

## Lösung von Kontaktaufgaben bei parabolischen Randanfangswertproblemen

J. WANKA

Es werden Randkontaktaufgaben bei linearen parabolischen Differentialgleichungen 2. Ordnung im räumlich mehrdimensionalen Fall betrachtet. Durch einen geeigneten Potentialansatz gelangt man zu einer schwach singulären Integralgleichung, deren Diskussion Existenz- und Regularitätssätze liefert.

В работе доказывается существование решений линейных краевых задач для параболического уравнения второго порядка при  $n$  ( $n \geq 1$ ) пространственных переменных с условиями сопряжения на  $(n - 1)$ -мерных поверхностях внутри области. Применением тепловых потенциалов поставленные краевые задачи сводятся к интегральным уравнениям и показывается разрешимость этих уравнений.

A contact boundary value problem for a  $n$ -dimensional second order linear parabolic differential equation is considered in this paper. By a potential statement the problem is converted into an integral equation. By investigating this equation existence and regularity theorems are obtained.

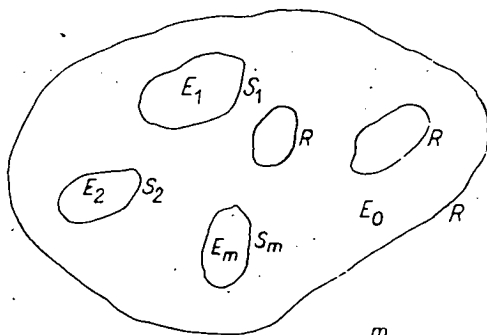
### 1. Einleitung

Werden bei Differentialgleichungsproblemen zusätzlich zu den Randdaten (bzw. auch Anfangsdaten) noch Kontaktbedingungen längs Flächen gestellt, durch welche das betrachtete Gebiet in Teilgebiete zerlegt wird, so spricht man von Randkontakt- (manchmal auch Randkopplungs-) Aufgaben. Besonders intensiv werden solche Aufgaben (erstmal von PRONE [17] gestellt) im Bereich der linearen Elastizitätstheorie untersucht. Bei der Verformung von (thermo)-elastisch stückweise homogenen Körpern ergeben sich für das spezielle elliptische Differentialgleichungssystem der Elastostatik (oder der Theorie der Wärmespannungen) Randkontaktaufgaben, d. h., zusätzlich zu den bekannten Randbedingungen treten an den Trennflächen der elastisch homogenen Teilstücke des Körpers Kontaktbedingungen auf. In der Literatur sind die ersten Arbeiten zu ebenen Aufgaben mit speziellen Kontaktbedingungen Anfang der sechziger Jahre zu verzeichnen (BAŠELEJŠVILI [1], BURČULADZE [3], KUPRADZE [13]). Die Problemstellung für den allgemeinen Fall mit stückweise stetigen elastischen Moduln ist erstmalig von JENTSCH in [9] aufgeworfen worden.

Es gibt auch ein innermathematisches Interesse an Randkontaktproblemen, z. B. gelangte KLÖTZLER [12] beim Studium von Variationsproblemen mit geknickten Extremalen zu Kontaktaufgaben im  $\mathbb{R}^2$  für lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Weitere Autoren, von denen elliptische Randkontaktprobleme unterschiedlicher Allgemeinheit und verschiedener Fragestellungen untersucht wurden, sind z. B. ILJIN [8], ŠIŠMAREV [20], STAMPACCHIA [21] und G. WANKA [24].

In der vorliegenden Arbeit sollen parabolische Randkontaktprobleme untersucht werden. Nichtstationäre thermische Prozesse in Körpern, die aus unterschiedlichen Stoffen bestehen, führen auf derartige Aufgaben, die sich im dreidimensionalen Raum folgendermaßen interpretieren lassen:

Ein Körper, in dem auch Löcher vorhanden sein können, nehme das Gebiet  $\bar{E}_0 \subseteq \mathbb{R}^3$  ein. Er enthalte Stoffeinschlüsse  $E_1, \dots, E_m$ . Wir setzen  $E = E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_m$ .



