Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (4) 1983, S. 335—359

Первая краевая задача для классических уравнений математической физики в областях с кусочно-гладкими границами (I)[1]

В. Г. Мазья и Б. А. Пламеневский

(Посвящается профессору Г. Фикера к его шестидесятилетию со дня рождения)

Betrachtet wird die erste Randwertaufgabe für Stokessche, Navier-Stokessche und Lamésche Systeme sowie für die Laplace-Gleichung in einem beschränkten dreidimensionalen Gebiet Ω, dessen Rand Singularitäten vom Typ konischer Punkte, Kanten und mehrseitiger Winkel enthalten kann. Es werden Sätze über die Lösbarkeit in gewichteten Räumen, die durch die Normen in L_s $(1 < s < \infty)$ oder C^α $(0 < \alpha < 1)$ erzeugt werden, bewiesen. Koerzitive Abschätzungen der Lösungen in solchen Räumen sowie punktweise Abschätzungen der Greenschen Funktionen werden erhalten. Außerdem wird die Änderung der Eigenschaften der verallgemeinerten Lösungen bei Änderung der Eigenschaften der rechten Seiten und des Randes studiert.

Изучается первая краевая задача для систем Стокса, Навье-Стокса, Ламе и уравнения Лапласа в ограниченной трёхмерной области Ω, граница которой может содержать особенности типа конических точек, ребер или многогранных углов. Доказываются теоремы о разрешимости в весовы пространствах, порожденных нормами в L_s $(1 < s < \infty)$ или C^α $(0 < \alpha < 1)$. Получены коэрцитивные оценки решений в таких пространствах, точечные оценки функций Грина. Прослежено изменение свойств обобщенных решений ори изменении свойств правых частей и границы.

The first boundary value problem for the Stokes, Navier-Stokes, Lamé systems and for the Laplace equation in a bounded domain $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ is studied. The boundary of Ω contains singularities, such as conic points, edges or polyhedral angles. Theorems on solvability in spaces, supplied with weighted L_s— and C^α—norms $(1 < s < \infty,\ 0 < \alpha < 1)$ are proved. Coercive estimates of solutions in these spaces as well as pointwise estimates of the Green functions are obtained. The change of properties of generalized solutions under the change of right-hand sides is observed.

В этой работе изучается первая краевая задача для систем Стокса, Навье-Стокса, Ламе и уравнения Лапласа в органиченной трехмерной области Ω, граница которой может содержать особенности типа конических точек, ребер или многогранных углов (без „нулевых заострений"). Доказываются теоремы о разрешимости в весовых пространствах, порожденных нормами в L^s, $1 < s < \infty$, или C^α, $0 < \alpha < 1$. Получены коэрцитивные оценки решений в таких пространствах и точечные оценки функций Грина. Прослежено изменение свойств обобщенных решений при изменении свойств правых частей и границы.

В первой части работы (§§ 1—6) содержатся теоремы о линейной задаче Стокса

$$-\nu\Delta\vec{v} + \nabla p = \vec{f}, \qquad \operatorname{div}\vec{v} = h \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{0.1}$$

$$\vec{v} = \vec{\varphi} \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{0.2}$$

Вторая чать работы (§§ 7—11) будет публиковаться в одном из последующих номеров этого журнала. В §§ 7—8 бидет изучена матрица Грина, а в § 9 — прин-

[1]) Der abschließende Teil II wird in Kürze ebenfalls in dieser Zeitschrift erscheinen.

цип максимума для этой задачи. Системе Навье-Стокса

$$-\nu\Delta\vec{v} + (\vec{v}, \nabla)\,\vec{v} + \nabla p = \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{v} = h, \tag{0.3}$$

с краевым условием (0.2) будет посвящен § 10. В последнем § 11 будет рассмотрена система Ламе

$$-\Delta\vec{v} + \gamma\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} = \vec{f} \quad \text{в} \quad \Omega \tag{0.4}$$

с тем же краевым условием (0.2) (и, в частности, при $\gamma = 0$ — уравнение Лапласа).

Как известно, существование обобщенных решений упомянутых краевых задач (при $h = 0$, $\vec{\varphi} = 0$) имеет место для области с произвольной границей [1, 34]. Свойства обобщенных решений вблизи гладких участков границы хорошо изучены ([1, 2, 34] и др.). В частности, установлены теоремы о локальном повышении гладкости обобщенных решений внутри области и вблизи гладкой границы.

В последние годы появились работы, в которых рассматриваются краевые задачи математической физики в ограниченной двумерной области с угловыми точками [4—6], в трехмерных областях с непересекающимися ребрами [7—9] и более общей кусочно-гладкой границей [10—12, 35—37]. Имеется еще ряд статей о задачах гидродинамики, теории упругости и электростатики в областях с некомпактными или очень ,,неправильными" границами (см., например, [13—16]), однако они не имеют непосредственного отношения к нашей теме.

Настоящая статья использует методы общей теории эллиптических краевых задач в областях с кусочно гладкими границами, развитой в работах [17—24]. Некоторые доказанные здесь теоремы были анонсированы в [11].

Опишем основные результаты работы. Поверхность $\partial\Omega$ является объединением граней, ,,ребер" e и ,,вершин" q. Пусть $\varrho_q(x)$ — расстояние от точки x до вершины q, а $r(x)$ и $r_e(x)$ — регуляризованные расстояние до множества S особенностей границы и до ребра e, соответственно. Основные функциональные пространства, в которых исследуются краевые задачи, обозначены через $V^{m,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$ и $N^{m,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$, где $1 < s < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $m = 1, 2, \ldots$, а $\vec{\beta}$ и $\vec{\delta}$ — векторы $\{\beta_q\}$, $\{\delta_e\}$, компоненты которых вещественные числа. (Мы нигде не будем различать в обозначениях пространства скалярных и векторных функций.) Одна из эквивалентных норм в пространстве $V^{m,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$ имеет вид

$$\left(\int\limits_\Omega \prod_q \varrho_q^{s\beta_q} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e^{s\delta_e} \sum_{j=0}^{m} r^{s(j-m)} |\nabla_j u|^s\, dx\right)^{1/s}.$$

В пространстве $N^{m,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$ можно ввести норму

$$\Big\| \prod_q \varrho_q^{\beta_q} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e^{\delta_e} u \Big\|_{N^{m,\alpha}(\Omega)},$$

где

$$\|v\|_{N^{m,\alpha}(\Omega)} = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|(\nabla_m u)(x) - (\nabla_m u)(y)|}{|x-y|^\alpha} + \sup_{x\in\Omega} r^{-m-\alpha}|u(x)|.$$

Соответствующие пространства следов на $\partial\Omega\setminus S$ обозначаются через $V^{m-1/s,s}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega)$, $N^{m,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega)$.

Дадим краткую характеристику полученных в работе результатов о задачах гидродинамики.

В теоремах о разрешимости показатели $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$, m, s, α подчинены некоторым ограничениям, зависящим от особенностей границы. Условия для показателей

δ_e описываются при помощи функции σ_e на ребре e. Через $\theta_e(\zeta)$ обозначим угол (со стороны Ω) между касательными полуплоскостями в точке $\zeta \in e$ и положим $\sigma_e(\zeta) = 1$, если $\theta_e(\zeta) \in (0, \pi)$. В случае $\theta_e(\zeta) \in (\pi, 2\pi)$ под $\sigma_e(\zeta)$ будем понимать корень урвання $\sin(\sigma\theta_e) + \sigma \sin\theta_e = 0$ с наименьшей положительной вещественной частью.

Допустимый интервал для показателя β_q определяется при помощи собственного числа λ_q некоторой краевой задачи с комплексным параметром в области G_q на единичной сфере (см § 2). (Эта область вырезается касательным конусом в вершине q.) Мнимая часть числа λ_q — отрицательна и $|\mathrm{Im}\,\lambda_q| > \Lambda_q/(\Lambda_q + 9)$, где Λ_q — первое собственное число задачи Дирихле для оператора Бельтрами в области G_q (см. теорему 2.3). Из последнего неравенства и известных нижних оценок для Λ_q можно получить информацию о λ_q в геометрических терминах.

Краевой задаче (0.1), (0.2) сопоставляется линейний оператор

$$V^{m,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega) \times V^{m-1,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega) \ni (\vec v, p) \to (\vec f, h, \vec\varphi) \in V^{m-2,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega) \times V^{m-1,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega) \times V^{m-1/s,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega). \quad (0.5)$$

Согласно теореме 6.1, этот оператор осуществляет изоморфизм, если показатели $\vec\beta$, $\vec\delta$, m, s удовлетворяют следующим условиям:

$$|\delta_e - m + 2/s| < \inf_{\zeta\in e} \sigma_e(\zeta), \quad (0.6)$$

$$\Big|\beta_q + \sum_{\{e: q\in\bar e\}} \delta_e - m + 3/s - 1/2\Big| < 1/2 + \min\{|\mathrm{Im}\,\lambda_q|, 1\}. \quad (0.7)$$

В той же теореме 6.1 показано, что в случае

$$(\vec f, h, \vec\varphi) \in V^{m-2,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega) \times V^{m-1,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega) \times V^{m-1/s,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega),$$

решение $(\vec v, p)$ из класса $W_2^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ принадлежит и пространству $V^{m,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega) \times V^{m-1,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$.

Аналогичные утверждения установлены в теореме 6.2 для оператора

$$N^{m,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega) \times N^{m-1,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega) \ni (\vec v, p) \to (\vec f, h, \vec\varphi) \in N^{m-2,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega) \times N^{m-1,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega) \times N^{m,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega).$$

При этом условия (0.6), (0.7) заменяются неравенствами

$$|\delta_e - m - \alpha| < \inf_{\zeta\in e} \sigma_e(\zeta) \quad (0.8)$$

и

$$\Big|\beta_q + \sum_{\{e: q\in\bar e\}} \delta_e - m - \alpha - 1/2\Big| < 1/2 + \min\{|\mathrm{Im}\,\lambda_q|, 1\}. \quad (0.9)$$

Из теоремы 6.1 вытекает, например, что если $(\vec f, h, \vec\varphi)$ — гладкая вектор-функция, равная нулю вблизи особенностей границы, то вектор скорости удовлетворяет условию Гельдера в $\bar\Omega$.

Результаты другого типа, полученные в работе, — оценки тензора Грина системы Стокса (§§ 7, 8). Пусть, например, точки x, ξ расположены вблизи вершины q и $2\,|x - q| < |\xi - q|$. Тогда при $j, k, = 1, 2, 3$

$$|G_j^k(x, \xi)| \le c\, \frac{|x - q|^{-\mathrm{Im}\lambda_q - \varepsilon}}{|\xi - q|^{1-\mathrm{Im}\lambda_q - \varepsilon}} \prod_{\{e: q\in\bar e\}} \left(\frac{r_e(x)}{|x - q|}\right)^{\nu_e - \varepsilon} \cdot \prod_{\{e: q\in\bar e\}} \left(\frac{r_e(\xi)}{|\xi - q|}\right)^{\nu_e - \varepsilon},$$

где $\nu_e = \inf_{\zeta\in e} \sigma_e(\zeta)$, ε — любое положительное число, $r_e(x) = \mathrm{dist}\,(x, e)$.

Если точки x, ξ расположены так, что расстояния $|x - q|$ и $|\xi - q|$ сравнимы и одна из точек ближе к ребру, чем к другой точке, то при $j, k = 1, 2, 3$

$$|G_j^k(x, \xi)| \leq \frac{c}{|x-\xi|}\left(\frac{r(x)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(x)}-\varepsilon}\cdot\left(\frac{r(\xi)}{|x-\xi|}\right)^{\nu_{e(\xi)}-\varepsilon},$$

где $e(x)$ и $e(\xi)$ — ближайшее ребро к точке x и ξ соответственно. Аналогичные оценки доказаны для G_j^4, G_4^k, а также для производных всех элементов матрицы Грина. Отметим, что в случае области с гладкой границей оценки тензора Грина системы Стокса и общих эллиптических систем получены В. А. Солонниковым [25—26].

В § 9 оценки тензора Грина применяются в доказательстве „весового принципа максимума" для решения задачи

$$\begin{aligned} &-\nu\,\Delta\vec{v} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,\\ &\vec{v} = \vec{\varphi} \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \end{aligned} \tag{0.10}$$

Обозначим через $L^\infty_{\vec{\beta}\,\vec{\delta}}(\Omega)$ пространство с нормой

$$\left\|\prod_q \varrho_q^{\beta_q} \prod_{\{e:q\in\bar{e}\}} r_e^{\delta_e} u\right\|_{L^\infty(\Omega)},$$

а через $L^\infty_{\vec{\beta}\,\vec{\delta}}(\partial\Omega)$ — так же определяемое пространство функций на $\partial\Omega$. В § 9 вводится обобщенное решение $(\vec{v}, p)$ задачи (0.9) с данными Дирихле $L^\infty_{\vec{\beta}\,\vec{\delta}}(\partial\Omega)$ и для такого решения устанавливается оценка

$$\|\vec{v}\|_{L^\infty_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)} \leq c\,\|\vec{\varphi}\|_{L^\infty_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega)} \tag{0.11}$$

при условии, что

$$|\delta_e| < \nu_e, \qquad \left|\beta_q + \sum_{\{e:q\in\bar{e}\}} \delta_e - 1/2\right| < 1/2 + \min\{|\operatorname{Im}\lambda_q|, 1\}.$$

Отсюда, в частности, следует, что для любой области с кусочно гладкой границей (без нулевых заострений) непрерывным данным Дирихле в задаче (0.9) отвечают непрерывные в $\bar{\Omega}$ векторы скорости и справедлива оценка

$$\|\vec{v}\|_{C(\bar{\Omega})} \leq c\,\|\vec{\varphi}\|_{C(\partial\Omega)}. \tag{0.12}$$

Последнее утверждение представляет собой принцип максимума Миранда-Агмона (см. [27]), доказанный в [28] для сильно эллиптических систем в области с гладкой границей. (Оценки типа (0.11), (0.12) были получены в [12, 18, 29] для решений краевых задач в областях с изолированными особыми точками.)

