Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 2 (5) 1983, S. 427–442

Gleichmäßige asymptotische Entwicklungen für unvollständige Integrale

H.-J. Schell

Es wird ein Integraltyp betrachtet, bei dem der Integrand $\exp(-g(s,t))$ für alle (reellen) s in einer Umgebung von s_0 ein einziges Maximum in $t = y(s)$, $a(s) < y(s) < b(s)$ besitzt, die obere Grenze b ist und die untere Grenze x in $[a, b]$ variieren kann. Für Integrale dieses Typs wird eine asymptotische Entwicklung hergeleitet, welche für $s \to s_0$ und gleichmäßig in bezug auf alle $x \in [a, b]$ gilt. Die Ergebnisse werden auf die unvollständige Gamma-Funktion und die unvollständige Beta-Funktion angewendet.

Рассматривается тип интеграла, в котором подинтегральная функция $\exp(-g(s,t))$ при всех (действительных) s в окрестности точки s_0 имеет единственный максимум при $t = y(s)$, $a(s) < y(s) < b(s)$, и в котором интегрирование ведется от нижнего предела $x(s)$, где функция $x(s)$ принимает значения в $[a, b]$, до верхнего предела b. Для интеграла такого типа выводится асимптотическое разложение, имеющее место при $s \to s_0$ равномерно относительно $x \in [a, b]$. Результаты применяются к неполной гамма-функции и неполной бета-функции.

A type of integral is considered in which the integrand $\exp(-g(s,t))$ has an only maximum in $t = y(s)$, $a(s) < y(s) < b(s)$ for all (real) s near s_0, the upper limit is b and the lower limit can vary in $[a, b]$. For integrals of this type an asymptotic expansion is derived holding for $s \to s_0$ and uniformly with respect to all $x \in [a, b]$. The results are applied to the incomplete gamma function and incomplete beta function.

1. Einführung

Diese Arbeit knüpft an Ergebnisse aus [6] an. Wie dort interessieren wir uns für asymptotische Entwicklungen von Integralen mit zwei reellen Parametern, aber jetzt soll unter dem Integral nur die asymptotische Variable s auftreten, zu der als zweite Variable die untere Grenze x hinzukommt:

$$F(s, x) = \int_x^b e^{-g(s,t)}\, dt. \tag{1}$$

Es sei $s \in S \subset \mathbf{R}$, und die nicht-asymptotische Variable x variiere auf einem Intervall $[a, b]$ (dieses kann auch offen oder halboffen sein, a und b können von s abhängen, $a = -\infty$ oder $b = +\infty$ ist zugelassen). Die Funktion $g(t)$ möge für alle $s \in S$ eine einzige stationäre Stelle $t = y$ mit $a < y < b$, $g_2(y) > 0$ besitzen (wir schreiben bei g jeweils nur das letzte Argument; Indizes bedeuten partielle Ableitungen nach t). Alle benötigten Ableitungen $g_r(t)$ mögen existieren.

Man kann $F(s, x)$ ein unvollständiges Integral in bezug auf

$$E(s) = \int_a^b e^{-g(t)}\, dt \tag{2}$$

[1]) Überarbeitete und gekürzte Fassung des Schlußteils der Dissertation B des Verfassers [5].

nennen, so wie man diese Formulierung beispielsweise bei der unvollständigen Gamma-Funktion (siehe (54)) verwendet. In der vorliegenden Arbeit wird eine asymptotische Entwicklung für $F(s, x)/E(s)$ hergeleitet, die für $s \to s_0$ (s_0 Randpunkt von S) und gleichmäßig für alle $x \in [a, b]$ gilt. Daneben kann auch

$$G(s, x) = \int_a^x e^{-g(t)}\, dt \tag{3}$$

als unvollständiges Integral bezüglich $E(s)$ betrachtet und eine asymptotische Entwicklung für $G(s, x)/E(s)$ hergeleitet werden. Wegen des einfachen Zusammenhanges

$$F(s, x) + G(s, x) = E(s) \tag{4}$$

beschränken wir uns, von wenigen Hinweisen abgesehen, auf die Untersuchung des erstgenannten Integrals.

2. Asymptotische Entwicklung für $1/E(s)$

Um die gewünschte asymptotische Entwicklung zu erhalten, wird auch die asymptotische Entwicklung von $1/E(s)$ für $s \to s_0$ benötigt. Sie ergibt sich in einfacher Weise aus der von $E(s)$, und diese wiederum erhält man durch Anwendung einer Verallgemeinerung der Laplaceschen Methode, so wie sie von Berg, [1] oder [2], angegeben worden ist.

Satz 1: *Die Taylorreihe* $g(t) - g(y) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{g_k(y)}{k!} (t - y)^k$ *möge für* $|t - y| \leqq \omega(s)$, $a + \omega \leqq y \leqq b - \omega$ *konvergieren, wobei* ω *die Eigenschaft habe, daß (jeweils für* $s \to s_0$)

$$\beta_0 \omega \to \infty \quad \textit{mit} \quad \beta_0 = \sqrt{g_2(y)/2} \tag{5}$$

und

$$g_{2l}(\xi) \sim g_{2l}(y) \quad \textit{für jedes} \quad \xi \in [y - \omega, y + \omega] \quad \textit{und} \quad l = 1, 2, 3, \ldots \tag{6}$$

gelte. Es existiere ferner eine Funktion $\psi(x)$ *mit* $\psi(s) > 0$ *für* $s \in S$ *und* $\psi(s) = o(1)$, so daß

$$g_k(y)/g_2^{k/2}(y) = O\big(\psi^{(k-2)/2}(s)\big), \qquad k \geqq 3, \tag{7}$$

und

$$1/\psi(s) = O\big((\beta_0\omega)^\varrho\big) \quad \textit{für eine beliebige reelle Zahl } \varrho \tag{8}$$

erfüllt ist. Schließlich gelte für jedes natürliche n

$$g_2^{1/2}(y)\, e^{g(y)} \int_a^{y-\omega} e^{-g(t)}\, dt = o(\psi^n), \qquad g_2^{1/2}(y)\, e^{g(y)} \int_{y+\omega}^{b} e^{-g(t)}\, dt = o(\psi^n).$$

Dann besitzt $E(s)$ *für* $s \to s_0$ *die asymptotische Entwicklung*

$$\begin{gathered} E(s) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{g_2(y)}}\, e^{-g(y)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{(*)} \left[\frac{(-1)^{n+l}\,(2l)!}{2^l l!\, g_2^{\,l}(y)} \prod_{i=3}^{2n+2} \frac{1}{\lambda_i!} \left(\frac{g_i(y)}{i!}\right)^{\lambda_i}\right], \\ \text{SB}^{2)}\ (*)\colon \sum_{i=3}^{2n+2} (i-2)\,\lambda_i = 2n, \quad \lambda_i \geqq 0 \ \text{ ganz}, \quad 2l = \sum_{i=3}^{2n+2} i\lambda_i. \end{gathered} \tag{9}$$

Die asymptotische Skala von (9) *ist* $\{g_2^{-1/2}(y)\, e^{-g(y)}\, \psi^n(s)\}$.

Die Richtigkeit der Behauptung läßt sich zunächst für $\int_{y-\omega}^{y+\omega} e^{-g(t)}\, dt$ statt für $E(s)$ zeigen, indem die Taylorreihe für $g(t)$ eingesetzt wird, zur Potenzreihenentwicklung

---

[2]) SB = Summationsbedingung

für $\exp\big(-g(t)\big)$ übergegangen wird und dann Integration und Summation vertauscht werden. Wegen (5) kann man zu den Integrationsgrenzen $-\infty$, $+\infty$ übergehen und die Restintegrale mit (8) abschätzen. Die Ordnung des n-ten Gliedes der Reihe in (9) ergibt sich aus (7), und wegen (6) fallen auch die Restglieder unter diese Ordnung. Wegen der Voraussetzungen über die Ordnung der Integrale über $[a, y-\omega]$ und $[y+\omega, b]$ gilt das Resultat schließlich auch für $E(s)$. Weitere Einzelheiten zum Beweis kann man in [1] finden.

