Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (4) 1983, S. 367–373

Задача о малости операторных блоков в пространствах L_p

Е. М. Семенов и Б. С. Цирельсон

Für ein gegebenes $p \in (1, \infty)$ wird in der Arbeit ein Operator A konstruiert, der in L_p beschränkt ist und für den $\|Q_eAQ_f\|_{L_p \to L_p} \geqq 1$ für beliebige Mengen $e, f \subset [0, 1]$ mit positivem Maß gilt. Hierbei ist Q_e der Operator der Multiplikation mit der charakteristischen Funktion der Menge e.

Для заданного $p \in (1, \infty)$ в работе построен такой оператор A, что A ограничен в L_p и $\|Q_eAQ_f\|_{L_p \to L_p} \geqq 1$ для любых множеств $e, f \subset [0, 1]$ положительной меры, где Q_e — оператор умножения на характеристическую функцию множества e.

For a given $p \in (1, \infty)$ the paper deals with the construction of an operator A, which is bounded in L_p, and for which $\|Q_eAQ_f\|_{L_p \to L_p} \geqq 1$ holds for any sets $e, f \subset [0, 1]$ with positive measure. Here, Q_e denotes the multiplication operator with the characteristic function of the set e.

Изучая проблему стягиваемости линейной группы банахова пространства [1], Б. С. Митягин пришел к следующей задаче. Пусть $1 \leqq p \leqq \infty$, e — измеримое подмножество $[0, 1]$ и Q_e — опреатор умножения на $\varkappa_e$ — характеристическую функцию e. Бидет ли

$$\inf_{\mathrm{m}e, \mathrm{m}f > 0} \|Q_eAQ_f\|_{L_p \to L_p} = 0 \tag{1}$$

для любого линейного ограниченного в L_p оператора A? В [2] (1) было доказано для L_1 и для C. Затем Ч. Маккарти и Б. С. Митягин (см. [1. предл. 4]) построили простой пример изометричного в L_2 оператора A, для которого $\|Q_eAQ_f\|_{L_2 \to L_2} = 1$ для всех $e, f \subset [0, 1]$, $\mathrm{m}e$, $\mathrm{m}f > 0$. Случай, когда $p \neq 1, 2, \infty$ остался неизученным. Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1: *Пусть $1 < p < \infty$. Существует такой ограниченный в L_p оператор A, что*

$$\|Q_eAQ_f\|_{L_p \to L_p} \geqq 1$$

для любых $e, f \subset [0, 1]$, $\mathrm{m}e, \mathrm{m}f > 0$.

Для построения оператора A нам нужно будет изучить некоторые свойства системы Хаара. Напомним, что *системой Хаара* называется ортогональная система функций

$$\chi_0^0(t) \equiv 1, \quad \chi_n^k(t) = \begin{cases} 1, & \dfrac{k-1}{2^n} < t < \dfrac{k-1/2}{2^n} \\ -1, & \dfrac{k-1/2}{2^n} < t < \dfrac{k}{2^n} \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0, 1] \end{cases} \quad \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \ldots; \\ k = 1, 2, \ldots, 2^n \end{pmatrix}$$

на [0, 1]. Хорошо известно, что система Хаара образует базис в L_1 и безусловный базис в $L_p(1 < p < \infty)$. Через $c_{n,k} = c_{n,k}(x)$ мы будем обозначать коэффициенты Фурье функции $x \in L_1$ по системе Хаара. Обозначим $\Delta_n^k = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2^n)$.

В работе [3] изучался вопрос о поведении коэффициентов Фурье по системе Хаара функций из пространств L_p $(1 \leqq p \leqq \infty)$. В следующей лемме этот результат усиливается.