Приведем один из результатов, полученных в § 10, посвященном нелинейной задаче (0.3), (0.2). Пусть Ω — область класса $\Lambda^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, и $(\vec{v}, p) \in W_2^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ — решение задачи (0.2), (0.3). Если

$$(\vec{f}, h, \vec{\varphi}) \in N^{0,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times N^{1,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times N^{2,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\partial\Omega),$$

где показатели α, $\vec{\beta}$, $\vec{\delta}$ подчинены неравенствам (0.7), (0.8) при $m = 2$, то $(\vec{v}, p) \in N^{2,\alpha}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega) \times N^{1,\alpha}_{\vec{\delta},\vec{\beta}}(\Omega)$.

В заключение § 10 рассматривается задача (0.3), (0.2) при $\vec{f} = 0, h = 0$. Показано, что если граничные значения скорости $\vec{v} \in W_2^1(\Omega)$ непрерывны, то $\vec{v} \in C(\bar{\Omega})$.

Результаты для системы Ламе (§ 11) полностью аналогичны результатам для системы Стокса. Различия состоят лишь в ограничениях, которым подчиняются показатели $\vec{\beta}$ и $\vec{\delta}$. Для оператора Лапласа эти органичения описываются наиболее просто. Именно, в условиях (0.6), (0.7) и т.п. следует положить $\sigma_e(\zeta) = \pi/\theta_e(\zeta)$, а $\min\{|\operatorname{Im}\lambda_q|, 1\}$ заменить на Λ_q.

Поскольку доказательства, относящиеся к системам Стокса и Ламе по существу не различаются, то последняя рассматривается в § 11 кратко.

Хотя в этой работе мы ограничились изучением классических задач, использованная методика имеет общий характер. Большая часть рассуждений переносится и на произвольные эллиптические краевые задачи. Разумеется, при наиболее широком обобщении теоремы о разрешимости заменяются теоремами Нетера и трудно получить конкретную информацию о показателях $\vec{\beta}$ и $\vec{\delta}$.

§ 1. Классы областей и функциональные пространства

1°. Области

Пусть G — область на двумерной единичной сфере S^2, $\bar{G} \neq S^2$. Допустим, что граница ∂G составлена из конечного числа замкнутых дуг класса C^1, встречающихся под ненулевыми углами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.: Будем говорить, что *область G принадлежит классу Λ^m*, $m = 1, 2, \ldots$, если внутренность каждой дуги, составляющей ∂G, принадлежит классу C^m и выполнено следующее условие:

Для каждой угловой точки x_0 существует окрестность U на S^2 и диффеоморфизм $\varkappa : U \to \mathbf{R}^2$ класса C^1, отображающей $U \cap G$ на пересечение единичного круга с углом, и такой, что $\varkappa'(x_0) = I$ и при $m > 1$

$$r(x)^{|\gamma|} D_x^\gamma \varkappa'(x) \to 0, \quad \text{если} \quad r(x) \to 0, \qquad 1 \leq |\gamma| \leq m - 1. \tag{1.1}$$

Здесь $\varkappa'$ — производная отображения $\varkappa$, а $r(x)$ — расстояние (внутри области G) от x до угловой точки x_0.

Для того чтобы рассматривать решения в пространствах Гельдера, введем более узкий класс $\Lambda^{m,\alpha}$ областей, где $0 < \alpha < 1$, $m = 1, 2, \ldots$ Для функций v, определенных в ε — окрестности $U_\varepsilon = \{x \in G : r(x) < \varepsilon\}$ множества угловых точек границы, введем норму

$$\langle v \rangle_{\alpha, U_\varepsilon} = \sup_{x,y \in U_\varepsilon} \frac{|r(x)^\alpha\, v(x) - r(y)^\alpha\, v(y)|}{|x - y|^\alpha} + \sup_{x \in U_\varepsilon} |v(x)|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2: *Область G принадлежит классу $\Lambda^{m,\alpha}$*, если внутренность каждой дуги, составляющей ∂G, принадлежит классу $C^{m,\alpha}$ и выполнено следующее условие:

Для каждой угловой точки x_0 существует окрестность U на S^2 и диффеоморфизм $\varkappa$ класса C^1, отображающий $U \cap G$ на пересечение единичного круга с углом и такой, что

$$\langle \varkappa' - I \rangle_{\alpha, U_\varepsilon} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{1.2}$$

$$\langle r^{|\gamma|} D^\gamma \varkappa' \rangle_{\alpha, U_\varepsilon} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \tag{1.3}$$

для всех мультииндексов γ, $1 \leq |\gamma| \leq m - 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3: *Конусом класса $\Lambda^m(\Lambda^{m,\alpha})$* назовем открытый связный конус в $\mathbf{R}^3$, вырезающий на единичной сфере с центром в вершине конуса область класса $\Lambda^m(\Lambda^{m,\alpha})$.

Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^3$ с компактным замыканием $\bar{\Omega}$, ограниченная поверхностью $\partial\Omega$. Предполагается, что $\partial\Omega$ является объединением конечного числа не пересекающихся граней, ребер и вершин.

Гранью называется открытое связное двумерное подмногообразие класса C^m. *Ребром* называется открытая дуга в $\mathbf{R}^3$ класса C^1. *Вершины* — это точки на $\partial\Omega$, в число которых входят все концы ребер.

Множество вершин обозначим через $\mathscr{P}$, множество точек, расположенных на ребрах — через $\mathscr{E}$, а множество $\mathscr{P} \cup \mathscr{E}$ всех особых точек границы — через S. Введем функции ϱ и r в $\mathbf{R}^3$, представляющие собой регуляризованные расстояния от точки $x \in \mathbf{R}^3$ до множеств $\mathscr{P}$ и S, соответственно (см. [30: гл. 6, § 2]). Очевидно, $r(x) \leqq c\varrho(x)$ при всех x.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4: Будем говорить, *что область Ω принадлежит классу Λ^m*, если выполнены следующие условия:

а) для каждой вершины x_0 существуют окрестность U и диффеоморфизм $\varkappa$: $U \to \mathbf{R}^3$ класса C^1, отображающий $U \cap \Omega$ на пересечение конуса $K \in \Lambda^m$ и единичного шара с центром в вершине K;

б) для каждой точки x_0 ребра существует окрестность U и диффеоморфизм $\varkappa$: $U \to \mathbf{R}^3$ класса C^1, отображающим $U \cap \Omega$ на пересечение единичного шара с двугранным углом $\mathscr{D}$;

с) если $m > 1$, то имеет место соотношение (1.1) (равномерно на $U \cap \Omega$), в котором под $r(x)$ понимается регуляризованное расстояние от x до множества S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5: Пусть грани $\partial\Omega$ принадлежат классу $C^{m,\alpha}$ и выполнены условия а)—с) предыдущего определения, в которых Λ^m следует заменить на $\Lambda^{m,\alpha}$, а соотношение (1.1) — на (1.1), (1.3). Тогда *область Ω принадлежит классу $\Lambda^{m,\alpha}$*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6: Диффеоморфизмы $\varkappa$, подчиненные условию (1.1) (условиям (1.2), (1.3)) будем называть *диффеоморфизмами класса $\Lambda^m(\Lambda^{m,\alpha})$*. (Область определения $\varkappa$ всегда ясна из контекста.)

2°. Функциональные пространства

Введем пространство $V^{m,s}(\Omega)$ функций в Ω с нормой

$$\|u\|_{V^{m,s}(\Omega)} = \Big(\int_\Omega (|\nabla_m u|^s + r^{-sm}|u|^s)\,dx\Big)^{1/s},$$

где $\nabla_m = \{\partial^m/\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_3^{m_3}\}$, $\quad m = 0, 1, \ldots$ Используя неравенство

$$\delta^{k-m}\|\nabla_k u\|_{L^s(\omega)} \leqq c(\|\nabla_m u\|_{L^s(\omega)} + \delta^{-m}\|u\|_{L^s(\omega)}),$$

дге ω — область с границей класса $C^{0,1}$ и диаметром δ, можно проверить, что норма в $V^{m,s}(\Omega)$ эквивалентна норме

$$\Big(\sum_{k=0}^m \int_\Omega r^{(k-m)s}|\nabla_k u|^s\,dx\Big)^{1/s}.$$

Через $V^{m-1/s,s}(\partial\Omega)$, $m \geqq 1$, обозначим пространство следов на $\partial\Omega \setminus S$ функций из $V^{m,s}(\Omega)$. Можно показать, что норма в $V^{m-1/s,s}(\partial\Omega)$ эквивалентна норме

$$\Big(\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{|\nabla_{m-1}u(x) - \nabla_{m-1}u(y)|^s}{|x-y|^{s+1}}\,ds_x\,ds_y + \int_{\partial\Omega}|u(x)|^s r^{1-sm}ds_x\Big)^{1/s}.$$

Нам понадобится также пространство $V^{-1,s}(\Omega)$ обобщенных функций в Ω, допускающих представление

$$v = \sum_{j=1}^{3} \partial v_j/\partial x_j + r^{-1}v_0,$$

где $v_j \in V^{0,s}(\Omega)$, $j = 0, \ldots, 3$. Норма в $V^{-1,s}(\Omega)$ определяется равенством

$$\|v\|_{V^{-1,s}(\Omega)} = \inf \sum_{j=0}^{3} \|v_j\|_{V^{0,s}(\Omega)},$$

где infimum вычисляется по всем представлениям функции v.

Обозначим через $\overset{\circ}{V}{}^{1,s}(\Omega)$ пространство функций из $V^{1,s}(\Omega)$, равных нулю на $\partial\Omega$. Можно показать, что пространство $V^{-1,s}(\Omega)$ является сопряженным с $\overset{\circ}{V}{}^{1,t}(\Omega)$, $s + t = st$, $s \in (1, \infty)$, относительно скалярного произведения в $L_2(\Omega)$, а также, что пространство $\overset{\circ}{V}{}^{1,s}(\Omega)$ совпадает со своим вторым сопряженным.

Введем еще пространство $N^{m,\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$, снабженное нормой

$$\|u\|_{N^{m,\alpha}(\Omega)} = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|(\nabla_m u)(x) - (\nabla_m u)(y)|}{|x-y|^\alpha} + \sup_{x\in\Omega} r^{-m-\alpha}|u(x)|.$$

Последняя норма эквивалентна следующей

$$\sum_{k=0}^{m} \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|r(x)^{k-m}(\nabla_k u)(x) - r(y)^{k-m}(\nabla_k u)(y)|}{|x-y|^\alpha} + \sum_{k=0}^{m} \sup_{x\in\Omega} r^{k-m-\alpha}|\nabla_k u(x)|$$

(ср. с [24]).

Аналогично определяется пространство $N^{m,\alpha}(\partial\Omega)$ функций на $\partial\Omega \setminus S$.

Пусть $\{U\}$ — конечное покрытие $\overline{\Omega}$ открытыми множествами, удовлетворяющее условиям:

а) если $q \in \mathscr{P} \cap U$, то $q = \mathscr{P} \cap U$;

б) если $\mathscr{P} \cap \overline{U} = \emptyset$, то $\overline{U}$ пересекается не более, чем с одним ребром.

Поставим в соответствие каждой вершине q вещественное число β_q, а каждому ребру $e \in \mathscr{E}$ — вещественное число δ_e. При помощи разбиения единицы, подчиненного покрытию $\{U\}$, определим пространство $V^{m,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$, где $\vec\beta = \{\beta_q\}_{q\in\mathscr{P}}$, $\vec\delta = \{\delta_e\}_{e\in\mathscr{E}}$, $m = -1, 0, \ldots$. Если $\overline{U} \cap S = \emptyset$, то для функции с носителем в U норма в $V^{m,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$ эквивалентна норме в пространстве W_s^m С. Л. Соболева. В случае $U \cap e \neq \emptyset$, $\overline{U} \cap \mathscr{P} = \emptyset$, и $\operatorname{supp} v \subset U$,

$$\|u\|_{V^{m,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)} \sim \|r_e^{\delta_e} v\|_{V^{m,s}(\Omega)},$$

где r_e — регуляризованное расстояние от точки x до ребра e. Если же U содержит вершину q и $\operatorname{supp} v \subset U$, то

$$\|v\|_{V^{m,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)} \sim \Big\| \varrho_q^{\beta_q} \prod_{\{e:\, q\in\bar e\}} r_e^{\delta_e} v \Big\|_{V^{m,s}(\Omega)}, \quad \varrho_q = \operatorname{dist}(\cdot, q).$$

Через $V^{m-1/s,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)$, $m \geqq 1$, обозначим пространство следов на $\partial\Omega$ функций из $V^{m,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$.

Отметим, что функции из $V^{m,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$, равные нулю вблизи множества S особых точек границы, образуют плотное множество в $V^{m,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$.

