Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (4) 1983, S. 375 – 381

Zur lokalen Lipschitzstetigkeit der Bellmanschen Funktion für Steuerprobleme mit linearen Zustandsgleichungen

H. Meister

Es wird gezeigt, daß für qualitative Steuerprobleme mit linearen Zustandsgleichungen ohne Konvexitätsforderungen an Integrand oder Steuerbereich die Bellmansche Funktion im Innern der Erreichbarkeitsmenge lokal lipschitzstetig ist. Durch ein Beispiel wird belegt, daß unter diesen Bedingungen die Bellmansche Funktion i. a. auf dem Rand der Erreichbarkeitsmenge nicht stetig ist.

Рассматривается задача Лагранжа оптимального управления линейным процессом. Без предположений о выпуклости подинтегральной функции и множества допустимых управлений показывается, что внутри множества достижимости функция Беллмана удовлетворяет локальному условию Липшица, а на границе может иметь разрывы.

It is shown, that for qualitative control problems with linear state equations (without convexity assumptions on cost function or control domain) Bellman's function is locally lipschitz continuous in the interior of the reachable set. An example of this type is given with non-continuous Bellman's function on the boundary.

Bei der Anwendung der dynamischen Optimierung auf stetige Steuerprobleme spielt die Kenntnis von Regularitätseigenschaften der Bellmanschen Funktion eine wesentliche Rolle. Es ist bekannt, daß die Bellmansche Funktion i. a. nicht stetig ist; wichtige Sonderfälle, in denen sie sogar lipschitzstetig ist, sind für zeitoptimale Probleme (vgl. [4] lokale Lipschitzstetigkeit in einer Umgebung des Nullpunktes) und parametrische Probleme (vgl. [3]) bekannt. In beiden Fällen hängt die Bellmansche Funktion nicht von der Zeit t, sondern nur von der Phase ξ ab. Geeignete Voraussetzungen sichern, daß man eine Trajektorie mit Endpunkt ξ fortsetzen kann zu einer Trajektorie mit vorgegebenem benachbarten Endpunkt ξ'. Das liefert dann die Behauptung.

In der vorliegenden Arbeit werden qualitative Probleme mit linearen Zustandsgleichungen und gleichmäßig beschränktem Steuerbereich betrachtet (ohne Konvexitätsvoraussetzungen an Steuerbereich und Integrand). Die Erreichbarkeitsmenge (vgl. Definition 2), die gleichzeitig Definitionsbereich der Bellmanschen Funktion ist, ist hier beschränkt, die Bellmansche Funktion hängt von t und ξ ab. Bei festgehaltenem t ist obige Idee nicht mehr durchführbar, da jede Fortsetzung der Trajektorie mit einer Vergrößerung von t verbunden ist. Es wird daher ein anderer Weg beschritten: Seien ξ, ξ' „benachbarte" relativ innere Punkte der Erreichbarkeitssphäre (vgl. Definition 1) zum Zeitpunkt t. Dann kann man zu jeder Steuerung, deren zugehörige Trajektorie in ξ endet, eine „benachbarte" Steuerung erhalten, deren Trajektorie zum Zeitpunkt t den Punkt ξ' trifft, indem man gegen die Steuerung einer geeignet gewählten Trajektorie „mischt", die in der Nähe des Randes der Erreichbarkeitssphäre zum Zeitpunkt t endet. Man erhält so die lokale Lipschitzstetigkeit der Bellmanschen Funktion im relativ Innern der Erreichbarkeitssphäre. Daraus läßt sich unter Benutzung der gleichmäßigen Beschränktheit des Steuerbereiches ableiten, daß die Bellmansche Funktion im Innern der Erreichbarkeitsmenge lokal lipschitzstetig ist. Die Lipschitzkonstante wird dabei i. a. um so größer, je mehr man sich dem Rand nähert. Es wird ein Beispiel dafür angegeben, daß die Bellmansche Funktion unter den vorliegenden Voraussetzungen auf dem Rand der Erreichbarkeitsmenge i. a. nicht stetig ist.

