Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (4) 1983, S. 329—334

Свойства неограниченных во времени решений диффузионных уравнений

А. П. Михайлов

(Prof. Dr. F. A. Willers zu seinem 100. Geburtstag gewidmet)

Wir geben einen Überblick über Ergebnisse zu unbeschränkten Lösungen quasilinearer parabolischer Gleichungen, die in der Arbeitsgruppe von A. A. Samarskij und S. P. Kurdjumov erzielt wurden. Behandelt werden Ähnlichkeitslösungen und Vergleichssätze. Es zeigt sich, daß die betrachteten Lösungen eine Reihe interessanter und (für lineare Diffusionsgleichungen) ungewöhnlicher Eigenschaften besitzen.

Дается обзор по результатам о неограниченных решениях квазилинейных параболических уравнений, полученным коллективом под руководством А. А. Самарского и С. П. Курдюмова. Рассматриваются автомодельные решения и теоремы сравнения. Оказывается, что такие решения имеют ряд интересных и, для линейных диффузионных уравнений, необыкновенных свойств.

We survey results on unbounded solutions of quasilinear parabolic equations, obtained by the team directed by A. A. Samarskij and S. P. Kurdjumov. Considered are similarity solutions and comparison theorems. The investigated solutions exhibit a number of interesting and, for linear diffusion equations, unusual properties.

1. Введение

Параболические (диффузионные) уравнения применяются для описания широкого класса явлений в механике и физике таких, например, как фильтрация газа в пористой среде, движение грунтовых вод, диффузия вещества, процессы теплопроводности и горения в сплошных средах.

В ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР под руководством профессоров А. А. Самарского и С. П. Курдюмова выполнен цикл теоретических исследований неограниченных во времени решений параболических уравнений (решение обращается в бесконечность в конечный момент времени) [1—12]. Неограниченные решения обладают рядом необычных свойств и позволяют изучать такие эффекты как локализация процессов диффузии в сплошных средах, образование и взаимодействие диссипативных структур, усложнение организации первоначально однородной сплошной среды. В докладе представлены некоторые результаты, описывающие свойства неограниченных решений и методы их исследования, которые могут быть применены для исследования других задач.

Для определенности мы будем демонстрировать результаты на примере задачи о распространении тепла и горения в нелинейной среде для одномерного плоского случая. Процесс распространения тепла и горения в такой среде описывается уравнением

$$T_t = \big(k(T)\,T_x\big)_x + Q(T), \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

где x — координата, t — время, $T(x, t)$ — температура, $k(T) \geqq 0$ — коэффициент теплопроводности, $Q(T) \geqq 0$ — мощность объемных источников энергии. Горение инициируется с помощью начального возмущения температуры:

$$T(x, 0) = T_0(x) \not\equiv 0. \tag{2}$$

2. Автомодельные решения

Эффективным методом исследования развитой стадии процесса горения является построение автомодельных решений соответствующих нелинейных уравнений математической физики. Их поиск и построение основано на теории подобия и размерностей [13]. Обычно используются решения вида:

$$\begin{aligned}
&T = T(t) && \text{(гомотермическое решение)} \\
&T = T(x) && \text{(стационарное решение)} \\
&T = T(\xi), && \xi = \mathcal{D}t - x \quad \text{(бегущая волна)} \\
&T = Bt^n f(\xi), && \xi = x/At^m \quad \text{(степенная автомодельность)} \\
&T = B\,e^t f(\xi), && \xi = x/A\,e^{mt}
\end{aligned} \tag{3}$$

и

$$T = B\,e^x f(\xi), \quad \xi = A\,e^{mx}/t \quad \text{(экспоненциальная автомодельность)}.$$

Пример (S — *режим*): Задача (1)—(2) имеет при $k(T) = K_0T^\sigma$, $Q = Q_0T^{\sigma+1}$ (σ, k_0, $Q_0 > 0$) автомодельное решение в разделяющихся переменных [2]:

$$R(x, t) = \begin{cases} [\bar{Q}_0(t_f - t)]^{-1/\sigma} \left[\sin^2 \alpha \left(\dfrac{\pi}{2\alpha} - x\right)\right]^{1/\sigma}, & |x| \leqq \dfrac{\pi}{2\alpha} \\ 0, & |x| > \dfrac{\pi}{2\alpha} \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\bar{Q}_0 = Q_0\sigma(\sigma + 2)/[2(\sigma + 1)], \qquad \alpha = [\sigma^2 Q_0/[4k_0(\sigma + 1)]]^{1/2}.$$

Решение (4) демонстрирует следующие свойства процесса горения в рассматриваемой среде:

а) Горение происходит в режиме с обострением, т. е. при $t \to t_f$ (t_f зависит от амплитуды возмущения в момент $t = 0$) температура неограниченно возрастает во всех точках $|x| < L_T/2$. Здесь L_T — так называемая *фундаментальная тепловая длина* (ф. д.):

$$L_T = \frac{\pi}{\alpha} = 2\pi[(\sigma + 1)\,k_0/\sigma^2 Q_0]^{1/2}.$$

б) Горение локализовано на длине L_T (тепловые потоки при $x = \pm L_T/2$ равны нулю, температура вне области локализации равна нулю).

