

Zur zeitminimalen Randsteuerung einer homogenen schwingenden Saite

W. EICHENAUER

(Prof. Dr. F. A. Willers zu seinem 100. Geburtstag gewidmet)

In dieser Arbeit geht es darum, eine einseitig eingespannte homogene schwingende Saite durch eine Randsteuerung bei gegebener Anfangsverteilung unter Steuerungsnormbeschränkungen zeitminimal in die Ruhelage mit anschließendem Verbleiben zu steuern. Das Problem erweist sich einem Momentenproblem als äquivalent, welches auf Grund seiner besonderen Struktur leicht gelöst werden kann. Zur Bestimmung von Minimalzeit und zugehöriger zeitoptimaler Steuerung muß im wesentlichen nur eine transzendente Gleichung in einer Variablen gelöst werden. Numerische Ergebnisse werden am Schluß der Arbeit präsentiert.

Пусть имеется колеблющаяся однородная струна с одним прикрепленным концом и с крайевым управлением. Ставится задача быстрогодействия из данного начального положения струны в положение покоя с последующим ее оставанием в нем при наличии ограничения на норму управления. Эта проблема эквивалентна некоторой проблеме моментов, которая из-за ее особой структуры легко решается. Для определения минимального времени и соответствующего управления достаточно, по существу, решить одно трансцендентное уравнение с одной переменной. В конце работы приводятся численные результаты.

In this paper the following problem is considered: A homogeneous vibrating string which is clamped at one end has to be steered into a position of permanent rest by a boundary control. Given an initial state of vibration and a bound for the norm of the control, a minimum time and a corresponding time minimal control have to be determined. This problem turns out to be equivalent to a moment problem which can be solved easily, due to its special structure. Essentially only one transcendental equation in one variable has to be solved for determining the required time and the corresponding control. Numerical results are presented at the end of the paper.

0. Einführung

Betrachtungen zur optimalen Steuerung schwingender Saiten befinden sich in vielen Veröffentlichungen. Ein allgemeines Saitenmodell wird in [10] beschrieben. Allerdings wird dort nur das Problem der Null-Steuerbarkeit, d. h. die Überführung eines Zustandes in die Ruhelage, behandelt und auf Optimierungsaspekte verzichtet. Andere Problemstellungen, wie „Ein Kontroll-Approximationsproblem für die schwingende Saite“ und „Über die einseitige Randsteuerung einer schwingenden Saite in einen Zustand minimaler Energie“, befinden sich in [5] und [6].

In [1] und [9] werden prinzipiell die gleichen Probleme wie in der hier vorliegenden Arbeit behandelt. Das Schwingungskontrollproblem wird in ein äquivalentes Momentenproblem verwandelt. Die in [1] und [9] vorgestellten Momentenprobleme unterscheiden sich jedoch von denen der hier vorliegenden Arbeit in der Weise, daß sie 2 Momentengleichungen weniger enthalten. Dies entspricht dem Verzicht auf die Forderung, daß die schwingende Saite nach Ablauf der Steuerungszeit in der Ruhelage verbleibt. Durch Wegfall der beiden Momentengleichungen vereinfachen sich die zu lösenden Probleme erheblich.

Ein mit dem zeitminimalen Problem verwandtes, sogenanntes Norm-Minimum-Problem, bei dem die schwingende Saite mit minimaler Norm der Steuerung aus einem Anfangszustand in vorgegebener Zeit in die Ruhelage mit anschließendem Verbleiben zu überführen ist, wird in [8] ausführlich behandelt.

Algorithmen zur Bestimmung von Minimalzeit und zugehöriger zeitminimaler Steuerung im Falle von Steuerungsbeschränkungen in der wesentlichen Supremumsnorm sind in [4] und [7] zu finden, allerdings nur für Kontrollprobleme mit gewöhnlichen Differentialgleichungen. Immerhin lassen sich damit aber, durch Modifikation auf die hier vorliegende Hilbert-Raum-Norm-Beschränkung der Steuerungen Näherungslösungen für die gesuchten Probleme gewinnen. Für das hier betrachtete Modell ist jedoch auf Grund seiner ganz speziellen Struktur ein direkter Lösungsweg, der später genau beschrieben wird, mit viel weniger Aufwand verbunden.

