

Пример газодинамической диссипативной системы с обратным ходом времени

Н. В. Змитренко

(Prof. Dr. F. A. Willers zu seinem 100. Geburtstag gewidmet)

Für das System der räumlich eindimensionalen Gleichungen der Gasdynamik mit Berücksichtigung der Temperatur werden Paare von Ähnlichkeitslösungen angegeben und diskutiert, die auseinander durch Zeit- und Geschwindigkeitsumkehr hervorgehen.

Для пространственно одномерных уравнений газовой динамики с учетом температуры указаны и обсуждены пары автомодельных решений, переходящих друг в друга путем обращения направления времени и скорости.

For the system of spatially one-dimensional equations of gas dynamics with temperature effects we give and discuss pairs of similarity solutions which transform into each other by returning direction of time and velocity.

1. Известно, что в общем случае получить решение для сжатия сплошной среды, располагая решением для ее разрежения, путем применения простого „обращения времени“ (симметричного отражения относительно некоторого момента времени) невозможно. Однако, существуют примеры, когда разрежение и симметрично-обращенное к нему сжатие являются реально осуществимыми физическими процессами. Так, например, процесс безударного сжатия [1, 2], рассматриваемый в рамках автомодельной задачи для конечной массы газа [3, 4], является обращением соответствующей задачи разрежения. Пространственные распределения величин в этих взаимно-симметричных процессах совпадают для симметричных моментов времени (в безразмерных переменных автомодельной задачи эти распределения вообще фиксированы), а изменения величин со временем следуют одним и тем же законам с изменением времени от $t = 0$ до $t = +\infty$ для разрежения и от $t = -\infty$ до $t = 0$ для сжатия. Как показано, например, в [5], момент коллапса $t = 0$ может быть сдвигом по времени перенесен в точку $t_f > 0$, так что вместо множителя t^n , характерного для режимов расширения, в режимах сжатия появляется фактор $(t_f - t)^n$.

Та же автомодельная задача при учете теплопроводности и источника тепла дает пример открытой диссипативной системы, для которой взаимно-симметричные движения имеют реальный физической смысл. Ниже построены такие движения.

2. Рассмотрим сплошную среду, движение которой описывается уравнениями газовой динамики или уравнениями газовой динамики с учетом теплопроводности и объемных источников и стоков тепла. В последнем случае в среде присутствуют диссипативные эффекты.

Для простоты рассмотрим одномерные движения конечной массы M_0 такой среды, совершаемые под действием сферического, цилиндрического или плоского поршня. Параметр M_0 выбран так, что полная масса $M_{tot} = (2\pi N + (1 - N) \times (1 - N/2)) M_0$, где $N = 0, 1, 2$ для случаев плоской, цилиндрической и сфери-

ческой симметрии. Все величины, характеризующие среду, зависят только от времени t и одной пространственной координаты r . Координата поршня $r_*(t)$ есть заданная или определяемая функция времени.

3. Адиабатическое движение рассматриваемой конечной массы среды без диссипативных эффектов — в этом случае она представляет собой термодинамически замкнутую систему — может происходить как обратимым образом (изменение энтропии всей массы вещества $\Delta S_{tot} = 0$), так и необратимо (при этом $\Delta S_{tot} > 0$ и в среде наблюдаются необратимые процессы — ударные волны).

Система с диссипацией (рассматриваемая конечная масса среды с учетом теплопроводности и источников или стоков тепла) в общем случае уже является открытой. В такой системе может быть $\Delta S_{tot} < 0$ даже при наличии диссипативных процессов за счет отвода тепла через поршень.