$$S_i = \partial E_i \quad (i=1, \dots, m), \quad S = \bigcup_{i=1}^m S_i$$

$$R = \partial E_0, \quad \partial E = R \cup S.$$

Die einzelnen  $E_i$  sollen sich unterscheiden durch die physikalischen Größen: Dichte ( $\rho_i$ ), spezifische Wärme ( $c_i$ ) und den Wärmeleitahlen ( $\lambda_i$ ); dabei sind nur solche Medien zu kombinieren, für die  $\frac{\lambda_i}{\rho_i c_i} = a$  ( $i = 1, \dots, m$ ) gilt. Gibt man zum Zeitpunkt  $t = 0$  im Körper  $E$  eine Temperatur vor und erwärmt im Zeitintervall von 0 bis  $T$  die Körperoberfläche, d. h. die äußere Randfläche und die Wände der Hohlräume (1. Randvorgabe,) so stellt sich im Körper eine Temperaturverteilung ein. Die Funktion  $u(x, t)$ , welche die Temperatur zur Zeit  $t$  an dem Punkt  $x$  des Körpers beschreibt, genügt dabei der Gleichung  $a \Delta u = u_t$ .

Stehen die Trennflächen  $S_i$  in ganz inniger Berührung, so daß kein Wärmeübergangswiderstand zwischen ihnen auftritt, dann ist der Temperaturverlauf an den Trennflächen stetig, d. h.

$$(u_0(x, t) - u_i(x, t))|_{S_i \times (0, T]} = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

(Dabei symbolisiert  $u_i(x, t)|_{S_i \times (0, T]}$  bzw.  $u_0|_{S_i \times (0, T]}$  den Grenzwert von  $u(x, t)$  auf  $S_i \times (0, T]$  aus dem Gebiet  $E_i \times (0, T]$  bzw.  $E_0 \times (0, T]$  heraus.) Anschaulich ist in diesem Fall auch, daß der aus dem Medium  $E_0$  kommende Wärmefluß  $\lambda_0 \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial N_x}$  ( $N_x$  bezeichnet die Normale an  $E$  im Punkt  $x$ ) gleich dem Wärmestrom ist, der in  $E_i$  hineinfließt, das heißt

$$\left( \lambda_0 \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial N_x} - \lambda_i \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial N_x} \right) \Big|_{S_i \times (0, T]} = g_i(x, t) \quad (i = 1, \dots, m)$$

mit  $g_i(x, t) = 0$ . Wird  $g_i \neq 0$ , so bedeutet das eine Wärmespeicherung. In spezieller physikalischer Literatur (z. B. bei LAUTZ [22]) wurden solche Probleme bei ausgewählten einfachen symmetrischen Körpern (Zylinder mit zylindrischem Einschluß) durch Reihenansätze, Laplacetransformation u. ä. gelöst.

Wir studieren Randkontaktaufgaben nicht nur für die Wärmeleitungsgleichung und konstante Wärmeleitzahlen, sondern für allgemeinere lineare parabolische Gleichungen zweiter Ordnung, wobei die  $\lambda_i = \lambda_i(x, t)$  Funktionen sind.  $E_0$  sei ein offenes mehrfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ , in welches eine endliche Anzahl von offenen einfach zusammenhängenden Gebieten  $E_1, \dots, E_m$  eingebettet ist.

Wir setzen  $E = \bigcup_{i=0}^m E_i$  mit Gebieten  $E_0, \dots, E_m$ , die von einer Menge beschränkter geschlossener und paarweise disjunkter Hyperflächen berandet sind. Es ist also  $R \cap S = \emptyset$  und  $S_i \cap S_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ . Die Bezeichnungen sind der Skizze zu entnehmen.