Если в приведенных определениях пространства W_s^m и $V^{m,s}(\Omega)$ заменить пространствами $C^{m,\alpha}$ и $N^{m,\alpha}(\Omega)$ соответственно, то получим определение пространства $N^{m,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$ и $N^{m,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)$.

Заменяя область Ω на конус K, получим определения пространств $V^{m,s}_{\beta\,\vec{\delta}}(K)$, $N^{m,\alpha}_{\beta\,\vec{\delta}}(\Omega)$ (здесь β—вещественное число). Подобным же образом вводятся пространства $V^{m,2}_{\vec{\delta}}(G)$, $N^{m,\alpha}_{\vec{\delta}}(G)$ функций в области $G \subset S^2$; здесь $\vec{\delta} = \{\delta_e\}_{e\in\mathscr{E}}$, а под $\mathscr{E}$ понимается множество угловых точек на ∂G. Аналогично определяются пространства $V_\delta{}^{m,s}(\mathscr{D})$ и $N_\delta{}^{m,\alpha}(\mathscr{D})$ функций в двугранном угле $\mathscr{D}$.

§ 2. Система Стокса в конусе с ребрами (разрешимость в весовом энергетическом пространстве)

Пусть K — конус класса Λ^1, вершина которого совпадает с началом координат 0, $K = \mathbf{R}_+{}^1 \times G$, $G \subset S^2$.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned}&-\nu\,\Delta\, v + \nabla p = \vec{f} \quad \text{в } K,\\ &\operatorname{div} \vec{v} = h \quad \text{в } K, \quad \vec{v} = 0 \quad \text{на } \partial K.\end{aligned} \tag{2.1}$$

В этом параграфе устанавливается существование и единственность решения $(\vec{v}, p)$ задачи (2.1) в пространстве $\mathring{V}^{1,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \times V^{0,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$. Пространство $\mathring{V}^{1,2}_{\beta\,\vec{\delta}}(K)$ вектор-функций является пополнением пространства $C_0{}^\infty(K)$ по норме пространства $V^{1,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$. Будем предполагать, что $h \in \mathring{V}^{0,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$, а вектор-функция $\vec{f}_0$ принадлежит пространству $V^{-1,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$, сопряженному с $\mathring{V}^{1,2}_{-\beta,-\vec{\delta}}(K)$ относительно скалярного произведения в $L^2(K)$.

Для того, чтобы указать допустимое множество показателей β, $\vec{\delta}$, введем вспомогательную задачу в области G с комплексным параметром λ. Пусть $\varrho = |x|$, $\vec{\omega} = x/p$ и $\vec{\sigma} = \varrho(\nabla + \vec{\omega}\partial/\partial\varrho)$ — векторный дифференциальный оператор первого порядка на S^2. Заметим, что

$$-\nu\,\Delta\vec{v} + \nabla p = -\nu\varrho^{-2}\left(\left(p\,\frac{\partial}{\partial\varrho}\right)^2 + \varrho\,\frac{\partial}{\partial\varrho} + \delta\right)\vec{v} + \varrho^{-2}\left(\vec{\omega}\varrho\,\frac{\partial}{\partial\varrho} - \vec{\omega} + \vec{\sigma}\right)q,$$

где $q = \varrho p$, а δ — сферическая часть оператора Δ. Кроме того,

$$\operatorname{div}\vec{v} = \varrho^{-1}\left(\vec{\omega}\varrho\,\frac{\partial}{\partial\varrho} + \vec{\sigma}\right)\vec{v}.$$

Перепишем задачу (2.1) в виде:

$$\begin{aligned}&-\nu\left(\left(\varrho\,\frac{\partial}{\partial\varrho}\right)^2 + \varrho\,\frac{\partial}{\partial\varrho} + \delta\right)\vec{v} + \left(\vec{\omega}\varrho\,\frac{\partial}{\partial\varrho} - \vec{\omega} + \vec{\sigma}\right)q = \varrho^2\vec{f} \quad \text{в } K,\\ &\left(\vec{\omega}\varrho\,\frac{\partial}{\partial\varrho} + \vec{\sigma}\right)\vec{v} = \varrho h \quad \text{в } K, \vec{v} = 0 \quad \text{на } \partial K.\end{aligned} \tag{2.2}$$

После применения преобразования Меллина

$$\tilde{v}(\lambda, \cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty \varrho^{-i\lambda-1} v(\varrho, \cdot)\, d\varrho$$

к задаче (2.2), получаем краевую задачу с параметром λ:

$$\begin{aligned}&-\nu(i\lambda - \lambda^2 + \delta)\,\tilde{\vec{v}}(\lambda, \cdot) + (\vec{\omega}i\lambda - \vec{\omega} + \vec{\sigma})\,\tilde{q}(\lambda, \cdot) = \tilde{\vec{f}}(\lambda + 2i; \cdot) \text{ в } G,\\ &(\vec{\omega}i\lambda + \vec{\sigma})\,\tilde{\vec{v}}(\lambda, \cdot) = \tilde{h}(\lambda + i, \cdot) \quad \text{в } G, \quad \tilde{\vec{v}}(\lambda, \cdot) = 0 \quad \text{на } \partial G.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Введем в $V^{1,2}_{\vec\delta}(G)$ норму

$$|\Phi|_{V^{1,2}_{\vec\delta}(G)} = \left(\|\Phi\|^2_{V^{1,2}_{\vec\delta}(G)} + |\lambda|^2 \|\Phi\|_{V^{0,2}_{\vec\delta}(G)}\right)^{1/2}.$$

Положим еще

$$|\Psi|_{V^{-1,2}_{\vec\delta}(G)} = \sup\left\{|\Psi, \Phi| : \Phi \in \mathring{V}_\delta^{1,2}, \quad |\Phi|_{\mathring{V}^{1,2}_{\vec\delta}G} \leqq 1\right\}.$$

Заметим, что при $k = 0, \pm 1$

$$\int\limits_{\operatorname{Im}\lambda = \beta + \sum\limits_{e\in E}\delta_e - k + 3/2} |\tilde v|(\lambda, \cdot)|^2_{V,k,2(G)}\, d\lambda = \|v\|^2_{V^{k,2}_{\beta,\vec\delta}(K)}.$$

Очевидно, оператор $\mathfrak{A}(\lambda)$ задачи (2.3) непрерывно отображает пространство $\mathring{V}^{1,2}_{\vec\delta}(G) \times \mathring{V}^{0,2}_{\vec\delta}(G)$ в $V^{-1,2}_{\vec\delta}(G) \times V^{0,2}_{\vec\delta}(G)$ и его норма $|\mathfrak{A}(\lambda)|$ ограничена постоянной, не зависящей от λ. Поэтому однозначная разрешимость задачи (2.1) в пространстве $\mathring{V}^{1,2}_{\beta,\vec\delta}(K) \times V^{0,2}_{\beta,\vec\delta}(K)$ следует из существования при $\operatorname{Im}\lambda = \beta + \sum \delta_e + 1/2$ единственного решения задачи (2.3), допускающего оценку

$$|\tilde{\vec v}(\lambda, \cdot)|_{V^{1,2}_{\vec\delta}(G)} + |\tilde q(\lambda, \cdot)|_{V^{0,2}_{\vec\delta}(G)} \leqq c\left(|\tilde{\vec f}(\lambda + 2i, \cdot)|_{V^{-1,2}_{\vec\delta}(G)} + |\tilde h(\lambda + i, \cdot)|_{V^{0,2}_{\vec\delta}(G)}\right).$$

Эти свойства задачи (2.3) являются также необходимыми для однозначной разрешимости задачи (2.1) (ср. [17]).

Введем ограничение, которому подчиняется вектор $\vec\delta$. Обозначим через θ_e угол (со стороны области G) между полукасательными в угловой точке $e \in \partial G$. Положим еще $\delta_e = 1$, если $\theta_e \in (0, \pi)$. В случае $\theta_e \in (\pi, 2\pi)$ через σ_e обозначим корень уравнения $\sin(\sigma\theta_e) + \sigma \sin\theta_e = 0$, имеющий наименьшую положительную вещественную часть. (Этот корень — вещественная непрерывная убывающая функция угла θ_e, $\sigma_e = 1$, если $\theta_e = \pi$ и $\sigma_e = 1/2$, если $\theta_e = 2\pi$ (см. [28]).)

Предположим, что числа δ_e удовлетворяют неравенству

$$|\delta_e| < \sigma_e. \tag{2.4}$$

Условие (2.4) необходимо и достаточно для того чтобы оператор $\mathfrak{A}(\lambda)$ осуществлял изоморфизм при всех комплексных λ, за исключением изолированных значений. Эти значения (кроме, быть может, конечного числа) расположены вне двойного угла, содержащего вещественную ось, и являются полюсами мероморфной оператор-функции $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$; они не зависят от вектора $\vec\delta$. Норма оператора $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$ равномерно ограничена в упомянутом двойном угле при больших значениях λ. При этом, если правая часть задачи (2.3) принадлежит пересечению

$$[V^{-1,2}_{\vec\delta}(G) \times V^{0,2}_{\vec\delta}(G)] \cap [V^{-1,2}_{\vec\delta'}(G) \times V^{0,2}_{\vec\delta'}(G)],$$

где $\vec\delta$ и $\vec\delta'$ удовлетворяют условию (2.4), то решение задачи принадлежит пересечению

$$[\mathring{V}^{1,2}_{\vec\delta}(G) \times V^{0,2}_{\vec\delta}(G)] \cap [\mathring{V}^{1,2}_{\vec\delta'}(G) \times V^{0,2}_{\vec\delta'}(G)].$$

Если на границе ∂G нет углов, то соответствующие свойства оператора $\mathfrak{A}(\lambda)$ хорошо известны и являются непосредственными следствиями эллиптичности с учетом параметра (по Аграновичу-Вишику). При наличии углов сформулированное утверждение по существу доказано в [21: § 5], где рассматриваются общие эллиптические краевые задачи в областях с многомерными особенностями. Оператор $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$ получается с помощью разбиения единицы на G. При построении локального почти обратного оператора в окрестности угловой точки e используется близость $\mathfrak{A}(\lambda)$ к оператору $A(\lambda)$ первой краевой задачи в (открытом) плоском угле Q_e раствора θ_e для эллиптической системы

$$-\nu\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, i\lambda\right)^2 \vec{v} + \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, i\lambda\right) q = \vec{f},$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + i\lambda v_3 = h, \qquad (y_1, y_2) \in Q_e.$$

Существенным является то обстоятельство, что операторы $A(1)$ и $A(-1)$ осуществляют изоморфные отображения

$$\mathring{E}^{1,2}_{\delta_e}(Q_e) \times E^{0,2}_{\delta_e}(Q_e) \to E^{-1,2}_{\delta_e}(Q_e) \times E^{0,2}_{\delta_e}(Q_e)$$

(ср. [9: § 3, гл. 1] а также [19]). Здесь $E^{0,2}_{\delta_e}(Q_e)$ — пространство с нормой $\left(\int\limits_{Q_e} |y|^{2\delta_e} |u|^2\, dy\right)^{1/2}$, $\mathring{E}^{1,2}_{\delta_e}(Q_e)$ — пополнение пространства $C_0^\infty(Q_e)$ по норме

$$\left(\int\limits_{Q_e} |y|^{2\delta_e}(|y|^{-2}+1)\,|\nabla_y u|^2\, dy + \|u\|^2_{E^{0,2}_{\delta_e}(Q_e)}\right)^{1/2},$$

а $E^{-1,2}_{\delta_e}(Q_e)$ — пространство, сопряженное с $\mathring{E}^{1,2}_{-\delta_e}(Q_e)$ относительно скалярного произведения в $L^2(Q_e)$.

Обращая оператор задачи (2.3), получаем

$$\left(\tilde{\vec{v}}(\lambda, \cdot), \tilde{q}(\lambda, \cdot)\right) = \mathfrak{A}(\lambda)^{-1}\left(\tilde{\vec{f}}(\lambda + 2i, \cdot),\ \tilde{h}(\lambda + i, \cdot)\right).$$

Отсюда вытекает, что при отсутствии полюсов оператора $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$ на прямой $\operatorname{Im}\lambda = \beta + \sum \delta_e + 1/2$, для решения $(\vec{v}, q)$ задачи (2.2) имеет место представление

$$\left(\vec{v}(\varrho,\cdot), q(\varrho, \cdot)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\operatorname{Im}\lambda=\beta+\sum\delta_e+1/2} \varrho^{i\lambda}\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}\left(\tilde{\vec{f}}(\lambda + 2i, \cdot), \tilde{h}(\lambda + i, \cdot)\right) d\lambda. \tag{2.5}$$

Пусть β и β' таковы, что замкнутая полоса между прямыми $\operatorname{Im}\lambda = \beta + \sum \delta_e + 1/2$, $\operatorname{Im}\lambda = \beta' + \sum \delta_e + 1/2$ не содержит полюсов оператора $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$. Если

$$\vec{f} \in V^{-1,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \cap V^{-1,2}_{\beta',\vec{\delta}}(K), \quad h \in V^{0,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \cap V^{0,2}_{\beta',\vec{\delta}}(K),$$

то в формуле (2.5) линию интегрирования можно заменить прямой $\operatorname{Im}\lambda = \beta' + \sum \delta_e + 1/2$.

