Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (3) 1983, S. 273–280

Ein Kapazitätsbegriff für gewichtete Sobolewräume

E. Herbst

Es wird ein Kapazitätsbegriff für gewichtete Sobolewräume $H^1(g)$ eingeführt. Die Dünnheit einer Menge in einem Punkt wird erklärt. Es wird gezeigt, daß die Funktionen aus $H^1(g)$ als präzisierte Funktionen aufgefaßt werden können sowie daß sie quasi überall feinstetig sind. Weiterhin wird bewiesen, daß für jede Menge mit endlicher Kapazität ein kapazitives Potential existiert.

Вводится понятие емкости для весовых Соболевых пространств $H^1(g)$. Определяется тонкость множества в точке. Показывается, что функции из $H^1(g)$ можно понимать как уточненные функции, и что они квази всюду непрерывны в тонкой топологии. Дальше доказывается, что для любого множества конечной емкости существует емкостный потенциал.

A capacity for weighted Sobolev spaces $H^1(g)$ is introduced. The thinnes of a set in a point is defined. It is proved, that functions from $H^1(g)$ may be understood as precisely defined functions and that they are finely continuous quasi everywhere. For every set with finite capacity there exists a capacitary potential.

§ 0

In dem vorliegenden Artikel wird ein Kapazitätsbegriff für gewichtete Sobolewräume $H^1(g)$ eingeführt. Mittels dieser Kapazität werden aus der klassischen Potentialtheorie bekannte Begriffe und Ergebnisse (vgl. [2–6]) auf die Funktionen aus gewichteten Sobolewräumen übertragen. Damit sollen die Voraussetzungen geschaffen werden, um den Apparat der klassischen Potentialtheorie (z. B. die Regularitätstheorie, die Theorie zur Hebbarkeit von Singularitäten) für die Untersuchungen von Lösungen partieller Differentialgleichungen mit gestörter Elliptizität bereitzustellen, denn schwache Lösungen solcher Differentialgleichungen werden in gewichteten Sobolewräumen gesucht. Im Paragraph 1 werden die grundlegenden Begriffe und einige Eigenschaften der Kapazität aufgeführt. Die Präzisierung von Funktionen aus gewichteten Sobolewräumen wird in Paragraph 2 behandelt, während im dritten Paragraphen eine weitere aus der klassischen Theorie bekannte Extremaleigenschaft nachgewiesen wird: Für jede Menge endlicher Kapazität existiert ein eindeutig bestimmtes kapazitives Potential. Der vierte Paragraph ist dem Begriff der Dünnheit einer Menge in einem Punkt sowie der Feinstetigkeit von Funktionen aus $H^1(g)$ gewidmet.

§ 1

Mit $\overset{\circ}{B}_r$ bezeichnen wir die offene Kugel im euklidischen Raum $\mathbf{R}^d$, $d \geqq 2$, mit dem Mittelpunkt im Nullpunkt und dem Radius $r > 0$. Verschiedene Konstanten werden wir mit $\varkappa$ bezeichnen und dabei stets $0 < \varkappa < +\infty$ voraussetzen. Es sei $g = (g_0, g_1, \ldots, g_d)$ ein System von Gewichtsfunktionen in B_r derart, daß die g_i meßbare

Funktionen sind mit $g_j(x) > 0$ fast überall in B_r, $j = 0, 1, \ldots, d$. Mit $M^1(g)$ bezeichnen wird die Menge aller Funktionen u aus $C_0^\infty(B_r)$ mit

$$\|u\|_{1,g}^2 := \int_{R^d} \sum_{j=0}^{d} g_j(x) \, |D^j u(x)|^2 \, dx < \infty, \tag{1.1}$$

wobei D^j die partielle Ableitung nach x_j ($j = 1, 2, \ldots, d$) und D^0 die Identität bedeutet. $M^1(g)^+$ bezeichnet die Menge aller Funktionen u aus $M^1(g)$ mit $u(x) \geqq 0$.

Definition 1.1: Die Vervollständigung von $M^1(g)$ in der Norm (1.1) heißt *gewichteter Sobolewraum mit der Norm* (1.1) und wird mit $H^1(g)$ bezeichnet. Analog ist $H^1(g)^+$ die Vervollständigung von $M^1(g)^+$ in der Norm (1.1).

