Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (5) 1983, S. 385–399

Oberflächeninstabilitäten magnetischer Flüssigkeiten

K. Beyer

In [2] wurden die Variationsgleichungen zu periodischen Gleichgewichtszuständen einer magnetischen Flüssigkeit unter dem Einfluß eines vertikalen Magnetfelds hergeleitet. Im Anschluß daran werden hier holoedrie-invariante Gleichgewichtslösungen über hexagonalen Periodengittern konstruiert.

В [2] выводились вариационные уравнения для периодических состояний равновесия магнитной жидкости в вертикальном магнитном поле. В продолжении этого на гексогональных сетках вычисляются равновесные решения, инвариантные относительно голоэдрии.

We continue here the study of periodic equilibrium states of a magnetic fluid in an exterior magnetic field yet considered in [2]. In this paper we calculate holohedry-invariant equilibrium solutions on hexagonal lattices.

In [2] wurden die Variationsgleichungen zu periodischen Gleichgewichtszuständen magnetischer Flüssigkeiten beschrieben. Im Anschluß daran werden hier „holoedrie-invariante" Gleichgewichtskonfigurationen über hexagonalen Periodengittern Λ konstruiert.

Wie in [2] betrachten wir die Trennfläche Γ zwischen einer inkompressiblen magnetischen Flüssigkeit ($\mu > 1$ sei ihre magnetische Permeabilität) und einem Vakuum unter dem Einfluß eines homogenen Magnetfelds, der Schwerkraft und ihrer Oberflächenspannung. Bei fehlendem Magnetfeld ist die horizontale Trennfläche $z = 0$ einziger Gleichgewichtszustand. Hierzu treten bei Überschreiten der kritischen Feldstärke H_{cr} (2.17) weitere Oberflächenformen, die aus den Variationsgleichungen $\delta E = 0$ zur Gesamtenergie E zu bestimmen sind (vgl. [3]).

Nach Herleitung des Variationsproblems in Abschnitt I werden die variablen Integrationsgebiete in Abschnitt II auf Festrandgebiete bezogen und E anschließend nach Potenzen der Konfiguration η sowie der Parameter $\varepsilon = H_{cr}^{-2}(H^2 - H_{cr}^2)$ und $\mu - 1$ entwickelt. Die Funktionen η variieren hierbei über Sobolewräumen H_m Λ-periodischer Funktionen der Differenzierbarkeitsklasse m. Nach Satz 2.1 ist E analytisch über diesen Räumen sofern $m \geqq 3$. Grundlegend für die Konstruktion ist Satz 2.2 (Beweis in Abschnitt IV), nach dem seine erste Variation E_η unter Voraussetzung $m \geqq 4$ eine analytische Abbildung zwischen den Räumen H_m und H_{m-2} definiert. Wegen der Bewegungsinvarianz der Energie sind die Gleichgewichtsbedingungen invariant bezüglich der maximalen Untergruppe G der orthogonalen Gruppe $O(2)$, die das Gitter in sich überführt (Holoedrie des Gitters, vgl. [5]). Bei Stabilitätsverlust ($H = H_{cr}$) besitzt die zweite Variation $E_{\eta\eta}$ — gebildet in $\eta = 0$ — den Eigenwert Null mit der Vielfachheit sechs; über den Teilräumen $H_m{}^G$ G-invarianter Funktionen aus H_m wird dieser Eigenwert einfach. In Abschnitt III lösen wir die über $H_m{}^G$ skalare Verzweigungsgleichung (vgl. [6]) in der Umgebung von $(\varepsilon, \mu) = (0, 1)$ auf. Sie besitzt nach dem Weierstraßschen Vorbereitungssatz die Lösungszweige (3.8), von denen sich s^+ stabil in einer vollen Umgebung des kritischen Werts $\varepsilon = 0$ verhält, der Zweig s^- dagegen beiderseitig instabil verläuft. Wegen $s^+(0) = 0{,}157\ (\mu - 1)$ bewegt sich das System bei Stabilitätsverlust in unstetiger Weise nach s^+.

I.

Wir betrachten die Trennfläche Γ: $z = \zeta(x, y)$, zwischen einer inkompressiblen magnetischen Flüssigkeit der Dichte ϱ und einem Vakuum unter dem Einfluß eines homogenen Magnetfelds, der Oberflächenspannung und des Schwerefelds $(0, 0, -g)$. Von den Funktionen ζ verlangen wir Periodizität bezüglich des durch die Vektoren

$$\omega_1 = 2\pi l(1, 0), \qquad \omega_2 = 2\pi l\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

erzeugten Gitters

$$\Lambda = \{k_1\omega_1 + k_2\omega_2 : k_1, k_2 \text{ ganzzahlig}\}.$$

Die Wellenlänge l wird im Rahmen unserer Überlegungen nicht variiert und ist später gemäß (2.17) festzulegen. Die bezüglich dieses Gitters periodischen Funktionen werden wir kurz Λ-periodisch nennen. $\mathscr{P}(0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2)$ sei das Periodenparallelogramm des Gitters Λ. Da die Vektoren ω_1, ω_2 den Winkel $\pi/3$ einschließen, ist sein metrisches Fundamentalpolygon ein reguläres Sechseck.

Über $\mathscr{P}$ sollen Flüssigkeit bzw. Vakuum die unbeschränkten Gebiete

$$\Omega^- = \mathscr{P} \times \{z : z < \zeta(x, y)\} \quad \text{bzw.} \quad \Omega^+ = \mathscr{P} \times \{z : z > \zeta(x, y)\}$$

einnehmen, wobei im feldfreien Fall $\zeta = 0$ gelte. Wir notieren die auf Flächen- und Spannungseinheit bezogene Gesamtenergie E bei gegebener Trennfläche:

$$E = \frac{1}{l^2}\int_{\mathscr{P}} \sqrt{1 + |\nabla\zeta|^2}\, dx\, dy + \frac{\varrho g}{2\beta l^2}\int_{\mathscr{P}} \zeta^2\, dx\, dy + \frac{\mu}{8\pi\beta l^2}\int_{\Omega^-} |\mathscr{H}^-|^2\, dV + \frac{1}{8\pi\beta l^2}\int_{\Omega^+} |\mathscr{H}^+|^2\, dV, \tag{1.1}$$

$dV = dx\, dy\, dz$. $\beta > 0$ ist hierbei der Koeffizient der Oberflächenspannung der Flüssigkeit und $\mu > 1$ ihre magnetische Permeabilität. Die sich auf Flüssigkeit bzw. Vakuum ($\mu = 1$) beziehenden Feldgrößen sind wie auch im folgenden mit den Indices „$-$" bzw. „$+$" gekennzeichnet. In (1.1) ist das Magnetfeld $\mathscr{H}$ in Abhängigkeit von ζ an noch zu beschreibende Randbedingungen zu binden. Gleichgewichtszustände sind aus dem Verschwinden der ersten Variation des Funktionals E zu bestimmen:

$$\left\langle \frac{\partial E}{\partial \zeta}, \delta\zeta \right\rangle = 0$$

für alle zulässigen Variationen $\delta\zeta$. Um der Inkompressibilität der Flüssigkeit zu genügen, werden wir die Lösungsflächen und ihre Variationen der zusätzlichen Bedingung

$$\int_{\mathscr{P}} \zeta\, dx\, dy = 0 \tag{1.2}$$

zu unterwerfen haben.

