf{u}).$$

Auf diese Abbildung der Form $\mathsf{f}^\pm\times\mathsf{A}$, $\mathsf{f}^\pm:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\mathsf{f}^\pm(\nu)=\pm2\varrho\nu$, $\mathsf{A}:\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$, $\mathsf{A}\mathsf{u}=\left(\mathsf{I}-(\mu\pm\varrho)\,\mathsf{L}\right)\mathsf{u}$ läßt sich *A5* bzw. Folgerung 8 anwenden und man erhält:

$$\operatorname{ind}\left(\mathsf{H}'(\mu\pm\varrho,0,0),(0,0)\right)=\operatorname{ind}(\mathsf{f}^\pm,0)\cdot\operatorname{ind}\left(\mathsf{I}-(\mu\pm\varrho)\,\mathsf{L},0\right)$$

$$=\operatorname{sign}(\pm\varrho)\cdot(-1)^{\beta(\mu\pm\varrho)}$$

$$=\pm(-1)^{\beta(\mu\pm\varrho)},$$

unter Benutzung von Lemma 2 mit $\mathsf{P}^\pm$ und $\mathsf{H}^\pm$ aus Bedingung $[\mathsf{H}_2(\mu)]$. Da $\varkappa(\mu)$ ungerade ist, gilt noch $\beta(\mu+\varrho)=\beta(\mu-\varrho)+\varkappa(\mu)$, $(-1)^{\beta(\mu+\varrho)}=-(-1)^{\beta(\mu-\varrho)}$ und schließlich

$$\deg\left(\mathsf{H}(\cdot,\cdot,0),\mathfrak{M}_\varrho(\mu)\right)=2(-1)^{\beta(\mu+\varrho)}\neq 0.$$

(IV) Wegen *A4* ist dann auch $\deg\left(\mathsf{H}(\cdot,\cdot,1),\mathfrak{M}_\varrho(\mu)\right)\neq 0$, d. h., $\mathsf{H}(\cdot,\cdot,1)$ hat für alle $\varrho\leqq\varrho_0$ auf $\mathfrak{M}_\varrho(\mu)$ wenigstens eine Nullstelle (λ,x) mit $\|\mathsf{x}\|=\eta(\varrho)$, $\mathsf{T}(\lambda,\mathsf{x})=0$ und $|\lambda-\mu|<\varrho$, so daß $(\mu,0)$ BP von (1) ist ∎

Zum globalen Resultat b):

(I) Angenommen $\mathfrak{C}_\mu$ besitzt weder die Eigenschaften (A) noch (C). Dann existiert nach Satz 4 eine beschränkte, offene Menge $\mathfrak{A}\subseteq\mathbf{R}\times\mathfrak{B}$ mit den Eigenschaften ① bis ④. Da T auf $\partial\mathfrak{A}$ keine Nullstellen hat, ist auch die wegen Bedingung $[\mathsf{B}(\mathfrak{A})]$ und *E2* zulässige Homotopie $\mathsf{H}_r:\mathbf{R}\times\mathfrak{B}\times[0,1]\to\mathbf{R}\times\mathfrak{B}$, $\mathsf{H}_r(\lambda,\mathsf{x},\mathsf{t}):=\left(\|\mathsf{x}\|^2-\mathsf{t}\mathsf{r}^2,\mathsf{T}(\lambda,\mathsf{x})\right)$ nullstellenfrei auf $\partial\mathfrak{A}\times[0,1]$. $\mathsf{d}_r(\mathsf{t}):=\deg\left(\mathsf{H}_r(\cdot,\cdot,\mathsf{t}),\mathfrak{A}\right)$ ist also nach *A4* konstant und wegen der Beschränktheit von $\mathfrak{A}$ ist $\mathsf{d}_r(\mathsf{t})=\mathsf{d}_r(1)=0$ für hinreichend große $\mathsf{r}\in\mathbf{R}_+$.