Es ist im zylindrischen Gebiet  $\bar{E} \times [0, T]$  eine Funktion  $u(x, t)$  gesucht ( $u(x, t) := u_i(x, t)$  in  $\bar{E}_i \times [0, T]$ ), die in  $E \times (0, T]$  einer linearen parabolischen Gleichung

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x, t) u, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F(x, t) \quad (1.1)$$

genügt, auf dem Rand  $R$  vorgegebene Randbedingungen 1., 2. oder 3. Art und zum Zeitpunkt  $t = 0$  Anfangsbedingungen befriedigt:

Anfangsbedingungen:

$$u_i(x, 0)|_{E_i} = \psi_i(x) \quad (i = 0, 1, \dots, m); \quad (1.2)$$

Randbedingungen:

$$\frac{\partial u_0(x, t)}{\partial n} + \gamma(x, t) u_0(x, t)|_{R \times (0, T]} = f(x, t); \quad (1.3)$$

$$u_0(x, t)|_{R \times (0, T]} = f(x, t); \quad (1.3^*)$$

Kontaktbedingungen:

$$(u_0(x, t) - u_i(x, t))|_{S_i \times (0, T]} = 0 \quad (i = 1, \dots, m); \quad (1.4)$$

$$\left( \lambda_0(x, t) \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial n} - \lambda_i(x, t) \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial n} \right) \Big|_{S_i \times (0, T]} = g_i(x, t) \quad (i = 1, \dots, m). \quad (1.5)$$

Die  $\lambda_i(x, t)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sind auf  $S_i \times (0, T]$  vorgegebene Funktionen.  $u = u(x, t)$  bezeichnet jetzt (da wir eine allgemeine Gleichung behandeln) die innere Konormale im Punkt  $(x, t)$ , d. h.

$$u(x, t) = (u^1, \dots, u^{n+1}),$$

$$u^i(x, t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x, t) N_x^j \quad (i = 1, \dots, n), \quad u^{n+1}(x, t) = 0.$$

Dabei ist  $N_x = (N_x^1, \dots, N_x^n)$  die innere Normale an  $E$  im Punkt  $x$ .

Mathematische Literatur für diese Aufgabe ist uns von KAMYNNIN bekannt [10, 11]. Er behandelte im räumlich eindimensionalen Fall eine relativ allgemeine Kontaktaufgabe, wobei in den zwei thermisch homogenen Gebieten unterschiedliche parabolische Gleichungen erfüllt sein müssen. Eine Übertragung der Untersuchung auf die  $n$ -dimensionale Aufgabe ist nicht möglich, da typische Eigenschaften Volterrascher Integralgleichungen 1. Art genutzt werden, die bei den entstehenden Gleichungen im  $n$ -dimensionalen Fall nicht gelten.

Für  $n = 2$  könnte man eventuell die in der Elastizitätstheorie, z. B. von MAUL [15], verwendete Methode übertragen. Man müßte, ausgehend von einem Einfachschicht-

potentialansatz, durch Anwendung eines geeigneten Differentialoperators das entstandene Integralgleichungssystem (welches Integralgleichungen 1. Art enthält) in ein singuläres Integralgleichungssystem überführen.

Macht man für die Randkontaktaufgabe mit unterschiedlichen parabolischen Differentialgleichungen in den Gebieten  $E_i$  ( $i = 0, \dots, m$ ) einen Ansatz, welcher u. a. die Summe eines Einfachschichtpotentials und eines Doppelschichtpotentials enthält, so entstehen andere Schwierigkeiten. Man erhält zwar Integralgleichungen 2. Art, kann aber die Kerne derselben nicht angeben, da man den Kern der Normalenableitung des Doppelschichtpotentials auf der Belegungsgläche nicht kennt bzw. nicht klar ist, ob ein solcher Kern existiert. Auch hier kommen die Anregungen zum Studium der Probleme aus der Elastizitätstheorie von JENTSCH [9a]. Eine Übertragung der Vorgehensweise von Jentsch wird, wenn überhaupt, nur für Spezialfälle linearer parabolischer Gleichungen möglich sein. Voraussetzung ist die Untersuchung der Normalenableitung des Doppelschichtpotentials.

Parabolische Randkontaktaufgaben in einer schwachen Form wurden auch von OLEJNIK [16] behandelt. In neueren Arbeiten von URBANOWICZ [23] sowie BORZYMOWSKI und HAČ [2] wurden auch nichtlineare Randkontaktprobleme bei parabolischen Gleichungen untersucht.

