Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (4) 1983, S. 309 – 320

Bergmansche Integraloperatoren für instationäre Prozesse in der Ebene

E. Lanckau

Prof. Dr. F. A. Willers zu seinem 100. Geburtstag gewidmet)

Die komplexen Integraloperatoren von S. Bergman transformieren holomorphe Funktionen einer komplexen Veränderlichen in Lösungen linearer partieller Differentialgleichungen elliptischen Typs. Sie ermöglichen so, diese Lösungen explizit zu konstruieren und ihre Eigenschaften mit funktionentheoretischen Methoden zu studieren. Es wird eine Verallgemeinerung der Operatormethoden von Bergman vorgeschlagen, mit der lineare Gleichungen für zeitabhängige Prozesse in der Ebene einheitlich behandelt werden können.

Комплексные интегральные операторы С. Бергмана преобразуют голоморфные функции комплексного переменного в решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Таким образом возможно конструировать эти решения явно и изучать их свойства средствами теории функций комплексного переменного. Предлагается обобщение операторного метода Бергмана, с помощью которого можно рассматреть линейные уравнения нестационарных процессов в плоскости единым образом.

The complex integral operators of S. Bergman transform holomorphic functions of a complex variable into solutions of linear partial differential equations of elliptic type. In this way they make possible to construct explicitly these solutions and to study their properties by function-theoretic methods. We offer a generalization of Bergman's operator method by which linear equations for time-dependent processes in the plane may be treated uniquely.

1. Aufgabenstellung

Lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung von elliptischem Typ sind vielfach und erfolgreich mit Hilfe Bergmanscher Integraloperatoren behandelt worden. Dazu führt man in der Differentialgleichung für die Funktion $u = u(x, y)$

$$\Delta u + a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} u + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} u + c(x, y) u = 0$$

mit analytischen Koeffizienten a, b, c (und $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$) die neuen komplexen unabhängigen Variablen $z = x + iy$, $z^* + x - iy$ ($i^2 = -1$) ein; mit $\Delta = 4\partial^2/\partial z\, \partial z^*$ entsteht dann die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial z^*} u + A(z, z^*) \frac{\partial}{\partial z} u + B(z, z^*) \frac{\partial}{\partial z^*} u + C(z, z^*) u = 0 \tag{1}$$

mit Koeffizienten A, B, C, die aus a, b, c hervorgehen. (Für u als Funktion von z, z^* verwenden wir wieder die gleiche Bezeichnung.) Ein Bergmanscher Integraloperator ist nun ein komplexes Kurvenintegral, das holomorphe Funktionen $f = f(z)$ der komplexen Veränderlichen z in (komplexe) Lösungen $u = u(z, z^*)$ der Differentialgleichung (1) transformiert

$$u(z, z^*) = \int_{-1}^{1} E(z, z^*, t)\, f\big(z(1 - t^2)\big) \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}. \tag{2}$$

Dabei ist $E = E(z, z^*, t)$ eine „Erzeugerfunktion", die von den Koeffizienten A, B, C der Differentialgleichung (1) abhängt.

Diese Methode ist stark ausgebaut worden und hat zahlreiche Anwendungen, insbesondere bei der Untersuchung der funktionentheoretischen Eigenschaften der Lösungen linearer elliptischer Differentialgleichungen und zur Konstruktion von Folgen partikulärer Lösungen — etwa zur Behandlung von Randwertproblemen — gefunden. Ausgehend von den Arbeiten von S. BERGMAN (siehe z. B. [1]) sind auch Verallgemeinerungen auf dreidimensionale Probleme betrachtet worden, siehe z. B. COLTON [3, 4] und GILBERT [6, 7].

Die Bergmansche Operatorenmethode läßt sich weiter ausbauen. Im folgenden betrachten wir einen Ansatz, der besonders zur Behandlung linearer Gleichungen für zeitabhängige Prozesse in der Ebene, also etwa für hyperbolische, parabolische und pseudobarabolische Gleichungen, geeignet erscheint. Wir beschränken uns auf einen sehr einfachen Fall, an dem aber bereits die Leistungsfähigkeit unseres Ansatzes zu erkennen sein wird. Es sei noch erwähnt, daß die Lösung (2) auch in der Form

$$u(z, z^*) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E(z, z^*, \sin\varphi) \cdot f(z \cos^2 \varphi)\, d\varphi$$

geschrieben werden kann.

