Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (5) 1983, S. 401–409

Инвариантные формы и некоторые структурные свойства гидродинамических уравнений Эйлера

А. А. Дезин

In der Arbeit wird eine neue invariante Form der Eulerschen Gleichungen der Hydrodynamik vorgeschlagen und werden einige qualitative Eigenschaften der Lösungen dieser Gleichungen angegeben.

В статье преложена новая инвариантная форма гидродинамических уравнений Эйлера и установлены некоторые качественные свойства решений этих уравнений.

A new invariant form of hydrodynamics Euler equations is introduced and certain qualitative properties of solutions are established.

В плоском стационарном случае классическая форма записи гидродинамических уравнений Эйлера, при отсутствии внешних сил, имеет вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Пара функций (u, v), удовлетворяющая (1), может рассматриваться как задающая некоторое достаточно гладкое векторное поле $\mathfrak{U}$. Физическая интерпретация заключается в утверждении, что это поле является полем скоростей некоторого течения идеальной (невязкой и несжимаемой) жидкости. Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x, y)}{u(x, y)}$$

будут линиями тока соответствующего течения.

С системой (1), несмотря на ее кажущуюся простоту, связан целый ряд нерешенных математических проблем, при изучении которых использовались самые разнообразные подходы. Один из них связан с привлечением форм записи, использующих дифференциально-геометрический формализм. На нем мы и хотим остановиться в основной части статьи. В заключительном § 4, стоящем несколько особняком, рассмотрены некоторые специальные свойства плоских течений.

§ 1. Инвариантные формы уравнений Эйлера

Наибольшей известностью пользуется инвариантная запись, предложенная в [1] и использующая аналогию, существующую между гидродинамическими уравнениями и уравнениями движения твердого тела с одной закрепленной точкой [2].

Последние могут быть записаны (в нестационарном случае) в виде

$$\frac{d\omega}{dt} = B(\omega, \omega), \tag{2}$$

где ω — элемент некоторой алгебры Ли $\mathfrak{A}$, а $B: \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ — специальным образом определенная билинейная операция. Если $\mathfrak{A}$ — алгебра Ли группы SO(3), то ω — вектор угловой скорости в системе координат жестко связанной с телом, и уравнения (2) — классические уравнения Эйлера. Если же заменить SO(3) на S diff V — группу сохраняющих объём диффеоморфизмов области V, то аналогом уравнений (2) будут (в стационарном случае) уравнения эквивалентные (1).

В [3] была поставлена задача отыскания записи равнений (1), позволяющей указать комбинаторный (разностный) аналог этих уравнений на прямоугольной сетке, рассматриваемой как 2-мерный комплекс (в смысле теории гомологий). На этом пути прежде всего следует отметить, что $\mathfrak{U} = (u, v)$ естественно рассматривать как ковектор (или I-форму), поскольку последнее из уравнений (1) (div $\mathfrak{U} = 0$) есть не что иное, как запись интегрального закона сохранения:

$$\int_{\partial Q} * \mathfrak{U} = \int_{Q} d * \mathfrak{U} = 0, \tag{3}$$

в котором интегрирование ведется по произвольному объему Q, лежащему в рассматриваемой области. Операция d в (3) — внешнее дифференцирование, а $*$ — так называемый оператор метрического сопряжения, сопоставляющий форме степени p форму степени $n - p$ (n-размерность пространства) ,,трансверсальную'' к исходной [4]. Таким образом, первый член цепочки (3) — классический интеграл от нормальной составляющей $\mathfrak{U}$, взятый по границе ∂Q объема Q. Соответственно последнее из уравнений (1) должно быть записано в форме

$$d * \mathfrak{U} = 0. \tag{4}$$

Известно далее, что конвективная группа членов в первых двух уравнениях (1) (члены, содержащие u, v и их производные) представляют собой производную Ли [4], взятую от $\mathfrak{U}$ по вектору $J\mathfrak{U}$, где $J : \Lambda^1 \to T^1$ — операция, сопоставляющая ковектору вектор. Остается использовать классическую связь производной Ли D_ξ с внешним дифференцированием d и внутренним умножением [4]:

