Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (4) 1983, S. 361–365

Quasilineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehrdimensionalen Gebieten mit Kegelspitzen

E. Miersemann

Wir untersuchen Regularitätseigenschaften der Lösungen u einer Klasse quasilinearer elliptischer Randwertaufgaben zweiter Ordnung in n-dimensionalen Gebieten mit Kegelspitzen. Wir beweisen: $u \in C^{1,\lambda} \cap H^2$ in einer Umgebung der Spitze.

Исследуется вопрос о регулярности решения u для некоторых квазилинейных эллиптических краевых задач для многомерных областей с коническими точками. Доказывается, что $u \in C^{1,\lambda} \cap H^2$ в окрестности вершины.

We study regularity properties for solutions u of a class of quasilinear elliptic boundary value problems of second order in n-dimensional domains with conic vertices. We prove $u \in C^{1,\lambda} \cap H^2$ near the vertex.

1. Einleitung und Resultate

Das Regularitätsverhalten der Lösungen einer Klasse quasilinearer elliptischer Gleichungen zweiter Ordnung in den Ecken zweidimensionaler Gebiete mit stückweise glattem Rand wurde in [10] untersucht. Mit Hilfe der Barrierenmethode konnte unter einfachen Annahmen gezeigt werden, daß die ersten Ableitungen der Lösung auch in den Ecken einer Hölder-Bedingung genügen, wenn für die entsprechenden Innenwinkel γ gilt $0 < \gamma < \pi$. In dieser Mitteilung behandeln wir mehrdimensionale Aufgaben. Wie schon in [10] benutzen wir eine elementare Barrierefunktion. Azzam [1, 2], Azzam und Kreyszig [3] und Dziuk [4] studierten damit lineare und semilineare Aufgaben.

Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ein beschränktes und einfach zusammenhängendes Gebiet. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N a_i(u_x)\, \varphi_{x_i}\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \qquad (1)$$

$$u = \Phi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Dabei sind $f \in H^{-1}(\Omega)$, $\Phi \in H^1(\Omega)$ gegebene Funktionen, $a(p) = \big(a_1(p), \ldots, a_N(p)\big)$, $p = (p_1, \ldots, p_N)$, ist ein stark monotones und koerzitives C^1-Vektorfeld.

Das Vektorfeld $a(p)$ heißt *stark monoton und koerzitiv von der Klasse* C^1, wenn gilt:

$$a_i(p) \in C^1(\mathbf{R}^N). \qquad (2)$$

$$\big(a_i(p) - a_i(q)\big)\,(p_i - q_i) \geqq \nu|p - q|^2 \quad \text{für alle} \qquad (3)$$

$p, q \in \mathbf{R}^N$ mit einer von p, q unabhängigen positiven Konstanten ν. Es ist $|p| = (p_1^2 + \cdots + p_N^2)^{1/2}$.

$$|a_{ij}(p)| \leqq M \quad \text{für alle} \quad p \in \mathbf{R}^N (M < \infty \quad \text{und unabhängig von } p), \quad \text{wobei}$$
$$a_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial p_j} \quad \text{gesetzt ist.} \tag{4}$$

Für diese Definition vergleiche man etwa [7: Chapter 3.4]. Aus (2)—(4) folgt (s. z. B. [7: S. 100]):

$$a_{ij}(p)\,\xi_i\xi_j \geqq \nu|\xi|^2 \quad \text{für alle} \quad p, \xi \in \mathbf{R}^N. \tag{5}$$

Über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

Die bekannten Sobolewschen Banachräume, die als Vervollständigung von $C^m(\Omega)$ in der üblichen Sobolew-Norm definiert werden, bezeichnen wir mit $H_s^m(\Omega)$ ($s > 1$; $m = 1, 2$). Wir setzen $H^m = H_2^m$.

Die Aufgabe (1) hat unter den obigen Annahmen eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in H^1(\Omega)$ (s. z. B. [6]).