Für eine konvexe Menge $M \subseteqq \mathbf{R}^n$ bezeichne relint M bzw. rel ∂M das relative Innere bzw. den relativen Rand (relint M vgl. [2: S. 171]); conv M sei die konvexe Hülle einer Menge $M \subseteqq \mathbf{R}^n$; $B(r, \xi)$ bezeichne die offene Kugel vom Radius r mit Mittelpunkt ξ (bezüglich der euklidischen Metrik), $d(\xi, M) := \inf \{|\xi - \eta| : \eta \in M\}$ für $\xi \in \mathbf{R}^n$, $M \subseteqq \mathbf{R}^n$. Für $M \subseteqq \mathbf{R}^1$ sei mes M das Lebesgue-Maß; zu zwei meßbaren Funktionen u, u': $[t_0, t_1] \subseteqq \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ sei $(u \neq u') := \{t \in [t_0, t_1] : u(t) \neq u'(t)\}$.

Es wird folgende *Aufgabe* betrachtet: Über Paaren (x, u) von Funktionen ist das Integral $\int_{t_0}^{t_1} f(t, x, u)\, dt$ zu minimieren unter den Nebenbedingungen:

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t) \quad \text{fast überall auf } [t_0, t_1], \tag{1}$$

$$u(t) \in U(t) \quad \text{fast überall auf } [t_0, t_1], \tag{2}$$

$$x(t_0) = \xi_0, \tag{3}$$

$$x(t_1) = \xi_1. \tag{4}$$

Dabei seien

$$x : [t_0, t_1] \to \mathbf{R}^n \text{ absolut stetig}, \; u: [t_0, t_1] \to \mathbf{R}^r \text{ meßbar, beschränkt.} \tag{5}$$

Die gegebenen Funktionen mögen folgenden Voraussetzungen genügen: Der Integrand $f : \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^1$ sei meßbar, stetig bezüglich (x, u); es gelte $|f(t, x, u) - f(t, y, u)| \leqq L\,|x - y|$ für $t \in [t_0, t_1]$, $x, y \in \mathbf{R}^n$, $u \in U(t)$; f sei beschränkt auf jeder beschränkten Teilmenge des Definitionsbereiches.

Die Komponenten der Matrizenfunktionen $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)$ $(i = j, 1, \ldots, n)$, $B(t) = \big(b_{ik}(t)\big)$ $(i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, r)$ seien meßbare beschränkte Funktionen; es gelte $U(t) \subseteqq \mathbf{R}^r$ für $t \in [t_0, t_1]$, $|u| \leqq C$ für $u \in \bigcup_{t \in [t_0, t_1]} U(t)$; die mengenwertige Abbildung $U(\cdot)$ sei meßbar (vgl. [2: S. 281]).

Für die *Lösung der Zustandsgleichung* (1) gilt (vgl. [2; S. 62]):

$$x(t) = \Phi(t)\, x(t_0) + \Phi(t) \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(\tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, d\tau.$$

Dabei ist Φ Lösung der Gleichung $\frac{d}{dt}\, \Phi(t) = A(t)\, \Phi(t)$ mit $\Phi(t_0) = I$. Die Funktion $\Phi(\cdot)$ is absolut stetig, und $\Phi(\tau)$ ist regulär für $\tau \in [t_0, t_1]$.

Definition 1: Ein Paar (x, u) von Funktionen, das den Bedingungen (1), (2), (3) und (5), aber nicht notwendig der Bedingung (4) genügt, heißt *Prozeß* zur angegebenen Steueraufgabe. Der Prozeß besteht aus der *Steuerung* u und der *Trajektorie* x.

2. Die Menge $E(t) := \{\xi \in \mathbf{R}^n : \exists \text{ Prozeß } (x, u) \text{ mit } x(t) = \xi\}$ heißt *Erreichbarkeitssphäre* zum Zeitpunkt $t \in [t_0, t_1]$.

3. Die Menge $EM(t) := \{\tau \times E(\tau) : t_0 \leqq \tau \leqq t\}$ heißt *Erreichbarkeitsmenge* zum Zeitpunkt $t \in [t_0, t_1]$.