Wegen (7) ist (5) für $k = 3$ von $\omega = |g_3^{-1/3}(y)|$ erfüllt. Wir wollen weiter annehmen, daß $\psi(s)$ so gewählt werden kann, daß eine der Beziehungen (7) scharf ist. Sei etwa

$$\psi(s) = g_3^2(y)/4g_2^3(y) \tag{10}$$

(der Faktor 4 wird nur eingeführt, damit in den im folgenden eingeführten $b_n(s)$ nicht zu große Zweierpotenzen im Nenner auftreten). Dann ist (8) mit $\omega = |g_3^{-1/3}(y)|$ für $\varrho = 6$ erfüllt, (7) fordert $g_k(y)/g_2(y) = O\big((g_3(y)/g_2(y))^{k-2}\big)$ für $k \geqq 4$, und (9) kann in der Form

$$E(s) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{g_2(y)}}\, e^{-g(y)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(s)\, \psi^n(s) \qquad (s \to s_0) \tag{11}$$

mit $b_n(s) = O(1)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ geschrieben werden, wobei

$$b_0(s) = 1, \qquad b_1(s) = \frac{5}{6} - \frac{g_2(y)\, g_4(y)}{2g_3^2(y)},$$

$$b_2(s) = \frac{385}{72} - \frac{35g_2(y)\, g_4(y)}{4g_3^2(y)} + \frac{7g_2^2(y)\, g_5(y)}{3g_3^3(y)} + \frac{35g_2^2(y)\, g_4^2(y)}{24g_3^4(y)} - \frac{g_2^3(y)\, g_6(y)}{3g_3^4(y)}$$

ist. Aus (9), (11) ergibt sich nun die asymptotische Entwicklung von $1/E(s)$ zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{E(s)} &\approx \sqrt{\frac{g_2(y)}{2\pi}}\, e^{g(y)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(s)\, \psi^n(s) \qquad (s \to s_0), \\ a_0(s) &= 1, \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k(s)\, b_{n-k}(s) = 0 \qquad (n \geqq 1), \end{aligned} \tag{12}$$

und es ist $a_n(s) = O(1)$ für alle n. Aus den angegebenen $b_n(s)$ folgen

$$a_1(s) = \frac{g_2(y)\, g_4(y)}{2g_3^2(y)} - \frac{5}{6},$$

$$a_2(s) = -\frac{335}{72} + \frac{95g_2(y)\, g_4(y)}{12g_3^2(y)} - \frac{7g_2^2(y)\, g_5(y)}{3g_3^3(y)} - \frac{29g_2^2(x)\, g_4^2(y)}{24g_3^4(y)} + \frac{g_3^2(y)\, g_6(y)}{3g_3^4(y)}.$$

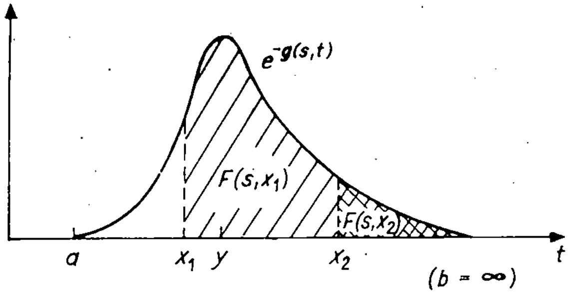
3. Herleitung der asymptotischen Entwicklung für $F(s, x)/E(s)$

Nach der in [6] verwendeten Bezeichnung gehört das hier betrachtete Integral (1) zum Fall $m = 2$, $m = 1$: die untere Integrationsgrenze x ist für $x \neq y$ keine stationäre Stelle von $-g(t)$, und für $x = y$ tritt bei $t = x$ ein einfaches Maximum auf. Da

$g(t)$ nur eine stationäre Stelle besitzen soll, ist $-g_1(x) > 0$ für $z > 0$, wobei $z = y - x$ ist, und $-g_1(x) < 0$ für $z < 0$, $g_1(y) = 0$ (siehe Abbildung). Wir führen gemäß [6: (4) und (43)] die Funktionen

$$\tau = \operatorname{sgn}(y - x)\,[g(x) - g(y)]^{1/2}, \qquad \beta^+ = \beta_0 = \sqrt{g_2(y)/2},$$
$$\beta^- = \beta = -g_1(x)/2\tau$$

ein. Es ist also $\operatorname{sgn}\tau = \operatorname{sgn} z = -\operatorname{sgn}\big(g_1(x)\big)$, $\dfrac{d\tau}{dx} = -\beta < 0$, so daß τ für jedes $s \in S$ eine streng monotone Funktion von x ist. Bei der Herleitung einer asymptotischen Entwicklung für $G(s, x)/E(s)$ ist τ durch $-\tau$ zu ersetzen, damit $\tau > 0$ dem Fall des inneren Maximums entspricht.



Veranschaulichung von $F(s, x)$ für festes s, $x = x_1$ $(z > 0, \tau > 0, \eta < 0)$ und $x = x_2$ $(z < 0, \tau < 0, \eta > 0)$

Wir schreiben nun, dem Vorgehen in [6: 6.] entsprechend, den Quotienten $F(s, x)/E(s)$ in der Form

$$\frac{F(s, x)}{E(s)} = \frac{1 + \operatorname{erf}\tau}{2} + \frac{e^{-\tau^2}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\beta_0}{\beta}\,\frac{1}{w}\int\limits_0^{\beta(b-x)} e^{-g(x+u/\beta)+g(x)}\,du - \int\limits_0^{\infty} e^{-u^2+2\tau u}\,du\right] \tag{14}$$

mit $\operatorname{erf}\tau = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int\limits_0^{\tau} e^{-u^2}\,du$, $w = \beta_0\, e^{g(y)}\, E(s)/\sqrt{\pi}$ und ersetzen die Integrale in der eckigen Klammer durch ihre asymptotischen Entwicklungen für $s \to s_0$ bzw. $\tau \to -\infty$ und den Faktor $1/E(s)$ in $1/w$ durch (12). Unter Verwendung von [6: (49)] ergibt sich dann für $s \to s_0$ und (zunächst) mit der Einschränkung $\tau \to -\infty$

$$\begin{aligned}\frac{F(s, x)}{E(s)} \approx{}& \frac{1 + \operatorname{erf}\tau}{2} + \frac{\beta_0 e^{-\tau^2}}{\sqrt{\pi}} \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\big(g_1(x)\big)^{2m+1}}\sum_{(*)}\Big((-1)^r\,(2m - \lambda_1)!\,a_q(s)\,\psi^q(s)\,\big(g_1(x)\big)^{\lambda_1}\right. \\ &\left.\times \prod_{i=2}^{m-q+1}\frac{1}{\lambda_i!}\left(\frac{g_i(x)}{i!}\right)^{\lambda_i}\Big) - \frac{1}{\beta_0}\,\frac{(-1)^{m+1}\,(2m)!}{m!}\,\frac{1}{(2\tau)^{2m+1}}\right],\end{aligned} \tag{15}$$

SB $(*)$: $q + \sum\limits_{i=2}^{m-q+1}(i - 1)\,\lambda_i = m$; $\quad q, \lambda_i \geq 0$ ganz;

$r = \sum\limits_{i=2}^{m-q+1}\lambda_i$; $\lambda_1 = m + q - r$, Führt man noch die Bezeichnungen

$$\eta = -\tau\sqrt{2\psi(s)}, \qquad f(s) = g_2(y)/\psi(s) \tag{16}$$

ein, wobei

$$1 = O\big(f(s)\big) \tag{17}$$

vorausgesetzt sei (das ist $g_3(y) = O\big(g_2{}^2(y)\big)$ wegen (10)), so nimmt der zweite Summand der eckigen Klammer in (15) die Form

$$\frac{(-1)^{m+1}\,(2m)!}{\beta_0 m!\,(2\tau)^{2m+1}} = \frac{(-1)^m}{\sqrt{f(s)}}\,\frac{(2m)!}{2^m m!}\,\frac{\psi^m(s)}{\eta^{2m+1}} \tag{18}$$

an; er ist also bei festem s eine Funktion allein von η. Auch der erste Summand der eckigen Klammer, der für festes s nur von x abhängt, kann wegen (16) und der strengen Monotonie zwischen τ und x als Funktion von η aufgefaßt werden. Der Einfachheit halber sei noch gefordert, daß $\eta \to \infty$ für $x \to b$ und $\eta \to -\infty$ für $x \to a$ gelte. (15), (18) ist nun unter den im folgenden angegebenen Voraussetzungen eine asymptotische Entwicklung der Funktion $F(s, x)/E(s)$ für $s \to s_0$, die nicht nur unter der zuvor genannten Einschränkung, sondern sogar gleichmäßig für alle $\eta \in (-\infty, \infty)$ oder, was dasselbe besagt, $x \in [a, b]$ gültig ist.