2. Konstruktion des erzeugenden Operators

Es sollen Differentialgleichungen der Gestalt

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial z^*} u + Su = 0 \tag{3}$$

für Funktionen $u = u(z, z^*, \tau)$ der unabhängigen Veränderlichen z, z^*, τ betrachtet werden. S ist ein linearer Operator, der nur von τ abhängt; d. h. für Funktionen $h = h(\tau)$, die nur von τ abhängen, hängt auch Sh nur von τ ab. Weiter sei stets $z \in G$, wo G ein Sterngebiet bezüglich $z = 0$ sei, $z^* \in G^* = \{x - iy \mid x + iy \in G\}$, $\tau \in T$. τ werden wir sowohl als reelle als auch als komplexe Veränderliche betrachten; entsprechend wird T ein Intervall oder ein Gebiet sein.

Es sei noch bemerkt, daß die nachfolgenden Betrachtungen auch für wesentlich allgemeinere Differentialgleichungen als (3) durchgeführt werden können (dann jedoch nicht wie hier zu expliziten Ausdrücken führen).

Zunächst definieren wir:

Definition 1: *Erzeugender Operator* zur Differentialgleichung (3) sei der Operator $E: f \to Ef$ mit

$$E[f(z, \tau)]\,(z, z^*, \tau, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-4 \cdot zz^* \cdot \sin^2\varphi)^n\, S^n[f(z, \tau)],$$

abkürzend also mit $zz^* = |z|^2$

$$E[f(z, \tau)] = \cos\left(2\,|z| \sin\varphi \cdot \sqrt{S}\right) [f(z, \tau)].$$

Weiter definieren wir eine vom Operator S abhängige Funktionenmenge $\mathfrak{F}$, künftig auch *Grundmenge* genannt.

Definition 2: $f(\cdot, \cdot) \in \mathfrak{F}$, falls

1. $f(\cdot, \tau)$ holomorph in G und stetig in $\bar{G}$ ist,
2. Konstanten $A > 0$, $C > 0$ existieren mit

$$|S^n[f(z, \tau)]| \leqq A \cdot C^n \cdot (2n)! \quad \text{für} \quad n \geqq 0 \tag{4}$$

in $G \times T_0$, wo $T_0 \subset T$.
Eine Funktion $f \in \mathfrak{F}$ heiße auch *Grundfunktion* zur Gleichung (3).

Bezüglich der Existenz des Operators E gilt der folgende Satz.

Satz 1: *Sei $f \in \mathfrak{F}$ eine Grundfunktion zu* (3). *Dann existiert $E[f(z, \tau)]$ in einer Umgebung von $z = 0$, $z^* = 0$ sowie für $\tau \in T_0$ (und für alle φ mit $-\pi/2 \leqq \varphi \leqq \pi/2$).*

Der Beweis ist elementar, denn aus der angegebenen Bedingung folgt sofort

$$|E[f(z, \tau)]| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(2n)!} |z|^{2n} |S^n [f(z, \tau)]| \leqq A \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (4C\,|z|^2)^n = \frac{A}{1 - 4C\,|z|^2}.$$

Nunmehr verwenden wir den erzeugenden Operator zur Konstruktion von Lösungen der Gleichung (3). Es gilt die folgende Aussage.

Satz 2: *Für alle Funktionen $f(z, \tau) \in \mathfrak{F}$ ist*

$$u(z, z^*, \tau) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E[f(z \cos^2\varphi, \tau)]\,(z \cos^2\varphi, z^*, \tau, \varphi)\, d\varphi \tag{5}$$

für $\tau \in T_0$, z, z^* in einer Umgebung von $z = 0$, $z^* = 0$, eine Lösung der Gleichung (3).

Der Beweis erfolgt durch Einsetzen des Ausdrucks (5) in die Gleichung (3). Durch gliedweise Differentiation, die wegen der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz der Reihe für Ef z. B. in T_0 und für $|z| < 1/\sqrt{2C}$, $|z^*| < 1/\sqrt{2C}$ erlaubt ist, folgt (stets sei $w = -4 \sin^2\varphi \cdot z \cdot z^*$)

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial z^*} u = \frac{1}{zz^*} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!} w^n S^n[f(z \cos^2\varphi, \tau)]\, d\varphi + \frac{1}{z^*} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n)!} w^n S^n$$
$$\times \left[\frac{\partial}{\partial z} f(z \cos^2\varphi, \tau)\right] d\varphi. \tag{6}$$