Таким образом приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2.1: *Пусть K — конус из класса Λ^1, вектор $\vec{\delta}$ подчинен условию $|\delta_e| < \sigma_e$ и на прямой $\operatorname{Im}\lambda = \beta + \sum \delta_e + 1/2$ нет полюсов оператора $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1°. *Оператор краевой задачи* (2.1) *осуществляет изоморфизм*

$$\mathring{V}^{1,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \times V^{0,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \to V^{-1,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \times V^{0,2}_{\beta',\vec{\delta}}(K). \tag{2.6}$$

2°. *Пусть правая часть задачи* (2.1) *принадлежит пересечению*

$$\left(V^{-1,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \times V^{0,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K)\right) \cap \left(V^{-1,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K) \times V^{0,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)\right),$$

где β' и $\vec{\delta}'$ — число и вектор, удовлетворяющие таким же условиям, что β и $\vec{\delta}$, а замкнутая полоса между прямыми $\operatorname{Im}\lambda = \beta + \sum \delta_e + 1/2$, $\operatorname{Im}\lambda = \beta' + \sum \delta_e' + 1/2$ *свободна от полюсов оператора* $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$.

Тогда решение $(\vec{v}, p)$ *задачи* (2.1) *из пространства* $\mathring{V}^{1,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \times V^{0,2}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$ *принадлежит пространству* $\mathring{V}^{1,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K) \times V^{0,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$.

Приведем лемму об одном свойстве полюсов оператора $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$, которая используется в § 4.

ЛЕММА 2.2: *Числа* λ *и* $\bar{\lambda} + i$ *являются или не являются полюсами оператор-функции* $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$ *одновременно.*

Доказательство: Пусть $K_1 = \{x \in K : |x| < 1\}$ и u, v — однородные функции нулевой степени $u \in \mathring{V}^{1,2}_{\delta}(G), v \in \mathring{V}^{1,2}_{-\delta}(G)$, Интегрируя по частям, получаем тождество

$$\int_{K_1} v \left(\varrho \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial \varrho}\right) u \, dx = -\int_{K_1} u \left[\left(\varrho \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial \varrho}\right) + 2\frac{x_i}{\varrho}\right] v \, dx.$$

Следовательно, оператор $\vec{\sigma}^*$, формально сопряженный с оператором $\vec{\sigma}$ (относительно скалярного произведения в $L^2(G)$), равен $-\vec{\sigma} + 2\vec{\omega}$. Поэтому оператор задачи, формально сопряженной с оператором задачи (2.3), имеет вид

$$\{\vec{v}, q\} \to \{-\nu(-i\bar{\lambda} - \bar{\lambda}^2 + \delta)\vec{v} - (\vec{\omega} i\bar{\lambda} + \vec{\sigma} - 2\vec{\omega}) q, \quad (-\vec{\omega} i\bar{\lambda} - \vec{\sigma} + \vec{\omega})\vec{v}\}. \tag{2.7}$$

Обозначим через $[\mathfrak{A}(\lambda)]^* : \mathring{V}^{1,2}_{-\vec{\delta}}(G) \times V^{0,2}_{-\vec{\delta}}(G) \to V^{-1,2}_{-\vec{\delta}}(G) \times V^{0,2}_{-\vec{\delta}}(G)$ оператор, сопряженный с оператором $\mathfrak{A}(\lambda)$ краевой задачи (2.3). В силу (2.7)

$$\{\vec{v}, q\} \xrightarrow{(\mathfrak{A}(\lambda))^*} \{-\nu(i\mu - \mu^2 + \delta)\vec{v} + (\vec{\omega} i\mu - \vec{\omega} + \vec{\sigma})(-q), -(\vec{\omega} i\mu + \vec{\sigma}).\vec{v}\}, \tag{2.8}$$

где $\mu = \bar{\lambda} + i$. Сравнивая отображение (2.7) с отображением $\mathfrak{A}(\lambda)$, заканчиваем доказательство леммы ∎

В следующей теореме дана оценка ширины полосы на λ — плоскости, симметричной относительно прямой $\operatorname{Im}\lambda = 1/2$ и свободной от полюсов оператора $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$.

ТЕОРЕМА 2.3: *Пусть* Λ — *первое собственное число задачи Дирихле для оператора Бельтрами* $-\delta$ *в области* $G \subset S^2$. *В полосе*

$$|\operatorname{Im}\lambda - 1/2| \leqq 1/2 + \Lambda/(\Lambda + 9) \tag{2.9}$$

нет полюсов оператор-функции $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$.

Это утверждение по существу доказано в статье авторов [12], где рассматривались одновременно системы Ламе и Стокса. Небольшое отличие в формулировке по сравнению с теоремой из [12] вызвано тем, что при $\gamma = 0$ неравенство $\varphi(t) < 2(2t + 1)$ можно получить при $t \in (0, \Lambda/(\Lambda + 9))$. В самом деле, это неравенство равносильно следующему: $t^3 + 7t^2 + t \leqq (1 - t)\Lambda$, а требование $t \in (0, \Lambda/(\Lambda + 9))$ означает, что $9t < (1 - t)\Lambda$. Остается заметить, что $t^3 + 7t^2 + t < 9t$.

Заметим, что правую часть в (2.9) нельзя заменить на 3/2, поскольку $\lambda = -i$ является собственным числом $\mathfrak{A}(\lambda)$, отвечающим собственному вектору $\vec{v} = 0$, $p = 1$.

§ 3. Система Стокса в двугранном угле

Здесь дана сводка используемых в дальнейшем свойств решений первой краевой задачи для системы Стокса в двугранном угле. Результаты такого типа были получены в работах [20, 23, 9]. Доказательства приведенных в этом параграфе утверждений не содержат новых моментов по сравнению с указанными работами, и поэтому мы ограничиваемся формулировками.

Обозначим через $\mathscr{D}$ открытый двугранный угол в $\mathbf{R}^3$ раствора $\theta \in (0, 2\pi]$ с ребром e. Пусть $\sigma = 1$ при $\theta \in (0, \pi]$ и σ — корень уравнения $\sin(\sigma\theta) + \sigma \sin\theta = 0$ с наименьшей положительной вещественной частью.

Следующие две леммы доказаны по существу в [20] (см. также [23, 9]). В [9] рассматривается краевая задача для системы Стокса с различными условиями на гранях; для задачи Дирихле рассуждения совершенно аналогичны.

ЛЕММА 3.1. (i) *Отображение*

$$\left(\mathring{V}_\delta^{1,s}(\mathscr{D})\, V^{m,s}_{\delta+m-1}(\mathscr{D})\right)\times V^{m-1,s}_{\delta+m-1}(\mathscr{D}) \ni (\vec{v}, p) \to (-\nu\,\Delta\vec{v} + \nabla p, \operatorname{div}\vec{v})$$
$$\in V^{m-2,s}_{\delta+m-1}(\mathscr{D}) \times V^{m-1,s}_{\delta+m-1}(\mathscr{D}), \tag{3.1}$$

где $m = 1, 2, \ldots,$ *осуществляет изоморфизм в том и только в том случае, если*

$$|\delta - 1 + 2/s| < \sigma. \tag{3.2}$$

(ii) *Пусть* $\mathring{N}_\gamma^{0,\alpha}(\mathscr{D}) = \{\omega \in N_\gamma^{0,\alpha}(\mathscr{D}) : w|_{\partial\mathscr{D}\setminus e} = 0\}$. *Отображение*

$$\left(\mathring{N}_\gamma^{0,\alpha}(\mathscr{D}) \cap N^{m,\alpha}_{\gamma+m}(\mathscr{D})\right) \times N^{m-1,\alpha}_{\gamma+m}(\mathscr{D}) \ni (\vec{v}, p) \to (-\nu\,\nabla\vec{v} + \nabla p, \operatorname{div}\vec{v})$$
$$\in N^{m-2,\alpha}_{\gamma+m}(\mathscr{D}) \times N^{m-1,\alpha}_{\gamma+m}(\mathscr{D}), \tag{3.3}$$

где $m = 1, 2, \ldots,$ *осуществляет изоморфизм в том и только в том случае, если* $|\gamma - \alpha| < \sigma$.

ЛЕММА 3.2: *Пусть* $(\vec{v}, p) \in \mathring{V}_\delta^{1,s}(\mathscr{D}) \times V_\delta^{0,s}(\mathscr{D})$. *Пусть еще*

$$(-\nu\,\Delta\vec{v} + \nabla p, \operatorname{div}\vec{v}) \in V_\delta^{m-2,s}(\mathscr{D}) \times V_\delta^{m-1,s}(\mathscr{D})$$

или

$$(-\nu\Delta\,\vec{v} + \nabla p, \operatorname{div}\vec{v}) \in N_\gamma^{m-2,\alpha}(\mathscr{D}) \times N_\gamma^{m-1,\alpha}(\mathscr{D}),$$

где $|\delta - 1 + 2/s| < \sigma$, $|\delta - m + 2/s| < \sigma$ и $|\gamma - m - \alpha| < \sigma$.

Тогда

$$(\vec{v}, p) \in \left((\mathring{V}^{1,s}_{\delta-m+1}(\mathscr{D}) \cap V_\delta^{m,s}(\mathscr{D})\right) \times V_\delta^{m-1,s}(\mathscr{D})$$

или

$$(\vec{v}, p) \in \left(\mathring{N}^{0,\alpha}_{\gamma-m}(\mathscr{D}) \cap N_\gamma^{m,\alpha}(\mathscr{D})\right) \times N_\gamma^{m-1,\alpha}(\mathscr{D}).$$

Из леммы 3.2 вытекает следующее утверждение о локальном улучшении свойств решений вблизи ребра.

ЛЕММА 3.3: *Пусть* η, ζ — *функции из класса* $C_0^\infty(\overline{\mathscr{D}})$, *такие, что* $\zeta\eta = \eta$ *и* $\zeta(\vec{v}, p) \in \mathring{V}^{1,s'}_{\delta'}(\mathscr{D}) \times V^{0,s'}_{\delta'}(\mathscr{D})$, *где* $|\delta' - 1 + 2/s'| < \sigma$. *Тогда*

(i) *если* $\zeta(-\nu\,\Delta\vec{v} - \nabla p, \operatorname{div}\vec{v}) \in V_\delta^{m-2,s}(\mathscr{D}) \times V_\delta^{m-1,s}(\mathscr{D})$,

где $|\delta - m + 2/s| < \sigma$, *то*

$$\eta(\vec{v}, p) \in (\mathring{V}^{1,s}_{\delta-m+1}(\mathscr{D}) \cap V_\delta^{m,s}(\mathscr{D}) \times V_\delta^{m-1,s}(\mathscr{D})$$

и справедлива оценка

$$\|\eta(\vec{v}, p)\|_{V_\delta^{m,s}(\mathscr{D})\times V_\delta^{m-1,s}(\mathscr{D})}$$
$$\leqq c\big(\|\zeta(-\nu\,\Delta\vec{v} + \nabla p, \operatorname{div}\vec{v})\|_{V_\delta^{m-2,s}(\mathscr{D})\times V_\delta^{m-1,s}(\mathscr{D})} + \|\zeta(\vec{v}, p)\|_{V^{0,s'}_{\delta'-1}(\mathscr{D})\times V^{0,s'}_{\delta'}(\mathscr{D})}\big). \tag{3.4}$$

(ii) *Если* $\zeta(-\nu\,\Delta v + \nabla p, \operatorname{div}\vec{v}) \in N_\gamma^{m-2,\alpha}(\mathscr{D}) \times N_\gamma^{m-1,\alpha}(\mathscr{D})$, *где* $|\gamma - m - \alpha| < \sigma$, *то*

$$\eta(\vec{v}, p) \in \big(\mathring{N}^{0,\alpha}_{\gamma-m}(\mathscr{D}) \cap N_\gamma^{m,\alpha}(\mathscr{D})\big) \times N_\gamma^{m-1,\alpha}(\mathscr{D})$$

и справедлива оценка

$$\|\eta(\vec{v}, p\|_{N_\gamma^{m,\alpha}(\mathscr{D})\times N_\gamma^{m-1,\alpha}(\mathscr{D})}$$
$$\leqq c(\|\zeta(-\nu\,\Delta\vec{v} + \nabla p, \operatorname{div}\vec{v})\|_{N_\gamma^{m-2,\alpha}(\mathscr{D})\times N_\gamma^{m-1,\alpha}(\mathscr{D})}$$
$$+ \|\zeta(\vec{v}, p)\|_{V^{0,s'}_{\delta'-1}(\mathscr{D})\times V^{0,s'}_{\delta'}(\mathscr{D})}\big). \tag{3.5}$$

Доказательство: Для $m = 1$ утверждения непосредственно следуют из леммы 3.2, примененной к вектор-функции $\eta(\vec{v}, p)$, а для произвольного m получаются по индукции ∎

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4: Лемма 3.3 остается справедливой, если в ее формулировке двугранный угол $\mathscr{D}$ заменить „искривленным двугранным углом" $\varkappa(\mathscr{D})$, где $\varkappa$ — диффеоморфизм класса Λ^m (в (i)) или класса $\Lambda^{m,\alpha}$ (в (ii)). (При доказательстве используются свойства Λ^m и $\Lambda^{m,\alpha}$ — диффеоморфизмов, установленные в [24].)

§ 4. Система Стокса в конусе с ребрами (L^s — оценки)

Введем пространства $\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$ и $\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$ решений и правых частей задачи (2.1). Именно, положим

$$\mathscr{D}V^{m,s}_{\delta,\vec{\beta}}(K) = \{(\vec{v}, p) \in V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \times V^{m-1,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K) : \vec{v}|_{\partial K} = 0\}$$

и

$$\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K) + V^{m-2,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \times V^{m-1,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K).$$

В этом параграфе доказывается следующее обобщение теоремы 2.1.