Satz 2: *Es seien die Voraussetzungen von Satz* 1 *erfüllt. Für alle z, die* $\delta = o(1)$ *mit* $\delta = z g_3(y)/g_2(y)$ *erfüllen, gelte:*

$$g_k(x) \sim g_k(y) \quad \textit{für alle} \quad k \geqq 3, \qquad g_3(\xi) \sim g_3(y) \quad \text{für } \textit{alle } \xi \textit{ zwischen } x \text{ und } y. \tag{19}$$

Im Fall $1 = O(\eta)$ *gelte* $1 = O\big(g_1(x)\big)$, *und es existiere eine Funktion* $\chi(s, x)$ *mit*

$$\chi(s, x) = O\big(\psi(s)\big), \tag{20}$$

so daß

$$g_k(x) = O\big(g_1{}^k(x)\,\chi^{k-1}\big) \quad \textit{für alle} \quad k \geqq 2 \tag{21}$$

erfüllt ist.

Dann ist (15) *eine (verallgemeinerte) asymptotische Entwicklung für* $F(s, x)/E(s)$ *mit der Skala* $\left\{\sqrt{g_2(y)}\,\psi^m(s)\right\}$, *die gleichmäßig in bezug auf alle* $\eta \in (-\infty, \infty)$ *gilt.*

Die Behauptung ist in der üblichen Weise zu interpretieren: die Reihe in (15) mit dem Vorfaktor $\beta_0\,e^{-\tau^2}/\sqrt{\pi}$ ist eine asymptotische Entwicklung für die Funktion

$$D(s, \eta) = \frac{F(s, x)}{E(s)} - \frac{1 + \operatorname{erf}\tau}{2}, \tag{22}$$

Beweis: Die Voraussetzungen zu Satz 1 sichern, daß (12) gilt. Außerdem wird (7) für das folgende benötigt. Es sei zunächst bemerkt, daß im Fall $\delta = o(1)$ wegen (19) $\eta \sim -z\sqrt{g_2(y)\,\psi(s)} = -\delta/2$, also $\eta = o(1)$ gilt. Im entgegengesetzten Fall $1 = O(\eta)$ ergibt sich aus (20), (21) und der Beschränktheit von $1/g_1(x)$, daß der vordere Summand der eckigen Klammer in (15) die Ordnung $O\big(\chi^{m-q}\psi^q/g_1(x)\big) = O(\psi^m)$ hat, und wegen (17) erkennt man aus der Form (18) des hinteren Summanden, daß auch dieser von der Ordnung $O(\psi^m)$ ist.

Für den Fall $\delta = o(1)$ ergibt sich zunächst, daß wegen (7) und (19) und der daraus folgenden Beziehungen $g_1(x) \sim -z g_2(y) \sim -\tau\sqrt{g_2(y)} \sim \eta\sqrt{g_2(y)/2\psi(s)}$ beide Summanden für sich genommen die Ordnung $O\left(\frac{1}{\beta_0\tau}\,\frac{\psi^m}{\eta^{2m}}\right)$ haben, doch wird in Abschnitt 5 gezeigt, daß ihre Differenz die Ordnung $O(\psi^m)$ hat. Somit hat das m-te Glied der Reihe in (15) für jedes η die Ordnung $O(\psi^m)$. Es soll daher mit $c_m(s, \eta)\, \psi^m(s)$ bezeichnet werden, wobei $c_m(s, \eta) = O(1)$ für alle η, $m = 0, 1, \ldots$ gilt. Eine asymptotische Skala der Entwicklung (15) ist mithin $\{\beta_0 \psi^m(s)\}$. In (27) und (29) sind die $c_m(s, \eta)$ für $m = 0, 1, 2$ explizit angegeben. Schließlich bleibt zu zeigen, daß die Restglieder, die sich bei Abbruch der Reihe in (15) mit $m = k - 1$ ergeben, jeweils von der Ordnung $O\left(\sqrt{g_2(y)}\, \psi^k(s)\right)$ sind. Dieser Nachweis wird in Abschnitt 6 durchgeführt, und dabei wird sogar eine explizite Restabschätzung erhalten. Damit wäre dann Satz 2 in allen Teilen bewiesen.

Unter den gleichen Voraussetzungen ergibt sich für $G(s, x)/E(s)$ wegen (4) die asymptotische Entwicklung

$$\frac{G(s, x)}{E(s)} \approx \frac{1}{2} \operatorname{erf} \tau - \frac{\beta_0\, e^{-\tau^2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} c_m(s, \eta)\, \psi^m(s) \qquad (s \to s_0, \ -\infty < \eta < \infty). \tag{23}$$

4. Rekursionsformel für die $c_m(s, \eta)$

Bevor der Beweis zu Satz 2 weitergeführt wird, soll eine Rekursionsformel für die Koeffizienten $c_m(s, \eta)$ hergeleitet werden. Das kann am einfachsten in der Weise geschehen, wie es bei Temme [9] für das Beispiel $\Gamma(s, a)$ bzw. in [12] für eine allgemeinere Klasse von Integralen durchgeführt wird. Wir nehmen dazu an, daß man die asymptotische Entwicklung von $\dfrac{\partial D(s, \eta)}{\partial \eta}$ für jedes η durch gliedweise Differentiation der Entwicklung (15) für $D(s, \eta)$ nach η erhält. Das ergibt

$$\frac{\partial D(s, \eta)}{\partial \eta} \approx e^{-\tau^2} \sqrt{\frac{f(s)}{2\pi \psi(s)}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\eta c_m(s, \eta) + \frac{\partial c_{m-1}(s, \eta)}{\partial \eta}\right) \psi^m(s), \; c_{-1}(s, \eta) = 0. \tag{24}$$

Andererseits folgt aus (22) wegen (13) und (16): $\dfrac{\partial D(s, \eta)}{\partial \eta} = \dfrac{1}{E(s)} \dfrac{\partial F(s, x)}{\partial \eta} + \dfrac{e^{-\tau^2}}{\sqrt{2\pi \psi(s)}}$

oder

$$\frac{\partial D(s, \eta)}{\partial \eta} = \frac{e^{-\tau^2}}{\sqrt{2\pi \psi(s)}} \left(1 - \frac{\eta\, e^{-g(y)}}{g_1(x)\, E(s)} \sqrt{\frac{2\pi}{\psi(s)}}\right). \tag{25}$$