4. Die *Bellmansche Funktion* $S : EM(t_1) \to \mathbf{R}^1$ sei definiert durch $S(t, \xi) := \inf \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f(\tau, x, u) \, d\tau : (x, u) \text{ ist ein Prozeß mit } x(t) = \xi \right\}$.

Zum Beweis der lokalen Lipschitzstetigkeit der Bellmanschen Funktion werden der im folgenden angegebene Satz von Ljapunov und ein Lemma über reelle Funktionen benötigt, in dem die „Mischung" von Steuerungen steckt.

Satz (Ljapunov): *Für alle $t \in [t_0, t_1]$ ist $E(t)$ konvex.*

Beweis: Die hier angegebene Aussage ergibt sich unter Benutzung der Lösungsformel für die Zustandsgleichung aus [2: Theorem 1/S. 290] ∎

Definition: Sei $M \subseteqq \mathbf{R}^1$. Dann bezeichne χ_M die reelle Funktion mit

$$\chi_M(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \tau \notin M \\ 1 & \text{für} \quad \tau \in M \end{cases}.$$

Lemma 1 [2: Lemma 1/S. 215]: *Für jede beschränkte meßbare Vektorfunktion $y(\cdot) : [t_0, t_1] \to \mathbf{R}^n$ und jedes $\delta > 0$ kann man eine Familie $\{M(\alpha) : \alpha \in [0, 1]\}$ meßbarer Teilmengen von $[t_0, t_1]$ so konstruieren, daß gilt mes $M(\alpha) = \alpha(t_1 - t_0)$,*

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} \left| \int_{t_0}^{t} \chi_{M(\alpha)} y(\tau) \, d\tau - \alpha \int_{t_0}^{t} y(\tau) \, d\tau \right| \leqq \alpha\delta.$$

Bemerkung: Um die hier angegebene Aussage zu erhalten, setze man bei Joffe-Tichomirov $\alpha' = 0$.

Lemma 2: *Sei $\zeta, \zeta' \in$ relint $E(t)$, (x, u) ein Prozeß mit $x(t) = \zeta$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Prozeß (x', u') mit*

$$|x'(t) - \zeta'| \leqq \varepsilon, \ mes\,(u \neq u') \leqq |\zeta - \zeta'| \frac{|t - t_0|}{d(\zeta', \text{rel}\, \partial E(t))}.$$

Beweis: Sei $\eta' \in \text{rel}\, \partial E(t)$, $\zeta' = (1 - \lambda)\, \zeta + \lambda \eta'$, $\lambda \in [0, 1]$. Somit gilt

$$\lambda\, |\eta' - \zeta'| \leqq \lambda |\eta' - \zeta| = |\zeta - \zeta'|, \lambda d(\zeta', \text{rel}\, \partial E(t)) \leqq |\zeta - \zeta'|.$$

Sei nun $\eta \in E(t)$, $|\eta - \eta'| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$, $(\bar{x}, \bar{u})$ ein Prozeß mit $\bar{x}(t) = \eta$. Anwendung von Lemma 1 mit $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, $\alpha = \lambda$ und $y(\tau) = \Phi(t)\, \Phi^{-1}(\tau)\, B(\tau) \left(\bar{u}(\tau) - u(\tau)\right)$ liefert eine Menge $M \subseteqq [t_0, t]$ mit mes $M = \lambda(t - t_0)$, so daß für die nach

$$u'(\tau) = \begin{cases} u(\tau) & \text{für} \quad \tau \notin M \\ \bar{u}(\tau) & \text{für} \quad \tau \in M \end{cases}$$

gebildete Steuerung und die zugehörige Trajektorie x' gilt:

$$\begin{aligned} |x'(t) - \zeta'| &\leqq |x'(t) - (1 - \lambda)\, \zeta - \lambda\eta| + |(1 - \lambda)\, \zeta + \lambda\eta - \zeta'| \\ &\leqq \Bigg| \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\, B(\tau)\, u'(\tau)\, d\tau - (1 - \lambda)\, \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, d\tau \\ &\quad - \lambda\Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\, B(\tau)\, \bar{u}(\tau)\, d\tau \Bigg| + \frac{\varepsilon}{2} = \Bigg| \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \psi_M \Phi^{-1}(\tau)\, B(\tau) \big(\bar{u}(\tau) \\ &\quad - u(\tau)\big)\, d\tau - \lambda\Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\, B(\tau) \left(\bar{u}(\tau) u - u(\tau)\right) d\tau \Bigg| + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \varepsilon \ ∎ \end{aligned}$$