Der Sobolewraum $H^1(g)$ ist ein Banachraum, während $H^1(g)^+$ ein Kegel in diesem Raum ist. Wir erklären nun zwei Kapazitäten, die wir in den Paragraphen 2 und 4 zu Stetigkeitsuntersuchungen von Funktionen aus $H^1(g)$ benutzen.

Definition 1.2: Es sei $K \subset \mathbf{R}^d$ eine kompakte Menge. Dann heißt die Größe

$$c_{1,g}(K) := \inf \{\|u\|_{1,g} : u \in M^1(g) \text{ und } u(x) \geqq 1 \text{ in einer Umgebung von } K\}$$

$(1, g)$-*Kapazität der Menge* K. (Wir haben hier stillschweigend angenommen, daß das Infimum als $+\infty$ „definiert" wird, wenn die Konkurrenzmenge leer ist.) $(1, g)^+$-*Kapazität* von K heißt die Größe

$$c_{1,g}^+(K) := \inf \{\|u\|_{1,g} : u \in M^1(g)^+ \text{ und } u(x) \geqq 1 \text{ in einer Umgebung von } K\}.$$

Wir erweitern diese Definitionen auf alle Teilmengen von $\mathbf{R}^d$ am Beispiel von $c_{1,g}$.

Definition 1.3: Es sei $G \subset \mathbf{R}^d$ eine offene Menge. Dann heißt

$$\underline{c}_{1,g}(G) := \sup \{c_{1,g}(K) : K \subset G, K\text{-kompakt}\}$$

innere $(1, g)$-*Kapazität* von G und

$$\bar{c}_{1,g}(E) := \inf \{\underline{c}_{1,g}(G) : E \subset G, G\text{-offen}\}$$

äußere $(1, g)$-*Kapazität* der beliebigen Menge $E \subset \mathbf{R}^d$.

Definition 1.4: Eine Eigenschaft gilt $(1, g)$-*quasi überall* (bzw. $(1, g)^+$-*quasi überall*), wenn sie überall bis auf eine Menge der äußeren $(1, g)$-Kapazität ($(1, g)^+$-Kapazität) Null gilt.

Im folgenden Satz werden die wichtigsten Eigenschaften der Kapazitäten zusammengefaßt. Wenn eine Aussage für beide Kapazitäten gilt, schreiben wir kurz c.

Satz 1.5: *Die Kapazitäten* $c_{1,g}$ *und* $c_{1,g}^+$ *haben die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Für alle* $E \subset \mathbf{R}^d$ *gilt* $\bar{c}(E) \geqq 0$.
(ii) *Für alle* $E_1 \subset E_2 \subset \mathbf{R}^d$ *gilt* $\bar{c}(E_1) \leqq \bar{c}(E_2)$.
(iii) *Wenn* $K \subset \mathbf{R}^d$ *eine kompakte Menge ist, so existiert zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine offene Menge* G_ε *derart, daß gilt:*
  a) $K \subset G_\varepsilon$ *und*
  b) *für alle kompakten Teilmengen* K' *von* G_ε *ist* $c(K') \leqq c(K) + \varepsilon$.
(iv) *Für alle kompakten Mengen* $K \subset \mathbf{R}^d$ *und alle offenen Mengen* $G \subset \mathbf{R}^d$ *gilt* $c(K) = \bar{c}(K)$, $\underline{c}(G) = \bar{c}(G)$.
(v) *Es sei* $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, $E_j \subset \mathbf{R}^d$ ($j = 1, 2, \ldots$). *Dann gilt*

$$\bar{c}_{1,g}^+(E) \leqq \sum_{j=1}^{\infty} \bar{c}_{1,g}^+(E_j).$$

(vi) *Es existieren Konstanten $\varkappa$ (von der Menge K unabhängig) derart, daß für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbf{R}^d$ die folgenden Abschätzungen bestehen:*
a) $c_{1,g}(K) \leqq c_{1,g}^+(K) \leqq \varkappa c_{1,g}(K)$ *und*
b) $c_{1,g}^+(K) \leqq \inf \{\|u\|_{1,g} : u \in M^1(g)^+$ *und* $u \equiv 1$ *in einer Umgebung von* $K\} \leqq \varkappa c_{1,g}^+(K)$
(vii) *Es existieren Konstanten $\varkappa$ derart, daß für alle $\lambda > 0$ und alle $u \in M^1(g)$ gilt:*
a) $c_{1,g}^+(\{x : |u(x)| \geqq \lambda\}) \leqq \varkappa\lambda^{-1} \|u\|_{1,g}$;
b) $\bar{c}_{1,g}^+(\{x : |u(x)| > \lambda\}) \leqq \varkappa\lambda^{-1} \|u\|_{1,g}$.
Hierbei ist $\varkappa$ unabhängig von u und λ.