Hier wurde benutzt, daß S nur auf τ wirkt, also

$$\frac{\partial}{\partial z} S^n[f(z, \tau)] = S^n \left[\frac{\partial}{\partial z} f(z, \tau)\right]$$

ist. (Es werde erwähnt, daß der obige Ausdruck für $z \to 0$, $z^* \to 0$ ebenfalls existiert.) Mit

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z \cos^2\varphi, \tau) = -\frac{\cot\varphi}{2z} \frac{\partial}{\partial\varphi} f(z \cos^2\varphi, \tau)$$

folgt für den zweiten Summanden auf der rechten Seite von (6) durch partielle Integration

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} w^n S^n \left[\frac{\partial}{\partial z} f(z \cos^2 \varphi, \tau)\right] d\varphi = -\frac{1}{2z} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cot \varphi \cdot w^n \cdot S^n \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} f(z \cos^2 \varphi, \tau)\right] d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2z} \left[\cot \varphi \cdot w^n \cdot S^n[f(z \cos^2 \varphi, \tau)]\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2z} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cot \varphi \cdot w^n)$$

$$\times S^n[f(z \cos^2 \varphi, \tau)]\, d\varphi.$$

Für $n \geqq 1$ verschwindet der integralfreie Bestandteil an den Grenzen $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ (und existiert, ebenso wie der zweite Summand, auch für $z \to 0$, $z^* \to 0$ und für alle φ in $[-\pi/2, +\pi/2]$, also inbesondere auch für $\varphi = 0$). Mit

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (\cot \varphi \cdot w^n) = w^n \left(2n \cot^2 \varphi - \frac{1}{\sin^2 \varphi}\right)$$

(für $n \geqq 1$ ebenfalls für $\varphi = 0$ existierend!) erhält man

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial z^*} u = \frac{1}{zz^*} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n)!} w^n \left(n + n \cdot \cot^2 \varphi - \frac{1}{2 \cdot \sin^2 \varphi}\right) S^n[f]\, d\varphi.$$

Mit $n + n \cdot \cot^2 \varphi - \dfrac{1}{2 \sin^2 \varphi} = \dfrac{2n - 1}{2 \sin^2 \varphi}$ wird

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial z^*} u = -\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-2)!} w^{n-1} S^n[f(z \cos^2 \varphi, \tau)]\, d\varphi = -Su.$$

Das war zu zeigen ∎

Wir konstruieren einen Operator, der eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial z^*} u + Su = \frac{\partial}{\partial z} F(z, z^*, \tau) \tag{3'}$$

liefert. (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit konnte hier die rechte Seite als Ableitung nach z angenommen werden.) Dazu definieren wir eine einfache Verallgemeinerung des obigen erzeugenden Operators; es sei für $f \in \mathfrak{F}$

$$E^{(t^*)}[f(z, \tau)]\, (z, z^*, t^*, \tau, \varphi) = \cos\left(2 \sin \varphi \cdot \sqrt{z(z^* - t^*)\, S}\right) [f(z, \tau)].$$

Dabei ist t^* ein beliebiger (komplexer oder reeller) Parameter. Offenbar existiert $E^{(t^*)}$ für alle Funktionen f der Grundmenge $\mathfrak{F}$, wenn $\tau \in T_0$ ist und z in einer Umgebung von $z = 0$ und z^* in einer Umgebung von $z^* = t^*$ liegen.

Weiter sei stets die Bezeichnung

$$\tilde{f}(z, \tau) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(z \cos^2 \varphi, \tau)\, \mathrm{d}\varphi \tag{7}$$

benutzt. Wir merken hierzu an, daß bei gegebener „Bildfunktion“ $\tilde{f}(z, \tau)$ die Grundfunktion $f(z, \tau)$ als Lösung einer Abelschen Integralgleichung aus (7) in der Form

$$f(z, \tau) = \frac{\sqrt{z}}{\pi} \frac{d}{dz} \int\limits_0^z \frac{\tilde{f}(u, \tau)}{\sqrt{z-u}}\, du$$

gewonnen werden kann.
Dann zeigt man wie oben (wir verzichten auf den nochmaligen, analogen Beweis) die folgende Aussage.

Satz 2′: *Für alle Funktionen $f \in \mathfrak{F}$ und für alle Parameter t^* ist*

$$u(z, z^*, \tau) = \hat{T}_0[f(z, \tau)]\,(z, z^*, \tau, t^*) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} E^{(t^*)}[f(z \cos^2 \varphi, \tau)]\,(z \cos^2 \varphi, z^* - t^*, \tau, \varphi)\, d\varphi$$

für $\tau \in T_0$, z, z^* in einer Umgebung von $z = 0$, $z^* = t^*$ eine Lösung der Gleichung (3).