Zur Festlegung des in (1.1) eingehenden Magnetfelds setzen wir $\mathscr{H}^\pm = H\,\nabla\psi^\pm$ und bestimmen die Potentiale $\psi^\pm$ in der Nähe eines vertikalen Führfelds:

$$\psi^- = \frac{z}{\mu} + u^-(x, y, z), \qquad \psi^+ = z + u^+(x, y, z), \tag{1.3}$$

wobei neben

$$\Delta u^- \text{ in } \Omega^-, \qquad \Delta u^+ = 0 \text{ in } \Omega^+ \tag{1.4}$$

die Gültigkeit der Sprungbedingungen

$$\mathscr{H}_t^{\,+} = \mathscr{H}_t^{\,-}, \qquad \mathscr{H}_n^{\,+} = \mu\mathscr{H}_n^{\,-} \quad \text{längs } \Gamma \tag{1.5}$$

für Tangential- bzw. Normalkomponente $\mathscr{H}_t$ bzw. $\mathscr{H}_n$ des Magnetfelds sowie Λ-Periodizität zu fordern ist. Man bemerkt (s. [2]), daß die Lösung des linearen Randwertproblems (1.4), (1.5) Extremale des Variationsproblems

$$\mu \int_{\Omega^-} |\nabla u^-|^2\, dV + \int_{\Omega^+} |\nabla u^+|^2\, dV \to \text{Min.} \tag{1.6}$$

unter den Rand- und Koppelungsbedingungen

$$u^\pm \quad \Lambda\text{-periodisch}, \quad u^+ - u^- = \frac{1-\mu}{\mu}\, z + \text{const längs } \Gamma \tag{1.7}$$

ist. Wir haben nunmehr seine nach (1.6) (bis auf eine Konstante) eindeutig bestimmte Lösung u^-, u^+ in den Magnetfeldanteil von (1.1) einzutragen. Man erhält wegen (1.3) zunächst

$$\begin{aligned} &\mu \int_{\Omega^-} |\mathscr{H}^-|^2\, dV + \int_{\Omega^+} |\mathscr{H}^+|^2\, dV \\ &= H^2 \int_{\Omega^-} \left(\mu\, |\nabla u^-|^2 + 2\nabla z\, \nabla u^- + \frac{1}{\mu}\right) dV \\ &\quad + H^2 \int_{\Omega^+} (|\nabla u^+|^2 + 2\nabla z\, \nabla u^+ + 1)\, dV. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Die unendlichen Anteile $\int_{\Omega^\pm} dV$ tragen wegen (1.2) zur Variation nichts bei und werden deshalb vom Variationsintegral (1.1) abgezogen. Nach partieller Integration (man beachte die in Hilfssatz 4.1 zum Ausdruck kommenden Wachstumsbeziehungen) erhält man bei Berücksichtigung der Randbedingungen schließlich

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{l^2} \int_{\mathscr{P}} \sqrt{1 + |\nabla\zeta|^2}\, dx\, dy + \frac{\varrho g}{2\beta l^2} \int_{\mathscr{P}} \zeta^2\, dx\, dy \\ &\quad - \frac{\mu H^2}{8\pi\beta l^2} \int_{\Omega^-} |\nabla u^-|^2\, dV - \frac{H^2}{8\pi\beta l^2} \int_{\Omega^+} |\nabla u^+|^2\, dV. \end{aligned} \tag{1.9}$$

II.

Durch die Transformation

$$x = l x_1, \quad y = l x_2, \quad z - \zeta(x, y) = l x_3 \tag{2.1}$$

bilden wir die Gebiete $\Omega^\pm$ auf die Festgebiete $S^- = \mathscr{P}_1 \times (-\infty, 0)$ bzw. $S^+ = \mathscr{P}_1 \times (0, +\infty)$ ab. $\mathscr{P}_1$ ist hierbei das Periodenparallelogramm zur Wellenlänge $l = 1$;

kennzeichne Λ_1 das zugehörige Gitter. Bezug der Energie auf dimensionslose Variable

$$\eta(x_1, x_2) = \frac{1}{l}\, \zeta(x, y), \qquad v^{\pm}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{l}\, \frac{\mu}{1-\mu}\, u^{\pm}(x, y, z) \tag{2.2}$$

überführt (1.9) in

$$E = \int\limits_{\mathscr{P}_1} \sqrt{1 + |\nabla\eta|^2}\, dx_1\, dx_2 + \frac{\varrho g l^2}{2\beta} \int\limits_{\mathscr{P}_1} \eta^2\, dx_1\, dx_2$$

$$- \frac{l H^2}{8\pi\beta}\, \frac{(1-\mu)^2}{\mu^2}\, J, \tag{2.3}$$

wobei J Minimalwert des nach (2.1), (2.2) transformierten Variationsproblems (1.6), (1.7):

$$\mu \int\limits_{S^-} |\nabla v^-|^2\, dV + \int\limits_{S^+} |\nabla v^+|^2\, dV$$

$$- 2\mu \int\limits_{S^-} v^-_{x_3}(v^-_{x_1}\eta_{x_1} + v^-_{x_2}\eta_{x_2})\, dV - 2 \int\limits_{S^+} v^+_{x_3}(v^+_{x_1}\eta_{x_1} + v^+_{x_2}\eta_{x_2})\, dV$$

$$+ \mu \int\limits_{S^-} u^{-2}_{x_3}\, |\nabla\eta|^2\, dV + \int\limits_{S^+} u^{+2}_{x_3}\, |\nabla\eta|^2\, dV \to \text{Min.} \tag{2.4}$$

unter den Nebenbedingungen

$$v^{\pm}\ \Lambda_1\text{-periodisch}, \quad v^+(x_1, x_2, 0) - v^-(x_1, x_2, 0) = \eta(x_1, x_2) + \text{const} \tag{2.5}$$

zu sein hat. Sind $V^{\pm}$ die Faktorräume der über S^- bzw. S^+ definierten Λ_1-periodischen (und bis auf eine Konstante bestimmten) Distributionen mit quadratisch summierbaren ersten Ableitungen, so ist (2.4), (2.5) über $V = V^- \times V^+$ zu stellen. V ist Hilbertraum unter der Norm (vgl. [4])

$$|v|^2 = \int\limits_{S^-} |\nabla v^-|^2\, dV + \int\limits_{S^+} |\nabla v^+|^2\, dV.$$

In (2.4), (2.5) variiere η über den Sobolewräumen H_m Λ_1-periodischer Funktionen mit über $\mathscr{P}_1$ quadratisch summierbaren Ableitungen bis zur Ordnung m, die Ableitungen bis zur Ordnung $m-1$ seien zudem Λ_1-periodisch. Für die Funktionen dieser Räume gelte außerdem (1.2). Ist

$$\Lambda_1' = \{k_1\omega_1' + k_2\omega_2' : k_1, k_2 \text{ ganzzahlig}\},$$

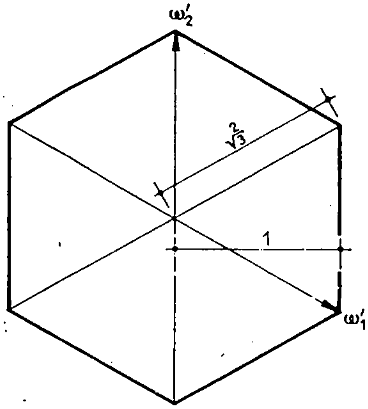
$$\omega_1' = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \omega_2' = \frac{2}{\sqrt{3}}\, (0, 1)$$

das zu Λ_1 duale Gitter (s. Abb.), so lassen sich die Funktionen $\eta \in H_m$ in Fourierreihen

$$\eta(x_1, x_2) = \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda_1'} \eta_\omega\, e^{i\langle\omega, x\rangle}, \qquad \eta_{-\omega} = \bar{\eta}_\omega \tag{2.6}$$

entwickeln, wobei wir das Skalarprodukt der Vektoren (x_1, x_2) und $\omega \in \Lambda_1'$ abkürzend mit $\langle\omega, x\rangle$ bezeichnen. H_m ist Hilbertraum unter der Norm

$$\|\eta\|_m^2 = \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda_1'} |\omega|^{2m}\, |\eta_\omega|^2.$$