Bemerkungen: 1. Die Eigenschaft (v) konnte für die $(1, g)$-Kapazität nicht nachgewiesen werden. Diese Tatsache ist jedoch unerheblich, da die Kapazitäten nach (vi) a) äquivalent sind. Wir werden daher auch oft nur von der $(1, g)$-Kapazität sprechen.

2. Die in (vi) b) erklärte Kapazität ist speziell auf die Theorie der Hebbarkeit von Singularitäten zugeschnitten.

3. Die $(1, g)^+$-Kapazität läßt sich für kompakte Mengen $K \subset \mathbf{R}^d$ auch wie folgt erklären:

$$c_{1,g}^+(K) = \inf \{\|u\|_{1,g} : u \in M^1(g)^+ \text{ und } u(x) > 1 \text{ in einer Umgebung von } K\}.$$

§ 2

Mittels der in Paragraph 1 eingeführten Kapazität und ihren Eigenschaften lassen sich die Funktionen aus den gewichteten Sobolewräumen $H^1(g)$ bis auf eine Menge der äußeren $(1, g)$-Kapazität Null präzisieren. Zur klassischen Theorie vergleiche man hierzu [2, 3, 5, 6].

Satz 2.1: *Es sei $u \in H^1(g)$. Dann kann man u auf einer Menge vom Maß Null so zu $\bar{u} \in H^1(g)$ abändern, daß $\bar{u}$ die folgenden Eigenschaften besitzt:*
1. *$\bar{u}$ ist $(1, g)$-quasi überall erklärt.*
2. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge G_ε mit $\bar{c}_{1,g}^+(G_\varepsilon) < \varepsilon$ und $u|_{G_\varepsilon^c}$ ist stetig in G_ε^c.*

Beweis: Es sei $(u_n) \subset M^1(g)$ eine $u \in H^1(g)$ approximierende Folge. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \|u_{n+1} - u_n\|_{1,g} < \infty$ voraussetzen. Wir setzen nun

$$e_n := \{x : |u_{n+1}(x) - u_n(x)| > 2^{-n-1}\} \quad \text{und} \quad E_N := \bigcup_{n=N}^{\infty} e_n \quad (n, N = 1, 2, \ldots).$$

Die Menge E_N ist offen, und es gilt

$$\bar{c}_{1,g}^+(E_N) \leqq \sum_{n=N}^{\infty} \bar{c}_{1,g}^+(e_n) \leqq \varkappa \sum_{n=N}^{\infty} 2^{n+1} \|u_{n+1} - u_n\|_{1,g},$$

also $\lim_{N\to\infty} \bar{c}_{1,g}^+(E_N) = 0$. Für alle $x \in E_N^c$ haben wir $|u_{n+1}(x) - u_n(x)| < 2^{-n}$ für alle $n \geqq N$. Die Folge (u_n) konvergiert demnach außerhalb E_N gleichmäßig und außerhalb von $\bigcap_{N=1}^{\infty} E_N$ punktweise. Wir definieren $\bar{u}$ wie folgt:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} u_n(x) & \text{für } x \notin \bigcap_{N=1}^{\infty} E_N, \\ \text{beliebig} & \text{für } x \in \bigcap_{N=1}^{\infty} E_N. \end{cases}$$

Diese Funktion leistet das Verlangte ▮

Definition 2.2: Funktionen mit den Eigenschaften 1 und 2 aus Satz 2.1 heißen *$(1, g)$-präzisierte Funktionen.*

Wir können also aus jeder Äquivalenzklasse $u \in H^1(g)$ eine präzisierte Funktion auswählen. Der folgende Satz zeigt, daß die präzisierte Funktion einer Äquivalenzklasse in gewissem Sinne eindeutig bestimmt ist.