1. Problemstellung

Gegeben sei eine linksseitig eingespannte homogene Saite, deren zugehörige Differentialgleichung nach sinnvoller Normierung

$$y_{tt}(x, t) - y_{xx}(x, t) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

lautet. Als Anfangsbedingungen werden

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_1(x), \quad x \in (0, 1), \quad (1.2)$$

mit

$$y_0 \in H_2[0, 1], \quad y_1 \in H_1[0, 1], \quad (1.3)$$

$$y_0(0) = y_0(1) = y_1(0) = y_1(1) = 0,$$

zugrunde gelegt, wobei $H_k[a, b]$ allgemein für $a < b$ und $k \in \mathbb{N}$ durch

$$H_k[a, b] = \{w \in L_2[a, b] \mid w', \dots, w^{(k)} \text{ existieren fast überall und gehören zu } L_2[a, b]\} \quad (1.4)$$

definiert ist. Die Saite werde am rechten Rand mit

$$y(1, t) = v(t), \quad t \geq 0, \quad v_{|[0, T]} \in H_2[0, T] \text{ für jedes } T > 0 \quad (1.5)$$

gesteuert. Wir nehmen weiterhin an, daß der Steuerungsmechanismus zum Zeitpunkt $t = 0$ noch nicht aktiviert ist, das heißt, es gelte $v(0) = v'(0) = 0$. Nach [11] hat dann unser Problem (1.1), (1.2), (1.5) und (1.6) genau eine verallgemeinerte Lösung $y(x, t, v, v'')$, welche durch

$$y(x, t, v, v'') = \hat{y}(x, t) - y^*(x, t, v'') + xv(t) \quad (x \in (0, 1), t > 0)$$

gegeben ist. Hierbei gilt

$$\hat{y}(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos j\pi t + b_j \sin j\pi t) \sin j\pi x \quad (x \in (0, 1), t > 0)$$

mit

$$a_j = 2 \int_0^1 y_0(x) \sin j\pi x \, dx, \quad b_j = (2/j\pi) \int_0^1 y_1(x) \sin j\pi x \, dx \quad (j \in \mathbb{N}) \quad (1.7)$$

und

$$y^*(x, t, v'') = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{j+1}}{(j\pi)^2} \int_0^t v''(\tau) \sin j\pi(t - \tau) \, d\tau \sin j\pi x \quad (x \in (0, 1), t > 0).$$

In [8] ist erklärt, welche Anfangsrandwertprobleme von $\hat{y}(\cdot, \cdot)$ und $y^*(\cdot, \cdot, v'')$ gelöst werden.

Wir haben nun das folgende Ziel: Zu vorgegebener Norm $\gamma > 0$ ist eine möglichst kleine Zeit T^* und eine zugehörige Steuerung $v^* \in H_2[0, T^*]$ mit (1.6) und

$$\|v^*\|_{H_2[0, T^*]} := \left(\int_0^{T^*} [v^{*''}(t)]^2 dt \right)^{1/2} \tag{1.8}$$

zu finden, so daß damit die schwingende Saite in die Ruhelage überführt wird und dort auch verbleibt, falls man zum Zeitpunkt $t = T^*$ den Steuerungsmechanismus abschaltet, das heißt, es soll

$$y(x, t, v, v') = y_t(x, t, v, v') = 0 \quad (x \in (0, 1), T \geq T^*) \tag{1.9}$$

für

$$V(t) = \begin{cases} v^*(t) & t \in [0, T^*], \\ 0, & t > T^*, \end{cases} \tag{1.10}$$

gelten.

Aus (1.10) läßt sich wegen $v^* \in H_2[0, T^*]$ auch

$$v^*(T^*) = v^{*'}(T^*) = 0 \tag{1.11}$$

implizieren. Umgekehrt gilt mit (1.11) auch $V_{|[0, T]} \in H_2[0, T]$ für jedes $T > 0$.