$$D_\xi \mathfrak{U} = \xi \lrcorner\, d\mathfrak{U} + d\langle \xi, \mathfrak{U} \rangle,$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ — свертка вектора с ковектором, а $\xi \lrcorner$ определяется при произвольном векторе η и 2-ковекторе ϑ равенством

$$\langle \xi \wedge \eta, \vartheta \rangle = \langle \eta, \xi \lrcorner \vartheta \rangle,$$

в котором $\wedge$ — внешнее умножение. Выражая соответствующим образом $D_{J\mathfrak{U}}\mathfrak{U}$, получим для первой пары уравнений (1) запись вида

$$(J\mathfrak{U}) \lrcorner\, d\mathfrak{U} + d\gamma = 0, \tag{5}$$

где

$$\gamma = p + \langle J\mathfrak{U}, \mathfrak{U} \rangle \tag{6}$$

— новая неизвестная функция (скаляр, для которого $d\gamma$ не что иное, как grad γ).

Если вернуться к координатной записи, то замена (6) соответствует переходу к так называемой форме Громеко-Лэмба [5] уравнений Эйлера. В [3] был подробно рассмотрен описанный переход и разностные уравнения, индуцируемые записью (4)—(5) на прямоугольной сетке.

В данной статье мы опишем переход к инвариантной форме уравнений (1), использующий приемы близкие к стандартным процедурам прикладной гидродинамики.

Наряду с условием соленоидальности (4) рассмотрим другую, важнейшую характеристику поля $\mathfrak{U}$ — вихрь. Мы введем его соотношением

$$d\mathfrak{U} = *\,\omega. \tag{7}$$

Мы хотим, чтобы при $n = 2$ вихрь был скаляром, а при $n = 3$ — вектором (в соответствии с классической традицией), что и объясняет использование в (7) операции $*$.

Приводимый ниже формализм делает чрезвычайно выпуклыми некторые принципиальные различия между двумерным (плоским), трехмерным и n-мерным ($n \geqq 4$) случаями. Чтобы подчеркнуть это, мы будем иногда специально указывать явно зависимость от n (размерности пространства) степени входящих в рассмотрение форм. Так в (7), вообще говоря, $\omega \in \Lambda^{n-2}$ (пространству дифференциальных форм степени $n = 2$).

Форму $\chi \in \Lambda^{n-2}$ назовем *множителем поля* $\mathfrak{U}$, если

$$d * (\mathfrak{U} \wedge \lambda) = 0,$$

где $\wedge$ — внешнее умножение. Таким образом, если χ — множитель, то для $\mathfrak{U} \wedge \chi \in \Lambda^{n-1}$ снова выполняется соотношение, аналогичное (4).

Определение: Поле $\mathfrak{U}$ назовем *Эйлеровым*, если его вихрь является одновременно множителем, то есть

$$d * (\mathfrak{U} \wedge \omega) = 0. \tag{8}$$

Равенство (8) — часто используемое в гидродинамике следствие уравнений Эйлера [2]. Если заметить теперь, что $\omega = \pm * d\mathfrak{U}$ (знак зависит от n; вообще $** = (-1)^{p(n-1)}$, где p — степень формы, а n — размерность пространства), то из (8) следует

$$d * (\mathfrak{U} \wedge * d\mathfrak{U}) = 0. \tag{9}$$

Предположим теперь, что область V, в которой ведутся рассмотрения, односвязна. Тогда из (9) следует существование скаляра γ такого, что

$$* (\mathfrak{U} \wedge * d\mathfrak{U}) = d\gamma. \tag{10}$$

При $n = 2, 3$ это снова (после присоединения (4)) обычная запись уравнений Эйлера в форме Громеко-Лэмба. Равенство (10) эквивалентно, конечно, равенству (5), но существенно использует риманову метрику и то, что $\mathfrak{U} \in \Lambda^1$. Интересно, однако, отметить, что система разностных уравнений, индуцируемая (в соответствии с рецептами из [3]) на прямоугольной сетке записью (10), отличается от системы, полученной из (5) в [3].