Satz 2.3: *Wenn zwei $(1, g)$-präzisierte Funktionen $u, v \in H^1(g)$ fast überall übereinstimmen, so stimmen sie $(1, g)$-quasi überall überein.*

Beweis: Wir werden zeigen: Wenn eine $(1, g)$-präzisierte Funktion $u \in H^1(g)$ fast überall verschwindet, so verschwindet sie $(1, g)$-quasi überall. Aus der zweiten Eigenschaft der $(1, g)$-präzisierten Funktionen folgt, daß man zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge G_ε so finden kann, daß $\bar{c}^+_{1,g}(G_\varepsilon) < \varepsilon$ und $u|_{G_\varepsilon{}^c}$ stetig in $G_\varepsilon{}^c$ ist. Es sei $u_n \in M^1(g)$ mit $u_n(x) > 1$ auf $G_{n^{-1}}$ und $\|u\|_{1,g} < 2n^{-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Nach Satz 2.1 gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) derart, daß $\lim\limits_{k\to\infty} u_{n_k}(x) = 0$ für $(1, g)$-quasi alle x. Für alle diese x existiert aber nun ein k derart, daß $m_d\big(G_{n_k^{-1}} \cap B(x, r)\big) < m_d\big(B(x, r)\big)$ für hinreichend kleines $r > 0$ gilt, wobei m_d das d-dimensionale Lebesguemaß und $B(x, r)$ die Kugel im $\mathbf{R}^d$ mit dem Mittelpunkt in x und dem Radius r bezeichnet: Für $(1, g)$-quasi alle x gilt $|u_{n_k}(x)| < 1$ für alle $k \geqq k_0(x)$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
&\varlimsup_{r\to 0^+} m_d\big(B(x, r)\big)^{-1} m_d\big(B(x, r) \cap G_{n_k^{-1}}\big)\\
&\leqq \varlimsup_{r\to 0^+} m_d\big(B(x, r)\big)^{-1} \int\limits_{B(x,r)\cap G_{n_k^{-1}}} u_{n_k}(y)\, dy\\
&\leqq \varlimsup_{r\to 0^+} m_d\big(B(x, r)\big)^{-1} \int\limits_{B(x,r)} |u_{n_k}(y)|\, dy = |u_{n_k}(x)| < 1.
\end{aligned}$$

Es sei nun x solch ein Punkt. Dann existiert ein k derart, daß für hinreichend kleines $r > 0$ gilt: $m_d\big(B(x, r) \setminus G_{n_k^{-1}}\big) > 0$. Aus der Stetigkeit von u auf $(G_{n_k^{-1}})^c$ sowie der Gleichung $u(y) = 0$ fast überall folgt

$$u(x) = \lim_{r\to 0^+} m_d\big(B(x, r) \setminus G_{n_k^{-1}}\big)^{-1} \int\limits_{B(x,r)\setminus G_{n_k^{-1}}} u(y)\, dy = 0$$

für alle diese x ∎

Die Sätze 2.1 und 2.3 gestatten es, die Funktionen $u \in H^1(g)$ als präzisierte Funktionen aufzufassen und zu behandeln. Davon werden wir im folgenden Gebrauch machen.

§ 3

Wir werden in diesem Paragraphen weitere auszeichnende Eigenschaften der $(1, g)^+$-Kapazität nachweisen, unter anderem die Existenz und Eindeutigkeit eines kapazitiven Potentials. Diese kapazitive Potential wird wesentlich zum Beiweis der Stetigkeitsaussage in Paragraph 4 (Satz 4.5) benötigt. Zunächst formulieren wir jedoch einige vorbereitende Aussagen, die mehr technischen Charakter haben.

Lemma 3.1: (i) *Es sei $G \subset \mathbf{R}^d$ eine offene Menge und $u \in M^1(g)^+$. Für alle $x \in G$ gelte $u(x) \geqq 1$. Dann gilt $\bar{c}^+_{1,g}(G) \leqq \|u\|_{1,g}$.*

(ii) *Es sei* $u \in H^1(g)$ *und* $A \subset \mathbf{R}^d$ *eine beliebige Menge. Für* $(1, g)$*-quasi alle* $x \in A$ *gelte* $|u(x)| \geqq 1$. *Dann gilt* $\bar{c}^+_{1,g}(A) \leqq \varkappa \|u\|_{1,g}$, *wobei* $\varkappa$ *unabhängig von* A *und* u *ist. Speziell gilt im Fall* $u \in H^1(g)^+ : \varkappa = 1$.