2. Umwandlung in ein äquivalentes Momentenproblem

Das Problem (1.8), (1.9), (1.11) läßt sich unter Ausnutzung der Vollständigkeit von $\{\sin j\pi x \mid j \in \mathbb{N}, x \in (0, 1)\}$, Berücksichtigung von $v(0) = v'(0) = 0$ sowie Anwendung der Additionstheorie für trigonometrische Funktionen (man vergleiche für die Herleitung etwa [3]) in ein äquivalentes Momentenproblem umwandeln. Setzt man hierzu

$$u^*(t) = v^{*''}(t), \quad \text{fast überall in } [0, T^*],$$

wobei T^* variabel ist, so lautet das Momentenproblem, welches mit (P_γ^*) bezeichnet werden soll, wie folgt:

(P_γ^*) *Gesucht ist ein Paar (u^*, T^*) , $u^* \in L_2[0, T^*]$, wobei T^* möglichst klein sein soll, so daß u^* den Momentengleichungen*

$$\int_0^{T^*} u^*(t) g_j(t) dt = c_j \quad (j \in \mathbb{N}) \tag{2.1}$$

genügt und außerdem

$$\left(\int_0^{T^*} [u^*(t)]^2 dt \right)^{1/2} \leq \gamma \tag{2.2}$$

gilt.

Hierbei ist

$$\begin{aligned} g_1(t) &= t, \quad g_2(t) = \sqrt{2}/2, \quad g_{2k+1}(t) = \cos k\pi t, \quad g_{2k+2}(t) = \sin k\pi t \\ (t \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}), \\ c_1 &= c_2 = 0, \quad c_{2k+1} = (-1)^{k+1}/2 \cdot b_k \cdot (k\pi)^2, \quad c_{2k+2} = (-1)^k/2 \cdot a_k \cdot (k\pi)^2 \\ (k \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

mit a_k und b_k nach (1.7). Hat man nun mit dem Paar (u^*, T^*) eine Lösung von (P_{γ}^*) gefunden, so ergibt sich durch

$$v^*(t) = \int_0^t (t-s) u^*(s) ds \quad (t \in [0, T^*]) \quad (2.4)$$

und v nach (1.10) eine Lösung unseres Problems (1.8), (1.9), (11.1).

Wir fragen uns nun, wann (P_{γ}^*) , $\gamma > 0$, überhaupt lösbar ist. Dazu bemerken wir zunächst — in [3] wird dies auch hergeleitet — daß $c = (c_1, c_2, \dots)^T \in l_2$ mit (1.3) äquivalent ist. In [3] ist nun der folgende Satz bewiesen:

Satz 2.1: (P_{γ}^*) ist für jedes $\gamma > 0$ genau dann lösbar, falls $c \in l_2$ gilt ■

Somit hat man mit (1.3) alle diejenigen Zustände der schwingenden Saite charakterisiert, die sich zeitminimal unter Steuerungsnormbeschränkungen in die Ruhelage mit anschließendem Verbleiben dort überführen lassen.

3. Das Minimalzeitproblem als Norm-Minimum-Problem

Als Hilfsmittel werden nun weitere Momentenprobleme benötigt. Seien hierzu eine Zeit $T > 0$ und ein Vektor $c \in l_2$ (aus (y_0, y_1) gemäß (2.3) und (1.7) resultierend) vorgegeben. Wir betrachten das Problem

(P_T) Gesucht ist ein $\hat{u}_T \in L_2[0, T]$, welches den Momentengleichungen

$$\langle \hat{u}_T, g_j \rangle_{L_2[0, T]} = c_j \quad (j \in \mathbb{N}) \quad (3.1)$$

genügt, dessen Norm $\|\hat{u}_T\|_{L_2[0, T]}$ möglichst klein ist.

Dabei bedeuten $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_2[0, T]}$ und $\|\cdot\|_{L_2[0, T]}$ das Skalarprodukt und die Norm in $L_2[0, T]$. Die c_j und g_j ($j \in \mathbb{N}$) sind dabei wieder durch (2.3) definiert.