Setzt man hierin für $1/E(s)$ die asymptotische Entwicklung (12) ein, ergibt sich

$$\frac{\partial D(s, \eta)}{\partial \eta} \approx \frac{e^{-\tau^2}}{\sqrt{2\pi \psi(s)}} \left(1 - \frac{\eta}{g_1(x)} \sqrt{f(s)} \sum_{m=0}^{\infty} a_m(s)\, \psi^m(s)\right), \tag{26}$$

also durch Vergleich mit (24)

$$c_0(s, \eta) = \frac{1}{g_1(x)} - \frac{1}{\eta \sqrt{f(s)}}, \tag{27}$$

was auch unmittelbar aus (15) folgt, und

$$c_m(s, \eta) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial c_{m-1}(s, \eta)}{\partial \eta} + \frac{a_m(s)}{g_1(x)}, \qquad m \geqq 1. \tag{28}$$

Das ist die gesuchte Rekursionsformel. Aus ihr (oder direkt aus (15)) erhält man speziell

$$\begin{aligned} c_1(s, \eta) &= \frac{1}{\eta^3 \sqrt{f(s)}} - \frac{g_2(x)}{\psi(s)\, g_1{}^3(x)} + \frac{a_1(s)}{g_1(x)}, \\ c_2(s, \eta) &= -\frac{3}{\eta^5 \sqrt{f(s)}} + \frac{3g_2{}^2(x) - g_1(x) g_3(x)}{\psi^2(s)\, g_1{}^5(x)} - \frac{a_1(s)\, g_2(x)}{\psi(s)\, g_1{}^3(x)} + \frac{a_2(s)}{g_1(x)}. \end{aligned} \tag{29}$$

Man kann die Formel (28) auch direkt beweisen, indem man zeigt, daß ihr die $c_m(s, \eta)$ aus (15) genügen. Hierzu ziehen wir die folgende Formel für die Ableitungen einer Umkehrfunktion heran, die sich durch vollständige Induktion beweisen läßt [5]. Ist $x = \varphi(v)$ die Umkehrfunktion einer in einem gewissen Intervall eineindeutigen beliebig oft differenzierbaren Funktion $v = g(x)$, so gilt für die Ableitungen von $\varphi(v)$, wenn $v = g(x)$ eingesetzt wird,

$$\varphi^{(i+1)}(v)|_{v=g(x)} = \sum_{(*)} \left[\frac{(-1)^r\,(i+r)!}{\left(g_1(x)\right)^{i+1+r}} \prod_{j=2}^{i+1} \frac{1}{\lambda_j!} \left(\frac{g_j(x)}{j!}\right)^{\lambda_j}\right], \quad (i = 0, 1, \ldots), \tag{30}$$

$$\text{SB } (*):\ \sum_{j=2}^{i+1} (j-1)\,\lambda_j = i, \quad \lambda_j \geqq 0 \ \text{ ganz}, \quad r = \sum_{j=2}^{i+1} \lambda_j$$

(die Indizes bei g bezeichnen Ableitungen). Nun erkennt man, daß der erste Summand des m-ten Gliedes der Reihe in (15) bis auf den Faktor $a_q(s)\ \psi^q(s)$ aus der rechten Seite von (30) hervorgeht, wenn $i = m - q$ gesetzt wird. Dabei ist natürlich $g(x) = g(s, x) = \tau^2 + g(s, y)$ zu setzen (diese Funktion ist in $[a, y]$ und $[y, b]$ jeweils eineindeutig), und die Ableitungen $g_k(x)$ sind zugleich die Ableitungen von τ^2 nach x. Man hat also für $m \geqq 0$

$$c_m(s, \eta) = (-1)^{m+1} \frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{1}{\sqrt{f(s)}} \frac{1}{\eta^{2m+1}} + \sum_{q=0}^{m} \frac{a_q(s)}{\psi^{m-q}(s)}\ \varphi^{(m-q+1)}(v)|_{v=g(x)},$$

und daher ist, wenn man $\dfrac{dv}{d\eta} = \dfrac{\eta}{\psi(s)}$ beachtet, für alle $m \geqq 1$

$$\frac{\partial c_{m-1}(s, \eta)}{\partial \eta} = (-1)^{m+1} \frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{1}{\sqrt{f(s)}} \frac{1}{\eta^{2m}} + \sum_{q=0}^{m-1} \frac{\eta}{\psi(s)} \frac{a_q(s)}{\psi^{m-q-1}(s)}\ \varphi^{(m-q+1)}(v)|_{v=g(x)}.$$

Bildet man $\dfrac{1}{\eta} \dfrac{\partial c_{m-1}(s, \eta)}{\partial \eta} + \dfrac{a_m(s)}{g_1(x)}$, so erhält man $c_m(s, \eta)$ wegen $\dfrac{1}{g_1(x)} = \varphi'(v)|_{v=g(x)}$, also wieder die Formel (28).

5. Entwicklung der $c_m(s, \eta)$ nach Potenzen von η

In Abschnitt 3 blieb der Nachweis dafür noch offen, daß $c_m(s, \eta) = O(1)$ auch im Fall $\delta = o(1)$ gilt. Wir zeigen das zunächst für $c_0(s, \eta)$ und geben für diese Funktion eine Reihenentwicklung nach Potenzen von η an. Man errechnet leicht

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{\eta}{g_1(x)} = \sqrt{\frac{\psi(s)}{g_2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{f(s)}}, \tag{31}$$

und wir setzen daher an:

$$\frac{\eta}{g_1(x)} - \frac{1}{\sqrt{f(s)}} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(s)\ \eta^{n+1}. \tag{32}$$

Die Koeffizienten $d_n(s)$ bestimmen sich nach dem Satz von Lagrange-Bürmann (vgl. etwa [3]) wegen $\dfrac{d\eta}{dx} = \dfrac{g_1(x)}{\eta}\,\psi(s)$, $\dfrac{d}{dz} = -\dfrac{d}{dx}$ zu

$$d_n(s) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\,\psi(s)\left(\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left(\frac{-z}{\eta}\right)^{n+2}\right)\Bigg|_{n=0}.$$

Auf Grund der Definition (13), (16) von η errechnet sich die für $\delta = o(1)$ konvergente Potenzreihenentwicklung folgendermaßen ($n \geqq 0$):

$$\frac{1}{\eta^{n+2}} = \frac{(-1)^n}{z^{n+2}(\psi(s)\,g_2(y))^{(n+2)/2}} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l z^l$$
$$\times \sum_{(*)} \left[\frac{(-1)^r (n+2)(n+4)\cdots(n+2r)}{g_2^{\,r}(y)} \prod_{i=3}^{l+2} \frac{1}{\lambda_i!}\left(\frac{g_i(y)}{i!}\right)^{\lambda_i}\right], \tag{34}$$
$$\text{SB } (*)\colon \sum_{i=3}^{l+2} (i-2)\,\lambda_i = l, \quad \lambda_i \geqq 0 \quad \text{ganz}, \quad r = \sum_{i=3}^{l+2} \lambda_i.$$

Somit erhält man aus (33) unter Beachtung von (10) nach einer kurzen Rechnung für $n = 2k-1$ ($k = 1, 2, \ldots$)

$$d_{2k-1}(s) = \frac{1}{\sqrt{f(s)}}\,\frac{1}{(\psi(s)\,g_2(y))^k} \sum_{(*)} \left[\frac{(-1)^r (2k+1)(2k+3)\cdots(2k+2r+1)}{g_2^{\,r}(y)}\right.$$
$$\left.\times \prod_{i=3}^{2k+2} \frac{1}{\lambda_i!}\left(\frac{g_i(y)}{i!}\right)^{\lambda_i}\right], \tag{35}$$
$$\text{SB } (*)\colon \sum_{i=3}^{2k+2} (i-2)\,\lambda_i = 2k, \quad \lambda_i \geqq 0 \quad \text{ganz}, \quad r = \sum_{i=3}^{2k+2} \lambda_i.$$

Vergleicht man mit (9) und (11), so ergibt sich, wenn man noch $k + r = l$ einführt,

$$\frac{(2k)!}{2^k k!}\,d_{2k-1}(s)\,\psi^k(s) = \frac{1}{\sqrt{f(s)}}\,b_k(s)\,\psi^k(s) \text{ oder}$$
$$d_{2k-1}(s) = \frac{2^k k!}{(2k)!}\,\frac{b_k(s)}{\sqrt{f(s)}} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{36}$$

Für $n = 2k$ folgt entsprechend

$$d_{2k}(s) = \frac{2^{2k} g_2^{\,2k}(y)}{k!\,g_3^{\,2k}(y)} \sum_{(*)} \left[\frac{(-1)^r\,2^r (k+r)!}{g_2^{\,r+1}(y)} \prod_{i=3}^{2k+3} \frac{1}{\lambda_i!}\left(\frac{g_i(y)}{i!}\right)^{\lambda_i}\right],$$
$$\text{SB } (*)\colon \sum_{i=3}^{2k+3} (i-2)\,\lambda_i = 2k+1, \quad \lambda_i \geqq 0 \quad \text{ganz}, \quad r = \sum_{i=3}^{2k+3} \lambda_i. \tag{37}$$

Speziell ist $d_0(s) = -g_3(y)/3g_2^{\,2}(y)$, und wegen (7), (17) gilt $d_{2k}(s) = O(1)$.