Beweis: (i) Wegen $\bar{c}^+_{1,g}(G) = \underline{c}^+_{1,g}(G)$ genügt es zu zeigen, daß für alle kompakten Teilmengen K von G gilt: $c^+_{1,g}(K) \leqq \|u\|_{1,g}$. Das ist aber offensichtlich der Fall, da u zur Konkurrenzmenge von $c^+_{1,g}(K)$ gehört.

(ii) Es sei $0 < \varepsilon < 1$ und (u_n) eine Folge aus $M^1(g)$ mit der Eigenschaft, daß $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ in $H^1(g)$ und die Konvergenz außerhalb der offenen Menge G mit $\bar{c}^+_{1,g}(G) < \varepsilon$ gleichmäßig erfolgt (vgl. Satz 2.1). Wir setzen

$$A_1 := \{x \in A : |u(x)| \geqq 1\} \quad \text{und} \quad G_{n,\varepsilon} := \{x : |u_n(x)| > 1 - \varepsilon\}.$$

Dann ist $G_{n,\varepsilon}$ eine offene Menge, und es gilt für hinreichend großes $n : A_1 \setminus G \subset G_{n,\varepsilon}$. Aus Satz 1.5 (vii) b) erhalten wir $\bar{c}^+_{1,g}(G_{n,\varepsilon}) \leqq \varkappa(1 - \varepsilon)^{-1} \|u_n\|_{1,g}$. Weiterhin gilt

$$\bar{c}^+_{1,g}(A_1) \leqq \bar{c}^+_{1,g}(A_1 \setminus G) + \bar{c}^+_{1,g}(G) \leqq \bar{c}^+_{1,g}(G_{n,\varepsilon}) + \varepsilon \leqq \varkappa(1 - \varepsilon)^{-1} \|u_n\|_{1,g} + \varepsilon$$

für hinreichend großes n. Aus den Voraussetzungen über (u_n) erhalten wir $\bar{c}^+_{1,g}(A_1) \leqq \varkappa(1 - \varepsilon)^{-1} \|u\|_{1,g} + \varepsilon$. Aus $A = A_1 \cup A_2$ mit $\bar{c}^+_{1,g}(A_2) = 0$ ergibt sich dann $\bar{c}^+_{1,g}(A) \leqq \bar{c}^+_{1,g}(A_1) \leqq \varkappa(1 - \varepsilon)^{-1} \|u\|_{1,g} + \varepsilon$, woraus wegen der Willkürlichkeit von ε die Behauptung folgt.

Der Beweis des Spezialfalls $u \in H^1(g)^+$ verläuft völlig analog. Es genügt, anstelle von Satz 1.5 (vii) b) die Aussage (i) dieses Lemmas anzuwenden ∎

Wir setzen $F(A) := \{u \in H^1(g)^+ : u(x) \geqq 1$ für $(1, g)^+$-quasi alle $x \in A\}$, wobei A eine beliebige Teilmenge von $\mathbf{R}^d$ ist. Das folgende Lemma nimmt beim Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit eines Extremalelements in $F(A)$ die Schlüsselstellung ein.

Lemma 3.2: *$F(A)$ ist konvex und abgeschlossen in $H^1(g)$ für jede Menge $A \subset \mathbf{R}^d$.*