(II) Da in $[-\mathsf{R},\mathsf{R}]$ höchstens endlich viele charakteristische Zahlen $\mu_1,\ldots,\mu_n$ von L liegen, besitzt die Homotopie H aus a) auf analog zu a) konstruierten Mengen $\mathfrak{M}_\varrho(\mu_i)$ die Abbildungsgrade

$$\deg\left(\mathsf{H}(\cdot,\cdot,\mathsf{t}),\mathfrak{M}_\varrho(\mu_i)\right)=\begin{cases}2(-1)^{\beta(\mu_i+\varrho)} & \text{falls } \varkappa(\mu_i) \text{ ungerade}\\ 0 & \text{falls } \varkappa(\mu_i) \text{ gerade.}\end{cases}$$

Andererseits ist $\mathsf{H}(\cdot,\cdot,1)=\mathsf{H}_r\left(\cdot,\cdot,\eta^2(\varrho)/\mathsf{r}^2\right)$ und aus dem zweiten Schritt von Satz 4 folgt, daß die Nullstellen von $\mathsf{H}_r\left(\cdot,\cdot,\eta^2(\varrho)/\mathsf{r}^2\right)$ höchstens in den Mengen $\mathfrak{M}_\varrho(\mu_i)$ liegen können. Damit ist $0=\mathsf{d}_r(1)=\mathsf{d}_r\left(\eta^2(\varrho)/\mathsf{r}^2\right)=2\sum\limits_{\varkappa(\mu_i)\,\text{ungerade}}(-1)^{\beta(\mu_i+\varrho)}$. Die letzte Summe besteht ausschließlich aus den Summanden $+1$ und -1 und ist deshalb höchsten dann Null, wenn beide Summanden in gleicher Anzahl vorkommen, d. h., insgesamt müssen geradzahlig viele Summanden bzw. charakteristische Zahlen ungerader algebraischer VFH auftreten ∎

Zum einfachen Eigenwert c):

(I) v sei der zu μ gehörige Eigenvektor, $\|\mathsf{v}\| = 1$. Jedes x läßt sich dann eindeutig in der Form $\mathsf{x} = \alpha\mathsf{v} + \mathsf{w}$ darstellen. $\mathfrak{M}_\varrho(\mu)$ zerfällt folgendermaßen:

$$\mathfrak{M}_\varrho(\mu) = \overline{\{(\lambda, \mathsf{x}) \in \mathfrak{M}_\varrho(\mu), \alpha > 0\}} \cup \overline{\{(\lambda, \mathsf{x}) \in \mathfrak{M}_\varrho(\mu), \alpha < 0\}}$$
$$:= \qquad \overline{\mathfrak{M}}_\varrho^{+} \qquad \cup \qquad \overline{\mathfrak{M}}_\varrho^{-}.$$

Nach Axiom $A3$ gilt

$$\operatorname{deg}\left(\mathsf{H}(\cdot, \cdot, 1), \mathfrak{M}_\varrho(\mu)\right) = \operatorname{deg}\left(\mathsf{H}(\cdot, \cdot, 1), \mathfrak{M}_\varrho^{+}\right) + \operatorname{deg}\left(\mathsf{H}(\cdot, \cdot, 1), \mathfrak{M}_\varrho^{-}\right), \tag{2}$$

da auf dem bei dieser Zerlegung von $\mathfrak{M}_\varrho(\mu)$ neu hinzukommenden Rand $\alpha = 0$ die Abbildung $\mathsf{H}(\cdot, \cdot, 1)$ für hinreichend kleines $\varrho \in \mathbf{R}_+$ keine Nullstellen hat. Andernfalls gäbe es Folgen $\{\varrho_n\}$, $\varrho_n \to 0$, $\{(\lambda_n, \mathsf{x}_n) \in \mathfrak{M}_{\varrho_n}(\mu)\}$,

$$\mathsf{x}_n = \mathsf{w}_n(\alpha = 0), \quad 0 \neq \|\mathsf{w}_n\| = \eta(\varrho_n) \to 0, \qquad |\lambda_n - \mu| < \varrho_n$$

mit $\quad \mathsf{T}(\lambda_n, \mathsf{w}_n) = 0, \quad$ d. h.,

$$(\mathsf{I} - \mu\mathsf{L})\, \mathsf{w}_n = \mathsf{N}(\lambda_n, \mathsf{w}_n) + (\lambda_n - \mu)\, \mathsf{L}\mathsf{w}_n.$$