Для задачи (1)—(2) при $k = k_0T^\sigma$, $Q = Q_0T^\beta$ ($\sigma > 0$, $\beta > 1$) построены [2] автомодельные режимы с обострением (степенная автомодельность).

При $\beta < \sigma + 1$ волна неограниченно распространяется по веществу при $t \to t_f$, $T(x, t) \to \infty$ при $t \to t_f$, $|x| < \infty$ (*HS-режим*, отсутствие локализации).

При $\beta > \sigma + 1$ температура стремится к бесконечности при $t \to t_f$ лишь в точке $x = 0$. При $x > 0$ температура ограничена для всех $t \leqq t_f$, $x \neq 0$ (локализация горения в *LS-режиме*).

3. Теоремы сравнения

а) Автомодельные решения являются не только частными решениями, демонстрирующими те или иные свойства изучаемых процессов, но и так называемыми „промежуточными асимптотиками". Они описывают развитую стадию процесса и в неавтомодельных задачах, когда „забывается" влияния несущественных факторов [14].

Для уравнений, описывающих диссипативные процессы (параболических уравнений) роль частных решений гораздо шире. Решения параболических уравнений подчиняются теоремам сравнения:

Пусть $T^{(2)}(x, t)$ *— решение задачи* (1)—(2) *с* $T_0^{(2)}(x)$, а $T^{(1)}(x, t)$ *— решение задачи* (1)—(2) *с* $T_0^{(1)}(x)$, *причем* $T_0^{(2)}(x) \geq T_0^{(1)}(x)$ *для всех* $-\infty < x < \infty$.

Тогда $T^{(2)}(x, t) \geqq T^{(1)}(x, t)$ *для всех* $-\infty < x < \infty, t > 0$.

Сформулированная теорема сравнения (справедливая и для параболических уравнений общего вида) имеет простой физический смысл и позволяет сравнивать решения путем сравнения соответствующих им краевых условий. Таким образом, автомодельные решения могут выступать как границы между классами решений, принципиально различающимися по своим физическим свойствам.

б) В более общей формулировке теорема сравнения выглядит следующим образом:

Пусть $T(x, t)$ *— решение задачи* (1)—(2), *а* $v^{(2)}(x, t)$ *и* $v^{(1)}(x, t)$ *— некоторые функции, известные при* $t \geqq 0$, $-\infty < x < \infty$, *причем*

$$v^{(1)}(x; 0) \leqq T(x, 0) \leqq v^{(2)}(x, 0), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Тогда, если

$$v_t^{(2)} \geqq \left(k(v^{(2)})\, v_x^{(2)}\right)_x + Q(v)^{(2)}),$$

$$v_t^{(1)} \leqq \left(k(v^{(1)})\, v_x^{(1)}\right)_x + Q(v^{(1)}), \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

то

$$v^{(1)}(x, t) \leq T(x, t) \leqq v^{(2)}(x, t), \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0.$$

Физический смысл этой теоремы прост — функция $v^{(2)}(x, t)$ есть решение садачи (1)—(2) с некоторым дополнительным источником тепла в правой части (*верхнее решение*), функция $v^{(1)}(x, t)$ — решение со стоком тепла (*нижнее решение*). Ясно, что искомое решение $T(x, t)$ ограничено сверху и снизу функциями $v^{(2)}(x, t)$ и $v^{(1)}(x, t)$.

Пример: а) Очевидно, что в задаче (1)—(2) с $k(T)$ и $Q(T)$ из примера п. 2 любое начальное возмущение эволюционирует таким образом, что температура станет отличной от нуля при $|x| \leqq L_T/2$ в некоторый момент $t = t_1$. Выберем в (4) функцию $R(x, t_1)$ так, чтобы она ограничивала в момент $t = t_1$ рассматриваемое решение снизу. Тогда в силу свойств решения (4) и теорем сравнения получаем, что любое решение задачи (1)—(2) развивается в режиме с обострением. Время обострения оценивается сверху с помощью гомотермического решения (по теоремам сравнения), а снизу с помощью решения (4).