Aus (27) und (32) folgt nun für $c_0(s, \eta)$ die Potenzreihenentwicklung

$$c_0(s, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(s)\,\eta^n, \qquad d_n(s) \text{ nach (35), (37)}. \tag{38}$$

Man erkennt also insbesondere die Beschränktheit von $c_0(s, \eta)$ für $\delta = o(1)$ und somit für $\eta = o(1)$. Dieselbe Aussage gilt für alle $c_m(s, \eta)$, wie man durch vollständige Induktion zeigen kann. Sei nämlich angenommen, daß die $c_k(s, \eta)$ ($k = 0, 1, \ldots, m$)

für $\delta = o(1)$ die Potenzreihenentwicklungen

$$c_k(s, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(k)}(s)\, \eta^n \tag{39}$$

haben $\left(d_n^{(0)}(s) = d_n(s)\right)$. Dann folgt nach der Rekursionsformel (28), wenn man noch die Reihe (32) für die Entwicklung von $1/g_1(x)$ heranzieht, für $k = 0, 1, \ldots, m$:

$$c_{k+1}(s, \eta) = \left(d_1^{(k)}(s) + \frac{a_{k+1}(s)}{\sqrt{f(s)}}\right) \frac{1}{\eta} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{k+1}(s)\, d_n(s) + (n + 2)\, d_{n+2}^{(k)}(s)\right) \eta^n, \tag{40}$$

so daß wegen (39) $\sqrt{f(s)}\, d_1^{(k)}(s) + a_{k+1}(s) = 0$ und

$$d_n^{(k+1)}(s) = a_{k+1}(s)\, d_n(s) + (n + 2)\, d_{n+2}^{(k)}(s) \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{41}$$

jeweils für $k = 0, 1, \ldots, m - 1$ gelten. Daher folgt durch sukzessive Anwendung von (41) für $k = m - 1, m - 2, \ldots, 1, 0$:

$$d_1^{(m)}(s) = a_m(s)\, d_1(s) + 3 d_3^{(m-1)}(s) = a_m(s)\, d_1(s) + 1 \cdot 3 a_{m-1}(s)\, d_3(s)$$
$$+ \cdots + [1 \cdot 3 \cdots (2m + 1)]\, a_0(s)\, d_{2m+1}(s).$$

Mit (36) ergibt sich weiter

$$d_1^{(m)}(s) = \frac{1}{\sqrt{f(s)}} [a_m(s)\, b_1(s) + a_{m-1}(s)\, b_2(s) + \cdots + a_0(s)\, b_{m+1}(s)]$$

und, unter Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen den $a_k(s)$ und $b_k(s)$ nach (12) und wegen $b_0(s) = 1$, schließlich

$$d_1^{(m)}(s) = -\frac{a_{m+1}(s)}{\sqrt{f(s)}}. \tag{42}$$

In (40) verschwindet daher der Faktor von η^{-1} auch für $k = m$, und somit besitzt auch $c_{m+1}(s, \eta)$ eine Potenzreihenentwicklung der Form (39) und ist für $\delta = o(1)$ beschränkt.

Aus (41) folgt durch eine entsprechende Überlegung, wie sie für $n = 1$ durchgeführt wurde,

$$d_n^{(m)}(s) = a_m(s)\, d_n(s) + (n + 2)\, a_{m-2}(s)\, d_{n+1}(s) + \cdots$$
$$+ [(n + 2)(n + 4) \cdots (n + 2m)]\, a_0(s)\, d_{n+2m}(s)$$

und somit aus (37) bzw. (35)

$$\begin{aligned} d_{2k}^{(m)}(s) &= \frac{1}{2^k k!} \sum_{l=k}^{m+k} 2^l l!\, d_{2l}(s)\, a_{m+k-l}(s), \\ d_{2k-1}^{(m)}(s) &= \frac{2^{k+1}(k + 1)!}{(2k + 2)!} \sum_{l=k}^{m+k} \frac{(2l + 2)!}{2^{l+1}(l + 1)!}\, d_{2l+1}(s)\, a_{m+k-l}(s). \end{aligned} \tag{43}$$

Speziell für $\eta = 0$ lautet die asymptotische Entwicklung für $F(s, x)$, die sich aus (15) durch Multiplikation mit (11) ergibt,

$$F(s, y) \approx e^{-g(y)} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{g_2(y)}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(s)\, \psi^n(s) + \sum_{m=0}^{\infty} c_m(s, 0)\, \psi^m(s) \sum_{n=0}^{\infty} b_n(s)\, \psi^n(s)\right]. \tag{44}$$

Es überlagert sich hier der Hälfte der asymptotischen Entwicklung von $E(s)$ noch eine andere asymptotische Entwicklung; berücksichtigt man nur das dominierende Glied, so hat man die asymptotische Halbierung $F(s, y) \sim \frac{1}{2} E(s)$. Die beiden Entwicklungen schreiten nach unterschiedlichen Skalen fort, und ebenso liegen die Verhältnisse, wenn man (15) bei beliebigem $x \in (a, b)$ mit (11) multipliziert. Deshalb ist es günstiger, nicht die Entwicklung von $F(s, x)$, sondern die von $F(s, x)/E(s)$ anzugeben.

(44) muß mit der Entwicklung übereinstimmen, die sich für unseren Fall aus [6: (23)] ergibt. Schreibt man in dieser die Reihen aus den Gliedern mit geradem bzw. ungeradem Index getrennt auf und berücksichtigt (35) und (37), so erhält man

$$F(s, y) \approx e^{-g(y)} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\psi(s)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!} d_{2n-1}(s)\, \psi^n(s) + \sum_{n=0}^{\infty} 2^n n!\, d_{2n}(s)\, \psi^n(s)\right]. \tag{45}$$

Die ersten Summanden von (44) und (45) sind wegen (36) identisch, und die verbleibenden Beziehungen $\sum_{m=0}^{n} c_m(s, 0)\, b_{n-m}(s) = 2^n n!\, d_{2n}(s)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ hängen über (12) mit (41) zusammen.