Lemma 3: *Sei* $\xi, \xi' \in$ *relint* $E(t)$, (x, u) *ein Prozeß mit* $x(t) = \xi$. *Dann existiert ein Prozeß* (x', u') *mit* $x'(t) = \xi'$, $\text{mes}\,(u \neq u') \leq 2\,|\xi - \xi'|\,\dfrac{|t - t_0|}{d(\xi', \text{rel}\,\partial E(t))}$.

Beweis: Es wird induktiv eine Folge (x^k, u^k) von Prozessen bestimmt mit $(x^0, u^0) = (x, u)$, $|x^k(t) - \xi'| \leq \dfrac{1}{2^k}\,|\xi - \xi'|$:

Für $k = 0$ gilt $|x^0(t) - \xi'| = |\xi - \xi'| \leq \dfrac{1}{2^0}\,|\xi - \xi'|$. Sei (x^k, u^k) fest. Anwendung von Lemma 2 mit dem Prozeß (x^k, u^k), $\zeta = x^k(t)$, $\zeta' = \xi'$, $\varepsilon = \dfrac{|\xi - \xi'|}{2^{k+1}}$ liefert einen Prozeß (x^{k+1}, u^{k+1}) mit $|x^{k+1}(t) - \xi'| \leq \dfrac{|\xi - \xi'|}{2^{k+1}}$, $\text{mes}\,(u^k \neq u^{k+1}) \leq |x^k(t) - \xi'| \times \dfrac{|t - t_0|}{d(\xi', \text{rel}\,\partial E(t))} \leq \dfrac{|\xi - \xi'|}{2^k}\,\dfrac{|t - t_0|}{d(\xi', \text{rel}\,\partial E(t))}$ (*).

Um einen „Grenzprozeß" (x', u') zu der Folge (x^k, u^k) zu erhalten, wird eine Folge $\{R^k\}$ meßbarer Teilmengen von $[t_0, t]$ definiert: Es sei für $k \geq 1$ $R^0 := [t_0, t] \setminus \bigcup\limits_{i \geq 1} (u^{i-1} \neq u^i)$, $R^k := (u^{k-1} \neq u^k) \setminus \bigcup\limits_{i \geq k+1} (u^{i-1} \neq u^i)$. Es gilt $R^k \cap R^l = \emptyset$ für $k \neq l$, $\bigcup\limits_{l \leq k} R^l = [t_0, t] \setminus \bigcup\limits_{l \geq k+1} (u^{l-1} \neq u^l)$. Wegen $\lim \text{mes}\left(\bigcup\limits_{l \geq k+1} (u^{l-1} \neq u^l)\right) = 0$ folgt $\text{mes}\,([t_0, t] \setminus \bigcup\limits_{l \geq 0} R^l) = 0$. Sei $R := [t_0, t] \setminus \bigcup\limits_{k \geq 0} R^k$. Durch $u'(\tau) := \begin{cases} u(\tau) & \text{für } \tau \in R^0 \cup R \\ u^k(\tau) & \text{für } t \in R^k \ (k \geq 1) \end{cases}$ wird eine Steuerung u' definiert, für die wegen (*) und $R^i \subseteq (u^{i-1} \neq u^i)$ gilt:

$$\text{mes}\,(u' \neq u^k) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \text{mes}\, R^i \leq \frac{1}{2^{k-1}}\,\frac{|\xi - \xi'|\,|t - t_0|}{d(\xi', \text{rel}\,\partial E(t))} \quad \text{für} \quad k \geq 0. \tag{**}$$