Sei nun

$$\eta(T) = \inf \{ \|u\|_{L_2[0, T]} \mid \text{Es gibt ein } u \in L_2[0, T], \text{ welches den Momentengleichungen (3.1) genügt} \},$$

wobei für die leere Menge $\inf(\emptyset) = \infty$ gesetzt wird. In [3] ist gezeigt, daß im Falle $T > 2$ und $c \in l_2$ stets $\eta(T) < \infty$ gilt. Je nach Vorgabe von $c \in l_2$ sind nun nach [3] die folgenden drei Fälle möglich.

- $\lim_{\substack{T \rightarrow 2 \\ T > 2}} \eta(T) = \infty$,
- $\lim_{\substack{T \rightarrow 2 \\ T > 2}} \eta(T) < \infty$, $\eta(T) = \infty$ für jedes $T < 2$,
- es existiert ein $T_0 < 2$ mit $\eta(T_0) < \infty$.

Es werden dort auch notwendige und hinreichende Bedingungen für das Zutreffen von a), b) und c) angegeben. Wir beschäftigen uns hier aber aus Gründen der Einfachheit ausschließlich mit dem Fall a). Dafür muß notwendig und hinreichend

$$y_0'(1) \neq 0 \quad (3.2)$$

oder

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{2j+2}/j \neq 0$$

gelten. Weiterhin gilt dann nach [3]:

- i) $\eta(\cdot)$ ist in $(2, \infty)$ stetig und monoton nicht steigend.
- ii) (P_γ^*) ist für jedes $\gamma > 0$ eindeutig lösbar. Ist (u^*, T^*) die Lösung, so gilt $\|u^*\|_{L_1[0, T^*]} = \gamma$ ($T^* > 2$). Ferner ist u^* auch eindeutige Lösung des Problems (P_{T^*}) .
- iii) Die Minimalzeit T^* ist als kleinste Lösung T der Gleichung

$$\|\hat{u}_T\|_{L_1[0, T]} = \gamma \quad (3.3)$$

charakterisiert, wobei \hat{u}_T die Lösung von (P_T) ist. Ist darüber hinaus $\eta(\cdot)$ in $(2, \infty)$ monoton fallend, so ist T^* die Lösung T der Gleichung (3.2).

Aus iii) wird klar, daß zur Bestimmung der Minimalzeit T^* nur noch $\|\hat{u}_T\|_{L_1[0, T]}$ berechnet und $T > 2$ so variiert werden muß, daß (3.3) mit möglichst kleinem T erfüllt ist. Zur Berechnung von $\|\hat{u}_T\|_{L_1[0, T]}$ benötigen wir die Darstellung von \hat{u}_T . Der besonderen Struktur des Problems (P_T) ist es zu verdanken, daß \hat{u}_T explizit dargestellt werden kann. Für eine genaue Herleitung vergleiche man etwa [3].

Sei nun \tilde{u}_T die Lösung des Problems (\tilde{P}_T) , welches aus (P_T) durch Streichen der ersten Momentengleichung

$$\langle u, g_1 \rangle_{L_1[0, T]} = 0$$

hervorgeht. Habe $T > 2$ die Darstellung

$$T = 2l + \delta \quad (l \in \mathbb{N}, \delta \in [0, 2]), \quad (3.4)$$

dann ist $\tilde{u}_T \in L_2[0, T]$ gegeben durch

$$\tilde{u}_T(t) = \begin{cases} 1/(l+1) \sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j(t), & t \in [0, \delta), \\ 1/l \sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j(t), & t \in [\delta, 2), \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\tilde{u}_T(t+2) = \tilde{u}_T(t), \quad t, t+2 \in [0, T].$$

Man vergleiche hierzu etwa auch die Darstellungen in [1] oder [9] für ähnliche Probleme.