Из общих термодинамических соображений ясно, что для обратимого адиабатического движения замкнутой системы справедливо следующее утверждение. Движение, получающееся из некоторого реально осуществленного движения заменой времени t на $-t$ и одновременной заменой знака скорости, является физически реальным процессом. Такое „обращение времени“ можно представлять следующим образом. Пусть в некоторый момент времени $t = t_1$ в процессе движения имеют место распределения плотности $\rho(r, t_1)$ и скорости $v(r, t_1)$. Распределение энтропии $S(r, t_1) = S(r)$ считаем известным. Тогда в силу адиабатичности движения, давление $p(r, t_1)$ и температура $T(r, t_1)$ могут быть вычислены по значению плотности. Не ограничивая общности, в дальнейшем адиабатический случай можно считать изэнтропическим: $S(r, t) = const$. Полная энтропия $S_{tot} = \frac{M_{tot}}{M_0} \cdot S_0$,

где $S_0 = \int_0^{r_*} S(r, t) r^N dr$, аналогично тому, как $M_0 = \int_0^{r_*} \rho(r, t) r^N dr$. От момента

$t = t_1$ до момента $t = t_2 > t_1$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) поршень движется от $r_1 = r_*(t_1)$ до $r_2 = r_*(t_2)$, не нарушая адиабатичности ($dS/dt = 0$ для всей массы газа). Такие движения существуют [3, 4, 6]. Пусть на момент t_2 плотность и скорость имеют распределения $\rho(r, t_2)$ и $v(r, t_2)$. Поменяем теперь скорости на противоположные и рассмотрим момент $t = t_2$ как начальный с данными $\rho(r, t_2)$ и $v(r, t_2)$. Поршень с момента t_2 начинает двигаться так, что повторяет свою траекторию в течение времени $t_2 \leq t \leq t_3$, $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$, в обратном порядке так, что $r_*(t_3) = r_*(t_1)$, и, вообще, $r_*(t_1 + t') = r_*(t_3 - t')$ для $0 \leq t' \leq t_2 - t_1$. При этом

$$\rho(r, t_1 + t') = \rho(r, t_3 - t'), \quad v(r, t_1 + t') = -v(r, t_3 - t'). \quad (1)$$

Кроме того, очевидно, что $T(r, t_1 + t') = T(r, t_3 - t')$ и $p(r, t_1 + t') = p(r, t_3 - t')$.

Оказывается, что для среды с диссипацией возможно построить два „взаимно симметричных“ или „зеркальных“ движения, т. е. таких, что движение при $t_2 < t < t_3$ „повторяет“ в обратном порядке движение для $t_1 < t < t_2$. Профили плотности, давления, температуры, модуля скорости в „обратном“ движении такие же, как и в „прямом“, а знаки скоростей противоположны (для „взаимно симметричных“ движений справедливо (1)). В определенном смысле пример таких движений демонстрирует „обращение времени“ для системы с диссипативными эффектами. Построим его, используя аппарат автомодельных решений для конечной массы вещества.

4. Среди решений уравнений газовой динамики (без диссипативных процессов) известны движения, в которых поршень за конечное время сжимает конечную массу газа до бесконечности плотности при $\Delta S_{tot} = 0$ [2—4, 6, 7—9]. С другой стороны, известен класс автомодельных движений конечной массы среды (как

диссипативной, так и без диссипаций), содержащий как случаи расширения [10—12], так и случаи сжатия газа [3, 4, 8, 9, 13] и характеризующийся отсутствием распространения по массе вещества ударных, тепловых и волн диффузии магнитного поля (в случае системы уравнений магнитной гидродинамики с конечной проводимостью [9, 14]). Именно такие решения описывают асимптотическую стадию безударного сжатия.

Система уравнений газовой динамики с учетом эффектов теплопроводности и тепловыделения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial x} r^N v; \quad \frac{\partial r}{\partial t} = v; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -r^N \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + p \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} (r^N W) + \frac{Q}{\rho};$$

$$W = -\kappa \rho r^N \frac{\partial T}{\partial x}; \quad p = R_0 T; \quad \varepsilon = \frac{R}{\gamma - 1} T; \quad \kappa = \kappa_0 T^{m_1} \rho^{k_1}; \quad Q = Q_0 T^{m_2} \rho^{k_2}. \tag{2}$$

Здесь $x = \int_0^r \rho r^N dr$ — массовая лагранжева координата. Зависимости внутренней энергии ε и давления от температуры и плотности соответствует в (2) уравнениям состояния идеального газа. Коэффициент теплопроводности κ и источник тепла Q взяты в виде степенных функций температуры и плотности. Зависимость потока тепла W от градиента температуры следует закону Фурье.