Nun zeigen wir noch:

Satz 3: *Ist $H = H(z, z^*, \tau) \in \mathfrak{F}$ (für alle $z^* \in G^*$), so ist*

$$u_1(z, z^*, \tau) = \int\limits_0^{z^*} \hat{T}_0[H(z, t^*, \tau)]\, dt^*$$

für $\tau \in T_0$, z, z^* in einer Umgebung von $z = 0$, $z^* = 0 \in G$ eine Lösung der Gleichung (3′), wenn man H so wählt, daß $\tilde{H}(z, z^*, \tau) = F(z, z^*, \tau)$ wird.

Der Beweis folgt wieder durch Einsetzen. Es ist nämlich, wenn man

$$E^{(t^*)}[H(t, t^*, \tau)]\,(z, z^*, z^*, \tau, \varphi) = H(z, z^*, \tau)$$

beachtet:

$$\frac{\partial u_1}{\partial z^*} = \int\limits_0^{z^*} \frac{\partial}{\partial z^*} \hat{T}_0[H(t, t^*, \tau)]\, dt^* + \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} H(z \cos^2 \varphi, z^*, \tau)\, d\varphi .$$

Also ist

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial z^*} u_1 + S u_1 = \int\limits_0^{z^*} \left(\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial z^*} \hat{T}_0[H(z, t^*, \tau)] + S \hat{T}_0[H(z, t^*, \tau)] \right) dt$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} H(z \cos^2 \varphi, z^*, \tau)\, d\varphi ,$$

mithin nach Satz 2′ und der Festlegung (7)

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial z^*} u_1 + S u_1 = \frac{\partial}{\partial z} \tilde{H}(z, z^*, \tau) .$$

Das war zu zeigen ∎

Es sei noch angemerkt, daß nach der Beziehung (7) und ihrer Umkehrung mit f auch $\tilde{f}$ zur Grundmenge nach der Definition 1 gehört und umgekehrt.

Häufig ist es zweckmäßig, Partikularlösungen zu besitzen. Wir geben für allgemeine Operatoren S in der Gleichung (3) eine einfach zu konstruierende Schar solcher Lösungen für die Gleichung (3) an. Dazu seien die Grundfunktionen

$$f_k(z, \tau) = z^k g(\tau) \qquad (k > -1/2)$$

gewählt, $f \in \mathfrak{F}$ bedeutet hier $g \in \mathfrak{F}$. Man erhält die Lösungen

$$u_k(z, z^*, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (-4zz^*)^n z^k \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2n} \varphi \cos^{2k} \varphi \, d\varphi \cdot S^n[g(\tau)].$$

Das hier auftretende Integral ist durch die Betafunktion darstellbar. Mit Hilfe der Verdopplungsformel der Gammafunktion erhält man

$$u_k(z, z^*, \tau) = z^k \Gamma(k + 1/2) \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+k)!} (-zz^*)^n S^n[g(\tau)],$$

oder in symbolischer Schreibweise (mit der Besselfunktion J_k)

$$u_k(z, z^*, \tau) = z^k \Gamma(k + 1/2) \sqrt{\pi} \left(\frac{J_k(2\sqrt{zz^*S})}{\sqrt{zz^*S}^k} \right) [g(\tau)].$$

Dieser (integralfreie) Ausdruck ist für zahlreiche Funktionen g geschlossen auswertbar.

3. Darstellung des erzeugenden Operators

Die Leistungsfähigkeit der vorgeschlagenen Methode hängt natürlich stark davon ab, ob der erzeugende Operator in einfacher Weise dargestellt werden kann. Hierfür geben wir einige Beispiele. Auf die hier zugelassenen Grundmengen $\mathfrak{F}$ von Funktionen f gehen wir am Ende dieses Abschnitts ein.