Sei weiterhin φ die beste Approximation von g_1 in

$$\tilde{H}_T = \overline{\text{lin}(g_2, g_3, \dots)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ g \mid g = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_{i+1}, \alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \right\},$$

die wegen der Abgeschlossenheit von $\overline{\text{lin}(g_2, g_3, \dots)}$ existiert. Wir werden später zeigen, daß

$$\inf_{\varphi \in \tilde{H}_T} \|\varphi - g_1\|_{L_1[0, T]} > 0$$

zutreffend ist. Man verifiziert leicht, daß φ die Gestalt

$$\left. \begin{array}{l} t+l \quad \text{in} \quad [0, T-2l) \\ t+l-1 \quad \text{in} \quad [T-2l, 2) \end{array} \right\}$$

besitzt, denn es gilt $\langle \varphi - g_1, g_j \rangle_{L_1[0, T]} = 0$ ($j \geq 2$). Setzt man nun

$$\hat{u}_T = \tilde{u}_T - [\langle \tilde{u}_T, g_1 \rangle_{L_1[0, T]} (\varphi(t) - g_1(t))] / \|\varphi - g_1\|_{L_1[0, T]}^2, \quad (3.6)$$

so ergibt sich mit den Eigenschaften von φ

$$\langle \hat{u}_T, g_j \rangle_{L_1[0, T]} = c_j \quad (j \in \mathbb{N}, \hat{u} \in \overline{\text{lin}(g_1, g_2, g_3, \dots)}),$$

so daß nach einem Resultat aus [3] $\hat{u}_T = \hat{u}_T$ folgt.

Nun müssen, um zur Darstellung von \hat{u}_T zu gelangen, nur noch die Größen $\langle \hat{u}_T, g_1 \rangle_{L_1[0, T]}$ und $\|\varphi - g_1\|_{L_1[0, T]}^2$ aus (3.6) mit \hat{u}_T nach (3.5) berechnet werden. Durch etwas umfangreichere Rechnungen ergibt sich hier

$$\langle \hat{u}_T, g_1 \rangle_{L_1[0, T]} = \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k+1} \sin k\pi\delta/(k\pi) + c_{2k+2} (-\cos k\pi\delta - 1)/(k\pi)), \quad (3.7)$$

$$\|\varphi - g_1\|_{L_1[0, T]}^2 = \delta(l^2 + l) + 2(l^3 - l)/3.$$

Setzt man nun $R(\delta) = \langle \hat{u}_T, g_1 \rangle_{L_1[0, T]}$, mit δ nach (3.4), so gilt

$$R'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k+1} \cos k\pi t + c_{2k+2} \sin k\pi t) \quad (t \in [0, T]), \quad (3.8)$$

da nach einem Ergebnis aus [2] R' sich als gliedweise Ableitung von R aus (3.7) gewinnen läßt. Somit erhält man für \hat{u}_T die Darstellung:

$$\hat{u}_T(t) = \begin{cases} R'(t)/(l+1) - R(\delta) \cdot (2j-l)/(\delta(l^2+l) + 2(l^3-l)/3) \\ \text{in } [2j, T-2l+2j), \quad j=0, \dots, 1, \\ R'(t)/l - R(\delta) \cdot (2j-l+1)/(\delta(l^2+l) + 2(l^3-l)/3) \text{ in} \\ [T-2l+2j, 2(j+1)), \quad j=0, \dots, l-1. \end{cases} \quad (3.9)$$

Hieraus läßt sich auch $\|\hat{u}_T\|_{L_1[0, T]}$ berechnen. Unter Ausnutzung der Orthonormalität der $g_j|_{[0, 2]}$ ($j \geq 2$) und der Orthogonalität von \hat{u}_T und $\varphi - g_1$ ergibt sich mit

$$\|\hat{u}_T\|_{L_1[0, T]} = \left(\sum_{j=3}^{\infty} c_j^2/(l+1) + \int_0^2 (R'(t))^2 dt/l(l+1) \right)^{1/2}$$

nach einiger Zwischenrechnung unter Ausnutzung von

$$R(\delta) = \int_0^{\delta} R'(t) dt + \int_0^2 t \cdot R'(t) dt$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} \eta(T) = \|\hat{u}_T\|_{L_1[0, T]} = & \left[\sum_{j=3}^{\infty} c_j^2/(l+1) + \int_0^2 (R'(t))^2 dt/l(l+1) \right. \\ & \left. + \left(\int_0^{\delta} R'(t) dt + \int_0^2 t R'(t) dt \right)^2 / (\delta(l^2+l) + 2(l^3-l)/3) \right]^{1/2}. \quad (3.10) \end{aligned}$$