Division durch $\|\mathsf{w}_n\|$ und Grenzübergang $n \to \infty$ liefert, wenn man $\mathsf{v}_n := \mathsf{w}_n/\|\mathsf{w}_n\|$, $\|\mathsf{v}_n\| = 1$ setzt, die Konvergenz von $(\mathsf{I} - \mu\mathsf{L})\, \mathsf{v}_n$ gegen 0. Die Eigentlichkeit von $\mathsf{I} - \mu\mathsf{L}$ (vgl. [25]) sichert die Existenz einer konvergenten Teilfolge $\mathsf{v}_{n'}$ gegen einen Eigenvektor der Norm 1 zu μ. Das ist aber wegen $\alpha = 0$ nicht möglich.

(II) Wir betrachten die Homotopie $\hat{\mathsf{H}} : \mathbf{R} \times \mathfrak{B} \times [0, 1] \to \mathbf{R} \times \mathfrak{B}$, definiert durch $\hat{\mathsf{H}}(\lambda, \mathsf{x}, \mathsf{t}) := \left(\|\mathsf{x}\|^2 - \eta^2(\varrho), \mathsf{x} - \lambda\mathsf{L}\mathsf{x} - \mathsf{t}\mathsf{N}(\lambda, \mathsf{x})\right)$, die wegen $[\mathsf{H}_3(\mu)]$, $E2$ und analogen Überlegungen wie im ersten und im zweiten Schritt von Satz 4 auf $\mathfrak{M}_\varrho^{+} \times [0, 1]$ zulässig ist, d. h. insbesondere keine Nullstellen auf $\partial\mathfrak{M}_\varrho^{+} \times [0, 1]$ besitzt. Setzt man noch

$$\hat{\mathsf{H}}^{+}(\lambda, \mathsf{x}, \mathsf{t}) := \left(\|\mathsf{x}\|^2 - \eta^2(\varrho), \mathsf{H}^{+}(\lambda, \mathsf{x}, \mathsf{t})\right)$$

mit der nach $[\mathsf{H}_2(\mu)]$ existierenden Homotopie H^{+}, so hat $\hat{\mathsf{H}}^{+}(\cdot, \cdot, \mathsf{t})$ nur die im Inneren von $\mathfrak{M}_\varrho^{+}$ liegende Nullstelle $(\mu, \eta(\varrho)\, \mathsf{v})$ auf $\overline{\mathfrak{M}}_\varrho^{+}$, ist also auf $\partial\mathfrak{M}_\varrho^{+} \times [0, 1]$ nullstellenfrei und damit zulässig. Durch Anwendung von $A4$ auf $\hat{\mathsf{H}}$ und $\hat{\mathsf{H}}^{+}$ erhält man dann

$$\begin{aligned} \operatorname{deg}\left(\mathsf{H}(\cdot, \cdot, 1), \mathfrak{M}_\varrho^{+}\right) &= \operatorname{deg}\left(\hat{\mathsf{H}}, (\cdot, \cdot, 1), \mathfrak{M}_\varrho^{+}\right) = \operatorname{deg}\left(\hat{\mathsf{H}}(\cdot, \cdot, 0), \mathfrak{M}_\varrho^{+}\right) \\ &= \operatorname{deg}\left(\hat{\mathsf{H}}^{+}(\cdot, \cdot, 0), \mathfrak{M}_\varrho^{+}\right) = \operatorname{deg}\left(\hat{\mathsf{H}}^{+}(\cdot, \cdot, 1), \mathfrak{M}_\varrho^{+}\right) \\ &= \operatorname{Deg}\left(\mathsf{C}, \mathfrak{M}_\varrho^{+} \cap \mathbf{R} \times \mathsf{P}^{+}\mathfrak{B}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt bei Anwendung von $A6$, da der Operator $\mathsf{C} := \hat{\mathsf{H}}^{+}(\cdot, \cdot, 1)_{/\mathfrak{M}_\varrho^{+} \cap \mathbf{R} \times \mathsf{P}^{+}\mathfrak{B}}$ in der endlichdimensionalen direkten Summe der Nullräume zu den charakteristischen Zahlen in $[0, \mu + \varrho]$ wirkt. P^{+} ist der dazu wegen Satz 1 existierende Projektionsoperator auf diesen Unterraum und $\mathfrak{D}\mathsf{eg}\,(\cdot, \cdot, \cdot)$ der Abbildungsgrad von BROUWER.