Beispiel 1: Sei zunächst mit Konstanten a, b

$$S = -\left(a + b \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^2.$$

Die Differentialgleichung (3) lautet hier

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial z^*} u = b^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} u + 2ab \frac{\partial}{\partial \tau} u + a^2 u, \tag{8}$$

sie ist also hyperbolisch für reelle $b \neq 0$ (und elliptisch mit reellen Koeffizienten für rein imaginäre $a, b \neq 0$). Neben dem erzeugenden Operator E existiert in der gleichen Grundmenge auch der Operator

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= E + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} (-4zz^* \sin^2 \varphi)^{n+1/2} S^{n+1/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-4zz^* \sin^2 \varphi)^{n/2} S^{n/2}, \end{aligned}$$

oder in symbolischer Schreibweise

$$\tilde{E} = \exp\left(2i\,|z| \sin\varphi \cdot \sqrt{S}\right),$$

denn mit Hilfe der Cauchyschen Integraldarstellung der Ableitungen von $f(z, \tau)$ nach τ (oder durch Taylorreihenentwicklung bezüglich τ) erhält man für den hier betrachteten Operator S bekanntlich aus

$$\tilde{E} = \exp\left(-2\,|z|\,a \sin\varphi\right) \exp\left(-2\,|z|\,b \sin\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\tau}\right)$$

die explizite Darstellung

$$\tilde{E}[f(z, \tau)]\,(z, z^*, \tau, \varphi) = \exp\left(-2\,|z| a \sin\varphi\right) \cdot f(z, \tau - 2\,|z|\,b \sin\varphi).$$

Es gilt aber

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tilde{E}[f(z \cos^2\varphi, \tau)]\,d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} E[f(z \cos^2\varphi, \tau)]\,d\varphi,$$

da die in φ ungeraden Summanden in $\tilde{E}f$ keinen Beitrag zum Integral liefern. Also hat die Gleichung (8) die Lösung

$$u(z, z^*, \tau) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-2|z|a \cdot \sin\varphi} f(z \cos^2\varphi, \tau - 2\,|z|\,b \sin\varphi)\,d\varphi.$$

Es werde noch angemerkt, daß der Kern $e^{-2|z|a\cdot\sin\varphi}$ (für reelle a) reellwertig ist. Daher wird die reelle Lösung $\operatorname{Re} u$ der Gleichung (8) aus dem Realteil $\operatorname{Re} f$ der Grundfunktion f erzeugt.

Ist speziell $b = 0$, $a^2 = -k^2$, so ist (8) eine zweidimensionale elliptische Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z^*} u + k^2 u = 0.$$

Dann bedeutet der Operator E die Multiplikation mit der (Bergmanschen) erzeugenden Funktion E_0:

$$E[f(z, \tau)]\,(z, z^*, \tau, \varphi) = E_0(z, z^*, \varphi) \cdot f(z, \tau),$$

und hier ist

$$E_0(z, z,^* \tau) = \cos\left(2k|z| \sin\varphi\right).$$

Das ist die von S. Bergman angegebene Methode (im einfachsten Fall).

Beispiel 2: Mit

$$S = -a - b\,\frac{\partial}{\partial\tau},$$

a, b wieder Konstanten, erhalten wir die parabolische Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial z^*} u = b\,\frac{\partial}{\partial\tau} u + au. \tag{9}$$

Aus der Darstellung des iterierten Operators

$$S^n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \frac{\partial^k}{\partial\tau^k}$$

erhält man (nach Vertauschen der Summationsreihenfolge)

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2k)!} \binom{n+k}{k} a^n b^k (4zz^* \sin^2 \varphi)^{n+k} \frac{\partial}{\partial \tau^k}. \tag{10}$$

Stellt man wieder die Grundfunktion $f(z, \tau)$ durch ein Cauchy-Integral dar, so erhält man auch den erzeugenden Operator als Cauchy-Integral:

$$E[f(z, \tau)]\,(z, z^*, \tau, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K f(z, \xi)\, E\left[\frac{1}{\xi - \tau}\right] d\xi$$

oder

$$E[f(z, \tau)]\,(z, z^*, \tau, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K f(z, \xi)\, H_1(z, z^*, \tau, \xi, \varphi) \frac{\partial \xi}{\xi - \tau}.$$

Dabei ist K ein Kreis in T_0 mit dem Mittelpunkt $\xi = \tau$ und der Kern ist

$$H_1(z, z^*, \tau, \xi, \varphi) = (\xi - \tau)\, E\left[\frac{1}{\xi - \tau}\right]. \tag{11}$$