Die hier notierten Ergebnisse sind ausführlich dargelegt in [26]. Wir lösen die Aufgabe mit den Mitteln der Potentialtheorie. Bekannt sind aus der Theorie elliptischer Differentialgleichungen Einfach- und Doppelschicht-, sowie Volumenpotentiale. Analoge Potentiale gibt es auch im Bereich parabolischer Gleichungen. Die Theorie der Wärmepotentiale ist allerdings noch nicht in vergleichbarem Maße entwickelt. Potentiale mit den Grundlösungen allgemeiner linearer Gleichungen 2. Ordnung als Kern und wenigstens beschränkten Dichten untersuchten u. a. POGORZELSKI [19], FRIEDMAN [4] und LADYŽENSKAJA [14].

## 2. Potentialansatz

Wir behandeln hier die 2. und 3. Randkontaktaufgabe. Diese Aufgaben lassen sich mit einem Einfachschichtpotentialansatz lösen. Bei der 1. Randkontaktaufgabe sind Kombinationen von Einfach- und Doppelschichtpotentialen nötig. Dies ist insbesondere bei den Regularitätsuntersuchungen aufwendiger und läßt das Prinzip der Behandlung nicht so deutlich werden. Zudem können wir, wenn wir nur Einfachschichtpotentiale betrachten, die Resultate aus [6, 25] über das Einfachschichtpotential mit  $L_1$ -Dichte verwenden und dadurch einen sehr allgemeinen Existenzsatz aufstellen.

Der Operator  $L$  sei erklärt im Gebiet  $\bar{E} \times [0, T]$ . Für ihn soll gelten:

(A0) Die Matrix  $\{a_{ij}\}_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, n}$  ist symmetrisch.

(A1)  $L$  ist parabolisch in  $\bar{E} \times [0, T]$ .

(A2) Die Koeffizienten von  $L$  sind stetige Funktionen und es gilt für alle  $(x, t)$ ,  $(x_0, t_0) \in \bar{E} \times [0, T]$ :

$$|a_{ij}(x, t) - a_{ij}(x_0, t_0)| \leq A(|x - x_0|^\alpha + |t - t_0|^{\alpha/2})$$

$$|b_i(x, t) - b_i(x_0, t)| \leq A|x - x_0|^\alpha$$

$$|c(x, t) - c(x_0, t)| \leq A|x - x_0|^\alpha \quad \text{mit } 0 < \alpha < 1.$$

Die Fundamentallösung der Gleichung (1.1) bezeichnen wir mit  $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ . Die Eigenschaften der Fundamentallösung entsprechen denen der Wärmeleitungsgleichung (siehe z. B. POGORZELSKI [19] oder FRIEDMAN [4]).

Die Aufgabe (1.1)–(1.5) überführen wir in eine Aufgabe mit homogener Gleichung und verschwindenden Anfangswerten. Zu diesem Zweck seien zwei aus der Literatur [19, 14] bekannte Sätze über Wärmepotentiale eingefügt.

Satz 1: Die Funktion  $\psi_i(x)$  sei stetig in  $E_i$ . Dann ist das Poisson-Weierstraß-Integral

$$P_i(x, t) = \int_{E_i} \Gamma(x, t; \xi, 0) \psi_i(\xi) d\xi$$

für  $x \in E_i$ ,  $0 < t < T$  stetig, erfüllt die Gleichung  $LP_i = 0$  in  $E_i \times (0, T]$  und es gilt  $P_i(x, t) \rightarrow \psi_i(x)$  für  $t \rightarrow 0$  und  $x \in E_i$  (d. h.  $x \notin \partial E_i$ ). Diese Grenzrelation gilt gleichmäßig in bezug auf  $(x, t)$ .

Satz 2: Wenn die Funktion  $F(x, t)$  in  $\bar{E}_i \times [0, T]$  stetig und  $\partial E_i \in C^{1,\lambda}$  mit  $0 < \lambda \leq 1$  ist, so sind das allgemeine Volumenpotential

$$J_i(x, t) = \int_0^t \int_{E_i} \Gamma(x, t; \xi, \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

und seine ersten Ableitungen  $\frac{\partial J_i(x, t)}{\partial x_i}$  hölderstetig in  $\bar{E}_i \times [0, T]$ . Es gilt  $J_i(x, 0) = 0$ . Ist  $F(x, t)$  hölderstetig in  $E_i \times (0, T]$  bezüglich  $x$  (gleichmäßig in bezug auf  $t$ ), so gilt  $LJ_i = -F(x, t)$ .