Satz 1 sichert weiterhin die Existenz einer kanonischen Basis $\{\mathsf{v}, \mathsf{x}^{ij}\}$ in $\mathsf{P}^{+}\mathfrak{B}$, d. h.

$$\mu\mathsf{L}\mathsf{v} = \mathsf{v},$$
$$\mu_i\mathsf{L}\mathsf{x}^{ij} = \mathsf{x}^{ij} + \mu_i\mathsf{x}^{i,j+1}, \qquad j = 1, \ldots, m(i), \qquad \mathsf{x}^{i,m(i)+1} := 0.$$

Der in $\mathsf{P}^{+}\mathfrak{B}$ wirkende Anteil der zu C gehörigen Funktionalmatrix bez. dieser Basis hat Jordansche Normalform. (Auf endlichdimensionalen Unterräumen kann man stets differenzierbare Normen erzwingen.) An der Stelle $(\mu, \eta(\varrho)\,\mathsf{v}) = (\mu, \eta(\varrho), 0, 0, \ldots, 0)$ verschwindet das zu μ gehörige Jordankästchen der Länge 1 und die Funktionaldeterminante hat die Gestalt

$$\left|\begin{array}{cc|ccccc|c|c|c|ccccc}
0 & 2\eta(\varrho) & 0 & \cdots & & & & & & & & & & & 0 \\
-\frac{\eta(\varrho)}{\mu} & 0 & 0 & \cdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
\hline
0 & 0 & 1-\frac{\mu}{\mu_1} & \mu & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & & & & \\
 & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & & & & & & & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \mu & & & & & & & & \\
 & & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1-\frac{\mu}{\mu_1} & 0\cdots & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & \cdots & 0 & \bullet & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & \vdots & & \bullet & & & & & & \vdots \\
\hline
 & & & & & & \vdots & & & \bullet & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\
\hline
 & & & & & & & & & \cdots 0 & 1-\frac{\mu}{\mu_n} & \mu & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & & & & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \ddots & \ddots & \mu \\
0 & \cdots & & & & & & & & \cdots 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1-\frac{\mu}{\mu_n}
\end{array}\right|$$

$$= 2 \cdot \frac{\eta^2(\varrho)}{\mu} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\mu}{\mu_i}\right)^{\varkappa(\mu_i)}$$

Da außer den ersten beiden Hauptdiagonalelementen alle anderen von der Form $1 - \mu/\mu_i$ und deshalb ungleich Null sind, ist diese Determinante von Null verschieden. Davon kann man sich am besten durch Vertauschung der ersten beiden Zeilen überzeugen. Das Vorzeichen dieser Determinante ist der Brouwer-Abbildungsgrad

$$\mathsf{Deg}\,(\mathsf{C}, \mathfrak{M}_\varrho^+ \cap \mathbf{R} \times \mathsf{P}^+\mathfrak{B}, \mathbf{R} \times \mathsf{P}^+\mathfrak{B}).$$

Aus (3) erhält man dann sofort

$$\mathsf{deg}\left(\mathsf{H}(\cdot, \cdot, 1), \mathfrak{M}_\varrho^+\right) = \pm 1 \neq 0 \tag{4}$$

und wegen (2) auch

$$\mathsf{deg}\left(\mathsf{H}(\cdot, \cdot, 1), \mathfrak{M}_\lambda^-\right) \neq 0. \tag{5}$$

(III) $\mathfrak{D}_\mu^+(\mathfrak{D}_\mu^-)$ sei die größte zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{C}_\mu$, die $(\mu, 0)$ enthält und für die das „α“ in der Linearkombination $\mathsf{x} = \alpha\mathsf{v} + \mathsf{w}$ nichtnegativ (nichtpositiv) ist. Diese Mengen sind wegen (4, 5) nicht leer. $\mathfrak{C}_\mu^\pm$ sei die größte zusammenhängende Teilmenge von $\mathfrak{C}_\mu \setminus \mathfrak{D}_\mu^\pm$, die $(\mu, 0)$ enthält.