Das Verhalten der Lösungen quasilinearer elliptischer Gleichungen zweiter Ordnung am Rand von zwei -und dreidimensionalen nichtglatten Gebieten wurde auch von Tolksdorf [13, 14] untersucht. Für zweidimensionale Gebiete studiert Tolksdorf den Fall, daß die Innenwinkel in den Ecken größer als π sind. Für eine Klasse von Aufgaben konnte gezeigt werden, daß die Lösungen in den Ecken einer Hölder-Bedingung genügen. Außerdem werden in [13, 14] Abschätzungen für den Hölder-Exponenten angegeben. Für lineare elliptische Differentialgleichungen in Gebieten mit nichtglattem Rand findet man bei Grisvard [5] zahlreiche Literaturhinweise.

Das Gebiet Ω habe im Ursprung des x-Koordinatensystems eine Spitze. Der Rand sei außer in 0 glatt in einer Umgebung des Ursprungs. Es wird gesetzt:

$$\Omega_\varrho = \Omega \cap B_\varrho(0), \qquad 0 < \varrho \leqq \varrho_1, \qquad \varrho_1 > 0 \quad \text{genügend klein.}$$

Dabei ist $B_\varrho(0) = \{x \mid |x| < \varrho\}$. Wir nehmen gleich an, daß $\partial\Omega \cap B_\varrho(0)$ in einem Kegelmantel des folgenden Typs enthalten ist:

$$\begin{aligned} &x_N = h(x'), \qquad x' = (x_1, \ldots, x_{N-1}), \quad \text{mit} \\ &h \in C^2(\mathbf{R}^{N-1} \setminus \{0\}), \qquad h(tx') = th(x') \quad \text{für alle} \quad t \geqq 0 \\ &\text{und} \quad h(x') \geqq \alpha|x'|, \qquad \alpha > 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Dann ist

$$\Omega_\varrho = \{x \mid x_N > h(x'), \quad |x| < \varrho\}.$$

Im allgemeinen Fall muß man das Eckgebiet mit einem Tangentialkegel der Form (6) auf diesen abbilden. Man vergleiche dazu bei Kondrat'jev [9].

Es sei $|D^2\Phi| = \sum_{i,j=1}^{N} |\Phi_{x_ix_j}|$. Unter den Voraussetzungen (2)—(4), (6) und

$$\Phi \in H_s^2(\Omega_\varrho) \quad \text{mit} \quad s > N, \tag{7}$$
$$|f| \leqq c\,|x|^{\varkappa-1} \quad \text{und} \quad |D^2\Phi| \leqq c\,|x|^{\varkappa-1} \qquad (\varkappa > 0) \quad \text{für} \quad x \in \Omega_\varrho, \tag{8}$$

hat man das folgende Resultat.

Theorem: *Für die Lösung u von* (1) *gilt* $u \in H^2(\Omega_{\varrho/2}) \cap C^{1,\lambda}(\bar{\Omega}_{\varrho/2})$, $0 < \lambda < 1$.

Bemerkungen: 1. Das Theorem bleibt richtig, wenn im dreidimensionalen Fall der Kegel Kanten S_l enthält, deren Innenwinkel γ_l der Bedingung $0 < \gamma_l < \pi$ genügen. Darüber hinaus müssen Ungleichungen des Typs (8) längs der Kanten angenommen werden. Man vergleiche hierzu für den linearen Fall Azzam [2].

2. Mit Hilfe des obigen Satzes läßt sich die Existenz von Lösungen $u \in C^{1,\lambda}(\bar{\Omega})$ des mehrdimensionalen nichtparametrischen Minimalflächenproblems in gewissen (zum Beispiel konvexen) Gebieten mit Ecken und Kanten beweisen. Man vergleiche dazu [10, 11] für den zweidimensionalen Fall.

2. Beweis des Theorems

Wir führen Kugelkoordinaten ein: $x_k = r\xi_k \sin \theta$ für $1 \leqq k \leqq N-1$ und $x_N = r \times \cos \theta$, $N \geqq 3$. Dabei ist