Somit folgt der

Satz 3.1: Seien $\gamma > 0$ und $c \in l_2$ mit $c_1 = c_2 = 0$ gegeben. Dann ergibt sich die Minimalzeit $T^* = 2l^* + \delta^*$ als kleinste Lösung $T = 2l + \delta$ ($l \in \mathbb{N}$, $\delta \in [0, 2)$) der

Gleichung

$$\bar{\eta}(T) := \left[\sum_{j=3}^{\infty} c_j^2 / (l + 1) + \int_{\delta}^2 (R'(t))^2 dt / l(l + 1) + \left(\int_0^{\delta} R'(t) dt + \int_0^2 t R'(t) dt \right)^2 / (\delta(l^2 + l) + 2(l^3 - l)) / 3 \right]^{1/2} - \gamma^2 = 0, \quad (3.11)$$

$u^* = \hat{u}_{T^*}$ ergibt sich gemäß (3.9) mit $T^* = 2l^* + \delta^*$ an Stelle von $T = 2l + \delta$ und die Steuerung v^* erhält man schließlich über (2.4).

4. Numerische Ergebnisse

Zunächst soll ein Algorithmus zur Gewinnung der Lösung des Problems (P_{γ}^*) bei vorgegebenem $\gamma > 0$ und $c \in l_2$ mit $c_1 = c_2 = 0$ vorgestellt werden. Wir beschränken uns dabei auf den Fall, daß

$$c_j = 0, \quad j \geq j_0, \quad \text{für ein } j_0 \in \mathbb{N}$$

gilt. Es läßt sich dann zeigen, daß $\eta(\cdot)$ aus (3.10) in $(2, \infty)$ monoton fallend ist.

Mit Hilfe von (3.11) ergibt sich nun für $l \in \mathbb{N}, l \geq 2$

$$\bar{\eta}(2l) = \|c\|_{l_2}^2 / l - 3\langle c, \bar{\omega} \rangle_{l_2} / (l^3 - l) - \gamma^2 =: \bar{\eta}(2l)$$

mit

$$\bar{\omega} = (0, 0, 0, 1/\pi, 0, 1/2\pi, 0, 1/3\pi, 0, \dots)^T.$$

$\bar{\eta}(\cdot)$ und $\eta(\cdot)$ stimmen an den Stellen 4, 6, 8, ... miteinander überein. Da $\bar{\eta}(\cdot)$ in $(2, \infty)$ monoton fallend ist, existiert entweder genau ein $l^* \in \mathbb{N}$ mit

$$\bar{\eta}(2l^*) \geq 0, \quad \bar{\eta}(2l^* + 2) < 0. \quad (l^* \in \mathbb{N}) \quad (4.1)$$

oder es gilt

$$\bar{\eta}(2l^*) < 0 \quad \text{für alle } l^* \in \mathbb{N}, \quad l^* \geq 2. \quad (4.2)$$

Im Falle (4.1) kann man das so gefundene l^* in (3.11) für l einsetzen und dann δ^* als Lösung der Gleichung (3.11) berechnen. Diese Nullstellenbestimmung kann, da $\bar{\eta}(\cdot)$ in $(2l^*, 2l^* + 2)$ beliebig oft differenzierbar ist, versuchsweise mit dem Newton-Verfahren erfolgen, wobei als Startwert derjenige Wert von δ , der sich als Nullstelle auf der Verbindungsgeraden durch die Punkte

$$(2l^*, \bar{\eta}(2l^*)) \quad \text{und} \quad (2l^* + 2, \bar{\eta}(2l^* + 2))$$

ergibt, genommen werden kann. Es ist dann $T^* = 2l^* + \delta^*$. Gilt dagegen (4.2), so folgt ja $T^* \in (2, 4)$, mithin $l^* = 1$, und δ^* kann als Nullstelle von (3.11) mit einem beliebigen Bestimmungsverfahren erhalten werden; es gilt $T^* = 2 + \delta^*$. In beiden Fällen (4.1), (4.2) wird $u^* = \hat{u}_{T^*}$ gemäß (3.9) bestimmt. v^* ergibt sich schließlich gemäß (2.4).