Лемма 1: *Если* $1 < q < s \leqq 2$, *то существует такая константа* $M(q, s)$, *что*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\sum_{k=1}^{2^n} |c_{n,k}|^s\right)^{q/s}\right)^{1/q} \leqq M(q, s) \|x\|_{L_q}. \tag{2}$$

Доказательство: Рассмотрим квазилинейный оператор

$$V_s x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{2^n} |c_{n,k}|^s\right)^{1/s} \varkappa_{(2^{-n}, 2^{-n+1})}(t)$$

и покажем, что он имеет слабый тип (r, r) для любого $r \in [1, s]$. Пусть $D = \left\{n: \sum_{k=1}^{2^n} |c_{n,k}|^s \geqq 1\right\}$ и m — минимальный элемент из D. Тогда

$$\mathrm{m}\{t: V_s x(t) \geqq 1\} = \sum_{n \in D} 2^{-n} \leqq 2^{-m+1}. \tag{3}$$

Система Хаара обладает свойством ортогональности в L_p $(1 \leqq p \leqq \infty)$ (см. [4: 2.c.)], поэтому

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{2^m} c_{m,k}\chi_m^k(t)\right|^r dt \leqq \int_0^1 \left|\sum_{n=m}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k}\chi_n^k(t)\right|^r dt \leqq 2^r \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k}\chi_n^k(t)\right|^r dt. \tag{4}$$

Так как

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{2^m} c_{m,k}\chi_m^k(t)\right|^r dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{2^m} |c_{m,k}|^r \varkappa_{\Delta_n^k}(t)\, dt = \sum_{k=1}^{2^m} |c_{m,k}|^r 2^{-m}$$

$$\geqq \sum_{k=1}^{2^m} |c_{m,k}|^s 2^{-m} \geqq 2^{-m}, \tag{5}$$

то из (3)—(5) получаем

$$\mathrm{m}\{t: V_s x(t) \geqq 1\} \leqq 2^{r+1} \int_0^1 \left|\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k}\chi_n^k(t)\right|^r dt.$$

Отсюда для любого $\tau > 0$

$$\tau \mathrm{m}^{1/r}\{t: V_s x(t) \geqq \tau\} \leqq 2^{1+1/r} \left\|\sum_{n,k} c_{n,k}\chi_n^k\right\|_{L_p}.$$

В силу интерполяционной теоремы Марцинкевича оператор V_s ограничен из L_q в L_q для любого $q \in (1, s)$. Это приводит к (2) ∎

Используя стандартные соображения двойственности (см. [5; XII, 2]), получаем

Следствие 1: *Пусть* $2 \leqq s < p < \infty$. *Существует такая константа* $N(p, s)$, *что*

$$\|x\|_{L_p} \leqq N(p, s) \left(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\sum_{k=1}^{2^n} |c_{n,k}|^s \right)^{p/s} \right)^{1/p}. \tag{6}$$

Заметим, оператор V_s неограничен в L_1 и L_s $(s < 2)$. Действительно, если

$$x_N(t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{2^n} \chi_n{}^k(t),$$

то

$$\|V_s x_N\|_{L_s} = \left\| \sum_{n=1}^{N} 2^{n/s} \varkappa_{(2^{-n}, 2^{-n+1})} \right\|_{L_s} = \left(\sum_{n=1}^{N} 2^n 2^{-n} \right)^{1/s} = N^{1/s}.$$

Функции $r_n(t) = \sum_{k=1}^{2^n} \chi_n{}^k(t)$ ортонормированы, следовательно $\|x_N\|_{L_s} \leqq \left\| \sum_{n=1}^{N} r_n \right\|_{L_2} = \sqrt{N}$. Поэтому неравенство $\|V_s x\|_{L_s} \leqq C \|x\|_{L_s}$ невозможно.

Если $y_N(t) = \sum_{n=1}^{N} 2^n \chi_n{}^1(t)$, то $\|y_N\|_{L_1} < 2$ для любого натурального N. Так как

$$\|V_s y_N\|_{L_1} = \left\| \sum_{n=1}^{N} 2^n \varkappa_{(2^{-n}, 2^{-n+1})} \right\|_{L_1} = N,$$

то оператор V_s неограничен в L_1.

Таким образом лемма 1 перестает быть справедливой при $q = 1$ и $q = s < 2$. С другой стороны она сохраняет силу при $q = s = 2$.