Система (2) допускает решения в виде разделения переменных

$$F_i(x, t) = B_i t^{n_i} f_i(s), \quad s = \frac{x}{M_0}, \tag{3}$$

где F_i -искомые функции (скорость, давление, плотность и т. д., пронумерованные индексом i), B_i и n_i -постоянные, f_i -безразмерные представители размерных F_i . Степенная зависимость от времени t^{n_i} в (3) допускается степенной зависимостью коэффициентов диссипации от температуры и плотности в (2), причем задание величин m_α, K_α ($\alpha = 1, 2$) фиксирует значения всех n_i в (3). Величины n_i из (3) в силу соображений размерности связаны между собой, так что достаточно определить лишь одну из них. В качестве таковой удобно выбрать показатель n в формуле

$$r(x, t) = B t^n \lambda(s)$$

для радиуса, так что закон движения поршня $r_*(t)$ выглядит следующим образом:

$$r_*(t) = B t^n \lambda_*, \tag{4}$$

$\lambda_* = \lambda(1)$ -безразмерная координата поршня. Таким образом, n связан с m_α, K_α в силу условий автомодельности, а по значению n могут быть вычислены все остальные n_i [3, 8, 9]. Граничные режимы (на поршне) соответствуют при этом формулам (3), в которых надо положить $s = 1$. Граничные условия при $s = 0$ естественно взять в виде условий симметрии. Начальные данные в автомодельной задаче сингулярны (что соответствует значению $t = 0$ или $|t| = \infty$ в (3)). Устойчивая автомодельная задача „выходит“ с течением времени на решение (3) с достаточно произвольных начальных данных, заданных в конечной, несингулярной момент времени [3, 9].

Величины B_i могут быть выражены в силу размерностных соотношений через параметры M_0 , R и B из (4). При этом можно фиксировать значение λ_* , например, $\lambda_* = \frac{1}{n}$. Тогда скорость поршня имеет вид $v_*(t) = Bt^{n-1}$, т. е. граничное условие для безразмерной скорости $f_1(s) \equiv \alpha(s)$ при $s = 1$ есть $\alpha(1) = 1$. Постановка задачи с вакуумом на границе, где безразмерное давление $f_2(1) \equiv \beta(1) = 0$, а параметр λ_* определяется из решения, например, в [3, 14].

Решения вида (3), как показано в [3, 4, 8, 9], относятся как к задачам разрежения (при этом $0 < t < +\infty$, асимптотически $t \rightarrow +\infty$), так и к задачам сжатия (при этом $-\infty < t < 0$, и асимптотически $t \rightarrow 0$). В таком подходе случай $t < 0$ в задачах сжатия требует определенного значения аргумента комплексного числа B (так, чтобы $Bt^n > 0$) [3, 8]. Однако, как показано в [5, 9], такой подход полностью эквивалентен подходу, в котором для задач сжатия $-\infty < t < t_f$, асимптотически $t \rightarrow t_f$ и множитель t^n в (3) заменен на $(t_f - t)^n$. В любом случае для представителей размерных величин $F_i(x, t)$ получается одна и та же система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} n(1-n)\delta\lambda &= d\beta/d\lambda; \\ n_r\beta &= -\lambda^{-N}d(\lambda^N\omega)/d\lambda + q; \\ \omega &= -\kappa d\theta/d\lambda; \\ \beta &= \delta\theta; \quad \bar{\kappa} = \bar{\kappa}_0\theta^{m_1}\delta^{k_1}; \quad q = q_0\theta^{m_2}\delta^{k_2}; \\ n_r &= \frac{2}{\gamma-1}\left(\frac{n}{n_*} - 1\right); \quad n_* = 2/(2+\mu); \quad \mu \equiv (\gamma-1)(N+1). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\delta, \beta, \omega, q, \bar{\kappa}, \theta, q_0, \bar{\kappa}_0$ — представители соответственно плотности, давления, потока тепла, источника тепла, коэффициента теплопроводности, температуры и постоянных Q_0 и κ_0 . В последних двух случаях в формулах (3) естественно, $n_i = 0$ (это и порождает условия автомодельности). Система (5) записана относительно безразмерного радиуса λ . В случае наличия параметра конечной массы M_0 такая запись эквивалентна записи относительно безразмерной массы s в силу справедливости соотношения

$$ds = \delta\lambda^N d\lambda. \quad (6)$$

По сравнению с (2) из системы (5) исключены два первых уравнения. Уравнение неразрывности тождественно удовлетворяется с учетом (6), а второе дает $\alpha = n\lambda$ и учитывается в оставшихся в системе (5) уравнениях.