In der folgenden Tabelle wird für das Beispiel

$$y_0(x) = \sin(q\pi x)/q, \quad y_1(x) = 0 \quad (x \in [0, 1], \quad q = 1, 2, 4, 8)$$

γ	T^* für $q = 1$	T^* für $q = 2$	T^* für $q = 4$	T^* für $q = 8$
10^{-3}	48704546	194818176	779272704	3117090817
$3 \cdot 10^{-3}$	5411616	21646465	86585857	346343425
10^{-2}	487045	1948182	7792727	31170909
$3 \cdot 10^{-2}$	54116,327	216465	865859	3643434
10^{-1}	4870,477568	19482,785	77927,310	311709
$3 \cdot 10^{-1}$	541,311177	2164,696479	8658,605089	34634,329
1	48,619667	194,787877	779,313691	3117,077568
1,5	21,616201	86,665398	346,359895	1385,363436
2	12,395148	48,737967	194,848117	779,291336
3	5,621855	21,712960	86,610359	346,329852
4	3,505664	21,234737	48,683757	194,817874
5	2,465001	7,814174	31,167484	124,689220
6	2,273172	5,645391	21,650414	86,580082
7	2,171521	4,167657	15,897368	63,611083
8	2,116218	3,321722	12,168177	48,707122
9	2,084084	2,743105	9,657102	38,518469
10	2,063921	2,224131	7,858741	31,195080
15	2,024521	2,037600	3,661166	13,858942
20	2,013126	2,016224	2,104437	7,827325
30	2,005635	2,006144	2,009599	3,689882
40	2,003132	2,003283	2,004072	2,045753
50	2,001993	2,002054	2,002337	2,005197
60	2,001380	2,001409	2,001537	2,002413
70	2,001012	2,001028	2,001094	2,001476
80	2,000774	2,000783	2,000821	2,001019
90	2,000611	2,000617	2,000640	2,000754
100	2,000495	2,000498	2,000513	2,000585
300	$2 + 5,485 \cdot 10^{-5}$	$2 + 5,489 \cdot 10^{-5}$	$2 + 5,507 \cdot 10^{-5}$	$2 + 5,580 \cdot 10^{-5}$
10^3	$2 + 4,935 \cdot 10^{-6}$	$2 + 4,935 \cdot 10^{-6}$	$2 + 4,937 \cdot 10^{-6}$	$2 + 4,943 \cdot 10^{-6}$
$3 \cdot 10^3$	$2 + 5,483 \cdot 10^{-7}$	$2 + 5,483 \cdot 10^{-7}$	$2 + 5,483 \cdot 10^{-7}$	$2 + 5,484 \cdot 10^{-7}$
10^4	$2 + 4,935 \cdot 10^{-8}$	$2 + 4,935 \cdot 10^{-8}$	$2 + 4,935 \cdot 10^{-8}$	$2 + 4,935 \cdot 10^{-8}$
$3 \cdot 10^4$	$2 + 5,483 \cdot 10^{-9}$	$2 + 5,483 \cdot 10^{-9}$	$2 + 5,483 \cdot 10^{-9}$	$2 + 5,483 \cdot 10^{-9}$

für verschiedene Werte von γ die jeweilige Minimalzeit T^* angegeben. Die Bedingung (3.2) ist offenbar für diese Anfangsverteilungen erfüllt.

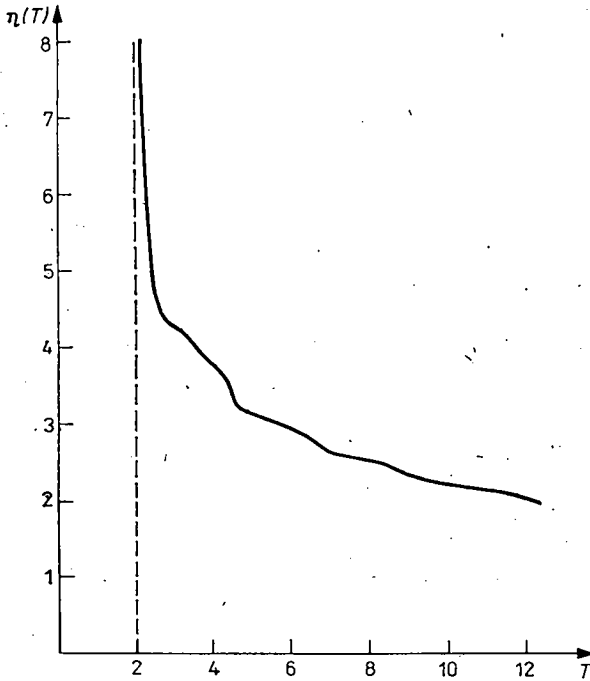
In der anschließenden graphischen Darstellung wird der Verlauf von $\eta(\cdot)$ im Falle