ТЕОРЕМА 4.1 *Пусть* $K \in \Lambda^m$, $m \geqq 1$, $s \in (1, \infty)$, *вектор* $\vec{\delta}$ *подчинен условию*

$$|\delta_e - m + 2s^{-1}| < \sigma_e, \qquad e \in \mathscr{E},$$

и на прямой $\operatorname{Im}\lambda = \beta + \sum \delta_e - m + 3s^{-1}$ *нет полюсов оператора* $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$. *Тогда имеют место утверждения:*

1°. *Оператор краевой задачи* (2.1) *осуществляет изоморфизм* $\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \to \mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$.

2°. *Пусть* K — *конус класса* $\Lambda^{\max(m,m')}$, *правая часть* (2.1) *принадлежит пересечению* $\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \cap \mathscr{R}V^{m',s'}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$, *где показатели* β', $\vec{\delta}'$, s' *и* m' *удовлетворяют таким же условиям, что и* β, $\vec{\delta}$, s *и* m, *а замкнутая полоса между прямыми* $\operatorname{Im}\lambda = \beta + \sum \delta_e - m + 3s^{-1}$, $\operatorname{Im}\lambda = \beta' + \sum \delta_e' - m' + 3/s'$ *свободна от полюсов оператора* $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$. *Тогда решение* $(\vec{v}, p)$ *задачи* (2.1) *из* $\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$ *принадлежит* $\mathscr{D}V^{m',s'}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$.

Доказательству этой теоремы предпошлем несколько лемм.

Замечание в конце § 3 позволяет при помощи разбиения единицы получить следующие локальные оценки решений задачи (2.1).

ЛЕММА 4.2: *Пусть K — конус из класса Λ^m, $\eta, \zeta \in C_0^\infty(\bar{K} \setminus 0)$, $\eta\zeta = \eta$ и $\zeta(\vec{v}, p) \in \mathscr{D}V^{1,s'}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$, где $|\delta_e' - 1 + 2/s'| < \sigma_e$.*

Если $\zeta(\vec{f}, h) \in \mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$, где $\beta \in \mathbf{R}^1$ и $|\delta_e - m + 2/s| < \sigma_e$ для всех $e \in \mathscr{E}$, то $\eta(\vec{v}, p) \in \mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$ и справедлива соответствующая локальная оценка (ср. с (3.4)).

Пусть $U_k = \{x \in K : 2^{k-1} < |x| < 2^{k+1}\}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ — покрытие конуса $\bar{K} \setminus 0$ и $\{\eta_k\}$ — подчиненное этому покрытию разбиение единицы такое, что $|x|^{|\alpha|} \times |D^\alpha \eta_k| \leqq c_\alpha$ при всех мультииндексах α.

ЛЕММА 4.3: *Пусть K — конус из класса Λ^m, $s \in [2, \infty)$, а числа β, β' и векторы $\vec{\delta}, \vec{\delta}'$, подчинены условиям:*

(i) $\quad |\delta_e'| < \sigma_e, \qquad |\delta_e - m + 2/s| < \sigma_e,$ (i)

(ii) *замкнутая полоса между прямыми* $\operatorname{Im} \lambda = \beta + \sum \delta_e - m + 3/s$ *и* $\operatorname{Im} \lambda = \beta' + \sum \delta_e' + 1/2$ *не содержит полюсов оператора* $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$. *Пусть еще вектор-функция $\{\vec{f}, h\}$ принадлежит классу $\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$, а носитель ее расположен в U_n и не пересекается с ребрами.*

Тогда для решения $(\vec{v}, p) \in \mathscr{D}V^{1,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$ имеет место оценка

$$\|\eta_k(\vec{v}, p)\|_{\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} \leqq c 2^{-\varepsilon|n-k|} \|(\vec{f}, h)\|_{\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)},$$

где ε — положительное число.

Доказательство. В силу 2° теоремы 2.1 в качестве β', δ_e' можно взять любые числа, удовлетворяющие условиям (i) и (ii). Положим

$$\delta_e' = \delta_e - m + 2/s + (1 - 2/s)\nu,$$

где ν — достаточно малое положительное число. Введем число $\mu = \beta - \beta' + \sum_e (\delta_e - \delta_e') + 3/s - m - 1/2$. В случае $n > k$ выберем β' так, чтобы μ было положительным, а при $n < k$ — отрицательным. В силу леммы 4.2

$$\|\eta_k(\vec{v}, p)\|_{\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} \leqq c\left(\|(\vec{f}, h)\|_{\mathscr{R}V^{m,s}_{\delta,\beta}(K)} + 2^{\mu k} \|\zeta_k(\vec{v}, p)\|_{\mathscr{D}V^{1,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)}\right), \tag{4.1}$$

где $\zeta_k \in C_0^\infty(U_k)$, $\zeta_k \eta_k = \eta_k$, $|x|^{|\alpha|} |D^\alpha \zeta_k| < c_\alpha$ для всех мультииндексов α. Если $|m - k| > 2$, то по лемме 4.2

$$\|\eta_k(\vec{v}, p)\|_{\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} \leqq c 2^{\mu k} \|\zeta_k(\vec{v}, p)\|_{\mathscr{D}V^{1,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)}. \tag{4.2}$$

Согласно теореме 2.1

$$\|\zeta_k(\vec{v}, p)\|_{\mathscr{D}V^{1,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)} \leqq c\|(\vec{v}, p)\|_{\mathscr{D}V^{1,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)} \leqq c\|(\vec{f}, h)\|_{\mathscr{R}V^{1,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)}.$$

Имеем

$$\|h\|_{V^{0,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)} = \left\|\varrho^{\beta'} \prod_{e\in\mathscr{E}} r_e^{\delta_e'} h\right\|_{L^2(K)}. \tag{4.3}$$

В силу неравенства Гельдера правая часть не превосходит

$$\left\|\varrho^{\beta} \prod_{e\in\mathscr{E}} r_e^{\delta_e} \sum_{e\in\mathscr{E}} r_e^{-m+1} h\right\|_{L^s(K)} \times \left\|\varrho^{\beta'-\beta} \prod_{e\in\mathscr{E}} r_e^{\delta_e'-\delta_e} \Big(\sum_{e\in\mathscr{E}} r_e^{-m+1}\Big)^{-1}\right\|_{L_{2s/(s-2)}(U_n)}.$$

Конечность последней нормы обеспечивается выбором показателей δ_e'. Ясно, что эта норма равна $c2^{-\mu n}$. Итак,

$$\|h\|_{V^{0,s}_{\vec\beta',\vec\delta'}(K)} \leqq c2^{-\mu n} \left\| \varrho^\beta \prod_{e\in\mathscr{E}} r_e^{\delta_e} \sum_{e\in\mathscr{E}} r_e^{-m+1} h \right\|_{L^s(K)} \leqq c2^{-\mu n} \|h\|_{V^{m-1,s}_{\beta,\vec\delta}(K)}. \tag{4.4}$$

Заметим, что норма элемента g пространства $V^{-1,2}_{\beta',\vec\delta'}(K)$ эквивалентна норме

$$\inf \sum_{j=1}^{3} \|g_j\|_{V^{0,s}_{\beta',\vec\delta'}(K)},$$

где infimum вычисляется по всем представлениям функции g в виде $g = \sum_{j=1}^{3} \partial g_i/\partial x_j$. Поэтому

$$\|\vec f\|_{V^{-1,2}_{\beta',\vec\delta'}(K)} \leqq c2^{-\mu n} \inf \sum_{j=1}^{3} \|\vec f_j\|_{V^{m-1,s}_{\beta,\vec\delta}(K)},$$

где infimum берется по всем представлениям вектора $\vec f$ в виде $\vec f = \sum_{j=1}^{3} \partial \vec f_j/\partial x_j$. Отсюда и из (4.4) следует оценка

$$\|(\vec f, h)\|_{\mathscr{R}V^{1,2}_{\beta',\vec\delta'}(K)} \leqq c2^{-\mu n} \|(\vec f, h)\|_{\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)}. \tag{4.5}$$

Из неравенств (4.2), (4.3) и (4.5) выводим, что

$$\|\eta_k(\vec v, p)\|_{\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)} \leqq c2^{\mu(k-n)} \|(\vec f, h)\|_{\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)}.$$

Лемма доказана ∎

Доказательство теоремы 4.1.: 1°. Пусть сначала $s \geqq 2$. Применяя лемму 4.3 и лемму 1.1 из работы [18], получаем, что при любой вектор-функции $(\vec f, h) \in \mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)$ существует решение $\{\vec v, p\} \in \mathscr{D}DV^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)$, и для этого решения справедлива оценка

$$\|(\vec v, p)\|_{\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)} \leqq c \|(\vec f, h)\|_{\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)}.$$

Докажем единственность решения. Пусть $(\vec v, p) \in \mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)$ — решение однородной задачи (2.1). Введем функцию η_ε, определенную равенством $\eta_\varepsilon(x) = \eta(r(x)/\varepsilon)$, где ε — малое положительное число, $r(x)$ — регуляризованное расстояние от точки x до множества S особых точек границы, $\eta \in C^\infty(\mathbf{R}_+^1)$, причем $\eta(t) = 1$ при $t > 2$ и $\eta(t) = 0$ при $t < 1$. Так как $s \geqq 2$, то вектор-функция $\eta_\varepsilon(\vec v, p)$ принадлежит пространству $\mathscr{D}V^{1,2}_{\beta',\vec\delta'}(K)$ (для любых β', $\vec\delta'$). Ясно, что $D^\alpha\eta_\varepsilon = 0(\varepsilon^{-|\alpha|})$ и supp $D^\alpha\eta_\varepsilon$ содержится в $c\varepsilon$ — окрестности множества S, $c = const$. Поэтому $\eta_\varepsilon(\vec v, p)$ — решение задачи (2.1), правая часть которой стремится к нулю в пространстве $\mathscr{R}V^{1,2}_{\beta',\vec\delta'}(K)$ при $\varepsilon \to 0$. Применяя теорему 2.1, получаем, что $\eta_\varepsilon(\vec v, p)$ стремится к нулю в $\mathscr{D}V^{1,2}_{\beta',\vec\delta'}(K)$, т.е. что $(\vec v, p) = 0$.

Пусть теперь $s < 2$. Допустим сначала, что $m = 1$. Обозначим через A оператор $(\vec v, p) \to (-\nu\Delta\vec v + \nabla p, \operatorname{div} \vec v)$, определенный на $\mathscr{D}V^{1,s}_{\beta,\vec\delta}(K)$, и через A^t — оператор формально сопряженной задачи $(\vec w, q) \to (-\nu\Delta\vec w - \nabla q, -\operatorname{div} q)$ с областью определения $\mathscr{D}V^{1,\tau}_{-\beta,-\vec\delta}(K)$, где $s + \tau = s\tau$. Очевидно, что $|-\delta_e - 1 + 2/\tau| < \sigma_e$, и, в силу леммы 2.2, на прямой $\operatorname{Im}\lambda = -\beta - \sum \delta_e - 1 + 3/\tau$ нет полюсов оператора $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$. Поэтому, как было только что показано, оператор A^t осуществляет изоморфизм: $\mathscr{D}V^{1,\tau}_{-\beta,-\vec\delta}(K) \to \mathscr{R}V^{1,\tau}_{-\beta,-\vec\delta}(K)$. В силу того, что пространства $\mathring{V}^{1,s}_{\beta,\vec\delta}(K)$, $V^{0,s}_{\beta,\vec\delta}(K)$ совпадают со своими вторыми сопряженными, оператор A

является сопряженым с A^t (относительно двойственности в $L^2(K)$). Следовательно, $A: \mathscr{D}V^{1,s}_{\beta,\vec\delta}(K) \to \mathscr{R}V^{1,s}_{\beta,\vec\delta}(K)$ — изоморфизм.

Теперь пусть $m > 1$. Положим $\delta_e' = \delta_e - m + 1$, $\beta' = \beta + (T-1)(m-1)$, где T — число ребер конуса K. Так как $(\vec f, h) \in \mathscr{R}V^{1,s}_{\beta',\vec\delta'}(K)$, то, по доказанному, существует решение $(\vec v, p) \in \mathscr{D}V^{1,s}_{\beta',\vec\delta}(K)$ задачи (2.1), а для него имеет место оценка

$$\|(\vec v, p)\|_{\mathscr{D}V^{1,s}_{\beta',\vec\delta}(K)} \leqq c\,\|(\vec f, h)\|_{\mathscr{R}V^{1,s}_{\beta,\vec\delta}(K)}. \tag{4.6}$$

Пусть ζ_k, η_k — те же срезающие функции, что в доказательстве леммы 4.3. Из леммы 4.2 следует, что справедлива локальная оценка

$$\|\eta_k(\vec v, p)\|^s_{\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)} \leqq c\Big(\|\zeta_k(\vec f, h)\|^s_{\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)} + \|\zeta_k(\vec v, p)\|^s_{\mathscr{D}V^{1,s}_{\beta',\vec\delta'}(K)}\Big).$$

Просуммируем это неравенство по k и воспользуемся эквивалентностью норм

$$\Big(\sum_k \|\eta_k(\vec v, p)\|^s_{\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)}\Big)^{1/s} \sim \|(\vec v, p)\|_{\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)},$$

$$\Big(\sum_k \|\zeta_k(\vec f, h)\|^s_{\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)}\Big)^{1/s} \sim \|(\vec f, h)\|_{\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)}.$$

Тогда

$$\|(\vec v, p)\|_{\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)} \leqq c\Big(\|\vec f, h)\|_{\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)} + \|(\vec v, p)\|_{\mathscr{D}V^{1,s}_{\beta',\vec\delta'}(K)}\Big).$$

Отсюда и из (4.6) вытекает неравенство

$$\|(\vec v, p)\|_{\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)} \leqq c\,\|(\vec f, h)\|_{\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)}.$$

Первое утверждение теоремы доказано.