(IV) Angenommen, $\mathfrak{C}_\mu^+$ erfüllt keine der Bedingungen (A), (B′) und (C), dann gibt es analog zu Satz 4 eine beschränkte, offene Menge $\mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{S}(\mathsf{R})$, die keine Punkte $(\lambda, 0)$

mit charakteristischer Zahl λ enthält und für die gilt:

$$\mathfrak{C}_\mu^+ \setminus \mathbf{R} \times \{\|\mathbf{x}\| < \eta(\varrho)\} \subseteq \mathfrak{D},$$

$$\mathfrak{S} \cap \partial\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{C}_\mu^+ \cap \mathbf{R} \times \{\|\mathbf{x}\| \leqq \eta(\varrho)\},$$

$$\mathbf{R} \times \left\{\|\mathbf{x}\| \leqq \frac{1}{2}\,\eta(\varrho)\right\} \cap \mathfrak{D} = \emptyset.$$

Setze

$$\mathfrak{A}^+ := \left(\mathfrak{M}_\varrho^+ \cap \mathbf{R} \times \{\|\mathbf{x}\| \leqq \eta(\varrho)\right) \cup \left(\mathfrak{D} \cap \mathbf{R} \times \{\|\mathbf{x}\| \geqq \eta(\varrho)\right).$$

Die Abbildung $\mathsf{H}_r(\cdot, \cdot, 1)$ aus b) hat für hinreichend große r auf $\mathfrak{A}^+$ und für alle $r \geqq \eta(\varrho)$ auf $\partial\mathfrak{A}^+$ keine Nullstellen, somit ist

$$\deg\left(\mathsf{H}_r(\cdot, \cdot, t), \mathfrak{A}^+\right) = 0 \quad \text{für} \quad \eta^2(\varrho)/r^2 \leqq t \leqq 1; \quad r \text{ hinreichend groß.} \tag{6}$$

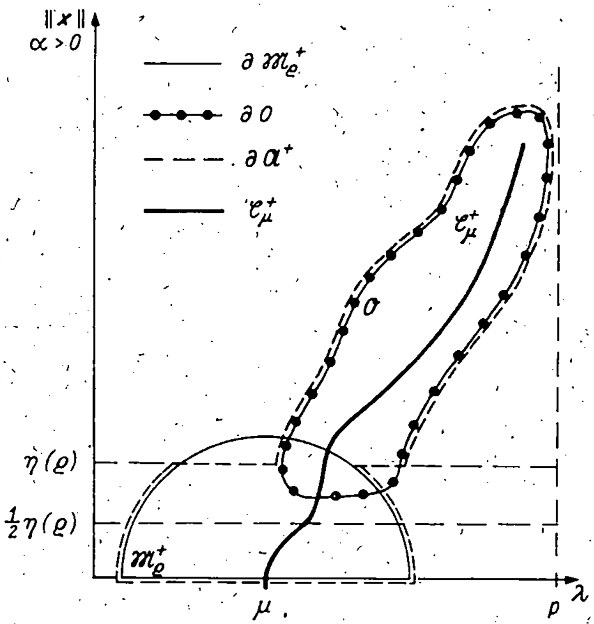

Abb. 2

(Auf etwa bei der Konstruktion von $\mathfrak{A}^+$ neu dazukommenden Randstücken in $\mathbf{R} \times \{\|\mathbf{x}\| = \eta(\varrho)\}$ können keine Nullstellen von H_r liegen, da sich diese sowohl in $\mathfrak{D}$ als auch in $\mathfrak{M}_\varrho^+$ befinden, die Randstücke aber immer nur in einer der beiden Mengen.) Nach (II) gilt andererseits