§ 2. Некоторые общие следствия

Как отмечалось, инвариантная запись (10) весьма удобна, в частности, при выяснении вопроса, какие свойства уравнений Эйлера специфичны для $n = 2$ или $n = 3$, а какие — присущи произвольной размерности. В данном параграфе мы рассмотрим, в основном, „общие“ свойства.

Применяя к (10) оператор $*$ и домножая (внешне) на $\mathfrak{U}$, получим соотношение

$$\mathfrak{U} \wedge * d\gamma = 0,$$

дающее так называемую *теорему Бернулли*. Для перехода к классической ее форме надо использовать связь γ с p, даваемую равенством (6).

Простейшее нетривиальное решение уравнения (9) можно получуть, полагая

$$d\mathfrak{U} = 0. \tag{11}$$

Соответствующее течение называется *потенциальным*. Поле, удовлетворяющее уравнениям (4), (11) — *гармоническое*. Каждая его компонента (гладкая) является гармонической функцией.

Соленоидальность (справедливость равенства (4)) эквивалентна, по крайней мере локально, существованию формы $\psi \in \Lambda^{n-2}$ такой, что $* \mathfrak{U} = d\psi$. При $n = 2$ ($n = 3$) это классическая функция (вектор) тока. Он связан с вихрем соотношением

$$\omega = \pm * d * d\psi. \tag{12}$$

Если использовать для $* d *$ стандартное обозначение $* d * \equiv \pm\delta : \Lambda^p \to \Lambda^{p-1}$, то, как нетрудно заметить, при выборе ψ всегда можно предполагать

$$\delta\psi = 0. \tag{13}$$

При выполнении этого условия, воспользовавшись равенством $d\delta + \delta d = -\triangle$ (обобщение классических соотношений $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \triangle f$; $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \xi - \operatorname{grad} \operatorname{div} \xi = \triangle\xi$), можем представить (12) в виде

$$-\triangle\psi = \omega. \tag{14}$$

При $n = 2$ дополнительное условие (13) выпадает и (14) выполняется автоматически.

Один из способов построения решений уравнения Эйлера (наряду с рассмотрением потенциальных течений (11)) — априорное задание вихря ω, после чего задача отыскания $\mathfrak{U}$ становится линейной. Вихрь, однако, должен быть *допустимым*, т. е. удовлетворять уравнению (8). Возникающую здесь проблематику мы подробнее рассмотрим в § 4 при $n = 2$. В случае произвольного n мы вынуждены ограничиться лишь некоторыми общими замечаниями.

Уравнение $d * \mathfrak{U} = f \in \Lambda^n$ вполне интегрируемо и, следовательно, общее решение его зависит от $n - 1$ произвольной функции. В частности, произвольное решение соответствующего однородного уравнения может быть представлено в виде

$$* \mathfrak{U} = d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_{n-1}. \tag{15}$$

Подставив (15) в (8), можем искать допустимий вихрх ω как решение уравнений

$$d * \{* (d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_{n-1}) \wedge \omega\} = 0. \tag{16}$$

При $n = 2$ единственная функция φ, входящая в (16), есть не что иное, как рассмотренная выше функция тока ψ. Вытекающая в этом случае из (16) зависимость φ и ω послужит основой рассмотрений в § 4, специфичных для плоского случая.

При $n = 3$ можно выделить специальный класс течений, полагая $\omega = d\eta$, где η — скалярная функция. Как это следует их (7), функция η должна быть при этом гармонической. Можно добиваться обращения в нуль круглой скобки в (16) за счет введения зависимости, обращающей в нуль определитель со столбцами $d\eta$, $d\varphi_1$, $d\varphi_2$.