Die Funktion  $w(x, t)$  sei Lösung der Aufgabe (1.1)–(1.5). Wir setzen  $(\psi(x) := \psi_i(x) \forall x \in E_i, i = 1, \dots, m)$

$$u(x, t) = w(x, t) - \int_{E^*} \Gamma(x, t; \xi, 0) \psi(\xi) d\xi + \int_0^t \int_E \Gamma(x, t; \xi, \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

$$u(x, t) = w(x, t) - P(x, t) + J(x, t),$$

wobei  $E \subset E^*$ , d. h.  $E^*$  eine „leichte Vergrößerung“ von  $E$  ist. Die Voraussetzungen (A2) an  $L$  erlauben die Fortsetzung des Operators über  $E \times [0, T]$  hinaus (vgl. [4]). Wenn wir voraussetzen, daß  $\psi \in C(\bar{E}^*)$ ,  $F(x, t) \in C(\bar{E} \times [0, T])$ ,  $\partial E \in C^{1,\lambda}$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ) und  $F(x, t)$  hölderstetig bezüglich  $x$  (gleichmäßig in bezug auf  $t$ ) ist, so ergibt sich für  $u(x, t)$  folgende Aufgabenstellung:

$$Lu(x, t) = 0 \quad \text{für } x \in E, \quad 0 < t \leq T; \tag{2.1}$$

$$u(x, 0)|_{\bar{E}} = 0; \tag{2.2}$$

$$\left( \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial n} + \gamma(x, t) u_0(x, t) \right) \Big|_{R \times (0, T)} = \overline{f(x, t)} \tag{2.3}$$

mit

$$\overline{f(x, t)} = f(x, t) - \frac{\partial}{\partial n} P(x, t) - \gamma(x, t) P(x, t) + \frac{\partial}{\partial n} J(x, t) + \gamma(x, t) J(x, t);$$

$$(u_0(x, t) - u_i(x, t))|_{S_i \times (0, T)} = 0 \quad (i = 1, \dots, m); \tag{2.4}$$

$$\left( \lambda_0(x, t) \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial n} - \lambda_i(x, t) \frac{\partial u_i(x, t)}{\partial n} \right) \Big|_{S_i \times (0, T)} = \overline{g_i(x, t)} \tag{2.5}$$

mit

$$\overline{g_i(x, t)} = g_i(x, t) - (\lambda_i - \lambda_0) \frac{\partial P(x, t)}{\partial n} + (\lambda_0 - \lambda_i) \frac{\partial J(x, t)}{\partial n} \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Die Aufgabe (2.1)–(2.5) läßt sich mit einem Einfachschichtpotentialansatz lösen. Die Glattheit der Dichte dieses Potentials hängt von der Glattheit von  $\bar{f}$  bzw.  $\bar{g}$ , d. h. u. a. von  $\frac{\partial P}{\partial u}$  und  $\frac{\partial J}{\partial u}$  ab. Wir stellen die für die Existenz der Lösung notwendigen Bedingungen an  $\bar{f}$  bzw.  $\bar{g}$  auf und leiten im Abschnitt 4 die daraus resultierenden Forderungen an die Anfangsbedingungen und die rechte Seite der Differentialgleichung (1.1) ab.

Die Lösung der Aufgabe setzen wir in Form eines Einfachschichtpotentials mit unbekannter Dichte an:

$$V(x, t) = \int_0^t \int_{\partial E} \Gamma(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) dO_\xi d\tau \tag{2.6}$$