6. Restgliedabschätzung

Der Beweis zu Satz 2 wird jetzt vollendet, indem gezeigt wird, daß die Restglieder der Entwicklung (15) die am Ende des 3. Abschnitts behauptete Ordnung haben. Wir folgen dem Beweisprinzip, das TEMME [9], [12] anwendet. Die Reihen in (15) und (12) ersetzen wir beide durch eine Summe mit Restglied und definieren $A_k(s, \eta)$, $B_k(s)$ durch

$$D(s, \eta) = \beta_0 \pi^{-1/2} e^{-\tau^2} \left[\sum_{m=0}^{k-1} c_m(s, \eta)\, \psi^m(s) + A_k(s, \eta)\, \psi^k(s)\right], \tag{46}$$

$$\frac{1}{E(s)} = \beta_0 \pi^{-1/2} e^{g(y)} \left[\sum_{m=0}^{k-1} a_m(s)\, \psi^m(s) + B_k(s)\, \psi^k(s)\right] \tag{47}$$

für $k = 1, 2, \ldots$ jeweils. Dabei ist $B_k(s) = O(1)$ für alle k, weil (12) eine asymptotische Entwicklung mit der Skala $\{\beta_0\, e^{g(y)} \psi^m(s)\}$ ist. Aus (46) folgt (vgl. (24))

$$\begin{aligned} \frac{\partial D(s, \eta)}{\partial \eta} &= \beta_0 \pi^{-1/2} e^{-\tau^2} \sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{\partial c_m(s, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\eta}{\psi(s)}\, c_m(s, \eta)\right) \psi^m(s) \\ &\quad + \beta_0 \pi^{-1/2} \psi^k(s) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(e^{-\tau^2} A_k(s, \eta)\right). \end{aligned} \tag{48}$$

Auf Grund der Rekursionsformel (28) ist

$$\begin{aligned} &\sum_{m=0}^{k-1} \left(\frac{\partial c_m(s, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\eta}{\psi(s)}\, c_m(s, \eta)\right) \psi^m(s) \\ &= \sum_{m=0}^{k-2} \left(\eta c_{m+1}(s, \eta) - a_{m+1}(s) \frac{\eta}{g_1(x)} - \eta c_{m+1}(s, \eta)\right) \psi^m(s) - \frac{\eta}{\psi(s)}\, c_0(s, \eta) \\ &\quad + \eta \left(c_k(s, \eta) - \frac{a_k(s)}{g_1(x)}\right) \psi^{k-1}(s) \\ &= -\frac{\eta}{\psi(s)}\, c_0(s, \eta) + \eta c_k(s, \eta)\, \psi^{k-1}(s) - \frac{\eta}{g_1(x)} \sum_{m=1}^{k} a_m(s)\, \psi^{m-1}(s), \end{aligned}$$

so daß sich wegen (47), (16), (27) und $a_0(s) = 1$ aus (48)

$$\frac{\partial D(s,\eta)}{\partial\eta} = \frac{e^{-\tau^2}}{\sqrt{2\pi\psi(s)}}\left[1 + \eta c_k(s,\eta)\,\psi^k(s)\sqrt{f(s)} - \frac{\eta\sqrt{f(s)}}{g_1(x)}\right.$$
$$\left.\times\left(\sqrt{\frac{2\pi}{f(s)\,\psi(s)}}\,e^{-g(y)}\,\frac{1}{E(s)} - B_{k+1}(s)\,\psi^{k+1}(s)\right)\right]$$
$$+\sqrt{\frac{f(s)\,\psi(s)}{2\pi}}\,\psi^k(s)\,\frac{\partial}{\partial\eta}\left(e^{-\tau^2}A_k(s,\eta)\right)$$

ergibt. Durch Vergleich von (49) mit (25) folgt

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(e^{-\tau^2}A_k(s,\eta)\right) = -\eta\,e^{-\tau^2}\left(c_k(s,\eta)/(\psi(s) + B_{k+1}(s)/g_1(x)\right),$$

also wegen (16)

$$e^{-\eta^2/2\psi(s)}A_k(s,\eta) = \frac{1}{\psi(s)}\int_\eta^\infty \zeta c_k(s,\zeta)\,e^{-\zeta^2/2\psi(s)}\,d\zeta + B_{k+1}(s)\int_\eta^\infty \frac{\zeta}{g_1(x)}\,e^{-\zeta^2/2\psi(s)}\,d\zeta. \tag{50}$$

Für den ersten Summanden erhält man die Abschätzung

$$\left|\frac{1}{\psi(s)}\int_\eta^\infty \zeta c_k(s,\zeta)\,e^{-\zeta^2/2\psi(s)}\,d\zeta\right| \leqq \varrho_k{}^{(s)}\,e^{-\eta^2/2\psi(s)}, \qquad \varrho_k(s) = \sup_{-\infty<\eta<\infty} c_k(s,\eta), \tag{51}$$

wobei $\varrho_k(s) = O(1)$ ist, da die $c_k(s,\eta)$ bezüglich η beschränkt sind. (Die Beziehung (51) erhält man zunächst für $\eta \geqq 0$, doch ist sie auch für $\eta < 0$ richtig, wie man erkennt, wenn man im ersten Integral in (50) die Grenzen $-\infty, \eta$ wählt.) Da sich $D(s,\eta)$ wegen (25) in der Form

$$D(s,\eta) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\psi(s)}}\int_\eta^\infty e^{-\zeta^2/2\psi(s)}\,d\zeta + \frac{e^{-g(y)}}{E(s)\,\psi(s)}\int_\eta^\infty \frac{\zeta}{g_1(x)}\,e^{-\zeta^2/2\psi(s)}\,d\zeta$$

schreiben läßt, gilt für das zweite Integral in (50) wegen (22)

$$\int_\eta^\infty \frac{\zeta}{g_1(x)}\,e^{-\zeta^2/2\psi(s)}\,d\zeta = \frac{F(s,x)}{E(s)}\,e^{g(y)}\psi(s)\,E(s). \tag{52}$$

Nun ist $F(s,x)/E(s) \leqq 1$, und wegen (9) und (17) gilt $e^{g(y)}E(s)\,\psi(s) = O\left(\psi(s)/\beta_0\right) = O\left(\sqrt{\psi(s)}\right) = o(1)$. Da außerdem $B_{k+1}(s) = O(1)$ gilt, ist der zweite Summand in (50) ein $o(1)$. Mit (50, (51), (52) folgt also für das k-te Restglied der Entwicklung (15), wie behauptet, $\beta_0\pi^{-1/2}\,e^{-\tau^2}A_k(s,\eta)\,\psi^k(s) = O\left(\sqrt{g_2(y)}\,\psi^k(s)\right)$. Darüber hinaus hat man die explizite Restabschätzung

$$\left|D(s,\eta) - \beta_0\pi^{-1/2}\,e^{-\tau^2}\sum_{m=0}^{k-1} c_m(s,\eta)\,\psi^m(s)\right| \leqq \beta_0\pi^{-1/2}C_k(s,\eta)\,\psi^k(s) \tag{53}$$

mit $\quad |C_k(s,\eta)| \leqq \varrho_k(s)\,e^{-\eta^2/2\psi(s)} + |B_{k+1}(s)|\,F(s,x)\,e^{g(y)}\psi(s)$.

Nunmehr ist der Beweis zu Satz 2 vollständig erbracht.

7. Asymptotische Entwicklung der unvollständigen Gamma-Funktion

Als erstes Beispiel sei die aus (15) folgende asymptotische Entwicklung der unvollständigen Gamma-Funktion

$$\Gamma(s+1, a) = \int_a^\infty e^{-t} t^s \, dt \tag{54}$$

für $s \to \infty$ angegeben (vgl. [4, 8, 9]). Sie ist für alle $a \geqq 0$ gleichmäßig gültig und daher allgemeiner als die in [6] und [10] enthaltenen Entwicklungen. Hier ist $g(s, t) = t - s \ln t$, $x = a$, $y = s$, $\psi(s) = 1/s$. Aus (9) ergibt sich für die vollständige Gamma-Funktion:

$$\Gamma(s+1) \approx \sqrt{2\pi s}\, e^{-s} s^s \sum_{n=0}^\infty \frac{\gamma_n}{s^n} \qquad (s \to \infty)$$

mit $$\gamma_n = \sum_{(*)} \left[\frac{(-1)^{n+l} (2l)!}{2^l l!} \Big/ \prod_{i=3}^{2n+2} (\lambda_i!\, i^{\lambda_i}) \right], \tag{55}$$

$$\text{SB } (*)\colon \sum_{i=3}^{2n+2} (i-2)\lambda_i = 2n, \qquad \lambda_i \geqq 0 \text{ ganz}, \quad 2l = \sum_{i=3}^{2n+2} i\lambda_i.$$