Man erhält hier aus (10) (wieder unter Benutzung der Verdopplungsformel der Gammafunktion) für den Kern H_1 die überall konvergente Reihenentwicklung einer hypergeometrischen Funktion zweier Veränderlicher (vgl. [5: 5. 7.1(22)])

$$\begin{aligned} H_1(z, z^*, \tau, \xi, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+k+1/2)} \frac{1}{n!} (as)^n \left(\frac{bs}{\xi - \tau}\right)^k \\ &= \Phi_3\big(1, 1/2; bs/(\xi - \tau), as\big), \end{aligned}$$

wobei $s = zz^* \sin^2 \varphi$ ist. Damit haben wir für die Lösung der Gleichung (9) die Darstellung

$$u(z, z^*, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H_1(z, z^*, \tau, \xi, \varphi)\, f(z \cos^2 \varphi, \xi)\, d\varphi \frac{d\xi}{\xi - \tau} \tag{12}$$

erhalten.

Lösungsdarstellungen von dieser und ähnlicher Gestalt gaben für den elliptischen und den parabolischen Fall bereits S. Bergman [1], D. L. Colton [3, 4] und R. P. Gilbert [6, 7] an.

Für $b = 0$ wird H_1 unabhängig von ξ, und es entsteht mit $a = -k^2$ wieder der oben angegebene Ausdruck von S. Bergman; für $a = 0$ erhält man für H_1 eine verallgemeinerte hypergeometrische Funktion einer Veränderlichen (siehe [5: 4.1(1)]), nämlich $H_1 = {}_1F_1\big(1, 1/2; bs/(\xi - \tau)\big)$.

Beispiel 3: Es sei $S = \tau \cdot \partial^2/\partial\tau^2$ gewählt, wir betrachten also die Differentialgleichung gemischten Typs

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial z^*} u + \tau \cdot \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} u = 0.$$

Stellt man wie im vorigen Beispiel die Grundfunktion f durch ein Cauchyintegral dar, so erhält man wieder die Darstellung (12) für die Lösung mit dem Kern (11). Ohne Beweis führen wir an, daß man hier (wieder aus einer expliziten Darstellung des iterierten Operators S^n) das elliptische Integral

$$H_1 = \frac{\xi - \tau}{2\xi} \left[1 - \frac{1}{2} \int_0^1 h\left(\frac{s}{\tau - \xi}(1 - x^2)\right) \mathrm{d}x \right]$$

mit $h(x^2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sqrt{(1 - x^2)^2 - \frac{4\tau}{\xi - \tau} x^2}$ erhält.

Beispiel 4: Abschließend betrachten wir die pseudoparabolische Differentialgleichung 3. Ordnung

$$\frac{\partial^3}{\partial z\, \partial z^*\, \partial \tau} u - a \frac{\partial}{\partial \tau} u - bu = 0. \tag{13}$$

Dazu setzen wir $S = -a - b \int_0^\tau \cdot\, d\sigma$.

(Sei jetzt $0 \in T_0$.) Für die Iterierten dieses Integraloperators hat man

$$S^n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k!} a^{n-k} b^k \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau (\tau - \sigma)^k \cdot d\sigma.$$

Damit ergibt sich für den erzeugenden Operator (wieder nach Umkehr der Summationsreihenfolge und mit Hilfe der Verdopplungsformel der Gammafunktion)

$$E[f(z, \tau)] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(n + k + 1/2)\,(k!)^2\, n!} (as)^n \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau \big(bs(\tau - \sigma)\big)^k f(z, \sigma) \cdot d\sigma.$$

Also kann man den erzeugenden Operator als Duhamelprodukt schreiben:

$$E[f(z, \tau)] = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\tau H_{-1} \cdot f(z, \sigma)\, d\sigma,$$

wobei der Kern durch

$$E[1] = H_{-1}(z, z^*, \tau - \sigma, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(n + k + 1/2)\,(k!)^2\, n!} (as)^n \big(bs(\tau - \sigma)\big)^k \tag{14}$$

gegeben ist. (Die hier angegebene Reihe konvergiert ebenfalls für alle Werte ihrer Argumente, wie man durch Vergleich mit der im 2. Beispiel benutzten überall konvergenten Reihe H_1 sofort sieht.) Die Lösung der Gleichung (13) erhalten wir also in der Gestalt

$$u(z, z^*, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\tau H_{-1}(z, z^*, \tau - \sigma, \varphi) \cdot f(z \cos^2 \varphi, \sigma)\, d\sigma\, d\varphi.$$

Für $a = 0$ wird der Kern dieser Integraltransformation zu einer verallgemeinerten hypergeometrischen Funktion

$$H_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(2k)!} \big(4bs(\tau - \sigma)\big)^k = {}_0F_2\big(1, 1/2; bs(\tau - \sigma)\big).$$

Ist $b = 0$, so wird der Kern von σ unabhängig, und es entsteht wieder der bekannte Ausdruck von S. Bergman.