Разница в задачах сжатия и разрежения заключается в системе (5) лишь в знаках безразмерных диссипативных коэффициентов $\bar{\kappa}_0$ и q_0 : они положительны для задач разрежения и отрицательны для сжатия: [3, 4, 8, 9, 13, 14]. При этом $\text{sign } W = \text{sign } \omega$ для задач разрежения и $\text{sign } W = -\text{sign } \omega$ для задач сжатия. Вместе с тем, как для сжатия, так и для разрежения $\alpha > 0$, но размерная скорость $v = n \frac{r}{t}$ положительна для разрежения ($t > 0$) и отрицательна для сжатия ($t < 0$).

5. В классе решений (3) взаимно-симметричным движениям соответствуют решения для сжатия ($t < 0$) и разрежения ($t > 0$) с одинаковыми пространственными распределениями величин $f_i(s)$ или $f_i(\lambda)$. Последние, в свою очередь, определяются системой (5). Определим взаимно-симметричные движения как движения в средах с одними и теми же κ и Q , причем одно из этих движений

(безразлично, сжатие или разрежение) будем называть „прямым“, а другое „обратным“. Тогда задача заключается в нахождении одинаковых решений двух задач для системы (5) с одинаковыми граничными условиями при $\lambda = 0$ и $\lambda = \lambda_*$ и одинаковыми величинами $|\bar{z}_0|$ и $|q_0|$, но с противоположными знаками \bar{z}_0 и q_0 .

Пусть „прямое“ движение имеет параметры $n^{(1)} \equiv n$ и γ_1 , так что

$$n_{\gamma}^{(1)} = \frac{2}{\gamma_1 - 1} \left(\frac{n^{(1)}}{n_*^{(1)}} - 1 \right), \quad n_*^{(1)} = \frac{2}{2 + \mu_1}, \quad \mu_1 = (\gamma_1 - 1)(N + 1).$$

Тогда анализ системы (5) показывает, что „обратное“ движение должно обладать параметрами

$$n^{(2)} = n, \quad n_{\gamma}^{(2)} = -n_{\gamma}^{(1)}. \tag{7}$$

Последнее приводит к связи между показателями адиабаты γ_2 и γ_1 в „обратном“ и „прямом“ движении:

$$\gamma_2 = 1 + \left[\frac{n(N + 1)}{1 - n} - \frac{1}{\gamma_1 - 1} \right]^{-1}. \tag{8}$$

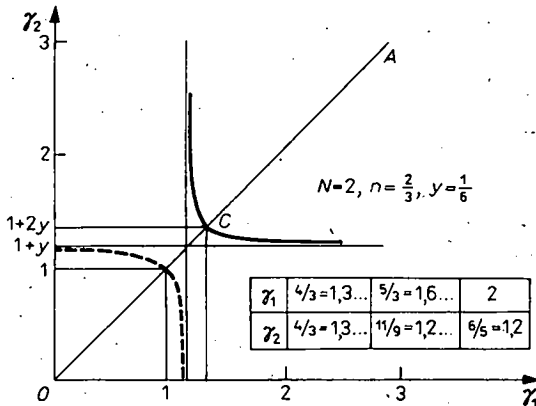
Эту формулу можно переписать в симметричном виде относительно γ :

$$\frac{(\gamma_2 - 1)(\gamma_1 - 1)}{\gamma_2 + \gamma_1 - 2} = \frac{1 - n}{(N + 1)n}, \tag{9}$$