При $n > 3$ запись (8) в форме (16) вряд ли несет содержательную информацию об эйлеровых течениях.

Сделаем некоторые замечания о нестационарном случае. Стандартная форма нестационарных уравнений в нашей записи имеет вид

$$\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + *(\mathfrak{U} \wedge * d\mathfrak{U}) + d\gamma = 0. \tag{17}$$

(С добавлением уравнения (4). Удобно, следуя традиции, изменить знак перед $d\gamma$). Применяя к (17) оператор $*$ и домножая (внешне) слева на $\mathfrak{U}$, можен получить инвариантную форму одного из классических законов сохранения. Для этото заметим, что

$$\mathfrak{U} \wedge * d\gamma = d\gamma \wedge * \mathfrak{U}$$

и

$$\int_V d\gamma \wedge * \mathfrak{U} = \int_V d(\gamma \wedge * \mathfrak{U}) - \int_V \gamma \wedge d * \mathfrak{U} = 0,$$

если V — многообразие без границы, или на границе выполняется условие $\gamma|_{\partial V} = 0$ или $* \mathfrak{U}|_{\partial V} = 0$ (мы пользуемся тем, что $d * \mathfrak{U} = 0$).
Следовательно

$$\int_V \mathfrak{U} \wedge \frac{\partial}{\partial t} * \mathfrak{U} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \mathfrak{U} \wedge * \mathfrak{U} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{U}, \mathfrak{U})_V = 0$$

и остается проинтегрировать последнее равенство по t в пределах от 0 до T; (круглые скобки — инвариантный скалярный квадрат ковектора скорости).

С другой стороны, применяя к (17) оператор d, а затем — оператор $*$, получим так называемое *уравнение Гельмгольца для вихря*:

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega + * d * (\mathfrak{U} \wedge \omega) = 0.$$

§ 3. Двумерные и осесимметричные течения

3.1. Не обращаясь к стандартному плоскому случаю, рассмотрим наши уравнения на двумерной сфере радиуса r. Воспользовавшись обычной формой сферических координат: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = r\sin\varphi\sin\vartheta$, , можем считать сферу параметризованной переменными $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, $0 \leqq \vartheta < 2\pi$. Представив $\mathfrak{U}$ в виде

$$\mathfrak{U} = u(\varphi, \vartheta)\, d\varphi + v(\varphi, \vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta$$

и заметив, что метрический тензор имеет компоненты $g_{11} = r^2$, $g_{22} = r^2\sin^2\varphi$, $g_{12} = 0$, можем записать [7: гл. V]

$$* \mathfrak{U} = \frac{1}{\sin\varphi} v\, d\varphi - \sin\varphi u\, d\vartheta.$$

Воспользовавшись (4) и вводя функцию тока ψ соотношением $* \mathfrak{U} = d\psi$, получим

$$\psi_\varphi = \frac{1}{\sin\varphi} v, \qquad \psi_\vartheta = (-\sin\varphi)\, u.$$

Соотношение между вихрем и функцией тока примет вид

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(\psi_\varphi \sin\varphi) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\psi_\vartheta}{\sin\varphi}\right) = r^2(\sin\varphi)\,\omega. \tag{18}$$

Условие допустимости вихря: $d*(\mathfrak{U}\wedge\omega)=0$ немедленно приводит к связи $\psi_\varphi\omega_\vartheta - \psi_\vartheta\omega_\varphi = 0$, имеющей инвариантный характер и ту же форму, что и в плоском случае.

Уравнение (18) является координатной записью уравнения (14). Последнее разрешимо (однозначно, с точностью до постоянной), на поверхности сферы лишь при условии ортогональности ω константам (или условии $\int *\omega = 0$). Простейшее Эйлерово течение — вращение ,,жидкости'' как целого: $\psi(\varphi,\vartheta)=\varphi$; $u=0$, $v=-\sin\varphi$; $\omega=-r^{-2}\operatorname{ctg}\varphi$ (при $\varphi=0, 2\pi$ координаты не являются регулярными и наши соотношения теряют смысл).