$$y_0(x) = \sin \pi x, \quad y_1(x) = 0 \quad (x \in [0, 1])$$

wiedergegeben (s. Seite 307).

Für das Beispiel $q = 1$, $\gamma = 10$ sei nun die Lösung des Momentenproblems (P_{10}^*) explizit angegeben. Mit $T^* = 2,063921$ gilt:

$$u^*(t) = \begin{cases} (-\pi^2/4) \sin \pi t + 24,327154, & t \in [0; 0,063921), \\ (-\pi^2/2) \sin \pi t, & t \in [0,063921; 2), \\ (-\pi^2/4) \sin \pi t - 24,327154, & t \in [2; 2,063921]. \end{cases}$$



v^* läßt sich wieder über (2.4) berechnen und lautet explizit

$$v^*(t) = \begin{cases} \sin \pi t/4 + 12,1636t^2 - (\pi/4) \cdot t, & t \in [0; 0,063921); \\ \sin \pi t/2 + 2,5862 \cdot 10^{-6}t - 0,0504, & t \in [0,063921; 2); \\ \sin \pi t/4 - 12,1636t^2 + 49,4397t - 50,2755, & t \in [2; 2,063921]. \end{cases}$$

LITERATUR

- [1] BUTKÓVSKY, A. G.: Distributed Control Systems. Elsevier Publication Company: New York 1969.
- [2] BUTZER, P. L., and R. J. NESSEL: Fourier Analysis and Approximation, Vol. 1. Birkhäuser Verlag: Basel und Stuttgart 1971.
- [3] EICHENAUER, W.: Über trigonometrische Momentenprobleme und deren Anwendung auf gewisse Schwingungskontrollprobleme. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt 1982.
- [4] FUJISAWA, T., and Y. YASUDA: An Iterative Procedure for Computing the Minimum of a Quadratic Form on a Convex Set. SIAM J. Control 5 (1967), 501–512.
- [5] KRABS, W.: Ein Kontroll-Approximationsproblem für die schwingende Saite. In: Numerische Methoden der Approximationstheorie, Band 3 (ISNM 30). Birkhäuser Verlag: Basel und Stuttgart 1976, S. 257–275.
- [6] KRABS, W.: Über die einseitige Randsteuerung einer schwingenden Saite in einen Zustand minimaler Energie. Computing 17 (1977), 351–359.
- [7] KRABS, W.: Einführung in die Kontrolltheorie. Wissenschaftliche Buchgesellschaft: Darmstadt 1978.
- [8] KRABS, W.: On Boundary Controllability of One-Dimensional Vibrating Systems. Mathematical Methods in Applied Sciences 1 (1979), 322–345.

- [9] MALANOWSKI, K.: On Time-Optimal Control of a Vibrating String (polnisch, englische Zusammenfassung). *Archiwum Automatyki i Telemekhaniki* **XIV** (1969), 33—45.
- [10] RUSSELL, D. L.: Nonharmonic Fourier Series in the Control Theory of Distributed Parameter Systems. *Journal of Mathematical Analysis and Application* **18** (1967), 542—560.
- [11] TRIEBEL, H.: *Höhere Analysis*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin 1972.

Manuskripteingang: 19. 04. 1982

VERFASSER:

Dr. WOLFRAM EICHENAUER
Fachbereich Mathematik der Technischen Hochschule
D-6100 Darmstadt, Schloßgartenstraße 7