Es wurde benutzt, daß gilt $(u' \neq u^k) \subseteq \bigcup\limits_{i \geq k+1} R^i \cup R$. Man sieht die Richtigkeit dieser Inklusion auf folgende Weise: Sei $\tau \notin \bigcup\limits_{i \geq k+1} R^i \cup R$. Dann gilt $\tau \in \bigcup\limits_{i=0}^{k} R^i$, d. h. $\tau \in R^i$ für ein $i \leq k$. Es folgt $\tau \notin (u^{l-1} \neq u^l)$ für $l = i + 1, \ldots, k$, d. h. $u^i(\tau) = u^k(\tau)$. Wegen der Beziehung $u^i(\tau) = u'(\tau)$ ist das die angegebene Inklusion. Die Ungleichung (**) ergibt mit $k = 0$ die geforderte Schranke für $\text{mes}\,(u' \neq u)$.

Für die Trajektorie x' zu u' gilt:

$$|x'(t) - \xi'| \leq |x'(t) - x^k(t)| + |x^k(t) - \xi'| = \left|\Phi(t) \int_{\tau=t}^{t} \Phi(\tau)\,B(\tau)\,\big(u'(\tau) - u^k(\tau)\big)\,d\tau\right|$$

$$+ |x^k(t) - \xi'| \leq \bar{C}\,\text{mes}\,(u' \neq u^k) + |x^k(t) - \xi'| \leq \hat{C}\,\frac{1}{2^k}.$$

Dabei sind $\bar{C}$ und $\hat{C}$ von k unabhängige Konstanten. Man erkennt daraus $x'(t) = \xi'$ ∎

Satz 1: *Unter den angegebenen Voraussetzungen ist die Bellmansche Funktion für alle* $t \in [t_0, t_1]$ *lokal lipschitzstetig im relative Inneren von* $E(t)$: *Es existieren eine nicht von* (t, ξ), *jedoch u. a. von* t_0 *und* t_1 *abhängige Konstante* D_1 *und zu* $\xi \in$ *rel int* $E(t)$ *ein* $\varepsilon(\xi) > 0$ *mit* $|S(t), \xi'') - S(t, \xi')| \leq D_1 \dfrac{1}{d(\xi, \partial\, \text{rel int}\, E(t))}\,|\xi' - \xi''|$ *für* $\xi', \xi'' \in E(t)$, $|\xi - \xi'| \leq \varepsilon(\xi)$, $|\xi - \xi''| \leq \varepsilon(\xi)$.

2. *Im Innern von* $EM(t_1)$ *ist die Bellmansche Funktion lokal lipschitzstetig: Es existieren eine nicht von* (t, ξ) *abhängige Konstante* D_2 *und für* $(t, \xi) \in$ *int* $EM(t_1)$ *ein* $\bar{\varepsilon}(t, \xi) > 0$ *mit*

$$|S(t', \xi') - S(t'', \xi'')| \leq D_2\,\frac{1}{d((t, \xi),\ \partial EM(t_1))}\,|(t', \xi') - (t'', \xi'')|$$

für $\quad |(t', \xi') - (t, \xi)| \leq \bar{\varepsilon}(t, \xi)$, $|(t'', \xi'') - (t, \xi)| \leq \bar{\varepsilon}(t, \xi)$.

Beweis 1: Sei (x', u') ein Prozeß mit $x'(t) = \xi' \in \operatorname{rel\,int} E(t)$, $\xi'' \in \operatorname{rel\,int} E(t)$. Nach Lemma 3 existiert dann ein Prozeß (x'', u'') mit $x''(t) = \xi''$, $\operatorname{mes}(u' \neq u'') \leqq 2\,|\xi' - \xi''|\,\frac{|t - t_0|}{d(\xi'', \operatorname{rel}\partial E(t))}$. Für die Trajektorien folgt für $s \in [t_0, t]$

$$|x''(s) - x'(s)| = \left|\Phi(s)\int\limits_{t_0}^{s}\Phi^{-1}(\tau)\,B(\tau)\,\big(u''(\tau) - u'(\tau)\big)\,d\tau\right| \leqq C_1\,\frac{|\xi' - \xi''|\,|t - t_0|}{d(\xi'', \operatorname{rel}\partial E(t))}.$$