( $dO_\xi$  symbolisiert das Oberflächenelement von  $\partial E$ ). Es sei  $\partial E \in C^{1,\lambda}$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ) (vgl. [7]) und  $\varphi \in C(\partial E \times [0, T])$ . Dann gilt  $LV = 0$  in  $E \times (0, T)$  und  $V(x, 0) = 0$  für  $x \in \bar{E}$  (siehe FRIEDMANN [4]).  $V(x, t)$  geht stetig durch die Belegungsfläche  $\partial E \times [0, T]$  und erfüllt damit die Kontaktbedingung (1.4). Berücksichtigen wir die Verallgemeinerung der Sprungrelation für summierbare Dichten, so könnte man die Lösung der Aufgabe auch als Potential (2.6) mit  $\varphi \in L_1(\partial E \times [0, T])$  und  $\partial E \in C^{1,\lambda}$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ) ansetzen. Die Anfangsbedingung, die homogenen Kontaktbedingungen, sind dann „fast überall“ erfüllt. Bei allen in den Bedingungen (2.3) und (2.5) auftretenden Grenzübergängen wäre die Einschränkung  $x \in N_x$  bzw.  $x \in -N_x$  zu treffen.  $V$  wäre in diesem Sinne eine „verallgemeinerte Lösung“ der Aufgabe (2.1)–(2.5). Die Rand- und 2. Kontaktbedingungen führen unter Ausnutzung der Sprungrelation auf folgende Integralgleichung:

$$\varphi(x_0, t) + \int_0^t \int_{\partial E} K(x_0, t; \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) dO_\xi d\tau = H(x_0, t) \tag{2.7}$$

mit

$$K(x_0, t; \xi, \tau) = \begin{cases} \frac{2\Gamma(x_0, t; \xi, \tau)}{\partial u(x_0, t)} + 2\gamma(x_0, t) \Gamma(x_0, t; \xi, \tau) \\ \text{für } x_0 \in R, \quad 0 < t \leq T, \quad \xi \in \partial E, \quad 0 \leq \tau \leq t, \\ \frac{2[\lambda_0(x_0, t) - \lambda_i(x_0, t)]}{\lambda_0(x_0, t) + \lambda_i(x_0, t)} \frac{\partial \Gamma(x_0, t; \xi, \tau)}{\partial u(x_0, t)} \\ \text{für } x_0 \in S_i \ (i = 1, \dots, m), \quad \xi \in \partial E, \quad 0 < t \leq T, \quad 0 \leq \tau \leq t. \end{cases}$$

$$H(x_0, t) = \begin{cases} 2\bar{f}(x_0, t) \text{ für } x_0 \in R, \quad 0 < t \leq T, \\ \frac{2\bar{g}_i(x_0, t)}{\lambda_0(x_0, t) + \lambda_i(x_0, t)} \text{ für } x_0 \in S_i \ (i = 1, \dots, m), \quad 0 < t \leq T. \end{cases}$$

Die Funktionen  $\lambda_0, \lambda_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) und  $\gamma$  seien auf ihrem Definitionsgebiet beschränkt und es gelte  $\lambda_0(x, t) + \lambda_i(x, t) \neq 0 \ \forall (x, t) \in S_i \times [0, T]$ . Im Fall  $\lambda_0 = \lambda_j$  ( $j$  fest,  $1 \leq j \leq m$ ) reduziert sich die Integralgleichung auf  $S_j \times [0, T]$  zu  $\varphi(x_0, t) = \frac{g(x_0, t)}{\lambda_0}$ . Dies verändert jedoch nichts an der Diskussion der Integralgleichung.

Ausgehend vom Singularitätsverhalten der Grundlösung  $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$  und deren Normalenableitung kann man zeigen, daß die Integralgleichung (2.7) eine schwach singuläre Integralgleichung 2. Art vom Volterraschen Typ bezüglich  $t$  und vom Fredholmschen Typ bezüglich  $x$  ist.

### 3. Diskussion der Integralgleichung

Beim Studium der Randwerte der Wärmeleitungsgleichung tritt eine zu (2.7) analoge Integralgleichung auf, wobei dann vor dem Integral noch ein  $\lambda$  steht. Die Diskussion der entsprechenden Neumannschen Reihe erwies sich als schwierig. Erstmals zeigte MÜNTZ (1936) [19] die Konvergenz für einige  $\lambda$  und  $t$  im zweidimensionalen Fall. 1938 verallgemeinerte dies TICHONOW [19] auf den dreidimensionalen Fall. MICHLIN bewies die Konvergenz für konvexe Berandungen und nicht alle  $\lambda$ -Werte [19]. Erst POGORZELSKI zeigte 1951 in [18] die Konvergenz der Reihe für alle  $\lambda$  und  $t$  und stetige  $H(x, t)$  auf einer Ljapunowbelegungsfläche. Wir können dies auf den unsrigen Fall übertragen und diskutieren etwas schwächere Voraussetzungen an  $H(x, t)$  unter Benutzung der Theorie der Integralgleichungen.