Satz 1.1: *Unter der Voraussetzung $m \geqq 3$ ist der Minimalwert J über $H_m \times \mathbf{R}^1$ analytisch in $(\eta, \mu) = (0, 1)$.*

Beweis: Wir bezeichnen die Variationsintegrale in (2.4) mit

$$b_0^{\pm}(v, v) = \int_{S\pm} |\nabla v|^2 \, dV, \qquad b_1^{\pm}(\eta; v, v) = -2 \int_{S\pm} v_{x_3}(v_{x_1}\eta_{x_1} + v_{x_2}\eta_{x_2}) \, dV,$$

$$b_2^{\pm}(\eta^2; v, v) = \int_{S\pm} v_{x_3}^2 \, |\nabla\eta|^2 \, dV.$$

Unter der Voraussetzung $m \geqq 3$ sind die Funktionen $\eta \in H_m$ und ihre ersten Ableitungen stetig über $\mathbf{R}^2$. Die Integrale $b_i(\eta^i; \cdot, \cdot)$ $(i = 0, 1, 2)$ definieren in diesem Fall beschränkte — und von η analytisch abhängige — quadratische Formen über V. Wir können hiervon zunächst auf die Entwickelbarkeit

$$v = \sum_{i \geqq 0, j \geqq 1} (\mu - 1)^i \, v_{ij}(\eta^j) \tag{2.7}$$

der Lösung $v = (v^-, v^+)$ des Variationsproblems (2.4), (2.5) über V schließen. Ihre Koeffizienten $v_1 = \sum_{\geqq 0} (\mu - 1)^i \, v_{i1}(\eta)$ bzw. v_{ij} $(i \geqq 0, j \geqq 2)$ haben den Variationsgleichungen

$$\begin{aligned} &\mu b_0^-(v_1^-, \varphi^-) + b_0^+(v_1^+, \varphi^-) = 0, \\ &v_1^+(x_1, x_2, 0) - v_1^-(x_1, x_2, 0) = \eta(x_1, x_2) + \text{const} \end{aligned} \tag{2.8}$$

bzw. (wir setzen $v_{-1,j} = v_{i,0} = 0$)

$$\begin{aligned} &b_0^-(v_{ij}^-, \varphi^-) + b_0^+(v_{ij}^+, \varphi^+) + b_0^-(v_{i-1}^-, \varphi^-) \\ &+ b_1^-(\eta; v_{i,j-1}^- + v_{i-1,j-1}^-, \varphi^-) + b_1^+(\eta; v_{i,j-1}^+, \varphi^+) \\ &+ b_2^-(\eta^2; v_{i,j-2}^- + v_{i-1,j-2}^-, \varphi^-) + b_2^+(\eta^2; v_{i,j-2}^+, \varphi^+) = 0, \\ &v_{ij}^+(x_1, x_2, 0) - v_{ij}^-(x_1, x_2, 0) = \text{const} \end{aligned} \tag{2.9}$$

für alle $\varphi \in V$ mit $\varphi^+(x_1, x_2, 0) - \varphi^-(x_1, x_2, 0) = \text{const}$ zu genügen. Nach (2.4) gilt

$$J = \sum_{n=0}^{2} \left(\mu b_n^-(\eta^n; v^-, v^-) + b_n^+(\eta^n; v^+, v^+)\right), \tag{2.10}$$

woraus wegen (2.7) die Behauptung folgt; bei Beachtung von (2.8), (2.9) findet man

$$J = \mu b_0^-(v_1^-, v_1^-) + b_0^+(v_1^+, v_1^+) + \mu b_1^-(\eta; v_1^-, v_1^-) + b_1^+(\eta; v_1^+, v_1^+)$$
$$+ \sum_{i\geq 0, j\geq 4} (\mu - 1)^i \sum_{k=0}^{i} \big(b_1^-(\eta; v_{k1}^-, v_{i-k,j-2}^- + v_{i-k-1,j-2}^-)$$
$$+ b_1^+(\eta; v_{k1}^+, v_{i-k,j-2}^+) + b_2^-(\eta^2; v_{k1}^-, v_{i-k,j-3}^- + v_{i-k-1,j-3}^-)$$
$$+ b_2^+(\eta^2; v_{k1}^-, v_{i-k,j-3}^-)\big)$$
$$= J_2(\eta^2, \mu) + J_3(\eta^3, \mu) + \sum_{i\geq 0, j\geq 4} (\mu - 1)^i J_{ij}(\eta^j) \quad \blacksquare \tag{2.11}$$

Wir berechnen die Funktionale

$$\begin{aligned} J_2 &= \mu b_0^-(v_1^-, v_1^-) + b_0^+(v_1^+, v_1^+), \\ J_3 &= \mu b_1^-(\eta; v_1^-, v_1^-) + b_1^+(\eta; v_1^+, v_1^+), \\ J_{04} &= b_1^-(\eta; v_{01}^-, v_{02}^-) + b_1^+(\eta; v_{01}^+, v_{02}^+) + b_2^-(\eta^2; v_{01}^-, v_{01}^-) + b_2^+(\eta^2; v_{01}^+, v_{01}^+). \end{aligned} \tag{2.12}$$

In (2.12) sind die Funktionen $v_1(\eta, \mu)$[1]) und v_{02} aus (2.8) und (2.9) bzw. den zugehörigen Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$\Delta v_1^- = 0 \quad \text{in } S^-, \qquad \Delta v_1^+ = 0 \quad \text{in } S^+,$$
$$v_1^+ - v_1^- = \eta + \text{const}, \qquad \frac{\partial v_1^+}{\partial x_3} - \mu \frac{\partial v_1^-}{\partial x_3} = 0 \quad \text{längs} \quad x_3 = 0,$$

und

$$\Delta v_{02}^- = \Delta\left(\eta \frac{\partial v_{01}^-}{\partial x_3}\right) \text{ in } S^-, \qquad \Delta v_{02}^+ = \Delta\left(\eta \frac{\partial v_{01}^+}{\partial x_3}\right) \text{ in } S^+,$$
$$v_{02}^+ - v_{02}^- = \text{const}, \qquad \frac{\partial v_{02}^+}{\partial v_3} - \frac{\partial v_{02}^-}{\partial x_3} = |\nabla\eta|^2 \quad \text{längs} \quad x_3 = 0 \tag{2.13}$$

zu berechnen.

Hilfssatz 1.1: *Mit den Bezeichnungen* (2.6) *und*

$$A\eta = \sqrt{-\Delta}\,\eta = \sum_{\omega\in\Lambda_1'} |\omega|\, \eta_\omega\, e^{i\langle\omega, x\rangle}$$

gelten die Lösungsformeln

$$\begin{aligned} v_1^- &= -\frac{1}{1+\mu} \sum_{0\neq\omega\in\Lambda_1'} \eta_\omega\, e^{i\langle\omega,x\rangle}\, e^{|\omega| x_3}, \\ v_1^+ &= \frac{\mu}{1+\mu} \sum_{0\neq\omega\in\Lambda_1'} \eta_\omega\, e^{i\langle\omega,x\rangle}\, e^{-|\omega| x_3} \end{aligned} \tag{2.14}$$

sowie

$$v_{02}^\pm = \frac{1}{4} A\eta^2 - \frac{1}{2} \eta A\eta, \qquad \frac{\partial v_{02}^\pm}{\partial x_3} = \pm\frac{1}{2} |\nabla\eta|^2 \quad \text{längs} \quad x_3 = 0. \tag{2.15}$$

Beweis: Formel (2.14) gilt offensichtlich. Zum Beweis von (2.15) löse man (2.13) durch den Ansatz $v_{20}^\pm = \eta v_{01,x_3}^\pm + w^\pm$, $\Delta w^\pm = 0$. Nach (2.13) haben die harmonischen

---

[1]) $v_{01} = v_1(\eta, 1)$.