б) В [9] построены верхние и нижние решения уравнения (1) с $k(T) = k_0T^\sigma$, $\sigma > 0$, $Q(T) = Q_0T^\beta$, $\beta > 1$ (их вид „подсказан" степенными автомодельными решениями).

Показано, что при $\beta < \sigma + 3$ в задаче (1)—(2) будет развиваться режим с обострением независимо от начальных данных.

При $\beta > \sigma + 3$ выделен класс начальных данных, приводящих к режиму с обострением (достаточно большая начальная амплитуда) и класс начальных возмущений, при задании которых решение стремится к нулю при $t \to \infty$ (нет „вспышки", малая начальная амплитуда).

4. Инвариантно-групповые решения

Из приведенных примеров ясно, что роль частных решений для изучения рассматриваемых задач очень велика. Автомодельные решения являются частным случаем инвариантно-групповых решений. Их существование связано с наличием у уравнения (1) групп преобразования подобия, оставляющих неизменным вид уравнения; а поиск основан на теории групповых методов для дифференциальных уравнений.

В [5] найдены все инвариантно-групповые решения уравнения (1) (определен вид $k(T)$ и $Q(T)$, допускающих такие решения и вид самих решений). Найдено большое количество частных решений, составляющих базу для дальнейшего исследования. В частности, кроме решений вида (3) найдены решения вида $T(x, t) = Bt^n f(\xi)$, $\xi = x - \mathscr{D}t$ (комбинация *бегущей волны* и *степенной автомодельности*).

Однако построение нетривиальных инвариантно-групповых решений возможны лишь в случае достаточно простых функций $k(T)$, $Q(T)$ $\left(k(T) = T^\sigma, e^T;\ Q(T) = T^\beta, e^T, T \ln T\right)$.

5. Обобщенные теоремы сравнения

В связи с этим сформулированы обобщенные теоремы сравнения, позволяющие сравнивать решения параболических уравнений, соответствующие не только разным краевым условиям, но и *разным уравнениям* [6, 7] (в случае уравнения (1) разным функциям $k(T)$, $Q(T)$):

Пусть $T^{(2)}(x, t)$ решение задачи (1)—(2) с $T_0^{(2)}(x)$, $k^{(2)}(T)$, $Q^{(2)}(T)$, а $T^{(1)}(x, t)$ — решение задачи (1)—(2) с $T^{(1)}(x)$, $k^{(1)}(T)$, $Q^{(1)}(T)$. Если выполнены условия сравнения:

$$T_0^{(2)}(x) \geqq T_0^{(1)}(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

$$k^{(2)}(T) \geqq k^{(1)}(T), \qquad (k^{(2)}/k^{(1)})_T' \geqq 0,$$

$$Q^{(2)}(T)/k^{(2)}(T) \geqq Q^{(1)}(T)/k^{(1)}(T)$$

и дополнительное условие критичности решения $T^{(2)}(x, t)$:

$$\partial T^{(2)}/\partial t \geqq 0, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0, \tag{5}$$

то справедливо:

$$T^{(2)}(x, t) \geqq T^{(1)}(x, t), \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0.$$

Сформулированная теорема дает возможность сравнивать решения уравнений с произвольными $k(T)$, $Q(T)$ с решениями уравнений с $k(T)$, $Q(T)$ простого вида (например, степенными), для которых построены и изучены инвариантные решения, Пример: Для простоты рассмотрим для уравнения (1) с $Q(T) = 0$ задачу о нагреве среды в режиме с обострением (с границы $x = 0$), т. е. $T(0, t) \to \infty$ при $t \to t_f$, $x \geqq 0$ [1, 8, 11]. Вид $k(T)$ — произвольный. В [11] с помощью обобщенных теорем сравнения виделен класс граничных режимов с обострением, приводящих к локлизации тепла (то есть $T(x, t) = 0$ при $x > x_\varphi$, $x_\varphi < \infty$ не зависит от времени), и режимов, в которых локализация отсутствует ($T(x, t) \to \infty$, $t \to t_f$ для любого $x < \infty$).

6. Критичность

Условие критичности (5), входящее в сформулированную выше теорему (оно используется при ее доказательстве) интересно также с физической точки зрения. При его выполнении процесс горения никогда не ,,погаснет'', температура в любой точке среды в течение всего процесса не меньше начальной. Условие (5) обеспечивается при выполнении простого и легко проверяемого неравенства

$$\big(k(T_0(x))\, T_0(x)_x\big)_x + Q\big(T_0(x)\big) \geqq 0, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0. \tag{6}$$

При произвольных $k(T)$ и $Q(T) \geqq 0$ условие (6) всегда выпольняется при соответствующем выборе начального возмущения $T_0(x)$.