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sin \varphi_{N-2} \dots \sin \varphi_2 \sin \varphi_1, \\ \xi_2 &= \sin \varphi_{N-2} \dots \sin \varphi_2 \cos \varphi_1, \\ \xi_3 &= \sin \varphi_{N-2} \dots \sin \varphi_3 \cos \varphi_2, \\ &\vdots \\ \xi_{N-2} &= \sin \varphi_{N-2} \cos \varphi_{N-3}, \\ \xi_{N-1} &= \cos \varphi_{N-2}, \end{aligned}$$

und $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \varphi_1 \leqq 2\pi$, $0 \leqq \varphi_i < \pi$ für $2 \leqq i \leqq N-2$. Wegen (6) gilt für $\theta_0 = \max \{\theta \mid x \in \Omega_\varrho\}$ die Ungleichung

$$0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Für die Funktion

$$W = Ar^{1+\mu} \cos \lambda\theta + \Phi_{x_i}(0)\, x_i + \Phi(0)$$

mit $A = const > 0$, $0 < \mu < 1$ und $\lambda > 1$ hat man $W > 0$ in $\bar{\Omega}_\varrho \setminus \{0\}$ aufgrund von (9) und (7), wenn $\lambda - 1$ und μ hinreichend klein sind. Wir setzen

$$LW = a_{ij}(W_x)\, W_{x_i x_j}.$$

Dabei können wir $a_{ij} = a_{ji}$ annehmen (sonst ersetzt man a_{ij} durch $1/2(a_{ij} + a_{ji})$).

Lemma: *Es gibt ein $d > 0$, so daß für jedes λ mit $0 < \lambda - 1 \leqq d$ positive Zahlen $\eta(\lambda)$ und $\mu_0(\lambda)$ existieren mit $LW \leqq -A\eta r^{\mu-1}$ für alle $0 < \mu < \mu_0$.*

Beweis: Nach einer elementaren Rechnung erhalten wir

$$W_{x_i x_j} = Ar^{\mu-1} V_{ij}, \qquad V_{ij} = V_{ji}.$$

Es ist

$$V_{ij} = \xi_i \xi_j \cos^2 \theta \cos \lambda\theta - (\lambda \cot \theta \sin \lambda\theta - \cos \lambda\theta)(\delta_{ij} - \xi_i \xi_j) - \lambda^2 \xi_i \xi_j \cos^2 \theta \cos \lambda\theta$$
$$+ R_{ij} \quad \text{für} \quad 1 \leqq i, j \leqq N-1,$$

$$V_{iN} = -\xi_i \sin \theta \cos \theta \cos \lambda\theta + \lambda^2 \xi_i \sin \theta \cos \theta \cos \lambda\theta + R_{iN} \quad \text{für} \quad 1 \leqq i \leqq N-1$$

und

$$V_{NN} = \sin^2 \theta \cos \lambda\theta - \lambda^2 \sin^2 \theta \cos \lambda\theta + R_{NN}.$$

Für die Reste R_{ij} gilt $R_{ij} = R_{ji}$ und

$$|R_{ij}| \leqq \mu\lambda + \frac{1}{2}(1 + \delta_{ij})(2\mu + \mu^2), \qquad 1 \leqq i, \quad j \leqq N.$$

Wir setzen

$$\lambda^2 = (1 + \tau)^2, \qquad \tau > 0; \qquad \eta_i = \xi_i \cos\theta \quad \text{für} \quad 1 \leqq i \leqq N - 1,$$

$$\eta_N = -\sin\theta.$$

Dann ist

$$a_{ij}V_{ij} = -2\tau \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\eta_i\eta_j \cos\lambda\theta - (\lambda\cot\theta\sin\lambda\theta - \cos\lambda\theta)\sum_{i,j=1}^{N-1} a_{ij}(\delta_{ij} - \xi_i\xi_j) + Q,$$

$$|Q| \leqq \frac{1}{2} MN(N + 1)(\tau^2 + 2\mu + \mu^2) + MN^2\lambda\mu.$$

Für $0 < \tau \leqq \tau_0$, τ_0 hinreichend klein, ist bei $x \in \Omega_\varrho$ der Faktor von der zweiten Summe nicht negativ, und man hat wegen (9)

$$\min_{\substack{0 \leqq \tau \leqq \tau_0 \\ 0 \leqq \theta \leqq \theta_0}} \cos(1 + \tau)\theta \geqq c_0 > 0.$$