Funktionen $w^{\pm}$ längs $x_3 = 0$ den Koppelungsbedingungen $w^+ - w^- = \text{const}$, $w^+_{x_3} - w^-_{x_3} = \frac{1}{2} \Delta\eta^2$ zu genügen. Ist $h \in V^-$ die harmonische Funktion mit Randwerten $h = \eta^2 + \text{const}$ längs $x_3 = 0$, so gilt offenbar $w^- = \frac{1}{4} h_{x_3}$ und $w^+(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4} h_{x_3}(x_1, x_2, -x_3)$. ∎

Setzt man (2.14), (2.15) in (2.12) ein und integriert partiell, so folgt schließlich [2])

$$J_2 = \frac{\mu}{1+\mu} (A\eta, \eta), \qquad J_3 = \frac{\mu(1-\mu)}{(1+\mu)^2} \left(A\eta, \frac{1}{2} A\eta^2 - \eta A\eta\right),$$
$$J_{04} = \frac{1}{24} \left(4(\eta^3, A^3\eta) - 3(\eta^2, A^3\eta^2)\right). \tag{2.16}$$

Insbesondere ist damit die zweite Variation $E_{\eta\eta}$ der Gesamtenergie an der Stelle $\eta = 0$ bestimmt: Setzt man

$$l_{\text{cr}}^2 = \frac{4}{3} \frac{\beta}{\varrho g}, \qquad H_{\text{cr}}^2 = \frac{8\pi\mu}{(1-\mu)^2} (1+\mu) \sqrt{\varrho g \beta}, \tag{2.17}$$

so gilt,

$$E_{\eta\eta}|_{\eta=0}(\eta^2)$$
$$= \int_{\mathscr{P}_1} |\nabla\eta|^2 \, dx_1 \, dx_2 + \frac{4}{3} \left(\frac{l}{l_{\text{cr}}}\right)^2 \int_{\mathscr{P}_1} \eta^2 \, dx_1 \, dx_2 - \frac{4}{3} \frac{l}{l_{\text{cr}}} \left(\frac{H}{H_{\text{cr}}}\right)^2 (A\eta, \eta)$$
$$= 2\sqrt{3}\,\pi^2 \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda_1'} \left(|\omega|^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{l}{l_{\text{cr}}}\right)^2 - \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{l}{l_{\text{cr}}} \left(\frac{H}{H_{\text{cr}}}\right)^2 |\omega|\right) |\eta_\omega|^2$$

(vgl. (2.3), (2.16)). Offenbar läßt sich diese Form stetig über H_1 fortsetzen, und zwar wegen

$$|\omega|^2 + \frac{4}{3} \left(\frac{l}{l_{\text{cr}}}\right)^2 - \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{l}{l_{\text{cr}}} \left(\frac{H}{H_{\text{cr}}}\right)^2 |\omega| = \left(|\omega| - \frac{2}{3} \frac{l}{l_{\text{cr}}} \left(\frac{H}{H_{\text{cr}}}\right)^2\right)^2$$
$$+ \frac{4}{3} \left(\frac{l}{l_{\text{cr}}}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{H}{H_{\text{cr}}}\right)^4\right)$$

in positiv definiter Weise, solange die Feldstärke im unterkritischen Bereich $H^2 < H_{\text{cr}}^2$ variiert. Über diesem Feldstärkebereich verhält sich die horizontale Trennfläche demzufolge stabil gegenüber Λ-periodischen Störungen beliebiger Wellenlänge.

Legen wir die bisher freie Wellenlänge ab jetzt gemäß $l = l_{\text{cr}}$ fest, so gilt an der Stabilitätsgrenze

$$E_{\eta\eta}\Big|_{\eta=0, H=H_{\text{cr}}}(\eta^2) = 2\sqrt{3}\,\pi^2 \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda_1'} \left(|\omega| - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 |\eta_\omega|^2. \tag{2.18}$$

Diese Form besitzt den sechsdimensionalen Nullraum

$$N\colon \; e^{\pm i\langle \omega_1', x\rangle}, \qquad e^{\pm i\langle \omega_2', x\rangle}, \qquad e^{\pm i\langle \omega_1' + \omega_2', x\rangle}.$$

---

[2]) $(\cdot, \cdot)$-L_2-Skalarprodukt über $\mathscr{P}_1$.

Im übrigen gilt

Hilfssatz 2.2: *$E_{\eta\eta}\big|_{\eta=0, H=H_{cr}}$ vermittelt eine stetige Abbildung zwischen den Räumen H_m und H_{m-2} $(m \geqq 2)$:*

$$E_{\eta\eta}\big|_{\eta=0, H=H_{cr}} \in L(H_m, H_{m-2}) \tag{2.19}$$

mit dem Wertevorrat

$$R = \{f \in H_{m-2} : (f, h) = 0 \quad \text{für} \quad h \in N\}. \tag{2.20}$$

Beweis: (2.19) ist evident. (2.20) folgt aus den zur Beziehung $E_{\eta\eta}\big|_{\eta=0, H=H_{cr}} \eta = f$ gehörigen Gleichungen

$$\left(|\omega| - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \eta_\omega = f_\omega$$

zwischen den Fourierkoeffizienten η_ω, f_ω der Funktionen η bzw. f ∎

Wir setzen schließlich

$$\frac{H^2 - H_{cr}^2}{H_{cr}^2} = \varepsilon$$

und entwickeln E neben η, μ auch nach ε. Wegen (2.3), (2.11), (2.16) erhält man in zusammengefaßter Darstellung

$$E = \frac{1}{2} E_{\eta\eta}\big|_{\eta=0, H=H_{cr}} + E^{\text{red.}} + \sum_{i+j+k\geqq 2} \varepsilon^i(\mu - 1)^j E_{ijk}(\eta^{k+3}) \tag{2.21}$$

mit dem „reduzierten" Potential

$$E^{\text{red.}}(\eta; \varepsilon, \mu) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon(A\eta, \eta) + \frac{1}{\sqrt{3}} (\mu - 1)\left(A\eta, \frac{1}{2} A\eta^2 - \eta A\eta\right)$$
$$- \frac{1}{6\sqrt{3}} \left(4(\eta^3, A^3\eta) - 3(\eta^2, A^3\eta^2)\right) - \frac{1}{8} (|\nabla\eta|^2, |\nabla\eta|^2).$$

Elementare Rechnungen ergeben: Führt man in N neben den Fourierkoeffizienten

$$\eta = {}' \sum_{|\omega| = 2/\sqrt{3}} \eta_\omega \, e^{i\langle\omega, x\rangle}$$

die Koordinaten

$$\eta_{\omega_1} = a_1 e^{i\delta_1}, \qquad \eta_{\omega_2} = a_2 e^{i\delta_2}, \qquad \eta_{\omega_1+\omega_2} = a_3 e^{-i\delta_3}$$

sowie

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3; \quad \sigma_1 = a_1^4 + a_2^4 + a_3^4, \quad \sigma_2 = a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2$$

ein, so gilt über diesem Teilraum

$$E^{\text{red.}} = 16\pi^2 \left(-\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (\mu - 1)\, a_1 a_2 a_3 \cos\delta \right.$$
$$\left. + \frac{5}{6\sqrt{3}} \sigma_1 + \left(4 - \frac{5}{\sqrt{3}}\right) \sigma_2\right). \tag{2.22}$$

Wir notieren abschließend den für unsere Konstruktion grundlegenden Regularitätssatz.