Dabei wurde die Beschränktheit von Φ, Φ^{-1}, u und B benutzt. Es ergibt sich für die Zielfunktion:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x'', u'')\,d\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x', u')\,d\tau\\
&= \int\limits_{t_0}^{t} \chi_{\{\tau\in[t_0,t_1]:u'(\tau)=u''(\tau)\}}[f(\tau, x'', u') - f(\tau, x', u')]\,d\tau\\
&\quad + \int\limits_{t_0}^{t} \chi_{\{\tau\in[t_0,t_1]:u'(\tau)\neq u''(\tau)\}}[f(\tau, x'', u'') - f(\tau, x', u')]\,d\tau\\
&\leqq C_2\,\frac{|\xi' - \xi''|\,|t - t_0|}{d(\xi', \operatorname{rel}\partial E(t))};
\end{aligned}$$

bei der Abschätzung des ersten Summanden wurde die Lipschitzstetigkeit von f bezüglich x benutzt. Da man C_2 unabhängig von t wählen kann, folgt Behauptung 1 mit einer kleineren Überlegung.

2. Sei

$$(t, \xi) \in \operatorname{int} EM(t_1),\ \varrho := \frac{1}{2}\sup\big\{\delta > 0 : d\big(\xi, \partial E(s)\big) > \delta\big\} \quad \text{für} \quad |s - t| \leqq \delta,$$

$$C_3 := \sup\,\{\Phi(s)\,\Phi^{-1}(\tau)\,B(\tau)\,u(\tau) : s, \tau \in [t_0, t_1],\ u(\tau) \in U(\tau)\} + |\xi_0|\,L_0.$$

L_0 sei die Lipschitzkonstante der Funktion $\Phi(\cdot)$. Sei nun (t', ξ'), (t'', ξ'') gegeben mit $t', t'' \in [t_0, t_1]$, $|t' - t| \leqq \frac{\zeta}{8C_3}$, $|t'' - t| \leqq \frac{\zeta}{8C_3}$, $|\xi' - \xi| \leqq \frac{\zeta}{8}$, $|\xi'' - \xi| \leqq \frac{\zeta}{8}$; $(x'\, u')$ sei ein Prozeß mit $x'(t') = \xi'$. Es gelte o. B. d. A. $t' \leqq t''$. Sei (t'', η'') von (t', ξ') aus erreichbar, d. h., es existiere ein Prozeß (y'', w'') mit $w'' = u'$ für $\tau \in [t_0, t']$, $y''(t'') = \eta''$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|\eta'' - \xi'| &= |\Phi(t'')\,\xi_0 + \Phi(t'')\int\limits_{t_0}^{t''}\Phi^{-1}(\tau)\,B(\tau)\,w''(\tau)\,d\tau - \Phi(t')\,\xi_0\\
&\quad - \Phi(t')\int\limits_{t_0}^{t'}\Phi^{-1}(\tau)\,B(\tau)\,u'(\tau)\,d\tau| \leqq C_3\,|t' - t''|.
\end{aligned}$$

Wegen $C_3\,|t' - t''| \leqq \frac{\varrho}{4}$ folgt unter Benutzung von $|\xi' - \xi| \leqq \frac{\varrho}{8}$ die Ungleichung $|\eta'' - \xi| \leqq \varrho$. Unter Beachtung der Definition von ϱ liefert nun Teil 1 einen Prozeß

(x'', u'') mit $x''(t'') = \xi''$ und

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t''} f(\tau, x'', u'')\, d\tau \\
&\leqq \int_{t_0}^{t''} f(\tau, y'', w'')\, d\tau + C_2 \frac{|t'' - t_0|\, |\eta'' - \xi''|}{\varrho} \\
&\leqq \int_{t_0}^{t'} f(\tau, x', u')\, d\tau + C_4 |t'' - t'| + C_2 \frac{|t'' - t_0|\, |\eta'' - \xi'|}{\varrho} \\
&\quad + C_2 \frac{|t'' - t_0|\, |\xi' - \xi''|}{\varrho} \\
&\leqq \int_{t_0}^{t'} f(\tau, x', u')\, d\tau + C_5 |(t', \xi') - (t'', \xi'')|.
\end{aligned}$$