Beweis: Die Konvexität von $F(A)$ ist offensichtlich. Wir zeigen, daß $F(A)$ abgeschlossen ist in $H^1(g)$. Dazu sei (u_n) eine Folge aus $F(A)$ mit $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ in $H^1(g)$. Da u dann sicher aus $H^1(g)^+$ ist, genügt es, wenn wir $\bar{c}^+_{1,g}(\{x \in A : u(x) < 1\}) = 0$ zeigen. Nach den in Paragraph 2 formulierten Aussagen können wir u und u_n $(n = 1, 2, \ldots)$ als $(1, g)$-präzisierte Funktionen auffassen. Dann ist auch $u_n - u$ eine präzisierte Funktion. Es seien die Zahlen $\varepsilon, \delta > 0$ fest vorgegeben. Wir setzen $A_{n,\varepsilon} := \{x: |u_n(x) - u(x)| \geqq \varepsilon\}$. Dann gilt nach Lemma 3.1 (ii) $\bar{c}^+_{1,g}(A_{n,\varepsilon}) \leqq \varkappa\varepsilon^{-1} \|u_n - u\|_{1,g} \to 0$ für $n \to \infty$. Wir wählen n so groß, daß $\bar{c}^+_{1,g}(A_{n,\varepsilon}) < \delta$ gilt. Weiterhin wissen wir, daß $\bar{c}^+_{1,g}(E_n) = 0$ ist mit $E_n = \{x \in A : u_n(x) < 1\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Es gilt dann $\{x \in A: u(x) \leqq 1 - \varepsilon\} \subset A_{n,\varepsilon} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, also ist $\bar{c}^+_{1,g}(\{x \in A : u(x) \leqq 1 - \varepsilon\}) < \delta$ für alle $\varepsilon, \delta > 0$. Damit haben wir $\bar{c}^+_{1,g}(\{x \in A : u(x) \leqq 1 - \varepsilon\}) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$. Wegen $\{x \in A : u(x) < 1\} = \bigcup_{n=2}^{\infty} \{x \in A : u(x) \leqq 1 - n^{-1}\}$ gilt nach Satz 1.5 (v):

$$\bar{c}^+_{1,g}(\{x \in A : u(x) < 1\}) = 0 \quad ∎$$

Aus der Tatsache, daß $H^1(g)$ ein gleichmäßig konvexer Banachraum ist, ergibt sich unmittelbar die nachstehende Aussage.

Folgerung 3.3: *Wenn $F(A) \neq \emptyset$ ist, so existiert genau ein Element $u_A \in F(A)$ mit $\|u_A\|_{1,g} = \inf \{\|u\|_{1,g} : u \in F(A)\}$.*

Das folgende Lemma dient zum Beweis einer weiteren Eigenschaft der $(1, g)^+$-Kapazität, die in Satz 3.5 enthalten ist.

Lemma 3.4: *Es sei (A_n) eine wachsende Folge von Teilmengen des $\mathbf{R}^d$ und $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Für alle $n = 1, 2, \ldots$ gelte $F(A_n) \neq \emptyset$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{A_n}\|_{1,g} = \inf\{\|u\|_{1,g} : u \in F(A)\}. \tag{3.1}$$

Beweis: Offensichtlich gilt $F(A_n) \supset F(A_{n+1}) \supset F(A)$. Daraus folgt $\|u_{A_n}\|_{1,g} \leqq \|u_{A_{n+1}}\|_{1,g}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und $F(A) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(A_n)$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) $F(A) = \emptyset$. Dann ist nach unserer Vereinbarung die rechte Seite von (3.1) gleich $+\infty$. In diesem Fall gilt auch $\lim_{n\to\infty} \|u_{A_n}\|_{1,g} = +\infty$. Andernfalls wäre $\|u_{A_n}\|_{1,g} \leqq \varkappa$ für alle n und man könnte aus (u_{A_n}) eine gegen u_0 schwach konvergente Teilfolge auswählen. Aus der Tatsache, daß alle $F(A_n)$ schwach abgeschlossen sind, folgt $u_0 \in F(A)$ und damit ein Widerspruch.

b) $F(A) \neq \emptyset$. Dann besteht die offensichtliche Ungleichung $\lim_{n\to\infty} \|u_{A_n}\|_{1,g} \leqq \|u_A\|_{1,g}$. Wir nehmen nun $\lim_{n\to\infty} \|u_{A_n}\|_{1,g} < \|u_A\|_{1,g}$ an. Wieder können wir eine gegen u_0 schwach konvergente Teilfolge aus (u_{A_n}) auswählen. Nach dem im Fall a) Gesagten gilt $u_0 \in F(A)$. Aus der Halbstetigkeit der Norm bezüglich der schwachen Topologie folgt $\|u_0\|_{1,g} \leqq \lim_{n\to\infty} \|u_{A_n}\|_{1,g} < \|u_A\|_{1,g}$, was im Widerspruch zur Definition von u_A steht ∎

Nachdem alle vorbereitenden Aussagen bereitgestellt wurden, formulieren und beweisen wir nun das Hauptergebnis dieses Paragraphen. Von diesem Satz und seinen Folgerungen werden wir ebenfalls im folgenden Paragraphen Gebrauch machen.