Satz 2.2: *Unter der Voraussetzung $m \geqq 4$ vermittelt die erste Variation E_η des Funktionals* (2.21) *eine in* $(\eta; \varepsilon, \mu) = (0; 0, 1)$ *analytische Abbildung von $H_m \times \mathbf{R}^2$ in H_{m-2}.*

Der Beweis erfordert einige Weiterungen und wird in Abschnitt IV nachgetragen.

III.

Sei G die maximale Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(2)$, die das Gitter Λ_1 in sich überführt, und T_g:

$$(T_g\eta)(x_1, x_2) = \eta\big(g^{-1}(x_1, x_2)\big), \qquad g \in G,$$

ihre in üblicher Weise definierte Darstellung über den Räumen H_m. Wir werden unsere weiteren Betrachtungen über den Teilräumen $H_m{}^G$ der bei T_g invarianten Funktionen ($T_g\eta = \eta$, $g \in G$) von H_m führen.

T_g wirkt auf die Fourierreihen (2.6) gemäß

$$(T_g\eta)(x_1, x_2) = \sum_{\omega \in \Lambda_1'} \eta_\omega \, e^{i\langle \omega, g^{-1}(x)\rangle}$$
$$= \sum_{\omega \in \Lambda_1'} \eta_\omega \, e^{i\langle g(\omega), x\rangle} = \sum_{\omega \in \Lambda_1'} \eta_{g^{-1}(\omega)} \, e^{i\langle \omega, x\rangle}.$$

$\eta \in H_m$ gehört deshalb genau dann zu $H_m{}^G$, wenn ihre Fourierkoeffizienten lediglich von den Äquivalenzklassen

$$[\omega] = \{\omega' = g^{-1}(\omega) : g \in G\} \in \Lambda_1'/G$$

der Gitterpunkte $\omega \in \Lambda_1'$ abhängen, d. h. wenn

$$\eta = \sum_{\omega \in \Lambda_1'} \eta_{[\omega]} \, e^{i\langle \omega, x\rangle} = \sum_{[\omega] \in \Lambda_1'/G} \eta_{[\omega]} \sum_{\omega \in [\omega]} e^{i\langle \omega, x\rangle}$$

zutrifft. Über N wirkt T_g transitiv (s. Abb.), infolgedessen ist

$$\eta_1 = \sum_{|\omega| = 2/\sqrt{3}} e^{i\langle \omega, x\rangle} = 2 \cos \frac{2}{\sqrt{3}} x_2 + 4 \cos x_1 \cos \frac{x_2}{\sqrt{3}}$$

die einzige G-invariante Eigenfunktion der Form (2.18) zum Eigenwert Null, der somit über $H_m{}^G$ einfach wird.

In diesem Abschnitt lösen wir die Variationsgleichungen

$$\langle E_\eta(\eta; \varepsilon, \mu), h\rangle = 0; \qquad \eta \in H_m{}^G, \qquad \forall\, h \in H_m{}^G \tag{3.1}$$

unter der Voraussetzung $m \geqq 4$ in der Umgebung der Stelle $(\eta; \varepsilon, \mu) = (0; 0, 1)$.

Bemerkung: Tatsächlich genügen die Lösungen von (3.1) den vollständigen Gleichgewichtsbedingungen

$$\langle E_\eta(\eta; \varepsilon, \mu), h\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad h \in H_m.$$

Man erschließt dies aus der Bewegungsinvarianz der Energie: Danach gilt für alle $\eta, h \in H_m$

$$\langle E_\eta(T_g\eta; \varepsilon, \mu), T_g h\rangle = \langle E_\eta(\eta; \varepsilon, \mu), h\rangle,$$

woraus für die Lösungen von (3.1)

$$0 = \left\langle E_\eta(\eta; \varepsilon, \mu), \sum_{n=0}^{5} T_g{}^n h \right\rangle = \sum_{n=0}^{5} \langle E_\eta(\eta; \varepsilon, \mu), T_g{}^n h\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{5} \langle E_\eta(\eta; \varepsilon, \mu), h\rangle = 6\langle E_\eta(\eta; \varepsilon, \mu), h\rangle$$

für jedes $h \in H_m$ folgt.

Gleichung (3.1) ist nach Ljapunow-Schmidt wie folgt zu zerlegen:

$$\begin{aligned} &\eta = s(\eta_1 + \vartheta), \qquad (\vartheta, \eta_1) = 0 \\ &\langle E_\eta(\eta; \varepsilon, \mu), \eta_1\rangle = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\langle E_\eta(\eta; \varepsilon, \mu), h\rangle = 0, \qquad \forall\, h : (h, \eta_1) = 0. \tag{3.3}$$

Wir lösen zunächst (3.3) bzw.

$$\begin{aligned} sE_{\eta\eta}\big|_{\eta=0, H=H_{cr}}(\vartheta, h) = &-\left\langle E_\eta{}^{\text{red.}}\big(s(\eta_1 + \vartheta); \varepsilon, \mu\big), h\right\rangle \\ &- s^2 \sum_{i+j+k\geq 2} (k+3)\, \varepsilon^i(\mu - 1)^j\, s^k E_{ijk}\big((\eta_1 + \vartheta)^{k+2}, h\big) \end{aligned} \tag{3.4}$$

(vgl. (2.21)). Dies ist (nach Division durch s) in der Umgebung von $(\vartheta; \varepsilon, \mu, s) = (0; 0, 1, 0)$ in einfacher Weise durch sukzessive Approximationen möglich, wenn wir (3.4) nach Satz 2.2 und Hilfssatz 2.2[3]) als analytische Beziehung zwischen den Räumen $H_m{}^G$ und H_{m-2}^G auffassen. Man findet

$$\vartheta = s \sum_{i,j,k\geq 0} \vartheta_{ijk}\varepsilon^i(\mu - 1)^j s^k. \tag{3.5}$$

Wir setzen (3.5) in (3.2) ein und gelangen dadurch zur Verzweigungsgleichung

$$\begin{aligned} &\left\langle E_\eta{}^{\text{red.}}\big(s(\eta_1 + \vartheta); \varepsilon, \mu\big), \eta_1\right\rangle \\ &+ s^2 \sum_{i+j+k\geq 2} (k+3)\ \varepsilon^i(\mu - 1)^j s^k E_{ijk}\big((\eta_1 + \vartheta)^{k+2}, \eta_1\big) = 0 \end{aligned}$$

bzw., nach Abtrennung des Polynoms $\dfrac{d}{ds} E^{\text{red.}}(s\eta_1; \varepsilon, \mu)$ in dieser Gleichung, zu

$$\frac{d}{ds} E^{\text{red.}}(s\eta_1; \varepsilon, \mu) + s^2 P(s; \varepsilon, \mu) = 0. \tag{3.6}$$

Dabei ist P eine Potenzreihe mit Anfangsgrad $\geqq 2$. Nach (2.22) gilt

$$\frac{d}{ds} E^{\text{red.}}(s\eta_1; \varepsilon, \mu) = 16\pi^2 s \left(-2\sqrt{3}\ \varepsilon - 3(\mu - 1)\ s + 4\left(12 - \frac{25}{2\sqrt{3}}\right) s^2\right).$$