Die ersten Koeffizienten $b_n(s) = \gamma_n$ sind:

$$\gamma_0 = 1,\ \gamma_1 = \frac{1}{12}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{288}, \quad \gamma_3 = -\frac{139}{51840} \quad \text{(weitere siehe [7, 11])}.$$

Auf Grund bekannter Eigenschaften gilt hier $a_n(s) = (-1)^n b_n(s)$, also

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} \approx (2\pi s)^{-1/2} e^s s^{-s} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \gamma_n}{s^n} \qquad (s \to \infty).$$

Nach (13) ist

$$\tau = \big(\operatorname{sgn}(s-a)\big)\left[a - s + s \ln \frac{s}{a}\right]^{1/2}, \quad \beta_0 = 1/\sqrt{2s}, \quad g_1(x) = (a-s)/a, \tag{57}$$

und nach (16) ist $f(s) = 1$ und

$$\eta = (\operatorname{sgn} \mu)\big[2\big(\mu - \ln(1+\mu)\big)\big]^{1/2} \tag{58}$$

mit

$$\mu = \frac{a-s}{s}. \tag{59}$$

Aus (15) folgt die für $s \to \infty$ und gleichmäßig für alle $\eta \in (-\infty, \infty)$ gültige asymptotische Entwicklung

$$\frac{\Gamma(s+1, a)}{\Gamma(s+1)} \approx \frac{1 + \operatorname{erf} \tau}{2} + \frac{e^{-\tau^2}}{\sqrt{2\pi s}} \sum_{m=0}^\infty \frac{c_m(\eta)}{s^m}$$

mit

$$c_m(\eta) = (-1)^m \left[\frac{1+\mu}{\mu^{2m+1}} \sum_{(*)} \left(\gamma_q (m - q + r)!\, \mu^{m+q-r} \Big/ \prod_{i=2}^{m+1} \lambda_i!\, i^{\lambda_i} \right) \right. \\ \left. - \frac{(2m)!}{2^m m!} \frac{1}{\eta^{2m+1}} \right], \tag{60}$$

$$\text{SB } (*)\colon q + \sum_{i=2}^{m+1} (i-1)\lambda_i = m, \quad q \geqq 0 \text{ ganz}, \quad \lambda_i \geqq 0 \text{ ganz}, \quad r = \sum_{i=2}^{m+1} \lambda_i,$$

und aus (23) für die komplementäre unvollständige Gamma-Funktion $\gamma(s+1, a) = \Gamma(s+1) - \Gamma(s+1, a)$:

$$\frac{\gamma(s+1, a)}{\Gamma(s+1)} \approx \frac{1 - \operatorname{erf} \tau}{2} - \frac{e^{-\tau^2}}{\sqrt{2\pi s}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m(\eta)}{s^m} \qquad (s \to \infty, -\infty < \eta < \infty). \tag{61}$$

In diesem Beispiel sind die c_m von s unabhängig; speziell ist

$$c_0(\eta) = \frac{1+\mu}{\mu} - \frac{1}{\eta}, \quad c_1(\eta) = \frac{1}{\eta^3} - \frac{1}{\mu^3}\left(1 + \mu + \frac{1}{12}\mu^2 + \frac{1}{12}\mu^3\right),$$
$$c_2(\eta) = \frac{1}{\mu^5}\left(3 + 5\mu + \frac{25}{12}\mu^2 + \frac{1}{12}\mu^3 + \frac{1}{288}\mu^4 + \frac{1}{288}\mu^5\right) - \frac{3}{\eta^5}. \tag{62}$$

Als Rekursionsformel für die $c_m(\eta)$ folgt aus (28)

$$c_m(\eta) = \frac{1}{\eta}\frac{dc_{m-1}(\eta)}{d\eta} + \frac{(-1)^m \gamma_m(1+\mu)}{\mu}, \qquad m \geqq 1. \tag{63}$$

Wenn man (60) auf die Funktion $\Gamma(s, a)/\Gamma(s)$ umrechnet, erhält man eine asymptotische Entwicklung, die im wesentlichen mit der von Temme [9] angegebenen übereinstimmt. Der Unterschied besteht darin, daß dieselbe Funktion η dort zu s, hier zu $s+1$ gehört. In [9] sind die $c_m(\eta)$ jedoch nur rekursiv dargestellt.

Für die Koeffizienten d_n der Potenzreihe

$$c_0(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \eta^n \tag{64}$$

folgt aus (36), (37)

$$d_{2k-1} = \frac{2^k k!}{(2k)!}\gamma_k, \qquad k \geqq 1,$$
$$d_{2k} = \frac{1}{k!}\sum_{(*)}\left[(-1)^{r+1} 2^r (k+r)! \Big/ \prod_{i=3}^{2k+3} \lambda_i!\, i^{\lambda_i}\right], \quad k \geqq 0, \tag{65}$$
$$\text{SB } (*): \sum_{i=3}^{2k+3} (i-2)\lambda_i, \quad \lambda_i \geqq 0 \text{ ganz}, \quad r = \sum_{i=3}^{2k+3} \lambda_i,$$

wobei insbesondere $d_0 = \frac{2}{3}$, $d_1 = \frac{1}{12}$, $d_2 = -\frac{2}{135}$, $d_3 = \frac{1}{864}$, $d_4 = \frac{1}{2835}$, $d_5 = -\frac{139}{777600}$ ist. Für die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklungen der $c_m(\eta)$ steht (43) zur Verfügung, wobei $a_n(s) = (-1)^n \gamma_n$ zu beachten ist. Speziell gilt

$$d_0^{(1)} = -\frac{23}{270}, \quad d_1^{(1)} = -\frac{1}{288}, \quad d_2^{(1)} = \frac{1}{378}, \quad d_3^{(1)} = -\frac{77}{77760},$$
$$d_0^{(2)} = \frac{23}{3024}, \quad d_1^{(2)} = -\frac{139}{51840}.$$

Von Interesse ist in diesem Beispiel die Auffassung der $c_m(\eta)$ als Funktionen von μ (es ist $\frac{d\eta}{d\mu} = \frac{\mu}{\eta(1+\mu)} > 0$ für alle $\mu \in (-1, \infty)$). Wir schreiben (vgl. 60))

$$c_m(\mu) = \frac{(-1)^m}{\mu^{2m+1}}\left(P_m(\mu) - Q_m(\mu)\right), \qquad m = 0, 1, \ldots \tag{66}$$

mit

$$Q_m(\mu) = \frac{(2m)!}{2^m m!}\left(\frac{\mu}{\eta}\right)^{2m+1},$$

$$P_m(\mu) = (1+\mu)\sum_{(*)}\left[\gamma_q(m-q+r)!\,\mu^{m+q-r}\Big/\prod_{i=2}^{m+1}\lambda_i!\,i^{\lambda_i}\right], \tag{67}$$

SB (*) und r wie in (60).