3.2. В качестве второго примера рассмотрим с точки зрения введенного формализма осесимметричные течения [6: гл. 15]. Пусть (x, r, ϑ) — цилиндрические координаты ($y = r\cos\vartheta$, $z = r\sin\vartheta$) и ось x — ось симметрии течения $\mathfrak{U}=(u,v,w)$. Соответственно

$$\mathfrak{U} = u(x,r)\,dx + v(x,r)\,dr + w(x,r)\,d\vartheta.$$

Под осесимметричным принято понимать плоское осесимметричное течение, т. е. предполагается дополнительно $w\equiv 0$. Снова, согласно [7: гл. V]

$$*\,\mathfrak{U} = \frac{1}{r}\,w\,dx\wedge dr - rv\,dx\wedge d\vartheta + ru\,dr\wedge d\vartheta. \tag{19}$$

Равенство (4) (с учетом $w\equiv 0$) приводит к классической форме записи в цилиндрических координатах равенства нулю дивергенции:

$$ru_x + rv_r + v = 0.$$

Одновременно равенство (4) влечет (по крайней мере локально) существование ковектора $\psi = \psi_1\,dx + \psi_2\,dy + \psi_3\,dz$ такого, что

$$*\,\mathfrak{U} = d\psi = (\psi_{2,x} - \psi_{1,r})\,dx\wedge dr + (\psi_{3,x} - \psi_{1,\vartheta}\,dx\wedge d\vartheta$$
$$+ (\psi_{3,r} - \psi_{2,\vartheta})\,dr\wedge d\vartheta.$$

Сравнение с (19) дает

$$\psi_{3,r} = -rv, \qquad \psi_{3,x} = ru, \qquad \psi_{2,x} - \psi_{1,r} = 0.$$

Последнее равенство не представляет интереса, а из двух первых следует существование функции $S(x,r)\equiv\psi_3(x,r)$, так называемой функции Стокса [6], позволяющей представить $\mathfrak{U}$ в виде

$$\mathfrak{U} = \frac{1}{r}\,S_r\,dx - \frac{1}{r}\,S_x\,dr.$$

При этом на любой меридиональной плоскости (например, на плоскости $z=0$) линии $S(x,r)=\mathrm{const}$ будут линиями тока течения $\mathfrak{U}$.

Вводя в рассмотрение вихрь $\Omega = \omega_1\,dx + \omega_2\,dr + \omega_3\,d\vartheta$ и записывая соотношение (7), видим, что в Ω отлична от нуля лишь компонента $\omega_3\equiv\omega(x,r)$, а само равенство (7) эквивалентно скалярному равенству

$$-S_{xx} - S_{rr} + \frac{1}{r} S_r = \omega, \tag{20}$$

связывающему функции S и ω.

Условие эйлеровости течения, определяемого заданием вихря ω и найденной из (20) (при соответствующих граничных условиях) функцией $S(x, r)$ (условие $d * (\mathrm{U} \wedge \omega) = 0$) будет иметь вид

$$S_x\omega_r - S_r\omega_x - \frac{2}{r} S_x\omega = 0. \tag{21}$$

Таким образом, как это показывают приведенные соотношения, вихрь $\omega = \omega(x, y)$, являющийся допустимым в плоском случае, не может быть, вообще говоря, отождествлен с вихрем $\omega(x, r)$, допустимым в осесимметрическом. Общая задача, о сопоставлении плоскому течению ,,соответствующего" осесимметричного остается нерешенной.

3.3. В заключение отметим, что классические процедуры [6: стр. 70] отыскания, например, вида оператора $\triangle$ в сферических координатах также есть частный случай применения дифференциально-геометрического формализма. Обычно используемые при этом так называемые ,,параметры Ламэ" суть не что иное, как корни квадратные из компонент g_{11}, g_{22}, g_{33} метрического тензора.