Wir dürfen deshalb (3.6) wegen des Weierstraßschen Vorbereitungssatzes in erster Näherung durch die reduzierte Verzweigungsgleichung

$$\frac{d}{ds} E^{\text{red.}}(s\eta_1; \varepsilon, \mu) = 0 \tag{3.7}$$

---

[3]) In (2.20) ist H_{m-2} durch H_{m-2}^G sowie h durch η_1 zu ersetzen.

ersetzen. (3.7) besitzt neben $s = 0$ die Lösungen

$$s^{\pm} = 0.078(\mu - 1) \pm \sqrt{0{,}078^2(\mu - 1)^2 + 0{,}181\varepsilon}. \tag{3.8}$$

Interessanterweise lassen sich auch die Stabilitätsverhältnisse längs dieser Lösungszweige durch das reduzierte Potential beschreiben. Dies folgt aus der Entwicklung

$$\begin{aligned} &E_{\eta\eta}\big(s(\eta_1 + \vartheta);\, \varepsilon, \mu\big)\,(h, h) \\ &= E_{\eta\eta}\big|_{\eta=0, H=H_{cr}}(h, h) + E_{\eta\eta}^{\mathrm{red.}}\big(s(\eta_1 + \vartheta);\, \varepsilon, \mu\big)\,(h, h) \\ &\quad + s \sum_{i+j+k\geq 2} (k+2)\,(k+3)\,\varepsilon^i(\mu - 1)^j\, s^k E_{ijk}\big((\eta_1 + \vartheta)^{k+1}, h^2\big) \end{aligned}$$

der zweiten Variation der Gesamtenergie (2.21). Nach (2.18) ist hierin $E_{\eta\eta}\big|_{\eta=0, H=H_{cr}}$ positiv über dem Komplementärraum $N^{\perp} : (h, \eta) = 0$ für $\eta \in N$. In der Umgebung von $(\varepsilon, \mu) = (0, 1)$ werden die Stabilitätsverhältnisse demzufolge durch die Form

$$E_{\eta\eta}^{\mathrm{red.}}(s\eta_1;\, \varepsilon, \mu)\,(h, h)$$

über N bestimmt. Ihre Signatur stimmt wegen (3.7) überein mit der der Hesseschen Matrix zu (2.22), deren Eigenwerte

$$\lambda_{1,2}^{\pm} = 2s^{\pm}\big((\mu - 1) - 0{,}302s^{\pm}\big), \qquad \lambda_3^{\pm} = s^{\pm}\big(12{,}755s^{\pm} - (\mu - 1)\big),$$

$$\lambda_4^{\pm} = 3(\mu - 1)\, s^{\pm 3}, \quad \lambda_{5,6}^{\pm} = 0$$

sich in einfacher Weise berechnen lassen. $\lambda_{5,6}^{\pm} = 0$ ist Folge der Translationsinvarianz des Problems. Entwicklung

$$\frac{s^+}{\mu - 1} = 0{,}157 + 1{,}155\,\frac{\varepsilon}{(\mu - 1)^2} + \cdots,$$

$$\frac{s^-}{\mu - 1} = -1{,}555\,\frac{\varepsilon}{(\mu - 1)^2} + \cdots \quad \big(|\varepsilon| < \varepsilon_0(\mu - 1)^2, \quad (|\varepsilon|, |\mu - 1| < r_0)\big)$$

der Näherungen (3.8) liefert $\lambda_i^+ > 0$ $(i = 1, \ldots, 4)$ und $s^-\lambda_{1,2}^-$, $s^-\lambda_4^- > 0$, $s^-\lambda_3^- < 0$, wonach sich s^+ stabil in einer vollen Umgebung des kritischen Werts $\varepsilon = 0$ verhält, der Zweig s^- dagegen beiderseitig instabil verläuft.

IV. Anhang

Wir vereinbaren die folgenden Bezeichnungen: Sei $\sigma \geqq 0$ und $W_{0,\sigma} = L_2(S^-, e^{-2\sigma x_3}\, dV) \times L_2(S^+, e^{2\sigma x_3}\, dV)$ der Hilbertraum der Funktionenpaare $v = (v^-, v^+)$ mit der Norm

$$\|v\|_{0,\sigma}^2 = \int_{S^-} |v^-|^2\, e^{-2\sigma x_3}\, dV + \int_{S^+} |v^+|^2\, e^{2\sigma x_3}\, dV.$$

Für $m \geqq 1$ bezeichne $W_{m,\sigma}$ den Raum der Funktionen $v \in W_{0,\sigma}$ mit verallgemeinerten Ableitungen $D^\alpha v \in W_{0,\sigma}$ für $|\alpha| \leqq m$, die bis zur Ordnung $m - 1$ zudem Λ_1-periodisch sind. Nach bekannten Randeinbettungssätzen sind die Räume $W_{m,\sigma}$ Hilberträume unter der Norm

$$\|v\|_{m,\sigma}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{0,\sigma}^2.$$

Schließlich sei $V_{m,\sigma}$ ($m \geqq 1$) der durch

$$|v|^2_{m,\sigma} = \sum_{0<|\alpha|\leqq m} \|D^\alpha v\|^2_{0,\sigma} \tag{4.1}$$

normierte Hilbertraum der bis auf Konstante bestimmten Funktionen $v = (v^-, v^+)$ mit Λ_1-periodischen Ableitungen bis zur Ordnung $m - 1$. Sind

$$v^\pm = \sum_{\omega\in\Lambda_1'} v_\omega{}^\pm(x_3)\, e^{i\langle\omega,x\rangle} \tag{4.2}$$

die Fourierentwicklungen der Funktionen v^-, v^+, so ist die Norm (4.1) äquivalent zu

$$\sum_{\omega\in\Lambda_1'} |\omega|^{2m} (\|v_\omega{}^-\|^2 + \|v_\omega{}^+\|^2) + \sum_{\omega\in\Lambda_1'} (\|v_\omega{}^{-(m)}\|^2 + \|v_\omega{}^{+(m)}\|^2 + \|\dot v_\omega{}^-\|^2 + \|\dot v_\omega{}^+\|^2), \tag{4.3}$$

wenn wir mit

$$\|v_\omega{}^-\|^2 = \int_{-\infty}^{0} |v_\omega{}^-|^2\, e^{-2\sigma x_3}\, dx_3, \qquad \|v_\omega{}^+\|^2 = \int_{0}^{+\infty} |v_\omega{}^+|^2\, e^{2\sigma x_3}\, dx_3$$

die Normen der Fourierkoeffizienten in den Räumen $L_2\big((-\infty, 0),\ e^{-2\sigma x_3}\, dx_3\big)$, bzw. $L_2\big((0, +\infty),\ e^{2\sigma x_3}\, dx_3\big)$ bezeichnen.

Es gelten die Abschätzungen:

a) $\int |v^\pm(x_1, x_2, x_3)|^2\, e^{\pm 2\sigma x_3}\, dx_3 \leqq \text{const}\, \|v\|^2_{m,\sigma}$ $\quad (m \geqq 2)$;[4]

b) $\|\eta v\|_{m,\sigma} \leqq \text{const}\, \|\eta_m\|\, \|v\|_{m,\sigma}$ $\quad (m \geqq 3)$;

c) $e^{\pm 2\sigma x_3}\, \|v^\pm(.,.,x_3)\|_{L_2(\mathscr{P}_1)} \leqq \text{const}\, \|v\|_{1,\sigma}$.