Satz 3.5: *Es sei $A \subset \mathbf{R}^d$. Dann gilt:*
(i) $\bar{c}^+_{1,g}(A) = \inf\{\|u\|_{1,g} : u \in F(A)\}$.
(ii) *Wenn $F(A) \neq \emptyset$ ist, so folgt $\bar{c}^+_{1,g}(A) = \|u_A\|_{1,g}$.*
(iii) *Für jede monoton wachsende Mengenfolge (A_n) mit $A_n \subset \mathbf{R}^d$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist*

$$\bar{c}^+_{1,g}(A) = \lim_{n\to\infty} \bar{c}^+_{1,g}(A_n) \quad \text{mit} \quad A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Beweis: (i) Nach Lemma 3.1 (ii) gilt $\bar{c}^+_{1,g}(A) \leqq \inf\{\|u\|_{1,g} : u \in F(A)\}$. Wir zeigen die umgekehrte Ungleichung und führen den Beweis in mehreren Schritten:

a) $A = K \subset \mathbf{R}^d$, kompakt: Dann gilt $F(K) \supset \{u \in M^1(g)^+ : u(x) \geqq 1$ in einer Umgebung von $K\}$, also $\inf\{\|u\|_{1,g} : u \in F(K)\} \leqq \bar{c}^+_{1,g}(K)$.

b) $A = G \subset \mathbf{R}^d$, offen: Es sei (K_n) eine monton wachsende Folge von kompakten Teilmengen von G mit $\lim_{n\to\infty} \bar{c}^+_{1,g}(K_n) = \underline{c}^+_{1,g}(G) = \bar{c}^+_{1,g}(G)$. Wegen $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ erhalten wir aus Lemma 3.4 und Teil a) des Beweises $\bar{c}^+_{1,g}(G) = \inf\{\|u\|_{1,g} : u \in F(G)\}$.

c) $A \subset \mathbf{R}^d$, beliebig: Es sei $G \subset \mathbf{R}^d$ eine offene Menge mit $A \subset G$. Dann gilt offensichtlich $F(G) \subset F(A)$ und $\inf\{\|u\|_{1,g} : u \in F(A)\} \leqq \inf\{\|u\|_{1,g} : u \in F(G)\} = \bar{c}^+_{1,g}(G)$, also $\inf\{\|u\|_{1,g} : u \in F(A)\} \leqq \bar{c}^+_{1,g}(A)$.

(ii) folgt sofort aus der Folgerung 3.3, während (iii) unmittelbar aus Lemma 3.4 und den Punkten (i), (ii) des Satzes folgt ∎

Wir erhalten aus dem Satz 3.5 die

Folgerung 3.6: *Für jede Menge $A \subset \mathbf{R}^d$ mit $\bar{c}^+_{1,g}(A) < +\infty$ existiert genau ein Element $u_A \in H^1(g)^+$ mit $\|u_A\|_{1,g} = \bar{c}^+_{1,g}(A)$ und $u_A(x) \geqq 1$ $(1, g)^+$-quasi überall auf A.*

Das legt die folgende Definition nahe.

Definition 3.7: Das in der Folgerung 3.6 für die Menge A mit $\bar{c}_{1,g}^{+}(A) < +\infty$ beschriebene Element $u_A \in H^1(g)^+$ heißt $(1, g)^+$-*kapazitives* (oder kurz *kapazitives*) *Potential von* A.

§ 4

In diesem Paragraphen werden Eigenschaften, wie sie in der klassischen Potentialtheorie z. B. für Funktionen aus den Soboleräumen H^1 bewiesen wurden (vgl. [1, 3, 4, 6]) auf Funktionen aus $H^1(g)$ übertragen. Zunächst geben wir einige weitere Begriffe an, die wir zur Formulierung der Aussagen benötigen.

Definition 4.1: *Die Menge* $E \subset \mathbf{R}^d$ *heißt* $(1, g)$-*dünn* (oder kurz *dünn*) *im Punkt* x_0, *wenn es eine Funktion* $u \in H^1(g)^+$ *derart gibt, daß* $\underline{\lim}_{\substack{x \to x_0 \\ x \to E \setminus \{x_0\}}} u(x) > u(x_0)$ *gilt. Andernfalls heißt* E $(1, g)$-*dick* (oder kurz *dick*) *in* x_0.