§ 4. Структурные свойства плоских эйлеровых течений и задача о допустимом вихре

Несмотря на кажущуюся простоту уравнений (1), попытка использования применительно к ним обычных методов исследования уравнений в частных производных, связанных с рассмотрением решений тех или иных граничных задач, наталкивается на принципиальные трудности. Они связаны, в первую очередь, с отсутствием достаточно общих теорем существования и единственности решений.

Так, при рассмотрении уравнений (1) в простейшей прямоугольной области $V: |x| \leqq \alpha, 0 \leqq y \leqq 1$ для граничной задачи, заключающейся, например, в задании функции u на отрезках $|x| = \alpha, 0 \leqq y \leqq 1$, функции v — на верхней и нижней сторонах и, дополнительно, задании на части границы вихря или давления, существование и единственность решения удается пока доказать лишь при весьма жестких дополнительных ограничениях [8], гарантирующих отсутствие в V особых точек поля U (точек, где $u^2 + v^2 = 0$). Природу возникающих трудностей иллюстрирует

Утверждение 1: *Пусть $r_P(x, y)$ — евклидово расстояние до фиксированной точки $P \in \mathbf{R}^2$, f — произвольная гладкая функция, определенная на $[0, \infty)$, $f(0) = 0$. Тогда течение, определяемое функцией тока $\psi(x, y) = f(r_P)$, эйлерово.*

Доказательство: Достаточно рассмотреть случай $P = 0$. Тогда

$$u = f_r'y/r, \qquad v = -f_r'x/r; \qquad \omega = -\triangle\psi = -f_r'' - f_r'1/r$$

и можно записать представление

$$v\omega = \varphi(r)\, x/r, \qquad -u\omega = \varphi(r)\, y/r,$$

откуда следует существование функции γ, входящей в уравнения Эйлера (в форме Громеко—Лемба) ∎

Следствие: *В ограниченной области V существует континуум различных эйлеровых течений, удовлетворяющих условиям $u = v = p = 0$ на границе V.*

Действительно, достаточно брать вышеприведенную функцию финитной в V. Сказанное оправдывает поиски методов изучения структурных свойств эйлеровых течений (или соответствующих векторных полей), однозначно опеределяемых той или иной системой условий. Под структурными свойствами понимаются, в основном, характер и расположение особых точек поля $\mathfrak{U}$. В [9] была проведена классификация по этому признаку некоторого класса потенциальных течений, определяемых в прямоугольнике системой граничных условий, и рассмотрен, в отдельных случаях, вопрос об изменении структуры этих течений при переходе от $\omega = 0$ к различным значениям $\omega = \text{const}$. Были указаны критические значения параметра ω, при переходе через которые у векторного поля появляются особые точки типа центра (возникает вихрь).

Для непотенциальных течений одним из наиболее простых и распространенных способов задания однозначно определенного поля $\mathfrak{U}$ в области V является задание вихря ω и некторой системы граничных условий для функции ψ, позволяющей определить ее из уравнения (14). Задача отыскания течения сводится при этом к линейной, но одновременно, как отмечалось в § 2, неизбежно возникает проблема допустимости вихря, ибо не при любом задании ω найденная описанным выше способом функция тока ψ будет определять эйлерово течение.

В [10] было проведено рассмотрение плоских течений, отвечающих связи

$$\omega = \mu(\psi) \quad \text{или} \quad \psi = \nu(\omega), \tag{22}$$

вытекающей из (17). Это рассмотрение осложняется тем обстоятельством, что классическое утверждение о зависимости функций, связанных соотношением (17), носит, вообще говоря, локальный характер и опирается на предположение регулярности поля градиентов функции ψ, ω. Но, во всяком случае, каждое течение, для которого существует хотя бы одна из связей (22) (с достаточно гладкой функцией μ или ν) является эйлеровым. Обратное верно не всегда.