Пусть $j, n = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots, 2^n$. Построим такую последовательность $m(n, k, j)$, что для любых различных наборов (n, k, j) $m(n, k, j)$ принимает различные значения и $m(n, k, j) \geqq n$. Определим систему функций

$$\varphi_{n,k,j}(t) = \varkappa_{\Delta_n^k}(t)\, r_{m(n,k,j)}(t),$$

где $r_m(t)$ — *функции Радемахера*.

Лемма 2: *Пусть* $2 \leqq p \leqq \infty$. *Тогда*

$$\left(\sum_{n,k} 2^{-n} \left(\sum_{j} \lambda_{n,k,j}^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \leqq \left\| \sum_{n,k,j} \lambda_{n,k,j} \varphi_{n,k,j} \right\|_{L_p}. \tag{7}$$

Доказательство: Функции Радемахера ортогональны. Поэтому

$$\left\| \sum_{n,k,j} \lambda_{n,k,j} \varphi_{n,k,j} \right\|_{L_2} = \left(\sum_{n,k} 2^{-n} \sum_{j} \lambda_{n,k,j}^2 \right)^{1/2}$$

и

$$\left\| \sum_{n,k,j} \lambda_{n,k,j} \varphi_{n,k,j} \right\|_{L_1} \leqq \sum_{n,k} \left\| \sum_{j} \lambda_{n,k,j} \varphi_{n,k,j} \right\|_{L_1} \leqq \sum_{n,k} 2^{-n} \left(\sum_{j} \lambda_{n,k,j}^2 \right)^{1/2}.$$

Это означает, что оператор $J: \{\lambda_{n,k,j}\} \to \sum_{n,k,j} \lambda_{n,k,j} \varphi_{n,k,j}$ имеет единичную норму как оператор из $l_2(2^{-n}, l_2)$ в L_2 и из $l_1(2^{-n}, l_2)$ в L_1. Применяя к этим двум парам комплексный метод Кальдерона (см. [7; I, 18.1]), получаем, что

$$\|J\|_{l_q(2^{-n}, l_2) \to L_q} \leqq 1$$

для любого $q \in [1, 2]$. Таким образом

$$\left\| \sum_{n,k,j} \lambda_{n,k,j} \varphi_{n,k,j} \right\|_{L_q} \leqq \left(\sum_{n,k} 2^{-n} \left(\sum_{j} \lambda_{n,k,j}^2 \right)^{q/2} \right)^{1/q}.$$

Неравенство (7) является двойственным к полученному ∎

Лемма 3: *Пусть заданы такие последовательности чисел* $\varrho_n, s_{n,j}$ $(1 \leqq j \leqq \varrho_n)$, *что*

$$1 \leqq s_{n,1} < s_{n,2} < \cdots < s_{n,\varrho_n} \leqq 2^n.$$

Если

$$u_n{}^j(t) = \sum_{k=s_{n,j}+1}^{s_{n,j+1}} \chi_n{}^k(t)$$

и $1 < p < \infty$, *то подпространство* $[u_n{}^j]_p$ *дополняемо в* L_p.

Доказательство: Определим оператор R:

$$R\left(\sum_{n,k} c_{n,k}\chi_n{}^k\right) = \sum_n \sum_{j=1}^{\varrho_n-1} \frac{1}{s_{n,j+1} - s_{n,j}} \left(\sum_{k=s_{n,j}+1}^{s_{n,j+1}} c_{n,k}\right) u_n{}^j.$$

Ясно, что $Ru_n{}^j = u_n{}^j$ для любых n, j. Поэтому для доказательства дополняемости $[u_n{}^j]_p$ в L_p достаточно проверить ограниченность R в L_p.

Введем обозначения:

$$x(t) = \sum_{n,k} c_{n,k}\chi_n{}^k(t) \quad \text{и} \quad d_{n,j} = \frac{1}{s_{n,j+1} - s_{n,j}} \sum_{k=s_{n,j}+1}^{s_{n,j+1}} c_{n,k}.$$