7. ,,Вырождение'' параболических уравнений на асимптотической стадии

Еще один метод теоретического анализа основан на том, что решения параболических уравнений могут при определенных условиях описываться автомодельными решениями более простых уравнений, например, уравнений первого порядка (типа Гамильтона-Якоби) [10, 12]. Тем самым значительно расширяются теоретические возможности исследования.

Пример: Для уравнения (1) с $k(T) = 1$ и $Q(T) = (1 + T)\ln^\beta(1 + T)$, $\beta > 1$ (размерные константы для простоты опущены) показано, что его решения на развитой стадии процесса горения (то есть при $t \to t_f$) приближенно описываются автомодельными решениями уравнения вида

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{1 + v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + (1 + v)\ln^\beta(1 + v),$$

которые легко исследуются. В частности, при $\beta = 2$ имеет место горение в S-режиме и локализация горения на ф. д. $L_T = 2\pi$, при $\beta < 2$ горение происходит в HS-режиме (локализация отсутствует), при $\beta > 2$ имеет место LS -режим.

8. Обобщения

Продемонстрированные методы обобщаются на многомерный случай, на случай зависимости коэффициентов уравнений переноса от координат, на системы параболических уравнений, учитывающих совокупность нелинейность диссипативных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Самарский, А. А., Змитренко, Н. В., Курдюмов, С. П., и А. П. Михайлов: Эффект метастабильной локализации тепла в среде с нелинейной теплопроводностью. Доклады АН СССР 223, 6 (1975).
[2] Самарский, А. А., Змитренко, Н. В., Курдюмов, С. П., и А. П. Михайлов: Тепловые структуры и фундаментальная длина в среде с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками тепла. Доклады АН СССР 227, 2 (1976).
[3] Змитренко, Н. В., Курдюмов, С. П., Михайлов, А. П., и А. А. Самарский: Письма в Журнал экспер. и теорет. Физики 26, 9 (1977).
[4] Самарский, А. А., Еленин, Г. Г., Змитренко, Н. В., и др.: Горение нелинейной среды в виде сложных структур. Доклады АН СССР 237, 6 (1977).
[5] Дородницын, В. А.: Групповые свойства и инвариантные решения уравнения нелинейной теплопроводности с источником и стоком. Препринт 57 Института прикл. мат. АН СССР: Москва 1979.
[6] Галактионов, В. А., Курдюмов, С. П., Михайлов, А. П., и А. А. Самарский: Об одном подходе к сравнению решений параболических уравнений. Журнал вычисл. мат. и мат. физики 19, 6 (1979).
[7] Галактионов, В. А., Курдюмов, С. П., Михайлов, А. П., и А. А. Самарский: О сравнении решений параболических уравнений. Доклады АН СССР 248, 3 (1979).
[8] Галактионов, В. А., Курдюмов, С. П., и А. П. Михайлов: Метастабильная локализация возмущений в задачах для уравнений типа нелинейной теплопроводности. Препринт 181 Института прикл. мат. АН СССР: Москва 1979.
[9] Самарский, А. А., Галактионов, В. А., Курдюмов, С. П., и А. П. Михайлов: О неограниченных решениях задачи Коши для параболического уравнения $u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u) + u^\beta$. Доклады АН СССР 252, 6 (1980).
[10] Галактионов, В. А., Курдюмов, С. П., Михайлов, А. П., и А. А. Самарский: О неограниченных решениях полулинейных параболических уравнений. Препринт 161 Института прикл. мат. АН СССР: Москва 1979.
[11] Галактионов, В. А., Курдюмов, С. П., Михайлов, А. П., и А. А. Самарский: Локализация тепла в нелинейных средах. Дифф. ур. 17, 10 (1981).
[12] Самарский, А. А., Галактионов, В. А., Курдюмов, С. П., и А. П. Михайлов: Локализация процессов диффузии в средах с постоянными свойствами. Доклады АН 247, 2 (1979).
[13] Седов, Л. И.: Методы подобия и размерности в механике. Изд-во Наука: Москва 1967.
[14] Зельдович, Я. Б., и Ю. П. Райзер: Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Изд-во Наука: Москва 1966.

Manuskripteingang: 05. 04. 1982

VERFASSER:

Проф. д-р Александр Петрович Михайлов
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша АН СССР
СССР-125047 Москва А-47, Миусская пл. 4