2°. В силу 1° достаточно провести доказательство при условии $m = m'$. Предположим сначала, что вектор-функция $(\vec f, h)$ принадлежит прямому произведению $W_t^m(K) \times W_t^{m-1}(K)$, $t = \max(2, s, s')$, и имеет компактный носитель в $\bar K - S$. Обозначим через Π открытую полосу наибольшей ширины на λ — плоскости, содержащую прямую $\operatorname{Im}\lambda = \beta + \sum \delta_e - m + 3/s$. Допустим, что компоненты вектора $\vec\delta^{(0)}$ удовлетворяют неравенствам $|\delta_e^{(0)}| < \sigma_t$, а число $\beta^{(0)}$ таково, что прямая $\operatorname{Im}\lambda = \beta^{(0)} + \sum \delta_e^{(0)} - m + 3/2$ расположена в Π. Согласно теореме 2.1 и лемме 4.2 существует единственное решение $(\vec v, p) \in \mathscr{D}V^{m,2}_{\beta^{(0)},\delta^{(0)}}(K)$ задачи (2.1). Та же теорема 2.1 гарантирует принадлежность решения $(\vec v, p)$ пересечению $\mathscr{D}V^{m,2}_{\beta^{(0)}-\varepsilon,\vec\delta^{(0)}}(K) \cap \mathscr{D}V^{m,2}_{\beta^{(0)}+\varepsilon,\vec\delta^{(0)}}(K)$, где ε — достаточно малое положительное число. Положим

$$\delta_e^{(0)} = \delta_e - m + 2/s, \qquad \beta^{(0)} = \beta + \sum(\delta_e - \delta_e^{(0)}) + 3/s - 3/2.$$

Принимая во внимание утверждение I°, замечаем, что достаточно установить принадлежность этого решения каждому из пространств

$$\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K) \quad \text{и} \quad \mathscr{D}V^{m,s'}_{\beta',\vec\delta'}(K).$$

Покажем, для определенности, что $(\vec v, p) \in \mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\delta}(K)$. Применяя лемму 4.2, имеем

$$\|\eta_k(\vec v, p)\|^s_{\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)} \leqq c(\|\zeta_k(\vec f, h)\|^s_{\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec\delta}(K)} + \|\zeta_k(\vec v, p)\|^s_{\mathscr{D}V^{m,2}_{\beta^{(0)},\vec\delta^{(0)}}}. \tag{4.7}$$

Суммируя по k, приходим к оценке

$$\|(\vec{v}, p)\|^s_{\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)}$$

$$\leqq c(\|\vec{f}, h)\|^s_{\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-\varepsilon|k|}\left(\|(\vec{v}, p)\|^s_{\mathscr{D}V^{m,2}_{\beta^{(0)}-\varepsilon,\vec{\delta}^{(0)}}(K)} + \|(\vec{v}, p)\|^s_{\mathscr{D}V^{m,2}_{\beta^{(0)}+\varepsilon,\vec{\delta}^{(0)}}(K)}\right).$$

Итак, $(\vec{v}, p) \in \mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$. Теорема доказана ∎

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4: Пусть K — конус класса Λ^m и $\varkappa\colon K \to \mathbf{R}^3$ диффеоморфизм класса C^1, тождественный вне некоторой окрестности U точки 0 и удовлетворяющий неравенствам:

$$\left|\frac{\partial \varkappa_i}{\partial x_j}(x) - \delta_{ij}\right| < \varepsilon \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$r(x)^{|\gamma|}\left|D_x^\gamma \frac{\partial \varkappa_i}{\partial x_j}(x)\right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad m > 1,\ 1 \leqq |\gamma| \leqq m - 1;$$

здесь ε — достаточно малое положительное число. Оператор A задачи (2.1) в области $\varkappa(K)$ после замены переменных, осуществляемой отображением $\varkappa$, переходит в оператор $A_\varkappa$ в K. Из (1) и (2) следует, что

$$\|A_\varkappa - A\|_{\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)\to\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} < c_\varkappa\varepsilon,$$

где $c_\varkappa$ — постоянная, не зависящая от ε. Поэтому теорема 4.1 остается справедливой и после замены конуса K на „искаженный конус" $\varkappa(K)$.

Пусть $\eta \in C_0^\infty(\overline{K})$. Очевидно, коммутатор $[\eta, A_\varkappa]$ непрерывно отображает $\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$ в $\mathscr{R}V^{m+1,s}_{\beta_1,\vec{\delta}}(K)$, где β_1 — произвольное вещественное число. Отсюда при помощи индукции по $m = 1, 2, \ldots$ получаем следующее утверждение о локальном улучшении свойств решения вблизи конической точки.

ЛЕММА 4.5: *Пусть K — конус класса $\Lambda^{\max(m,m')}$ и выполнены условия:*

(i) $|\delta_e - m + 2/s| < \sigma_e$, $|\delta_e' - m' + 2/s'| < \sigma_e$ *для всех* $e \in \mathscr{E}$;

(ii) *замкнутая полоса между прямыми* $\operatorname{Im}\lambda = \beta + \sum \delta_e - m + 3/s$, $\operatorname{Im}\lambda = \beta' + \sum \delta_e' - m + 3/s'$ *не содержит полюсов оператора* $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$. *Пусть еще* $\eta, \zeta \in C_0^\infty(U)$, $\zeta\eta = \eta$ *и* $\zeta(\vec{v}, p) \in \mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(\varkappa(K))$.

Если $\zeta A(\vec{v}, p) \in \mathscr{R}V^{m',s'}_{\beta',\vec{\delta}'}(\varkappa, K))$, *то* $\eta(\vec{v}, p) \in \mathscr{D}V^{m',s'}_{\beta',\vec{\delta}'}(\varkappa, (K))$, *и справедлива соответствующая локальная оценка.*

§ 5. Система Стокса в конусе с ребрами (оценки в весовых классах Гельдера)

Введем пространства $\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$ и $\mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$ решений и правых частей задачи (2.1). Положим

$$\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K) = \{(\vec{v}, p) \in N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \times N^{m-1,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K) : \vec{v}|_{\partial K} = 0\},$$

$$\mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K) = N^{m-2,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \times N^{m-1,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K),$$

где $m = 1, 2, \ldots, \alpha \in (0, 1)$.

Основным результатом параграфа является

ТЕОРЕМА 5.1: *Пусть вектор $\vec{\delta}$ подчинен условию*

$$|\delta_e - m - \alpha| < \sigma_e, \qquad e \in \mathscr{E},$$

и на прямой $\operatorname{Im} \lambda = \beta + \sum \delta_e - m - \alpha$ *нет полюсов оператора* $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$.

Тогда имеют место следующие утверждения:

1°. *Если* $K \in \Lambda^{m,\alpha}$, *то оператор краевой задачи* (2.1) *осуществляет изоморфизм:* $\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \to \mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$.

2°. *Пусть* K *принадлежит классу* $\Lambda^{\max\{m,m'\},\alpha}$ *и правая часть задачи* (2.1) *принадлежит пересечению* $\mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \cap \mathscr{R}N^{m',\alpha'}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$, *где показатели* β', $\vec{\delta}'$, m' *и* α' *удовлетворяют таким же условиям, что в* β, $\vec{\delta}$, m *и* α. *Пусть еще замкнутая полоса между прямыми* $\operatorname{Im} \lambda = \beta + \sum \delta_e - m - \alpha$, $\operatorname{Im} \lambda = \beta' + \sum \delta_e' - m' - \alpha'$ *свободна от полюсов оператора* $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$. *Тогда решение* $(\vec{v}, p)$ *задачи* (2.1) *из* $\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$ *принадлежит* $\mathscr{D}N^{m',\alpha'}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$.

3°. *Пусть* $K \in \Lambda^{\max\{m,m'\},\alpha}$ *и правая часть задачи* (2.1) *принадлежит пересечению* $\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K) \cap \mathscr{R}V^{m',\alpha'}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$, *причем показатели* $m, s, \beta, \vec{\delta}$ *и* m', α', β' $\vec{\delta}'$ *подчинены условиям:*

(i) $m, m' = 1, 2, \dots;$ $\qquad \alpha' \in (0, 1), \qquad s \in (1, \infty);$

(ii) $\quad |\delta_e - m + 2/s| < \sigma_e, \qquad |\delta_e' - m - \alpha| < \sigma_e;$

(iii) *замкнутая полоса между прямыми* $\operatorname{Im} \lambda = \beta + \sum \delta_e - m + 3/s$, $\operatorname{Im} \lambda = \beta' + \sum \delta_e' - m' - \alpha'$ *не содержит полюсов оператора* $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$.

Тогда решение $(\vec{v}, p)$ *задачи* (2.1), *принадлежащее классу* $\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$, *принадлежит классу* $\mathscr{D}N^{m',\alpha'}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$.

Доказательство опирается на две леммы.

ЛЕММА 5.2: *Пусть* $K \in \Lambda^{m,\alpha}$, $\eta, \zeta \in C_0^\infty(\bar{K} \setminus 0)$, $\eta\zeta = \eta$ *и* $(\vec{v}, p)$ — *решение задачи* (2.1) *на множестве* $\operatorname{supp} \zeta$. *Тогда справедливо следующее утверждение: Если* $\zeta(\vec{f}, h) \in \mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$, $\beta \in \mathbf{R}^1$, $|\delta_e - m - \alpha| < \sigma_e$ *для всех* $e \in \mathscr{E}$, $\zeta(\vec{v}, p) \in \mathscr{D}V^{1,s'}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$, $|\delta_e' - 1 - 2/s'| < \sigma_e$, *то* $\eta(\vec{v}, p) \in \mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$ *и справедлива оценка*

$$\|\eta(\vec{v}, p)\|_{\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} \leqq c\left(\|\zeta(\vec{f}, h)\|_{\mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} + \|\zeta(v, p)\|_{\mathscr{D}V^{1,s'}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)}\right).$$

Эта лемма выводится при помощи разбиения единицы из леммы 3.3 и следующего за ней замечания.

ЛЕММА 5.3: *Пусть* K — *конус из класса* $\Lambda^{m,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $m = 1, \dots$ *а, числа* β, β' *и векторы* $\vec{\delta}, \vec{\delta}'$ *подчинены условиям:*

(i) $|\delta_e'| < \sigma_e, \qquad |\delta_e - m - \alpha| < \sigma_e,$

(ii) *замкнутая полоса между прямыми* $\operatorname{Im} \lambda = \beta + \sum \delta_e - m - \alpha$ *и* $\operatorname{Im} \lambda = \beta' + \sum \delta_e' + 1/2$ *не содержит полюсов оператора* $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$. *Допустим, что вектор-функция* $(\vec{f}, h)$ *принадлежит классу* $\mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$, *а носитель ее расположен в* $U_n = \{x \in \bar{K} : 2^{n-1} < |x| < 2^{n+1}\}$ *и не пересекается с ребрами.*

Тогда для решения $(\vec{v}, p) \in \mathscr{D}V^{1,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$ *задачи* (2.1) *имеет место оценка*

$$\|\eta_k(\vec{v}, p)\|_{\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} \leqq c2^{-\varepsilon|n-k|}\, \|(\vec{f}, h)\|_{\mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} \tag{5.1}$$

Доказательство в существенном совпадает с доказательством леммы 4.3. В последнем следует положить $s = \infty$, $\mu = \beta - \beta' + \sum_e (\delta_e - \delta_e') - m - \alpha - 1/2$ и заменить $V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}$ на $N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}$, $V^{m-1,s}_{\beta,\vec{\delta}}$ на $N^{m-1,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}$.

Доказательство теоремы: 1°. Пусть $\{\eta_k\}$ — разбиение единицы, использованное в лемме 4.3, и пусть $\vec{f}_n = \eta_n\vec{f}$, $h_n = \eta_n h$. Имеем

$$\|\varrho^{\beta^{(0)}} \prod r_e^{\delta_e^{(0)}} h_n\|_{L^2(K)}$$
$$\leqq \|\varrho^{\beta} \prod r_e^{\delta_e} \sum r_e^{1-m-\alpha} h\|_{L^2(K)} \times \|\varrho^{\beta^{(0)}-\beta} \prod r_e^{(\delta_e^{(0)}-\delta_e)} \left(\sum r_e^{1-m-\alpha}\right)^{-1}\|_{L^\infty(U_n)}.$$

Положим $\delta_e^{(0)} = -m - \alpha + \delta_e + \varepsilon$, $\beta^{(0)} = \beta + \sum (\delta_e - \delta_e^{(0)}) - 1/2 - m - \alpha + \varepsilon$. Очевидно, последняя норма равна $c2^{\varepsilon n}$. Поэтому $h \in V^{0,2}_{\beta^{(0)},\vec{\delta}^{(0)}}(K)$. Аналогично, переходя к дивергентному представлению для $\vec{f}_n$, получаем, что $\vec{f}_n \in V^{-1,2}_{\beta^{(0)},\vec{\delta}^{(0)}}(K)$ (ср. с доказательством леммы 4.3). Итак, $(\vec{f}_n, h_n) \in \mathscr{R}V^{1,2}_{\beta^{(0)},\vec{\delta}^{(0)}}(K)$, причем показатели $\beta^{(0)}$, $\vec{\delta}^{(0)}$ удовлетворяют тем же условиям, что и β, $\vec{\delta}$ в теореме 2.1.