Bezüglich der Grundmenge $\mathfrak{F}$ von Funktionen f, die die Bedingungen (4) erfüllen, bemerken wir abschließend:

In den Beispielen 1, 2, 3 gehört f zu $\mathfrak{F}$, falls f bezüglich τ holomorph in $T_0 = \{\tau \mid |\tau - \tilde{\tau}| > \delta > 0, \tilde{\tau} \in \partial T\}$ ist. Im Beispiel 4 gehört f zu $\mathfrak{F}$, falls f bezüglich τ integrierbar ist in $T_0 = T$.

Die Beweise sind mit Hilfe der expliziten Darstellungen der iterierten Operatoren S^n leicht zu führen, vgl. [8]. Wir konnten hier auf die Beweise verzichten, da wir überall explizite Darstellungen des erzeugenden Operators E erhielten.

4. Randwertprobleme für pseudoparabolische Gleichungen

Die Integraloperatoren erlauben es, Randwertprobleme für die Lösungen der betrachteten („dreidimensionalen") Differentialgleichungen auf Randwertprobleme für die holomorphen Grundfunktionen zurückzuführen. Als einfaches Beispiel hierzu betrachten wir die pseudoparabolische Differentialgleichung

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial^3}{\partial z\, \partial z^*\, \partial \tau}\, u - a \frac{\partial}{\partial \tau}\, u - bu = \frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \tau}\, \tilde{F}(z, z^*, \tau). \tag{13'}$$

Die Lösung $u = u(z, z^*, \tau)$ erfülle die Anfangsbedingung

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial z^*}\, u - au = \frac{\partial}{\partial z}\, \tilde{h}(z, z^*) \quad \text{für} \quad \tau = 0. \tag{15}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man

$$\tilde{F}(z, z^*, 0) = \tilde{h}(z, z^*)$$

wählen (anderenfalls ersetze man auf der rechten Seite der Differentialgleichung (13') $\tilde{F}(z, z^*, \tau)$ durch $\tilde{F}(z, z^*, \tau) - \tilde{F}(z, z^*, 0) + \tilde{h}(z, z^*)$, dadurch ändert sich die rechte Seite nicht!).

Wir betrachten die im 3. Abschnitt konstruierten Integraloperatoren. Dabei seien im folgenden $h(z, z^*)$ und $F(z, z^*, \tau)$ die durch die Beziehung (7) mit $\tilde{h}$ und $\tilde{F}$ verbundenen Funktionen, sie lassen sich also durch die Umkehrung dieser Beziehung durch $\tilde{h}$ und $\tilde{F}$ ausdrücken. Sei zunächst

$$\begin{aligned} u_0(z, z^*, \tau) &= \hat{T}_0[f(z, \tau)]\,(z, z^*, \tau; t^*) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\tau} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H_{-1}(z, z^* - t^*, \tau - \sigma, \varphi)\, f(z \cos^2 \varphi, \sigma)\, d\varphi\, d\sigma. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Funktion H_{-1} durch (14) angegeben, t^* sei ein beliebiger Parameter. Nach Satz 2' löst dieser Ausdruck die homogene Differentialgleichung (13). Weiter sei

$$u_1(z, z^*, \tau) = \hat{T}_1[F(z, z^*, \tau)] = \int_0^{z^*} \hat{T}_0[F(z, t^*, \tau)]\, dt^*.$$

Nach Satz 3 löst dieser Ausdruck die gegebene inhomogene Gleichung (13'). Eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist also auch

$$u(z, z^*, \tau) = \hat{T}_0[f(z, \tau)] + \hat{T}_1[F(z, z^*, \tau)].$$

Wir berechnen den Anfangswert ($\tau = 0$) des Ausdrucks $\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial z^*} u - au$. Führt man die Differentiation nach τ aus, so erhält man

$$u_0(z, z, \tau) = \int_0^{\tau} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial \tau} H_{-1} \cdot f(z \cos^2 \varphi, \sigma)\, d\varphi\, d\sigma + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H_{-1}(z, z^* - t^*, 0, \varphi)$$
$$\times f(z \cos^2 \varphi, \sigma)\, d\sigma\, d\varphi .$$