или μ :

$$\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{1 - n}{n}, \tag{10}$$

что определяет равнобочную гиперболу $(\mu_2 - z)(\mu_1 - z) + z^2, z = (1 - n)n^{-1}$. На рисунке приведен график зависимости (8) γ_2 от γ_1 для фиксированных n и N . Через y обозначена величина $y \equiv z/(N + 1)$. Конкретные величины n и N , для которых построен график, а также таблица значений γ_1 и γ_2 приведены на рисунке. Из формул (9) и (10) видно, что взаимно-симметричные движения возможны лишь при $n \leq 1$ ($z \geq 0$), если считать, что $1 < \gamma_{1,2} < \infty$. Из анализа (9) или (10) следует, что прямые $\gamma_1 = 1 + y$ и $\gamma_2 = 1 + y$ являются асимптотами: $\gamma_2 \rightarrow \infty$ при $\gamma_1 \rightarrow 1 + y$, напротив, $\gamma_2 \rightarrow 1 + y$ при $\gamma_1 \rightarrow \infty$. При $\gamma_1 = 1 + 2y$



будет $\gamma_2 = \gamma_1$. Вторая ветвь гиперболы (обозначенная на рисунке пунктиром) физическим нереальна, так как на ней либо $\gamma_1 < 1$ (выше бисектриссы OA координатного угла), либо $\gamma_2 < 1$ (ниже OA). Случай равенства $\gamma_1 = \gamma_2$ (точка C на графике) соответствует движениям с сохранением энтропии. В самом деле, при $\gamma_1 = \gamma_2$ будет $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, и из (10) следует, что $n = 2/(2 + \mu) = n_*$. Как указано например, в [4, 9]

$$\frac{dS_{tot}}{dt} = \frac{2RM_{tot}}{\gamma - 1} \cdot \frac{\frac{n}{n_*} - 1}{t}, \quad (11)$$

где S_{tot} -полная энтропия массы газа. При $n = n_*$ имеем $dS_{tot}/dt = 0$. Этому случаю соответствуют движения газа без учета диссипативных процессов (например, решение сверхсжатия из [3, 4]), при которых „прямое“ и „обратное“ движение физически осуществимы для одной и той же среды с одним и тем же показателем γ .

В общем случае диссипативной среды значения γ_1 и γ_2 различны. Из формул (7)–(10) при этом следует, что если $n_*^{(1)} > n$, то $n_*^{(2)} < n$ и наоборот. Это в соответствии с (11) обеспечивает одинаковое изменение со временем энтропии S_{tot} (убывание или возрастание) в „прямом“ и „обратном“ движениях. В самом деле, из (10) или прямо из условия (7) при учете $n_* = 2(2 + \mu)^{-1} < 1$ ($\mu > 0$) долучается формула для связи $n_*^{(2)}$ и $n_*^{(1)}$:

$$\frac{n - n_*^{(1)}}{n - n_*^{(2)}} = -\frac{1 - n_*^{(1)}}{1 - n_*^{(2)}} < 0, \quad (12)$$

из которой следуют вышеприведенные утверждения. Они согласуются с физическим смыслом задачи, т. к. рост или убывание энтропии в среде с источником и теплопроводностью определяется профилем температуры (т. е. положительным или отрицательным потоком тепла через поршень), а последний одинаков для „прямого“ и „обратного“ движений.

Так, например, взяв в качестве „прямого“ движения разрежения среды с $\gamma = 5/3$, $N = 2$ и $n = 2/3$, что соответствует $\kappa \sim T^{5/2}$ и $Q \sim T^{1,6} \rho^{1,3}$ для „обратного“ движения, получим $\gamma_2 = \frac{11}{9} = 55/45 = 1,22 \dots$ При этом $n_*^{(1)} = \frac{1}{2} < n$ (режим возрастания энтропии), а $n_*^{(2)} = 3/4 > n$. В случае сжатия для близкого значения $\gamma_2 = 1,2 = \frac{6}{5} = \frac{54}{45}$ в [3, 4] построено численное решение авторской задачи (рис. 3 из [4]), содержащее немонотонность в профиле температуры. Заметный пик температуры не на поршне и не в центре сжимаемой среды обязан своим происхождением действию источника тепла.