Die $P_m(\mu)$ sind Polynome vom Grad $2m+1$, und die Koeffizienten von μ^{2m+1} und μ^{2m} sind jeweils γ_m, wie man aus der Summationsbedingung entnimmt ($q = m$, $r = 0$). Die $Q_m(\mu)$ können analog zu (34) in eine für $|\mu| < 1$ konvergente Potenzreihe entwickelt werden; es gilt

$$\frac{(2m)!}{2^m m!}\left(\frac{\mu}{\eta}\right)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\delta_k^{(m)}\mu^k$$

mit

$$\delta_k^{(m)} = (-1)^k\sum_{(*)}\left[(-1)^r\frac{(2m+2r)!}{2^{m+r}(m+r)!}\Big/\prod_{i=3}^{k+2}\lambda_i!\,i^{\lambda_i}\right], \tag{68}$$

$$\text{SB }(*)\colon\ \sum_{i=3}^{k+2}(i-2)\,\lambda_i = k;\quad \lambda_i \geqq 0\ \text{ ganz},\quad r = \sum_{i=3}^{k+2}\lambda_i$$

(insbesondere zeigt der Vergleich mit (55), daß $\delta_{2m}^{(m)} = \gamma_m$ ist). Da die $c_m(\mu)$ in $\mu = 0$ beschränkt sind, muß $P_m(\mu) - \gamma_m\mu^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m}\delta_k^{(m)}\mu^k$ gelten. Daher folgen aus (66), (67), (68) die Potenzreihenentwicklungen

$$c_m(\mu) = (-1)^m\left[\gamma_m + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\mu^k\sum_{(*)}\left((-1)^r\frac{(2m+2r)!}{2^{m+r}(m+r)!}\Big/\prod_{i=3}^{2m+k+3}\lambda_i!\,i^{\lambda_i}\right)\right], \tag{69}$$

$$\text{SB }(*)\colon\ \sum_{i=3}^{2m+k+3}(i-2)\,\lambda_i = 2m+k+1,\quad \lambda_i \geqq 0\ \text{ ganz},\quad r = \sum_{i=3}^{2m+k+3}\lambda_i$$

($m = 0, 1, \ldots$). Hiermit ist für alle c_m eine direkte Darstellung durch Reihen erhalten worden, die nach Potenzen von μ fortschreiten. Schreibt man $c_m(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k^{(m)}\mu^k$, so gilt für die Koeffizienten:

$$e_0^{(m)} = d_0^{(m)},\quad e_1^{(m)} = d_1^{(m)} = (-1)^m\gamma_{m+1},\qquad m = 0, 1, \ldots,$$
$$e_0^{(m)} = 2e_2^{(m-1)}\ \text{ für }\ m \geqq 1,\quad e_k^{(m)} = (k+1)\,e_{k+1}^{(m-1)} + (k+2)\,e_{k+2}^{(m-1)} \tag{70}$$
$$\text{für }\ k, m \geqq 1.$$

Die zweite Beziehung liefert zusammen mit (69) eine von (55) verschiedene Darstellung der γ_n. Schließlich führen weitere Überlegungen noch zu der folgenden Darstellung der $c_m(\mu)$:

$$c_m(\mu) = (-1)^m(1+\mu)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\mu^k}{k!}\sum_{(*)}\left[(-1)^{\nu+1}2^\nu\nu!\,\gamma_q\Big/\prod_{i=3}^{2m+k+3}\lambda_i!\,i^{\lambda_i}\right], \tag{71}$$

$$\text{SB }(*)\colon\ 2q + \sum_{i=3}^{2m+k+3}(i-2)\,\lambda_i = 2m+k+1,\quad q \geqq 0\ \text{ ganz},\quad \lambda_i \geqq 0\ \text{ ganz},$$
$$\nu = \sum_{i=3}^{2m+k+3}\lambda_i + m + k - q.$$

8. Asymptotische Entwicklung der unvollständigen Beta-Funktion

Als weiteres Beispiel sei nun die (von drei Variablen abhängige) unvollständige Beta-Funktion betrachtet.:

$$B_a(p, q+1) = \int_0^a v^{p-1}(1-v)^q\,dv = \int_{-\ln a}^{\infty} e^{-pt}(1-e^{-t})^q\,dt \tag{72}$$

$(p > 0,\ q > -1,\ 0 < a \leqq 1)$. Es gelte $p, q \to \infty$, $0 < \varepsilon \leqq a \leqq 1$. Hier ist $g(s, t) = pt - q\ln(1 - e^{-t})$; $x = -\ln a$, $y = -\ln r$ mit

$$r = p/(p+q). \tag{73}$$

Die asymptotischen Entwicklungen für die vollständige Beta-Funktion und ihre Reziproke können unter Verwendung von $B(p, q+1) = \Gamma(p)\,\Gamma(q+1)/\Gamma(p+q+1)$ mit Hilfe von (55), (56) erhalten werden. Aus (13) folgen

$$\begin{aligned} \tau &= \operatorname{sgn}(a-r)\left[p\ln\frac{r}{a} + q\ln\frac{1-r}{1-a}\right]^{1/2}, \\ \beta_0 &= \sqrt{\frac{p(p+q)}{2q}}, \quad g_1(x) = (p+q)\,\frac{r-a}{1-a}, \end{aligned} \tag{74}$$

und aus (10) und (16)

$$\begin{aligned} \psi(p, q) &= \left(\frac{1+r}{2}\right)^2 \frac{p+q}{pq}, \quad f(s) = \left(\frac{2p}{1+r}\right)^2, \\ \eta &= \operatorname{sgn}(r-a)\left(\frac{1+r}{2}\right)\left[2\left(p\ln\frac{r}{a} + q\ln\frac{1-r}{1-a}\right)\Big/ p(1-r)\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{75}$$

Mit (15) ergibt sich für $p, q \to \infty$ und gleichmäßig für alle $a \in [\varepsilon, 1]$

$$\begin{aligned} \frac{B_a(p, q+1)}{B(p, q+1)} &\approx \frac{1 + \operatorname{erf}\tau}{2} + \left(\frac{a(p+q)}{p}\right)^p \left(\frac{(1-a)(p+q)}{q}\right)^q \\ &\quad \times \sqrt{\frac{p(p+q)}{2\pi q}} \sum_{m=0}^{\infty} c_m(p, q, \eta)\,\psi^m(p, q) \end{aligned} \tag{76}$$

mit τ, ψ nach (74), (75). Dabei ist insbesondere

$$\begin{aligned} c_0(p, q, \eta) &= \frac{1-a}{(p+q)(r-a)} - \frac{1+r}{2p\eta}, \\ c_1(p, q, \eta) &= \frac{1+r}{2p\eta^3} - \frac{4a(1-a)\,pq(1-r)}{(p+q)^3(r-a)^3(1+r)^2} \\ &\quad - \frac{1-a}{3(p+q)(r-a)(1+r)^2}\left(1 - \frac{pq}{(p+q)^2}\right). \end{aligned} \tag{77}$$

LITERATUR

[1] Berg, L.: Asymptotische Entwicklungen für Parameterintegrale II. Math. Nachr. **27** (1963/64), 133–143.

[2] Berg, L.: Asymptotische Darstellungen und Entwicklungen. Berlin 1968.

[3] Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation II. Basel und Stuttgart 1955.

[4] SCHELL, H.-J.: Asymptotische Entwicklungen für die unvollständige Gammafunktion. Wiss. Z. TH Karl-Marx-Stadt **22** (1980), 477–485.
[5] SCHELL, H.-J.: Gleichmäßige asymptotische Darstellungen und Entwicklungen von Parameterintegralen mit zwei reellen Parametern. Dissertation B. Karl-Marx-Stadt 1980.
[6] SCHELL, H.-J.: Gleichmäßige asymptotische Entwicklungen für Parameterintegrale mit zwei reellen Parametern. Z. Anal. Anw. (im Druck).
[7] SPIRA, R.: Calculation of the gamma function by Stirling's formula. Math. Comp. **25** (1971), 317–322.
[8] TEMME, N. M.: Uniform asymptotic expansions of the incomplete gamma functions and the incomplete beta function. Math. Comp. **29** (1975), 1109–1114.
[9] TEMME, N. M.: The asymptotic expansion of the incomplete gamma functions. SIAM J. Math. Anal. **10** (1979), 757–766.
[10] TRICOMI, F. G.: Asymptotische Eigenschaften der unvollständigen Gammafunktion. Math. Z. **53** (1950), 136–148.
[11] WRENCH, Jr., J. W.: Concerning two series for the gamma function. Math. Comp. **22** (1968), 617–626.
[12] TEMME, N. M.: The uniform asymptotic expansion of a class of integrals related to cumulative distribution functions. SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 239–253.

Manuskripteingang: 10. 7. 1982

VERFASSER:

Dr. HANS-JOACHIM SCHELL
Sektion Mathematik der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt
DDR-9010 Karl-Marx-Stadt, Str. der Nationen 62