Система Хаара и, следовательно, ситема $\{u_n{}^j\}$ — безусловные базисные последовательности в L_p. Поэтому в силу неравенства Хинчина

$$\left\|\sum_{n,k} c_{n,k}\chi_n{}^k\right\|_{L_p} \approx \left\|\left(\sum (c_{n,k}\,\chi_n{}^k)^2\right)^{1/2}\right\|_{L_p} = \left\|\left(\sum_{n,k} c_{n,k}^2 \varkappa_{\Delta_n{}^k}\right)^{1/2}\right\|_{L_p}, \tag{8}$$

$$\left\|\sum_{n,j} d_{n,j}u_n{}^j\right\|_{L_p} \approx \left\|\left(\sum_{n,j} (d_{n,j}u_n{}^j)^2\right)^{1/2}\right\|_{L_p} = \left\|\left(\sum_{n,j} d_{n,j}^2 \sum_{k=s_{n,j}+1}^{s_{n,j+1}} \varkappa_{\Delta_n{}^k}\right)^{1/2}\right\|_{L_p}. \tag{9}$$

Здесь знак эквивалентности $\approx$ означает двусторонние неравенства с константами, зависящими только от p.

Если $x(t)$ — суммируемая функция, то *максимальной функцией* называют функцию

$$Mx(t) = \sup \frac{1}{|\Delta|} \int_\Delta |x(s)|\, ds,$$

где supremum берется по всевозможным интервалам, содержащим точку t. Ясно, что

$$|d_{n,j}u_n{}^j(t)| \leqq M\left(\sum_{k=s_{n,j}+1}^{s_{n,j+1}} c_{n,k}\chi_n{}^k\right)(t)$$

для любых n, j. Поэтому из (9) вытекает неравенство

$$\|Rx\|_{L_p} \leqq C_1 \left\|\left(\sum_{n,j} (d_{n,j}\chi_n{}^j)^2\right)^{1/2}\right\|_{L_p} \leqq C_1 \left\|\left(\sum_{n,j}\left(M\left(\sum_{k=s_{n,j}+1}^{s_{n,j+1}} c_{n,k}\chi_n{}^k\right)\right)^2\right)^{1/2}\right\|_{L_p}.$$

Для оценки правой части последнего неравенства применим неравенство Ч. Феффермана-Е. Стейна. Если $\left(\sum_{n=1}^\infty v_n{}^2(t)\right)^{1/2} \in L_p$ $(1 < p < \infty)$, то

$$\left\|\left(\sum_{n=1}^\infty (Mv_n)^2\right)^{1/2}\right\|_{L_p} \leqq C_2 \left\|\left(\sum_{n=1}^\infty v_n{}^2\right)^{1/2}\right\|_{L_p},$$

где C_2 зависит только от p [8]. Таким образом

$$\|Rx\|_{L_p} \leqq C_1C_2 \left\|\left(\sum_{n,j}\left(\sum_{k=s_{n,j}+1}^{s_{n,j+1}} c_{n,k}\chi_n{}^k\right)^2\right)^{1/2}\right\|_{L_p} = C_1C_2\left\|\left(\sum_{n,k}(c_{n,k}\chi_n{}^k)^2\right)^{1/2}\right\|_{L_p}.$$

Применяя эквивалентность (8), получаем $\|Rx\|_{L_p} \leqq C_3\,\|x\|_{L_p}$ ∎

Так как

$$\varkappa_{\Delta_n{}^k}(t)\,r_m(t) = \sum_{j=2^{n-m}(k-1)+1}^{2^{n-m}k} \chi_m{}^j(t),$$

то функции $\varphi_{n,k,j}(t)$ удовлетворяют условиям леммы 3. Поэтому справедливо

Следствие 2: *Если* $1 < p < \infty$, *то* $[\varphi_{n,k,j}]_p$ *дополняемо в* L_p.