Утверждение 2: *Эйлерово течение, отвечающее функциям*

$$\psi = x - x^4, \qquad \omega = 12x^2,$$

не допускает первой из связей (22) *в окрестности прямой $x = 4^{-1/3}$ и второй — в окрестности прямой $x = 0$.*

Непосредственная проверка этого утверждения элементарна.

Условия, выясняющие необходимость для эйлерова течения наличия по крайней мере одной из связей (22) позволяют установить (см. [10]):

Утверждение 3: *В области $1 > y > x > 0$ не существует эйлерова течения с вихрем $\omega(x, y) = xy$.*

Наличие соотношения (21) в осесимметричном случае открывает возможность проведения и здесь аналогичных построений.

Задача о допустимом вихре существенно усложняется при переходе от локальных рассмотрений к граничным задачам. Приводимый ниже пример показывает существенную зависимость допустимости от граничных условий.

Пусть V определена неравенствами $|x| \leqq \alpha$, $|y| \leqq \pi/2$. Рассмотрим в V семейство функций ω вида

$$\omega = \beta \cos y, \qquad \beta = \mathrm{const},$$

и найдем решения уравнения

$$-\triangle\psi = \omega \equiv \beta \cos y, \tag{23}$$

присоединив к нему граничные условия

$$\psi(-\alpha, y) = -\cos y, \qquad \psi(\alpha, y) = \psi(x, \pm\pi/2) = 0.$$

Соответствующее решение единственно и дается функцией

$$\psi(x, y) = \xi(x) \cos y,$$

где

$$-\xi'' + \xi = \beta, \qquad \xi(-\alpha) = -1, \qquad \xi(\alpha) = 0,$$

или

$$\xi(x) = \beta - (\mathrm{sh}\, 2\alpha)^{-1} [\beta\, \mathrm{sh}\, (\alpha + x) + (1 + \beta)\, \mathrm{sh}\, (\alpha - x)].$$

Ни при каком значении $\beta \neq 0$ соответствующее поле $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$ не будет эйлеровым. В то же время, если освободить решения уравнения (23) от граничных условий, то при любом β будут существовать соответствующие функции тока, определяющие эйлеровы течения. Например

$$\psi = \beta \cos y, \qquad \beta = \mathrm{const}.$$

С приведенными рассмотрениями связан, как это очевидно, широкий круг задач, остающихся пока мало исследованными.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Арнольд, В. И.: Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hidrodynamique des fluides parfaits. Ann. Inst. Fourier **10, 1** (1966), 319–361.

[2] Глезер, Е. Б., Должанский, Ф. В., и А. М. Обухов: Системы гидродинамического типа и их применение. Изд-во Наука: Москва 1981.

[3] Дезин, А. А.: Некоторые модели, связанные с уравнениями Эйлера. Дифференциальные уравнения **VI, 1** (1970), 17–26.

[4] Стернберг, С.: Лекции по дифференциальной геометрии. Изд-во Мир: Москва 1969.

[5] Кочин, Н. Е., Кибель, И. А., и Н. В. Розе: Теоретическая гидродинамика. Физматгиз 1963.

[6] Милн-Томсон, Л. М.: Теоретическая гидродинамика. Изд-во Мир: Москва 1963.

[7] де Рам, Ж.: Дифференцируемые многообразия. Изд-во Иностр. лит.: Москва 1956.

[8] Алексеев, Г. В.: Единственность некоторых течений идеальной жидкости. Динамика сплошной среды **XV**. Новосибирск 1973, 7–18.

[9] Дезин, А. А.: Об одном классе векторных полей. Комплексный анализ и его приложения (сборник статей). Изд-во Наука: Москва 1978.

[10] Трошкин, О. В.: О некоторых свойствах эйлеровых полей. Дифференциальные уравнения, **18, 1** (1982), 138–144.

Manuskripteingang: 07. 04. 1982

VERFASSER:

Проф. др. Алексей Алексеевич Дезин
Математический Институт им. В. А. Стеклова АН СССР
СССР-117966, ГСП — 1 Москва, ул. Вавилова 42