Weil $H_{-1}(z, z^*, -t^*, 0, \varphi) = \cos^2\left(2\sqrt{-az(z^* - t^*)} \sin\varphi\right)$ die Erzeugerfunktion des zugehörigen Bergmanschen Integraloperators ist, löst $u_0(z, z^*, 0)$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial z^*} u_0(z, z^*, 0) - au_0(z, z^*, 0) = 0 .$$

Auf dem gleichen Weg erhält man zunächst

$$u_1(z, z^*, \tau) = \int_0^z \int_0^{\tau} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial \tau} H_{-1}(z, z^* - t^*, \tau - \sigma, \varphi)\, F(z \cos^2 \varphi, t^*, \sigma)\, d\varphi\, d\sigma\, dt^*$$
$$+ \int_0^{z^*} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} H_{-1}(z, z^* - t^*, 0, \varphi)\, F(z \cos^2 \varphi, t^*, \tau)\, d\varphi\, dt^* .$$

Für den Anfangswert $\tau = 0$ ist also

$$u_1(z, z^*, 0) = \int_0^{z^*} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2\left(\sqrt{-az(z^* - t^*)} \cdot \sin\varphi\right) F(z \cos^2 \varphi, t^*, 0)\, d\varphi\, dt^* .$$

Mithin gilt, daß $u_1(z, z^*, 0)$ die Anfangsbedingung

$$\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial z^*} u_1(z, z^*, 0) - au_1(z, z^*, 0) = \frac{\partial}{\partial z} \tilde{F}(z, z^*, 0) = \frac{\partial}{\partial z} \tilde{h}(z, z^*)$$

erfüllt.

Insgesamt haben wir:

Satz 4: *Für jede Grundfunktion* $f(z, \tau) \in \mathfrak{F}$ *löst*

$$u(z, z^*, \tau) = \hat{T}_0[f(z, \tau)] + \hat{T}_1[F(z, z^*, \tau)]$$

die Differentialgleichung (13′) *mit der Anfangsbedingung* (15). *Dabei ist* $F(z, z^*, \tau)$ *durch die Umkehrung der Transformation* (7) *aus* $F(z, z^*, \tau)$ *zu gewinnen.*

Damit ist ein Anfangswert-Randwertproblem für die (dreidimensionale) pseudoparabolische Differentialgleichung (13′) auf ein Randwertproblem für die vom Parameter τ abhängige holomorphe Funktion $f(z, \tau)$ zurückgeführt worden. Dieses Randwertproblem kann numerisch durch Superposition geeigneter Partikularlösungen behandelt werden (vgl. [2]) oder auf eine Integralgleichung mit schwach singulärem Kern für die Randwerte der Funktion $f(z, \tau)$ zurckgeführt werden (vgl. [9]).

LITERATUR

[1] BERGMAN, S.: Integral Operators in the Theory of Linear Partial Differential Equations: Springer-Verlag: Berlin—Göttingen—Heidelberg 1961 (Erg. der Math., N.F., Heft **23**).
[2] BISCHOFF, G.: Zur numerischen Lösung von Randwertproblemen partieller Differentialgleichungen elliptischen Typs. Beitr. Anal. **12** (1978), 29—45.
[3] COLTON, D. L.: Partial differential equations in the complex domain. Pitman Publishing: London—San Francisco—Melbourne 1976.
[4] —: Solution of boundary value problems by the method of integral operators. Pitman Publishing: London—San Francisco—Melbourne.
[5] ERDELYI, A. u. a. (ed.): Higher transcendental functions I. Mc Graw-Hill: New York—Toronto—London 1953.
[6] GILBERT, R. P.: Constructive Methods for Elliptic Equations. Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1974 (Lect. Notes Math. **365**).
[7] —: Function theoretic methods in partial differential equations. Academic Press: New York—London 1969.
[8] LANCKAU, E.: General Vekua Operators. In: Analytic Functions (Kozubnik 1979, ed. by J. ŁAWRYNOWICZ). Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1980 (Lect. Notes Math. **798**).
[9] —: Zur Behandlung pseudoparabolischer Differentialgleichungen mit funktionentheoretischen Methoden. Beitr. Anal. **16** (1981), 87—96.

Manuskripteingang: 26. 04. 1982

VERFASSER:

Prof. Dr. EBERHARD LANCKAU
Sektion Mathematik der Technischen Hochschule
DDR-9022 Karl-Marx-Stadt, Reichenhainer Str. 41