Definition 4.2: Es sei $E \subset \mathbf{R}^d$. Wir erklären die zu E gehörende *reduzierte Funktion* R_E (vgl. [1, 3]):

$$R_E(x) := \inf \{u(x) : u \in H^1(g)^+ \text{ und } u(y) \geqq 1 \text{ für } y \in E\}, \qquad x \in \mathbf{R}^d.$$

Lemma 4.3: *Die Menge* $E \subset \mathbf{R}^d$ *ist genau dann dünn im Punkt* x_0, *wenn es eine Umgebung* V *von* x_0 *derart gibt, daß* $R_{E \cap V \setminus \{x_0\}}(x_0) < 1$ *gilt* ∎

Bemerkung: Dafür, daß eine Menge $E \subset B_r$ dünn ist im Punkt x_0, ist hinreichend, daß es zu x_0 eine Umgebung V derart gibt, daß für das $(1, g)$-kapazitive Potential u von $E \cap V$ gilt: $u(x_0) < 1$.

Als nächstes führen wir über den Umgebungsbegriff eine neue Topologie in B_r ein. In Anlehnung an die klassische Theorie werden wir sie *feine Topologie* nennen.

Definition 4.4: $V \subset B_r$ ist *Umgebung des Punktes* $x \in B_r$ genau dann, wenn $x \in V$ gilt und $B_r \setminus V$ dünn ist in x.

Wenn wir mit $e(E)$ die Menge aller Punkte bezeichnen, in denen $E \subset B_r$ dünn ist, dann stellt $\tilde{E} := E \cup (B_r \setminus e(E))$ die Abschließung von E in der feinen Topologie dar.

Definition 4.5: Eine Funktion $f : B_r \to \mathbf{R}^1$ heißt *feinstetig*, wenn sie in der feinen Topologie stetig ist.

Für Funktionen aus $H^1(g)$ können wir nun die folgende Stetigkeitsaussage formulieren.

Satz 4.6: *Die Einschränkung einer jeden Funktion* u *aus* $H^1(g)$ *auf* B_r *ist* $(1, g)$-*quasi überall feinstetig in* B_r.

Beweis: Wir benutzen das folgende Ergebnis von Fuglede (vgl. [3: Satz 3, Seite 12—04]): Wenn c eine subadditive Kapazität in dem Hausdorffraum X ist mit den Eigenschaften $c(\emptyset) = 0$ und $c(E) = c(\tilde{E})$ für alle $E \subset X$, dann ist jede präzisierte Funktion $f : X \to \mathbf{R}^1$ quasi überall feinstetig in X. Es genügt also, wenn wir $\bar{c}_{1,g}^{+}(E) = \bar{c}_{1,g}^{+}(\tilde{E})$ für alle $E \subset B_r$ zeigen. Das ist jedoch offensichtlich, da $E \subset \tilde{E}$ und das kapazitive Potential u_E von E größer gleich 1 ist $(1, g)$-quasi überall auf $\tilde{E}$ ∎

LITERATUR

[1] Brelot, M.: Introduction axiomatique de l'effilement. Annali di Mat. pura et appl., Serie 4, **57** (1962), 77–95.
[2] Deny, J.: Sur la convergence de certains integrales de la théorie du potentiel. Arch. der Math. **5** (1954), 367–370.
[3] Fuglede, B.: Quasi topology and fine topology. Séminaire Brelot-Choquet-Deny 10^e année (1965–1966).
[4] Hedberg, L. I.: Non-linear potentials and approximation in the mean. Math. Z. **129** (1972), 299–319.
[5] Mazja, V. G., und V. P. Havin: Nichtlineare Potentialtheorie (russ.). Uspechi Mat. Nauk **26** (6) (1972), 67–138.
[6] Schulze, B.-W., und G. Wildenhain: Methoden der Potentialtheorie für elliptische Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Akademie-Verlag: Berlin 1977.

Manuskripteingang: 15. 01. 1982; in revidierter Fassung: 03. 12. 1982

VERFASSER:

Dr. Ehrhard Herbst
Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität
DDR-2500 Rostock, Universitätsplatz 1