$$\begin{aligned}\deg\left(\mathsf{H}_r(\cdot, \cdot, \eta^2(\varrho)/r^2), \mathfrak{A}^+\right) &= \deg\left(\mathsf{H}(\cdot, \cdot, 1), \mathfrak{A}^+\right)\\ &= \deg\left(\mathsf{H}(\cdot, \cdot, 1), \mathfrak{M}_\varrho^+\right) \neq 0 \quad (\text{vgl. } (4))\end{aligned}$$

im Widerspruch zu (5). $\mathfrak{C}_\mu^+$ erfüllt also wenigstens eine der Bedingungen (A), (B′) oder (C). Die Beweise für $\mathfrak{C}_\mu^-$ und $\mu < 0$ werden analog geführt.

6.2. Beweis von Theorem 2

Zum lokalen Resultat a):

Angenommen $(\mu, 0)$ ist kein Bifurkationspunkt von (1), dann gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}_\varrho(\mu, 0) \subseteq \mathbf{C} \times \mathfrak{B}$, die keine nichttrivialen Lösungen enthält. In $\bigcup_{x \in \mathfrak{B}} \left(\mathfrak{U}_\varrho(\mu, 0)\right)^x$, der zugehörigen Umgebung von μ, liegen bei hinreichend kleinem $\varrho \in \mathbf{R}_+$ keine weiteren charakteristischen Zahlen. Wir betrachten $\mathsf{H}(\mathsf{x}, \mathsf{t}) := \mathsf{T}(\mu + \mathsf{t}\varrho, \mathsf{x})$. H ist offenbar eine im Sinne von Satz 3 zulässige Homotopie. Unter Verwendung von *A4* und Lemma 3 folgt mit $\hat{\mathfrak{U}}_\varrho(0) := \bigcup_{\lambda \in \mathbf{C}} \left(\mathfrak{U}_\varrho(\mu, 0)\right)_\lambda$

$$\begin{aligned} 1 &= \operatorname{ind}\left(\mathsf{T}(\mu + \varrho, \cdot), 0\right) = \deg\left(\mathsf{H}(\cdot, 1), \hat{\mathfrak{U}}_\varrho(0)\right) \\ &= \deg\left(\mathsf{H}(\cdot, 0), \hat{\mathfrak{U}}_\varrho(0)\right) = \operatorname{ind}\left(\mathsf{T}(\mu, \cdot), 0\right) \geqq 2. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch, d. h. $(\mu, 0)$ ist BP von (1).

Zum globalen Resultat b):

Angenommen $\mathfrak{C}_\mu$ erfüllt keine der Bedingungen (A) oder (C), dann existiert vermöge Satz 4 eine beschränkte, offene Menge $\mathfrak{A} \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leqq \mathsf{R}\} \times \mathfrak{B}$ mit ①—④. Nach Satz 5 ist

$$\mathsf{d}(\lambda) := \deg\left((\mathsf{T}\lambda, \cdot), \mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{B}\right) = \text{const} = \mathsf{c}$$

für alle in Frage kommenden λ-Werte. Für $|\lambda| > \mathsf{R}$ kann $\mathsf{T}(\lambda, \cdot)$ keine Nullstellen auf $\mathfrak{A}_\lambda$ haben, d. h., $\mathsf{d}(\lambda) = 0$. Andererseits ist aber nach Lemma 3

$$\mathsf{d}(\mu) = \deg\left(\mathsf{T}(\mu, \cdot), \mathfrak{A}_\mu, \mathfrak{B}\right) \geqq \deg\left(\mathsf{T}(\mu, \cdot), \hat{\mathfrak{U}}_\varrho(0), \mathfrak{B}\right) \geqq 2,$$

da auch die Indizes zu den anderen Nullstellen in $\mathfrak{A}_\mu$ positiv sind. Somit muß (A) oder (C) gelten.

LITERATUR

[1] Ackermann, S.: Axiomatische Bifurkationstheorie und Verzweigung bei ungeraden Potentialoperatoren. Diss.: Karl-Marx-Universität Leipzig 1980.