6. В настоящей работе не затрагиваются результаты численных исследований системы (2). Такие исследования должны показать устойчивы ли оба взаимно-симметричных движений, либо одно из них обязательно неустойчиво, либо устойчивость последнего зависит от параметров задачи.

В заключение отметим, что при одинаковых профилях q и v во взаимно-симметричных движениях и при зеркально-симметричном поведении их во времени, полная энтропия S_{tot} растет как в „прямом“, так и в „обратном“ движениях (см. (11)), причем $S_{tot} \sim \ln t$ ($t > \infty, t \rightarrow \infty$) и $S_{tot} \sim -\ln |t|$ ($t < 0, t \rightarrow 0$); или же убывает опять-таки и в „прямом“ и в „обратном“ движениях, причем $S_{tot} \sim -\ln t$ ($t > 0$) и $S_{tot} \sim \ln |t|$ ($t < 0$).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] NUCKOLLS, J., WOOD, L., THIESSEN, A., and G. ZIMMERMAN: Laser compression of matter to super-high densities: thermonuclear (CTR) application. *Nature* **239**, 5368 (1972), 139—142.
- [2] KIDDER, R. E.: Theory of homogeneous isentropic compression and its application to laser fusion. *Nuclear Fusion* **14**, 1 (1974), 53—60.
- [3] Змитренко, Н. В., и С. П. Курдюмов: Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы. Препринт 16 Института прикл. мат. им. М. В. Келдыша АН СССР: Москва 1973, 71 с.
- [4] Змитренко, Н. В., и С. П. Курдюмов: Автомодельные режимы сжатия плазмы конечной массы. В кн.: Проблемы лазерного термоядерного синтеза (Под. ред. А. А. Филюкова). Москва: Атомиздат 1976, 279—294.
- [5] Змитренко, Н. В., Курдюмов, С. П., Михайлов, А. П., и А. А. Самарский: Метастабильная локализация тепла в среде с нелинейной теплопроводностью и условия ее проявления в эксперименте. Препринт 103 Института прикл. мат. им. М. В. Келдыша АН СССР: Москва 1977, 67 с.
- [6] Калждан, Я. М.: К вопросу об адиабатическом сжатии газа под действием сферического поршня. *Журнал прикл. Мех. и технич. физики* **1** (1977), 23—30.
- [7] Жданов, С. К., и Б. А. Трубников: Оптимальное сжатие плазмы в зет- и тета-пинче. Письма в *Журнал exper. и теор. Физики* **21**, 6 (1975), 371—374.
- [8] Змитренко, Н. В., и С. П. Курдюмов: Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы. *Доклады АН СССР* **218**, 6 (1974), 1306—1309.
- [9] Змитренко, Н. В., и С. П. Курдюмов: *N*- и *S*-режимы автомодельного сжатия конечной массы плазмы и особенности режимов с обострением. *Журнал прикл. мех. и техн. физики* **1** (1977), 3—23.
- [10] Волосявич, П. П., Курдюмов, С. П., Попов, Ю. П., и А. А. Самарский: Автомодельная задача о сильноточном разряде в плазме. *Журнал вычисл. мат. и мат. физики* **10**, 6 (1970), 1447—1457.
- [11] Немчинов, И. В.: Разлет плоского слоя газа при постепенном выделении энергии. *Журнал прикл. мех. и технич. Физики* **1** (1961), 17—27.
- [12] Неуважаев, В. Е.: Истечение газа в вакуум при степенном законе температуры на границе. *Прикл. мат. и мех.* **30**, 6 (1966), 1015—1021.
- [13] Змитренко, Н. В., и С. П. Курдюмов: Возникновение структур при автомодельном режиме сжатия плазмы. *Доклады АН СССР* **219**, 3 (1974), 578—581.
- [14] Змитренко, Н. В., и С. П. Курдюмов: Автомодельный режим сжатия конечной массы плазмы в задачах зет- и тета-пинча. Препринт 19 Института прикл. мат. им. М. В. Келдыша АН СССР: Москва 1974, 70 с.

Manuskripteingang: 05. 04. 1982

VERFASSER:

Проф. д-р Николай Васильевич Змитренко
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР
СССР-125047 Москва А-47, Миусская пл. 4