Доказательство теоремы 1: Предположим вначале, что $p > 2$. Обозначим

$$\bar\varphi_{n,k,j}(t) = 2^{n/p}\varphi_{n,k,j}(t), \qquad \bar\chi_n{}^k(t) = 2^{n/p}\chi_n{}^k(t).$$

Ясно, что $\|\bar\varphi_{n,k,j}\|_{L_p} = \|\bar\chi_n{}^k\|_{L_p} = 1$. Определим линейный оператор T из $[\varphi_{n,k,j}]_p$ в L_p:

$$T\bar\varphi_{n,k,j} = \begin{cases}\bar\chi^j_{2^n+k}, & 1 \leqq j \leqq 2^{2^n+k},\\ 0, & j > 2^{2^n+k}.\end{cases}$$

В силу (6) при $s = 2$ и (7)

$$\left\|\sum_{n,k,j}\lambda_{n,k,j}\bar\chi^j_{2^n+k}\right\|_{L_p} \leqq N(p,2)\left(\sum_{n,k}\left(\sum_j \lambda^2_{n,k,j}\right)^{p/2}\right)^{1/p},$$

$$\left(\sum_{n,k}\left(\sum_j \lambda^2_{n,k,j}\right)^{p/2}\right)^{1/p} \leqq \left\|\sum_{n,k,j}\lambda_{n,k,j}\bar\varphi_{n,k,j}\right\|_{L_p}.$$

Полученные неравенства означают ограниченность T из $[\varphi_{n,k,j}]_p$ в L_p и его норма не превосходит $N(p, 2)$.

Если обозначить через R проектор из L_p на $[\varphi_{n,k,j}]_p$, существование которого доказано в следствии 2, то оператор $A = TR$ ограничен в L_p. Покажем, что он удовлетворяет условиям теоремы 1.

Пусть e и f измеримые подмножества из $[0, 1]$ положительной меры. Как известно, почти каждая точка измеримого множества является его точкой плотности. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие индексы n, k, j, что $1 \leqq k \leqq 2^n$, $1 \leqq j \leqq 2^{2^n+k}$,

$$\mathrm{m}(f\cap\Delta_n{}^k) > 2^{-n}(1-\varepsilon), \qquad \mathrm{m}(e\cap\Delta^j_{2^n+k}) > 2^{-(2^n+k)}(1-\varepsilon).$$

Тогда $Q_f\bar\varphi_{n,k,j} = \bar\varphi_{n,k,j} + \xi$, где $\xi(t)$ принимает значения $0, \pm 2^{n/p}$ и кроме того $\mathrm{m}\{(t\colon |\xi(t)| = 2^{n/p}\} < \varepsilon 2^{-n}$. Отсюда

$$AQ_f\bar\varphi_{n,k,j} = A(\bar\varphi_{n,k,j}+\xi) = \bar\chi^j_{2^n+k} + A\xi \quad\text{и}\quad Q_eAQ_f\bar\varphi_{n,k,j} = \bar\chi^j_{2^n+k} + \varkappa_eA\xi + \eta,$$

где $\eta(t)$ принимает значения

$$0, \pm 2^{(2^n+k)/p} \quad\text{и}\quad \mathrm{m}\{t\colon |\eta(t)| = 2^{(2^n+k)/p}\} < \varepsilon 2^{-(2^n+k)}.$$

Так как

$$\|Q_eAQ_f\bar\varphi_{n,k,j}\|_{L_p} \geqq \|\bar\chi^j_{2^n+k}\|_{L_p} - \|A\xi\|_{L_p} - \|\eta\|_{L_p} \geqq 1 - (\|A\|_{L_p\to L_p} + 1)\,\varepsilon^{1/p},$$

то в силу произвольности $\varepsilon > 0$

$$\|Q_eAQ_f\|_{L_p\to L_p} \geqq 1.$$

Таким образом теорема 1 доказана для $p > 2$. Если же $1 < p < 2$, то нужными свойствами обладает оператор A^*, построенный по числу $p' > 2$. Теорема 1 полностью доказана ∎

Простроенный оператор A зависит от p. Нетрудно проверить, что A неограничен в L_r, если $r > p > 2$. С другой стороны A есть предел конечномерных операторов в L_r для $2 \leqq r \leqq p$ и поэтому

$$\lim_{\mathrm{m}e, \mathrm{m}f \to 0} \|Q_e A Q_f\|_{L_r \to L_r} = 0.$$

Авторам не удалось выяснить, существует ли для какой-либо пары $p_1 \neq p_2$ оператор, ограниченный в L_p и удовлетворяющий условию

$$\|Q_e A Q_f\|_{L_p \to L_p} \geqq 1 \qquad \forall e, f \subset [0, 1], \mathrm{m}e, \mathrm{m}f > 0$$