Wenn wir $c_1 = \frac{1}{2} MN(N + 1)$ und $c_2 = \frac{3}{2} MN(N + 1) + MN^2(1 + \tau_0)$ setzen, dann folgt aus (5) die Ungleichung

$$a_{ij}V_{ij} \leqq -2\nu c_0\tau + c_1\tau^2 + c_2\mu$$

für alle $0 < \tau \leqq \tau_0$ und für alle $0 \leqq \mu \leqq 1$. Dabei ist zu beachten, daß aufgrund von (5) gilt

$$a_{ij}(\delta_{ij} - \xi_i\xi_j) = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i - a_{ij}\xi_i\xi_j \geqq \sum_{i=1}^{N-2} \lambda_i \geqq (N - 2)\,\nu.$$

Die Zahlen λ_i bezeichnen hier die Eigenwerte der Matrix $[a_{ij}]$, $1 \leqq i, j \leqq N - 1$. Der größte Eigenwert ist λ_{N-1}. Wir erhalten schließlich

$$a_{ij}V_{ij} \leqq -\nu c_0\tau + c_2\mu$$

für alle $0 \leqq \mu \leqq 1$ und für alle $0 < \tau \leqq \min\left(\tau_0, \frac{\nu c_0}{c_1}\right)$ ∎

Bemerkung: K. Miller [12] studiert allgemeinere Ansätze für W. Für unser Problem kommt man mit dem obigen speziellen Ansatz aus. Dadurch vereinfachen sich die Rechnungen wesentlich und die Abhängigkeit der Konstanten η, μ von λ läßt sich genauer charakterisieren.

Das Theorem folgt dann wie im zweidimensionalen Fall [10: Satz 2.4]. Dabei wird wesentlich eine a priori-Abschätzung für quasilineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung für reguläre Gebiete eingesetzt. Mit Hilfe eines Lokalisierungsverfahrens, man vergleiche bei Kondrat'jev [8], kann man die Kegelspitze ausschöpfen. Das obige Lemma garantiert dann, daß die Lösung u auch im Abschluß einer Umgebung der Spitze zur Klasse $C^{1,\alpha}$ gehört, $0 < \alpha < 1$.

LITERATUR

[1] Azzam, A.: Behaviour of solutions of Dirichlet problem for elliptic equations at a corner. Indian J. Pure Appl. Math. **10** (1979), 1453—1459.
[2] Azzam, A.: On Dirichlet's problem for elliptic equations in sectionally smooth n-dimensional domains. SIAM J. Math. Anal. **11** (1980), 248—253.
[3] Azzam, A., und E. Kreyszig: Über das gemischte Randwertproblem für elliptische Gleichungen in n-dimensionalen Gebieten mit Kanten. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. **5** (1980), 341—346.
[4] Dziuk, G.: Das Verhalten von Lösungen semilinearer elliptischer Systeme an Ecken eines Gebietes. Math. Z. **159** (1978), 89—100.
[5] Grisvard, P.: Behaviour of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain. Numerical Sol. of Part. Diff. Equ. III, New York 1976, pp. 207—274.
[6] Hartman, P., and G. Stampacchia: On some nonlinear elliptic differential functional equations. Acta Math. **115** (1966), 153—188.
[7] Kinderlehrer, D., and G. Stampacchia: An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. New York 1980.
[8] Кондратьев, В. А.: Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. Труды Моск. матем. о-ва **16** (1967), 208—292.
[9] Кондратьев, В. А.: Краевые задачи для параболических уравнений в замкнутых областях. Труды Моск. матем. о-ва **15** (1966), 400—451.
[10] Miersemann, E.: Zur Regularität verallgemeinerter Lösungen von quasilinearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Gebieten mit Ecken. Z. Anal. Anw. **1** (1982), 59—71.
[11] Miersemann, E.: Zur Gleichung der Fläche mit gegebener mittlerer Krümmung in zweidimensionalen eckigen Gebieten. Math. Nachr. **110** (1983), 231—241.
[12] Miller, K.: Extremal barriers on cones with Phragmén-Lindelöf theorems and other applications. Ann. Mat. Pura Appl. **90** (1971), 297—329.
[13] Tolksdorf, P.: On quasilinear boundary value problems in domains with corners. Nonlinear Anal. **5** (1981), 721—735.
[14] Tolksdorf, P.: On the behaviour near the boundary of solutions of quasilinear equations. Analysis (to appear).

Manuskripteingang: 18. 11. 1981

VERFASSER:

Doz. Dr. Erich Miersemann
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität
DDR-7010 **Leipzig,** Karl-Marx-Platz