Введем последовательность срезающих функций $\{\chi_m\}_{m\geq 1}$, таких, что $r^{|\alpha|}\,|D^\alpha \chi_m| \leqq c_\alpha$ для всех мультииндексов α, $\chi_m = 1$ при $r > 2/m$ и $\chi_m = 0$ при $r < 1/m$. Ясно, что $\chi_m(\vec{f}_n, h_n) \xrightarrow[m\to\infty]{} (\vec{f}_n, h_n)$ в $\mathscr{R}V^{1,2}_{\beta^{(0)},\vec{\delta}^{(0)}}(K)$ и

$$\sup_m \|\chi_m(\vec{f}_n, h_n)\|_{\mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} \leqq c\,\|(\vec{f}_n, h_n)\|_{\mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)}. \tag{5.2}$$

Обозначим через $(\vec{v}_{m,n}, p_{m,n})$ и $(\vec{v}_n, p_n)$ решения задачи (2.1) из $\mathscr{D}V^{1,2}_{\beta^{(0)},\vec{\delta}^{(0)}}(K)$ с правыми частями $\chi_m(\vec{f}_n, h_n)$ и $(\vec{f}_n, h_n)$ соответственно. По теореме 2.1 последовательность $(\vec{v}_{m,n}, p_{m,n})$ сходится при $m \to \infty$ к $(\vec{v}_n, p_n)$ в $\mathscr{D}V^{1,2}_{\beta^{(0)},\vec{\delta}^{(0)}}(K)$. Согласно лемме 5.3, для любого $k = 0, \pm 1, \ldots$

$$\|\eta_k(\vec{v}_{m,n}, p_{m,n})\|_{\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} \leqq c2^{-\varepsilon|n-k|}\,\|\chi_m(\vec{f}_n, h_n)\|_{\mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)}$$
$$\leqq c2^{-\varepsilon|n-k|}\,\|(\vec{f}_n, h_n)\|_{\mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)}$$

(см. неравенство (5.2)). Так как $(\vec{v}_{m,n}, p_{m,n}) \to (\vec{v}_n, p_n)$ в $\mathscr{D}V^{1,2}_{\beta^{(0)},\vec{\delta}^{(0)}}(K)$, то

$$\|\eta_k(\vec{v}_n, p_n)\|_{\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} \leqq \lim_{m\to\infty} \|\eta_k(\vec{v}_{m,n}, p_{m,n})\|_{\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)}.$$

Следовательно,

$$\|\eta_k(\vec{v}_n, p_n)\|_{\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} \leqq c2^{-\varepsilon|n-k|}\,\|(\vec{f}_n, h_n)\|_{\mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)}.$$

Положим

$$(\vec{V}_N, \mathscr{P}_N) = \sum_{|n|\leqq N} (\vec{v}_n, p_n), \qquad N = 1, 2, \ldots.$$

Имеем

$$\|(\vec{V}_N, \mathscr{P}_N)\|_{\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} \leqq c\sup_k \|\eta_k(\vec{V}_N, \mathscr{P}_N)\|_{\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)}$$
$$\leqq c\sup_k \sum_{|n|\leqq N} \|\eta_k(\vec{v}_n, p_n)\|_{\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)}$$
$$\leqq c\sup_k \sum_{|n|\leqq N} 2^{-\varepsilon|n-k|}\,\|(\vec{f}_n, h_n)\|_{\mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)}.$$

Учитывая, что $(\vec{f}_n, h_n) = \eta_n(\vec{f}, h)$, получаем

$$\|(\vec{V}_N, \mathscr{P}_N)\|_{\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} \leqq c\|(\vec{f}, h)\|_{\mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)}. \tag{5.3}$$

Пусть Q — произвольный компакт в $K \setminus S$. Множество $\{(\vec{V}_N, \mathscr{P}_N)\}_{N\geq 1}$ компактно в $C^m(Q) \times C^{m-1}(Q)$. Предел сходящейся подпоследовательности обозначаем через $(\vec{v}, p)$. Ясно, что вектор-функция $(\vec{v}, p)$ удовлетворяет задаче (2.1) и допускает оценку

$$\|(\vec{v}, p)\|_{\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} \leq \varliminf_{N\to\infty} \|(\vec{V}_N, \mathscr{P}_N)\|_{\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)}.$$

Итак, задача (2.1) имеет решение из $\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$, удовлетворяющее неравенству

$$\|(\vec{v}, p)\|_{\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)} \leq c\|(\vec{f}, h)\|_{\mathscr{R}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)}.$$

Докажем единственность решения в классе $\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$. Пусть $(\vec{v}, p) \in \mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$ — решение однородной задачи (2.1). Положим $\delta' = \delta - m - \alpha + \varepsilon$, $\beta' = \beta - m - \alpha + \sum (\delta_e' - \delta_e) - 3/2 + \varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число. Из определения пространства $\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$ следует, что

$$|\vec{v}| + 2\,|\nabla\vec{v}| + r\,|p| = O\Big(r^{m+\alpha}\varrho^{-\beta} \prod_{e\in\mathscr{E}} r^{\delta_e}\Big).$$

Поэтому вектор-функция $(\vec{v}_\varepsilon, p_\varepsilon) = (1 + \varrho)^{-2\varepsilon}(\vec{v}, p)$ принадлежит пространству $\mathscr{R}V^{1,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$. Кроме того, эта вектор-функция входит в ядро оператора $A_\varepsilon = (1 + \varrho)^{-2\varepsilon} A(1 + \varrho)^{2\varepsilon}$, где A — оператор задачи (2.1). Ясно, что

$$\|A_\varepsilon - A\|\,\big(\mathscr{D}V^{1,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K) \to \mathscr{R}V^{1,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)\big) = O(\varepsilon).$$

Отсюда из теоремы 2.1 вытекает, что при малом ε оператор A_ε осуществляет изоморфизм $\mathscr{D}V^{1,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K) \to \mathscr{R}V^{1,2}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$. Поэтому первая часть теоремы доказана.

2°. Пусть $(\vec{v}, p)$ — решение задачи (2.1) из пространства $\mathscr{D}N^{m,\alpha}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$. Как было показано в первой части доказательства, вектор-функция $(\vec{v}, p)$ является пределом последовательности $\{(\vec{V}_N, \mathscr{P}_N)\}_{N\geq 1}$ на каждом компакте $Q \subset K \setminus S$, где $(\vec{V}_N, \mathscr{P}_N)$ — решение задачи (2.1) из пространства $\mathscr{D}V^{1,2}_{\beta^{(0)},\vec{\delta}^{(0)}}(K)$ с правой частью $\sum_{|m|\leq N} (\vec{f}_n, h_n)$, $\delta_e^{(0)} = -m - \alpha + \delta_e + \varepsilon$, $\beta^{(0)} = \beta + \sum(\delta_e - \delta_e^{(0)}) - 1/2 - m - \alpha + \varepsilon$.

То же справедливо и для решения $(\vec{v}', p') \in \mathscr{D}N^{m',\alpha'}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$ (с заменой $\vec{\delta}^{(0)}$ и $\beta^{(0)}$ на $\delta^{(1)} = -m' - \alpha' + \delta_e' + \varepsilon$, $\beta^{(1)} = \beta' + \sum (\delta_e' - \delta_e^{(1)}) - 1/2 - m' - \alpha' + \varepsilon$). По теореме 2.1, последовательности $\{(\vec{V}_N', \mathscr{P}_N)\}$ и $\{(\vec{V}_N, \mathscr{P}_N')\}$, аппроксимирующие $(\vec{v}, p)$ и $(\vec{v}', p')$ соответственно, совпадают. Значит, $(\vec{v}, p) = (\vec{v}', p')$. Тем самым, доказано и второе утверждение теоремы.

3°. Пусть $(\vec{v}, p)$ — решение задачи (2.1) из пространства $\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$. Так как последовательность $\Big\{\sum_{|n|\leq N} (\vec{f}_n, h_n)\Big\}_{N\geq 1}$ сходится к $(\vec{f}, h)$ в $\mathscr{R}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$, то по теореме 4.1, $(\vec{V}_N, \mathscr{P}_N) \to (\vec{v}, p)$ при $N \to \infty$ в простанстве $\mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(K)$. С другой стороны, как показано в первой части доказательства, $\{(V_N, \mathscr{P}_N)\}$ сходится к решению из пространства $\mathscr{D}N^{m',\alpha'}_{\beta',\vec{\delta}'}(K)$ в $C^{m'}(Q)$ для компакта $Q \subset K \setminus S$. Теорема доказана ∎

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4: Пусть K — конус класса $\Lambda^{m,\alpha}$, $m = 1, 2, \ldots, 0 < \alpha < 1$ и $\varkappa : K \to \mathbf{R}^3$ — диффеоморфизм класса C^1, тождественный вне некоторой окрестности U точки 0 и удовлетворяющий неравенствам

$$\left\langle \frac{\partial \varkappa_i}{\partial \varkappa_j} - \delta_{ij} \right\rangle_{\alpha, U} < \varepsilon,$$

$$\left\langle r^{|\gamma|} D_x^{\gamma} \frac{\partial \varkappa_i}{\partial x_j} \right\rangle_{\alpha, U} < \varepsilon \quad \text{при} \quad m > 1;\ 1 \leqq |\gamma| \leqq m - 1,$$

где ε — достаточно малое положительное число.

Заменяя в замечании 4.4 $V^{m',s'}_{\beta',\delta'}$ на $N^{m',\alpha}_{\beta',\vec{\delta}'}$, приходим к следующим утверждениям, аналогичным лемме 4.5.

ЛЕММА 5.5: *Пусть K — конус класса $\Lambda^m \cap \Lambda^{m',\alpha}$, $m, m' = 1, 2, \ldots$ и выполнены условия:*

(i) $|\delta_e - m + 2/s| < \sigma_e$, $|\delta_e' - m' - \alpha| < \sigma_e$;

(ii) *замкнутая полоса между прямыми* $\operatorname{Im} \lambda = \beta + \sum \delta_e - m + 3/s$ *и* $\operatorname{Im} \lambda = \beta' + \sum \delta_e' - m' - \alpha$ *не содержит полюсов оператора* $\mathfrak{A}(\lambda)^{-1}$.

Если $\zeta(\vec{v}, p) \in \mathscr{D}V^{m,s}_{\beta,\vec{\delta}}(\varkappa(K))$ *и* $\zeta A(\vec{v}, p) \in \mathscr{R}N^{m',\alpha}_{\beta',\vec{\delta}'}(\varkappa(K))$, *то* $\eta(\vec{v}, p) \in \mathscr{D}N^{m',\alpha}_{\beta',\vec{\delta}}(\varkappa(K))$ *и имеет место соответствующая локальная оценка.*

§ 6. Задача Стокса в ограниченной области

Пусть Ω — ограниченная область класса $C^{0,1}$ и A — оператор краевой задачи

$$-\nu \Delta \vec{v} + \nabla p = \vec{f}, \qquad \operatorname{div} \vec{v} = h \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \vec{v}/h|_{\partial\Omega} = \vec{\varphi}. \tag{6.1}$$

Теорема об однозначной разрешимости в классе $\mathring{W}_2^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ задачи (6.1) при $k = 0$, $\vec{\varphi} = 0$ и $\vec{f} \in [\mathring{W}_2^1(\Omega)]^*$ известна для любой ограниченной области (см. книгу [1]). Этот результат вместе с теоремой О. А. Ладыженской-В. А. Солонникова о существовании векторного поля класса $\mathring{W}_2^1(\Omega)$ с заданной дивергенцией обеспечивает однозначную разрешимость задачи (6.1) и при любой функции h из $L^2(\Omega)$ [31].

Принимая во внимание, что $\mathring{W}_2^1(\Omega) = V^{1,2}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$, $L^2(\Omega) = V^{0,2}_{\vec{\beta},\vec{\delta}}(\Omega)$, где $\vec{\beta} = 0$, $\vec{\delta} = 0$, и используя лемму 3.3, замечание 3.4 и леммы 4.6 и 5.5, приходим к теоремам 6.1, 6.2 об однозначной разрешимости задачи (6.1) в различных весовых классах и о свойствах решений.

Предварительно введем несколько обозначений. Пусть $\theta_e(\zeta)$ угол (со стороны области Ω) между касательными полуплоскостями в точке ζ на ребре e. Положим еще $\sigma_e(\zeta) = 1$, если $\theta_e(\zeta) \in (0, \pi)$. В случае $\theta_e(\zeta) \in (\pi, 2\pi)$ через $\sigma_e(\zeta)$ обозначим корень уравнения $\sin \sigma\theta_e(\zeta) + \sigma \sin \theta_e(\zeta) = 0$, имеющий наименьшую положительную вещественную часть (см. § 2). Обозначим через $\mathfrak{A}_q(\lambda)$ оператор краевой задачи (2.3), отвечающий конической точке q, и через λ_q — собственное число оператор-функции $\mathfrak{A}_q$ с наименьшей по абсолютной величине отрицательной мнимой частью.