для всех $p \in [p_1, p_2]$. В этом направлении удалось получить более слабый результат. Справедлива

Теорема 2: *Существет такой оператор B, что B ограничен в каждом L_p* $\times$ $(1 < p < \infty)$ *и*

$$\|Q_{(\alpha,\beta)} B Q_{(\gamma,\delta)}\|_{L_p \to L_p} \geqq 1$$

для любых невырожденных интервалов (α, β), $(\gamma, \delta) \subset [0, 1]$ *и любого* $p \in (1, \infty)$.

Доказательство: Для каждого $n \geqq 3$ найдем пару таких чисел $1 \leqq i_n$, $j_n \leqq 2^n$, что множество точек $\{(i_n 2^{-n}, j_n 2^{-n})\}$ плотно в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$. Оператор B определим на функциях Хаара следующим образом:

$$B\chi_n{}^k = \begin{cases} \chi_n{}^{j_n}, & k = i_n, \\ \chi_n{}^{i_n}, & k = j_n, \\ \chi_n{}^k, & k \neq i_n, j_n. \end{cases}$$

В силу [9] оператор B есть изоморфизм L_p на себя.

Если последовательность точек $(i_{n_m} 2^{-n_m}, j_{n_m} 2^{-n_m})$ сходится к внутренней точке прямоугольника $(\gamma, \delta) \times (\alpha, \beta)$, то для достаточно больших номеров m

$$Q_{(\alpha,\beta)} B Q_{(\gamma,\delta)} \chi_{n_m}^{i_{n_m}} = \chi_{n_m}^{j_{n_m}}.$$

Поэтому $\|Q_{(\alpha,\beta)} B Q_{(\gamma,\delta)}\|_{L_p \to L_p} \geqq 1$ ∎

Для оператора B, построенного в теореме 2, найдутся такие множества e, f положительной меры, что $Q_e B Q_f$ есть нулевой оператор. Достаточно заметить, что множество

$$g = \bigcup_{B\chi_n{}^k \neq \chi_n{}^k} \operatorname{supp} \chi_n{}^k = \bigcup_{n=3}^{\infty} (\Delta_n{}^{i_n} \cup \Delta_n{}^{j_n})$$

имеет меру $\leqq \frac{1}{2}$. Сужение B на дополнение cg есть тождественный оператор. Поэтому если $e, f \subset cg$, $e \cap f = \emptyset$, $\mathrm{m}e, \mathrm{m}f > 0$, то $Q_e B Q_f = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Митягин, Б. С.: Гомотопическая структура линейной группы банахова пространства Успехи мат. наук 25, 5 (1970), 63—106.
[2] Edelstein, I., Mitjagin, B., and E. Semenov: The linear groups of L^1 and C are contractible. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. 18, 1 (1970), 27—33.
[3] Ульянов, П. Л.: О рядах по системе Хаара. Мат. сборник 63, 3 (1964), 356—391.
[4] Lindenstrauss, J., and L. Tzafriri: Classical Banach Spaces II. Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1979.
[5] Зигмунд, А.: Тригонометрические ряды, Т. II. Москва 1965.
[6] Lindenstrauss, J., and L. Tzafriri: Classical Banach Spaces I. Springer-Verlag: Berlin—Heidelberg—New York 1977.
[7] Triebel, H.: Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. Akademie-Verlag: Berlin 1978.
[8] Fefferman, C., and E. M. Stein: Some maximal inequalities. Amer. J. Math. 93 (1971), 107—115.
[9] Семенов, Е. М.: Об эквивалентности в L_p перестановок системы Хаара. Док. Акад. Наук СССР 242, 6 (1978), 1258—1260.

Manuskripteingang: 26. 10. 1981

VERFASSER:

Проф. д-р Евгений Михайлович Семенов
Математический Факультет университета
СССР-394693 Воронеж, Университетская пл. 1

Д-р. Борис Симонович Цирельсон
Институт „Проектавтоматика“
СССР-191025 Ленинград, Фонтанка, д. 48