Da u' beliebig war, ist das ein Teil der Behauptung. Um von einem Prozeß (x'', u'') mit $x''(t'') = \xi''$ ausgehend zu einem Prozeß (x', u') mit $x'(t') = \xi'$ zu gelangen, gehe man ebenso wie hier vor, nur verkürze man die Steuerung u'', indem man sie auf $[t_0, t']$ einschränkt. Dann kann man wieder Teil 1 anwenden ∎

Bemerkungen: 1. Man muß den Satz von Ljapunov zum Beweis des angegebenen Satzes nicht benutzen, sondern kann ihn in einer etwas schwächeren Fassung mit herausbekommen; bei diesem Vorgehen erhöht sich jedoch der Aufwand.

2. Auf dem Rand der Erreichbarkeitsmenge kann man i. a. nicht einmal die Stetigkeit der Bellmanschen Funktion erwarten. Das wird belegt durch das folgende Beispiel: Sei in der gestellten Aufgabe $n = r = 3$, $f(t, x, u) = -u_2^2 \big(u = (u_1, u_2, u_3)\big)$; die Nebenbedingungen seien gegeben durch $\dot{x}(t) = u(t)$, $x(0) = 0$,

$$u(t) \in U = \operatorname{conv} \{\{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (-1, 1, 0), (-1, -1, 0)\} \cup K\}$$

mit $K := \{v \in \mathbf{R}^3 : v_2 = 0, v_3 \geqq 0, v_1^2 + v_3^2 = 1\}$. Es gilt $E(1) = U$. Man sieht, daß für $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in K$ mit $\xi_3 > 0$ eine Stützhyperebene an $E(1)$ im Punkt (ξ_1, ξ_2, ξ_3) existiert, deren Durchschnitt mit $E(1)$ nur aus diesem einen Punkt besteht, d. h. (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ist exponierter Punkt von $E(1)$. Daher existiert nach einem bekannten Satz (vgl. z. B. [1: Theoreme 14.1 und 1.42/S. 60—61]) unter den gegebenen Voraussetzungen genau eine Steuerung $u : [0, 1] \to \mathbf{R}^3$ mit $u(\tau) \in U$ für $\tau \in [0, 1]$, $\int_0^1 u(\tau)\, d\tau = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Offenbar ist das die Steuerung $u(\tau) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ für $\tau \in [0, 1]$. Wegen $\xi_2 = 0$ folgt $S\big(1, (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\big) = 0$.

Für $\xi = (1, 0, 0)$ ist z. B. die Steuerung $\overline{u}(\tau) = (1, -1, 0)$ für $\tau \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\overline{u}(\tau) = (1, 1, 0)$ für $\tau \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ zulässig. Man erhält als zugehörigen Zielfunktionswert -1. Da dieser Wert eine obere Schranke für $S\big(1, (1, 0, 0)\big)$ ist, ist die Bellmansche Funktion in $(1, 0, 0)$ unstetig: Man betrachte den Wert von S für $t = 1$ und eine Folge $(\xi^i) = \big((\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i)\big)$ mit $(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i) \in K$ für $i \in \mathbf{N}$, $\xi_3^i > 0$, $\lim_{i=\infty} \xi^i = (1, 0, 0)$.

LITERATUR

[1] HERMES, H., and J. P. LA SALLE: Functional analysis and time optimal control. New York 1969.
[2] JOFFE, A. D., and W. M. TICHOMIROV: Theorie der Extremalaufgaben. Berlin 1979.
[3] KLÖTZLER, R.: Starke Dualität in der Steuerungstheorie. Math. Nachrichten 95 (1980), 253–263.
[4] ПЕТРОВ, Н. Н.: О функции Беллмана для задачи оптимального быстродействия. Прикл. мат. и мех. 34 (1970), 820–826.

Manuskripteingang: 02. 06. 1982

VERFASSER:

HELMUT MEISTER
Sektion Mathematik der Karl-Marx-Universität Leipzig
DDR-7010 **Leipzig**, Karl-Marx-Platz