[2] Amann, H., und S. Weiss: On the uniqueness of the topological degree. Math. Z. **130** (1973), 39—54.

[3] Browder, F. E., and W. V. Petryshyn: Approximation methods and the generalized topological degree for nonlinear mappings in Banach spaces. J. Funct. Anal. **3** (1969), 217—245.

[4] Cronin, J.: Analytical functional mappings. Ann. of Math. **58** (1953), 175—181.

[5] Deimling, K.: Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade. Hochschultext. Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1974.

[6] Fenske, Ch.: Leray-Schauder-Theorie für eine Klasse differenzierbarer Abbildungen in Banach-Räumen. Ges. für Math. und Datenverarb. Bonn **48** (1971).

[7] Ize, J.: Bifurcation theory for Fredholm operators. Sonderforschungsbereich 72 Approximation und Optimierung, Univers. Bonn. Preprint Nr. 67.

[8] Krasnoselski, M. A.: Topological methods in the theory of nonlinear integral equations. Macmillan: New York 1964.

[9] Красносельский, М. А.: и П. П. Забрейко: Геометрические методы нелинейного анализа. Изд-во НАУКА: Москва 1975.

[10] Nussbaum, R. D.: The fixed point index for local condensing maps. Annali Math. pura appl. **89** (1971), 217—258.

[11] —: On the uniqueness of the topological degree for k-set-contractions. Math. Z. 137 (1974), 1—6.
[12] —: Estimates for the number of solutions of operator equations. Applicable Analysis 1 (1971), 183—200.
[13] Petryshyn, W. V.: Some Examples Concerning the Distinctive Features of Bounded linear A-proper Mappings and Fredholm Mappings. Arch. Rat. Mech. Anal. 33 (1969), 331—338.
[14] Priwalow, J. J.: Einführung in die Funktionentheorie, Bd. 1—3. Teubner-Verlag: Leipzig 1970.
[15] Rabinowitz, P. H.: Some global aspects of nonlinear eigenvalue problems. J. Funct. Anal. 7 (1971), 487—513.
[16] —: Some aspects of nonlinear eigenvalue problems. Rocky Mountains J. of Math. 3 (1973), 161—202.
[17] Riesz, F., und B.-Sz. Nagy: Vorlesungen über Funktionalanalysis. (Übersetzung aus dem Französischen.) VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin 1956.
[18] Садовский, Б. Н.: Предельно компактные и уплотняющие операторы. Успехи мат. Наук 27 (1972), 81—146.
[19] Schwartz, J. T.: Compact analytic mappings of Banach-Spaces and a theorem of Jane Cronin. Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963), 153—260.
[20] Скрыпник, И. В.: Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Изд-во НАУКОВА ДУМКА: КИЕВ 1973.
[21] Stuart, C. A.: Some bifurcation theory for k-set-contractions. Proc. London Math. Soc., III. Ser. 27 (1973), 531—550.
[22] Thomas, J. W.: A bifurcation theorem for k-set-contractions. Pacific J. Math. 44, 2 (1973) 749—756.
[23] Toland, J. F.: Global Bifurcation Theory via Galerkin's Method. University of Essex, Fluid mechanics Research Institute, Report Nr. 69 (1976).
[24] Whyburn, G. T.: Analytic topology. Amer. Math. Soc. colloquium publications, vol. 28, New York 1942.
[25] Yood, B.: Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuous transformation. Duke Math. J. 18 (1951), 599—614.
[26] Zeidler, E.: Existenz, Eindeutigkeit, Eigenschaften und Anwendungen des Abbildungsgrades im $\mathbf{R}^n$. Theory of nonlinear operators. Proceedings of a summer-school held in october 1972 at Neuendorf. Akademie-Verlag: Berlin 1974, 259—311.
[27] —: Zur Eindeutigkeit von Fixpunktindizes für nichtkompakte Operatoren. Math. Nachr. 72 (1976), 51—85.
[28] —: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft: Leipzig 1976.

Manuskripteingang: 18. 12. 1981

VERFASSER:

Dr. Stefan Ackermann
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
DDR-7010 Leipzig, Karl-Marx-Platz 10/11