ТЕОРЕМА 6.1: *Пусть Ω — ограниченная область класса Λ^m, $m = 1, 2, \ldots$, $1 < s < \infty$ и числа β_q, δ_e подчинены неравенствам*

$$|\delta_e - m + 2/s| < \inf_{\zeta \in e} \sigma_e(\zeta), \tag{6.2}$$

$$\left|\beta_q + \sum_{\{e: q \in \bar{e}\}} \delta_e - m + 3/s - 1/2\right| < 1/2 + \min\{|\operatorname{Im} \lambda_q|, 1\}. \tag{6.3}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Задача* (6.1) *однозначно разрешима в пространстве* $V^{m,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)\times V^{m-1,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$ *при всех* $(\vec f, h, \vec\varphi)\in V^{m-2,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)\times V^{m-1,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)\times V^{m-1/s,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)$.

2. *Если* $(\vec v, p)$ — *решение задачи* (6.1) *из пространства* $W_2^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ *и* $(\vec f, h, \vec\varphi)\in V^{m-2,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)\times V^{m-1,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)\times V^{m-1/s,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)$, *то* $(\vec v, p)\in V^{m,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)\times V^{m-1,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 6.2: *Пусть* Ω — *ограниченная область класса* $\Lambda^{m,\alpha}$, $m=1, 2, \ldots$, $0<\alpha<1$ *и числа* β_q, δ_e *подчинены неравенствам*

$$|\delta_e - m - \alpha| < \inf_{\zeta\in e}\sigma_e(\zeta), \tag{6.4}$$

$$\Big|\beta_q + \sum_{\{e:q\in\bar e\}}\delta_e - m - \alpha - 1/2\Big| < \min\{|\operatorname{Im}\lambda_q|, 1\} + 1/2. \tag{6.5}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Задача* (6.1) *однозначно разрешима в пространстве* $N^{m,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)\times N^{m-1,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$ при всех $(\vec f, h, \vec\varphi)\in N^{m-2,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)\times N^{m-1,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)\times N^{m,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)$.

2. *Если* $(\vec v, p)$ — *решение задачи* (6.1) *из пространства* $W_2^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ и $(\vec f, h, \vec\varphi)\in N^{m-2,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)\times N^{m-1,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)\times N^{m,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\partial\Omega)$, то $(\vec v, p)\in N^{m,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)\times N^{m-1,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)$.

Из теорем 6.1, 6.2 и теоремы 2.3 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 6.3: *Утверждения теорем* 6.1, 6.2 *останутся справедливыми, если в их формулировках условия* (6.3) *и* (6.5) *заменить неравенствами*

$$\Big|\beta_q + \sum_{\{e:q\in\bar e\}}\delta_e - m + 3/s - 1/2\Big| < 1/2 + \Lambda_q/(\Lambda_q+9), \tag{6.6}$$

$$\Big|\beta_q + \sum_{\{e:q\in\bar e\}}\delta_e - m - \alpha - 1/2\Big| < 1/2 + \Lambda_q/(\Lambda_q+9), \tag{6.7}$$

соответственно; здесь Λ_q — *первое собственное число задачи Дирихле для оператора Бельтрами* — δ *в области* G_q, *которую вырезает на* S^2 *касательный к* $\partial\Omega$ *конус с вершиной* q.

Пусть β — вещественное число. Непосредственно проверяется, что при $\delta_e=\beta$, $\beta_q=(1-T_q)\beta$ (T_q — число ребер, сходящихся в вершине q) имеют место соотношения

$$\|u\|_{V^{m,s}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)}\sim\|r^\beta u\|_{V^{m,s}(\Omega)},\quad \|u\|_{N^{m,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}(\Omega)}\sim\|r^\beta u\|_{N^{m,\alpha}(\Omega)}.$$

Обозначим пространства с нормами из правых частей этих соотношений через $\mathscr{V}_\beta^{m,s}(\Omega)$ и $\mathscr{N}_\beta^{m,\alpha}(\Omega)$ соответственно. Введем обозначения

$$\mu_q=\min\{|\operatorname{Im}\lambda_q|, 1\},\qquad \nu_e=\inf_{\zeta\in e}\sigma_e(\zeta).$$

Если положить $\delta_e=\beta$, $\beta_q=(1-T_q)\beta$ и выбрать число β так, чтобы выполнялись неравенства

$$\max\{-\mu_q - s^{-1}, -\nu_e\} < \beta - m + 2s^{-1} < \min\{1+\mu_q - s^{-1}, \nu_e\} \tag{6.8}$$

для всех $q\in\mathscr{P}$, $e\in\mathscr{E}$, то будут выполняться условия (6.2), (6.3). (Отметим, что указанный интервал для $\beta - m + 2s^{-1}$ непуст в силу теоремы 2.3 и неравенства $\nu_e\geqq 1/2$.) Поэтому справедливо

СЛЕДСТВИЕ 6.4: *Утверждения теоремы* 6.1 *останутся справедливыми, если в ее формулировке пространство* $V^{l,s}_{\vec\beta,\vec\delta}$ *заменить на* $\mathscr{V}_\beta^{l,s}$, *а условия* (6.2), (6.3) — *на* (6.8).

Аналогично проверяется

СЛЕДСТВИЕ 6.5: *Утверждения теоремы 6.2 останутся справедливыми, если в ее формулировке пространства $N^{l,\alpha}_{\vec\beta,\vec\delta}$ заменить на $\mathcal{N}_{\beta}^{l,\alpha}$, а условия* (6.4), (6.5) *— неравенствами*

$$\max\{-\mu_q, -\nu_e\} < \beta - m - \alpha < \min\{1 + \mu_q, \nu_e\}. \tag{6.9}$$

Приведенные результаты позволяют получать информацию о решениях задачи (6.1) и в терминах классических пространств. Например, полагая в следствии 6.5 $m = 1, \beta = 1$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 6.6: *Если $\Omega \in \Lambda^{m,\alpha}$ и $\vec f, h, \vec\varphi$ — гладкие функции в Ω, то вектор скорости принадлежит пространству $C^\alpha(\bar\Omega)$; здесь*

$$\alpha < \min\left\{\min_e \inf_{\zeta\in e} \sigma_e(\zeta), \min_q |\mathrm{Im}\,\lambda_q|, 1\right\}. \tag{6.10}$$

Производные решения допускают оценку

$$\mathrm{grad}_k\, \vec v = O(r^{\alpha-k}), \mathrm{grad}_{k-1}\, p = O(r^{\alpha-k}), \tag{6.11}$$

где $k = 1, 2, \ldots, m$, а r — расстояние до особых точек границы. В частности, при отсутствии конических точек на $\partial\Omega$ правая часть неравенства (6.10) *больше* 1/2.

Если Ω принадлежит только классу Λ^m, то соотношения (6.11) *выполняются при $k = 1, \ldots, m - 1$.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ладыженская, О. А.: Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Изд-во Наука: Москва 1970.

[2] Солонников, В. А.: Об априорных оценках для некоторых краевых задач. ДАН СССР **138** (1961), 781—784.

[3] Солонников, В. А., и В. Е. Щадилов: Об одной краевой задаче для стационарной системы уравнений Навье-Стокса. Труды Мат. ин-та АН СССР **125** (1973), 196—210.

[4] Кондратьев, В. А.: Асимптотика решения уравнений Навье-Стокса в окрестности угловой точки границы. Прикл. матем. и механ. **31**, № 1 (1967), 119—123.

[5] Оганесян, Л. А.: Особенности в углах у решения уравнений Навье-Стокса. Записки научн. семинаров ЛОМИ **27** (1972), 131—144.

[6] Солонников, В. А.: Разрешимость задачи о плоском движении вязкой несжимаемой капиллярной жидкости в незамкнутом сосуде. Препринт ЛОМИ Р-5-77 (1977), 1—19; Изв. АН СССР **43**, № 1 (1979), 203—236.

[7] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: Об асимптотике решений уравнений Навье-Стокса вблизи ребер. ДАН СССР **210**, № 4 (1973), 803—806.

[8] Солонников, В. А.: Разрешимость трехмерной задачи со свободной границей для стационарной системы уравнений Навье-Стокса. Записки научн. семинаров ЛОМИ **84** (1979), 252—285.

[9] Мазья, В. Г., Пламеневский, Б. А., и Л. И. Ступялис: Трехмерная задача об установившемся движении жидкости со свободной поверхностью. В сб.: Дифференциальные уравнения и их приложения, в. **23** (1979), с. 1—156.

[10] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: Задача о движении жидкости со свободной поверхностью в граненом сосуде. ДАН СССР **250**, № 6 (1980), 1315—1317.

[11] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: О первой краевой задаче для уравнений гидродинамики в области с кусочно гладкой границей. В сб.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций **12** (Зап. научн. семин. ЛОМИ, т. **96**). Изд-во Наука: Ленинград 1980, с: 179—186.

[12] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: О свойствах решений трехмерных задач теории упругости и гидродинамики в областях с изолированными особыми точками. В сб.: Динамика сплошной среды, вып. 50 (1981), с. 99—121. Новосибирск.
[13] Марченко, В. А., и Е. Я. Хруслов: Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Изд-во Наукова думка: Киев 1974.
[14] Oleinik, O. A., and G. A. Yosifjian: Boundary value problems for second order elliptic equations in unbounded domains and Saint-Venant's principle. Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa 6 (1977), 269—290.
[15] Иосифьян, Г. А.: О принципе Сен-Венана для течений вязкой несжимаемой жидкости. Усп. матем. наук 34, вып. 4 (1979), 191—192.
[16] Ладыженская, О. А., и В. А. Солонников: О нахождении решений краевых задач для стационарных уравнений Стокса и Навье-Стокса, имеющих неограниченный интеграл Дирихле. В сб.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций 12 (Зап. научн. семин. ЛОМИ, т. 96). Изд-во Наука: Ленинград 1980, с. 117—160.
[17] Кондратьев, В. А.: Краевые задачи для эллиптических уравнений в области с коническими или угловыми точками. Тр. Моск. матем. об-ва 16 (1967), 209—292.
[18] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда-Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе. Math. Nachr. 81 (1978), 25—82.
[19] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: Об эллиптических краевых задачах в области с кусочно гладкой границей. Тр. симпозиума по механике сплошной среды и родственным проблемам анализа, Тбилиси 1971. Изд-во Мецниереба: Тбилиси 1973, с. 171—182.
[20] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: L_p-оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами. Тр. Моск. матем. об-ва 37 (1978), 49—93.
[21] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: Эллиптические краевые задачи на многообразиях с особенностями. Проблемы матем. анализа (Спектральная теория, краевые задачи), вып. 6, Изд-во ЛГУ: Ленинград 1977, с. 85—142.
[22] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: Об асимптотике фундаментальных решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками. Проблемы матем. анализа (Краевые задачи, спектральная теория), вып. 7. Изд-во ЛГУ: Ленинград 1979, с. 100—145.
[23] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: Оценки функции Грина и шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в двугранном угле. Сиб. матем. ж. 19, № 5 (1978), 1065—1083.
[24] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: Шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в областях с рёбрами на границе. В: Дифф. ур-ния с частн. производн. Труды семин. С. Л. Соболева 1978, № 2, с. 69—102.
[25] Солонников, В. А.: Об оценках тензоров Грина для некоторых граничных задач. ДАН СССР 130, № 5 (1960), 988—991.
[26] Солонников, В. А.: О матрицах Грина для эллиптических краевых задач. I: Труды Мат. ин-та АН СССР 110 (1970), 107—145. II: Труды Мат. ин-та АН СССР 116 (1971), 181—216.
[27] Agmon, S.: Maximum theorems for solutions of higher order elliptic equations. Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 77—80.
[28] Шульце, Б. В.: Об априорных оценках в равномерных нормах для сильно эллиптических систем. Сиб. матем. ж. 26, № 2 (1975), 384—394.
[29] Мазья, В. Г., и Б. А. Пламеневский: О принципе максимума для бигармонического уравнения в области с коническими точками. Математика (Изв. вузов) 1981, № 2, с. 52—59.
[30] Стейн, И.: Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. Изд-во Мир: Москва 1973.
[31] Ладыженская, О. А., и В. А. Солонников: О некоторых задачах векторного анализа и обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье-Стокса. Зап. науч. семин. ЛОМИ 59 (1976), 81—116.
[32] Gagliardo, E.: Ulteriori proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili. Ric. Mat. 8 (1959), 24—51.

[33] Nirenberg, L.: On elliptic partial differential equations (Lecture II). Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa (s. III) **13** (1959), 115–162.
[34] Фикера, Г.: Теоремы существования в теории упругости. Изд-во Мир: Москва 1974.
[35] Фикера, Г.: Асимптотическое поведение электрического поля и плотности электрического заряда в окрестности сингулярных точек проводящей поверхности. Успехи мат. наук **30**, вып. **3** (1975), 105–124.
[36] Castellani, Rizzonelli, P.: On the first boundary value problem for the classical theory of elasticity in a three-dimensional domain with a singular boundary. Journ. of Elasticity **3** (1973), 225–259.
[37] Fichera, G.: Mathematical theory of "points effect" in electricity conducting surfaces. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **49** (1979), 19–48.

Manuskripteingang: 18. 12. 1981

VERFASSER:

Проф. д-р Владимир Гилелевич Мазья
Научно-исследовательский институт математики и механики
Ленинградского Государственного Университета им А. А. Жданова
СССР-**Ленинград**, Университетская наб. 7/9

Проф. д-р Борис Алексеевич Пламеневский
Ленинградский электротехнический институт связы им. М. А. Бонч-Бруевича
СССР-**Ленинград**, Мойка 61