Zu a): Unter der Voraussetzung $v \in W_{m,\sigma}$ ($m \geqq 2$) gilt für die Entwicklungen (4.2)

$$\begin{aligned}(\textstyle\sum |v_\omega{}^\pm|)^2 &\leqq \textstyle\sum (1 + |\omega|^2)^{-m} \sum (1 + |\omega|^2)^m\, |v_\omega{}^\pm|^2 \\ &\leqq \text{const} \textstyle\sum (1 + |\omega|^2)^m\, |v_\omega{}^\pm|^2,\end{aligned}$$

also

$$\int |v^\pm|^2\, e^{\pm 2\sigma x_3}\, dx_3 \leqq \text{const} \sum (1 + |\omega|^2)^m\, \|v_\omega{}^\pm\|^2 \leqq \text{const}\, \|v\|^2_{m,\sigma}.$$

Zu b): Zur Bestätigung von b) sind die Integrale

$$I = \int_{S^\pm} |D^\alpha \eta|^2\, |D^\beta v^\pm|^2\, e^{\pm 2\sigma x_3}\, dV \qquad (|\alpha| + |\beta| \leqq m)$$

abzuschätzen. Hierfür gilt bei $|\alpha| \leqq m - 2$ wegen der Sobolewschen Einbettungssätze für Funktionen von zwei Variablen

$$I \leqq \text{const}\, \|\eta\|_m{}^2 \int_{S^\pm} |D^\beta v^\pm|^2\, e^{\pm 2\sigma x_3}\, dV \leqq \text{const}\, \|\eta\|_m{}^2\, \|v\|^2_{m,\sigma}.$$

In den restlichen Fällen ($|\beta| = 0,1$) gilt infolge a)

$$I = \int_{\mathscr{P}_1} |D^\alpha \eta|^2\, dx_1\, dx_2 \int |D^\beta v^\pm|^2\, e^{\pm 2\sigma x_3}\, dx_3 \leqq \text{const}\, \|\eta\|_m{}^2\, \|v\|^2_{m,\sigma}.$$

[4]) Integration von $-\infty$ bis 0 bzw. von 0 bis $+\infty$.

Zu c): Für $v \in W_{1,\sigma}$ bestehen die Ungleichungen

$$|v_\omega^\pm(x_3)|^2 \leqq 2 \left| \int_{x_3}^{z} \dot{v}_\omega^\pm \, dx_3 \right|^2 + 2\,|v_\omega^\pm(z)|^2$$

$$\leqq 2 \left| \int_{x_3}^{z} e^{\mp 2\sigma x_3}\, dx_3 \right| \left| \int_{x_3}^{z} |\dot{v}_\omega^\pm|^2\, e^{\pm 2\sigma x_3}\, dx_3 \right| + 2\,|v_\omega^\pm(z)|^2$$

$$\leqq \frac{1}{\sigma}\, |e^{\mp 2\sigma z} - e^{\mp 2\sigma x_3}|\, \|\dot{v}_\omega^\pm\|^2 + 2\,|v_\omega^\pm(z)|^2.$$

Multiplikation mit $e^{\pm 2\sigma z}$ und Integration von x_3 bis $x_3 \pm \frac{1}{2\sigma} \ln(1 + 2\sigma\varepsilon)$ liefert

$$\varepsilon\, e^{\pm 2\sigma x_3}\, |v_\omega^\pm(x_3)|^2 \leqq \frac{1}{2\sigma^2}\,(2\sigma\varepsilon - \ln(1 + 2\sigma\varepsilon)\, \|\dot{v}_\omega^\pm\|^2 + 2\,\|v_\omega^\pm\|^2$$

$$\leqq \varepsilon^2\, \|\dot{v}_\omega^\pm\|^2 + 2\,\|v_\omega^\pm\|^2, \qquad \varepsilon > 0.$$

c) folgt hieraus nach Summation über das Gitter:

$$e^{\pm 2\sigma x_3} \int_{\mathscr{P}_1} |v^\pm(x_1, x_2, x_3)|^2\, dx_1\, dx_2 = 2\sqrt{3}\,\pi^2\, e^{\pm 2\sigma x_3} \sum |v_\omega^\pm(x_3)|^2$$

$$\leqq 2\sqrt{3}\,\pi^2 \sum \frac{\|\dot{v}_\omega^\pm\|^2}{1 + |\omega|^2} + 4\sqrt{3}\,\pi^2 \sum (1 + |\omega|^2)\, \|v_\omega^\pm\|^2$$

$$\leqq \text{const}\, \|v\|_{1,\sigma}^2 \;\blacksquare$$

Mit dem folgenden Hilfssatz beziehen wir uns auf Variationsgleichungen des Typs (2.9).

Hilfssatz 4.1: *Unter den Voraussetzungen* $0 \leqq \sigma < 2/\sqrt{3}$ *und* $f = (f_1, f_2, f_3) \in (W_{m,\sigma})^3$ gehört die Lösung $v \in V$ der Gleichungen

$$\begin{aligned} &\mu \int_{S^-} \nabla v^- \, \nabla \bar{\varphi}^-\, dV + \int_{S^+} \nabla v^+\, \nabla \bar{\varphi}^+\, dV = \int_{S^-} f_i^- \bar{\varphi}_{x_i}^-\, dV + \int_{S^+} f_i^+ \bar{\varphi}_{x_i}^+\, dV, \\ &v^+(x_1, x_2, 0) - v^-(x_1, x_2, 0) = \text{const}, \\ &\forall\, \varphi \in V: \varphi^+(x_1, x_2, 0) - \varphi^-(x_1, x_2, 0) = \text{const} \end{aligned} \tag{4.4}$$

zu $V_{m+1,\sigma}$. *Ferner gilt* $|v|_{m+1,\sigma} \leqq \text{const}\, \|f\|_{m,\sigma}$ *mit einer nur von m und σ abhängigen Konstanten.*

Beweis: Es bezeichne $v_\omega^\pm$, $\varphi_\omega^\pm$, $f_{i,\omega}^\pm$ die Fourierkoeffizienten der Funktionen $v^\pm$, $\varphi^\pm$, $f_i^\pm$ sowie $f_\omega^\pm = (f_{1,\omega}^\pm, f_{2,\omega}^\pm)$. Nach (4.4) genügen die Funktionen $v_\omega^\pm$ den Variationsgleichungen

$$\begin{aligned} &\mu \int_{-\infty}^{0} (\dot{v}_\omega^- \dot{\bar{\varphi}}_\omega^- + |\omega|^2\, v_\omega^- \bar{\varphi}_\omega^-)\, dx_3 + \int_{0}^{+\infty} (\dot{v}_\omega^+ \dot{\bar{\varphi}}_\omega^+ + |\omega|^2\, v_\omega^+ \bar{\varphi}_\omega^+)\, dx_3 \\ &= \int_{-\infty}^{0} (f_{3,\omega}^- \dot{\bar{\varphi}}_\omega^- - i\langle \omega, f_\omega^- \rangle\, \bar{\varphi}_\omega^-)\, dx_3 + \int_{0}^{+\infty} (f_{3,\omega}^+ \dot{\bar{\varphi}}_\omega^+ - i\langle \omega, f_\omega^+ \rangle\, \bar{\varphi}_\omega^+)\, dx_3. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ersetzung von φ_ω^-, φ_ω^+ durch $v_\omega^-\, e^{-2\sigma x_3}$ bzw. $v_\omega^+\, e^{2\sigma x_3}$ führt zu

$$\mu \left(\|\dot{v}_\omega^-\|^2 + |\omega|^2\, \|v_\omega^-\|^2 - 2\sigma \int_{-\infty}^{0} \dot{v}_\omega^- \bar{v}_\omega^-\, e^{-2\sigma x_3}\, dx_3 \right)$$

$$+ \|\dot{v}_\omega^+\|^2 + |\omega|^2\, \|v_\omega^+\|^2 + 2\sigma \int_{0}^{\infty} \dot{v}_\omega^+ \bar{v}_\omega^+\, e^{2\sigma x_3}\, dx_3 = L(v_\omega).$$

Hier ist

$$L(v_\omega) = \int_{-\infty}^{0} (f_{3,\omega}^{-}\bar{\dot{v}}_\omega^{-} - i\langle\omega, f_\omega^{-}\rangle\, \bar{v}_\omega^{-} - 2\sigma f_{3,\omega}^{-}\bar{v}_\omega^{-})\, e^{-2\sigma x_3}\, dx_3$$

$$+ \int_{0}^{+\infty} (f_{3,\omega}^{+}\bar{\dot{v}}_\omega^{+} - i\langle\omega, f_\omega^{+}\rangle\, \bar{v}_\omega^{+} + 2\sigma f_{3,\omega}^{+}\bar{v}_\omega^{+})\, e^{2\sigma x_3}\, dx_3.$$

Nach Abschätzung der gemischten Terme:

$$2\sigma \left|\int \dot{v}_\omega^{\pm}\bar{v}_\omega^{\pm}\, e^{\pm 2\sigma x_3}\, dx_3\right| \leqq 2\sigma\, \|\dot{v}_\omega^{\pm}\|\, \|v_\omega^{\pm}\| \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\, \|\dot{v}_\omega^{\pm}\|^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma\, \|v_\omega^{\pm}\|^2$$

folgt

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sigma\right) (\mu\, \|\dot{v}_\omega^{-}\|^2 + \mu\, |\omega|^2\, \|v_\omega^{-}\|^2 + \|\dot{v}_\omega^{+}\|^2 + |\omega|^2\, \|v_\omega^{+}\|^2)$$

$$\leqq |L(v_\omega)| \leqq \text{const}\,\big(\|f_\omega^{-}\|\, (\|\dot{v}_\omega^{-}\| + |\omega|\, \|v_\omega^{-}\|) + \|f_\omega^{+}\|\, (\|\dot{v}_\omega^{+}\| + |\omega|\, \|v_\omega^{+}\|)\big),$$

also

$$\mu\, \|\dot{v}_\omega^{-}\|^2 + \mu\, |\omega|^2\, \|v_\omega^{-}\|^2 + \|\dot{v}_\omega^{+}\|^2 + |\omega|^2\, \|v_\omega^{+}\|^2 \leqq \text{const}\, (\|f_\omega^{-}\|^2 + \|f_\omega^{+}\|^2)$$

mit einer neuen Konstanten. Wegen (4.3) folgt hieraus die Behauptung für $m = 0$. Die weiteren Abschätzungen ergeben sich aus den Eulerschen Gleichungen

$$-\ddot{v}_\omega^{\pm} + |\omega|^2\, v_\omega^{\pm} = -i\langle\omega, f_\omega^{\pm}\rangle - \dot{f}_{3,\omega}^{\pm}$$

zu (4.5) nach Differentiation ∎

Beweis von Satz 2.2: Im Hinblick auf b) und Hilfssatz 4.1 lassen sich die Variationsgleichungen (2.4), (2.5) auch über den Räumen $V_{m,\sigma}\big(0 \leqq \sigma < 2/\sqrt{3}\big)$ iterativ auflösen[5]). Wir erschließen hieraus zunächst die Konvergenz der Entwicklung (2.7) über diesen Räumen, und hiervon ausgehend die der gliedweise differenzierten Reihen

$$Dv = \sum_{i\geqq 0, j\geqq 1} (\mu - 1)^i\, Dv_{ij},\quad Dv^{\pm}|_{x_3=0} = \sum_{i\geqq 0, j\geqq 1} (\mu - 1)^i\, Dv_{ij}^{\pm}|_{x_3=0} \tag{4.6}$$

über $W_{m-1,\sigma}$ bzw. wegen c) über H_{m-2}.

Zum Beweis von Satz 2.2 berechnen wir die erste Variation des Funktionals J. Wir betrachten (2.7) längs der Schar $\eta + th$ und setzen $v(\eta + th)\,(x_1, x_2, x_3) = v(t; x_1; x_2, x_3)$ sowie $\dot{v} = \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0}$. Differentiation des Minimalwerts (2.10) liefert

$$\langle J_\eta(\eta), h\rangle = \frac{d}{dt} J(\eta + th)|_{t=0} = 2 \sum_{n=0}^{2} \big(\mu b_n^{-}(\eta^n; v^{-}, \dot{v}^{-}) + b_n^{+}(\eta^n; v^{+}, \dot{v}^{+})\big)$$

$$+ \mu b_1^{-}(h; v^{-}, v^{-}) + b_1^{+}(h, v^{+}, v^{+}) + \mu b_2^{-}(\eta, h; v^{-}, v^{-}) + b_2^{+}(\eta, h; v^{+}, v^{+}).$$

Die einzelnen Anteile lassen sich wie folgt umformen: Wegen der Variationsgleichungen für v und der aus (2.5) durch Differentiation hervorgehenden Beziehung

$$\dot{v}^{+} - \dot{v}^{-} = h + \text{const} \quad \text{längs} \quad x_3 = 0$$

gilt

$$\sum_{n=0}^{2} \big(\mu b_n^{-}(\eta^n; v^{-}, \dot{v}^{-}) + b_n^{+}(\eta^n; v^{+}, \dot{v}^{+})\big)$$

$$= \int_{\mathscr{P}_1} (v_{x_3}^{+} - v_{x_1}^{+}\eta_{x_1} - v_{x_2}^{+}\eta_{x_2} + v_{x_3}^{+}\, |\nabla\eta|^2)\, h\, dx_1\, dx_2.$$

---

[5]) Man beachte $v_1 \in V_{m,\sigma}$.

Partielle Integration der restlichen Anteile und Beachtung der Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen für v ergibt

$$\mu b_1^-(h; v^-, v^-) + b_1^+(h; v^+, v^+) + \mu b_2^-(\eta, h; v^-, v^-) + b_2^+(\eta, h; v^+, v^+)$$
$$= \int_{\mathscr{S}_1} \left(\mu(v_{x_1}^{-2} + v_{x_2}^{-2} + |\nabla\eta|^2 v_{x_3}^{-2} - (v_{x_1}^{+2} + v_{x_2}^{+2} + |\nabla\eta|^2 v_{x_3}^{+2})\right) h \, dx \, dx_2.$$

Da die Integranden dieser Ausdrücke wegen (4.6) zu H_{m-2} gehören, folgt die Behauptung schließlich aus der Tatsache, daß diese Räume unter der Voraussetzung $m \geqq 4$ Banachalgebren sind (s. [1]).

LITERATUR

[1] Adams, R. A.: Sobolew spaces. New York 1975.
[2] Beyer, K.: Zur Stabilität einer ferromagnetischen Flüssigkeit in einem vertikalen Magnetfeld. ZAMM 60 (1980), 235–240.
[3] Gailitis, A.: Formation of the hexagonal pattern on the surface of a ferromagnetic fluid in an applied magnetic field. J. Fluid Mech. 82 (1977), 401–413.
[4] Mazja, W.: Einbettungssätze für Sobolewsche Räume. Teil 1. Leipzig 1979.
[5] Sattinger, D. H.: Group representation theory, bifurcation theory and pattern formation. J. Functional Anal. 28 (1979), 58–101.
[6] Zeidler, E.: Zur Verzweigungstheorie und zur Stabilitätstheorie der Navier-Stokesschen Gleichungen. Math. Nachr. 52 (1972), 167–205.

Manuskripteingang: 2. 4. 1982; in revidierter Fassung: 14. 10. 1982

VERFASSER:

Prof. Dr. Klaus Beyer
Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität
DDR-2500 Rostock, Universitätsplatz 1