Satz 3: Im Raum  $L_1$  existiert stets eine eindeutige Lösung der Integralgleichung (2.7), die sich als Summe der Neumannschen Reihe darstellen läßt, wenn der Differentialoperator  $L$  die Bedingungen (A0), (A1) und (A2) erfüllt,  $\partial E \in C^{1,1}$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ) ist,  $\lambda_i(x, t)$  ( $i = 0, \dots, m$ ) und  $\gamma(x, t)$  beschränkte Funktionen sind,  $\lambda_0(x, t) + \lambda_i(x, t) \neq 0 \forall (x, t) \in S_i \times (0, T]$  ( $i = 1, \dots, m$ ) und  $H(x, t) \in L_1(\partial E \times [0, T])$  ist.

Zur Untersuchung der Neumannschen Reihe:  $K_v(x_0, t; \xi, \tau)$  bezeichnet den  $v$ -ten iterierten Kern. Da  $K_0(x_0, t; \xi, \tau)$  ein schwach singulärer Kern ist, existiert ein  $v_0$ , so daß  $K_{v_0}$  und alle folgenden Kerne beschränkt sind. Für  $K_{v_0+m}$  kann die folgende Abschätzung nachgewiesen werden:

$$|K_{v_0+m}(x, t; \xi, \tau)| \leq \frac{N_1 N^m G^m (1 - \mu) (t - \tau)^{m(1-\mu)}}{G(m[1 - \mu] + 1)} \tag{3.1}$$

für  $x, \xi \in \partial E, \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$

wobei  $G$  die Gammafunktion bezeichnet und  $N_1, N$  Konstanten sind mit

$$N \geq \int_{\partial E} \frac{1}{|x_0 - \eta|^{n+1-2\mu-\delta}} dO_\eta$$

und  $1 - \frac{\delta}{2} < \mu < 1, \quad 0 < \delta < 1.$

Die Anwendung des Wurzelkriteriums zeigt die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m N^m G^m (1 - \mu) (t - \tau)^{(1-\mu)m}}{G(m[1 - \mu] + 1)}. \tag{3.2}$$

Nach dem Multiplikationstheorem (für die Gammafunktion) von Gauß und Legendre gilt:

$$G(z) G\left(z + \frac{1}{n}\right) G\left(z + \frac{2}{n}\right) \dots G\left(z + \frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-nz} \cdot G(nz).$$

Somit läßt sich zeigen:

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{\lambda^m N^m G^m (1 + \mu) (t - \tau)^{(1-\mu)m}}{m[1 - \mu] G(m[1 - \mu])}} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda N G (1 - \mu) (t - \tau)^{1-\mu} \sqrt[m]{(2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)}} \sqrt[m]{m^{\frac{1}{2}-m}}}{\sqrt[m]{m} \sqrt[m]{1 - \mu} \sqrt[m]{G(1 - \mu)} \sqrt[m]{G\left([1 - \mu] + \frac{1}{m}\right)} \dots \sqrt[m]{G\left([1 - \mu] + 1 - \frac{1}{m}\right)}} \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda N G (1 - \mu) (t - \tau)^{1-\mu} \sqrt{2\pi} \sqrt[m]{m^2}}{\sqrt[m]{m} \sqrt{(2\pi)^{1/2}} \sqrt[m]{1 - \mu} G(1 - \mu) \dots G\left([1 - \mu] + \frac{m-1}{m}\right)} \end{aligned}$$

Es gilt  $1 - \mu < \frac{1}{2} \rightarrow 1 - \mu + \frac{m-1}{m} < 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{m}$ . In diesem Bereich fällt die  $G$ -Funktion monoton und man kann folgern, daß

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{\lambda^m N^m G^m (1 - \mu) (t - \tau)^{(1-\mu)m}}{m[1 - \mu] G(m[1 - \mu])}} = 0$$

ist. Die Reihe (3.2) konvergiert somit in jedem Punkt, d. h. für beliebige  $(t - \tau)$  und  $|x_0 - \xi|$  (dieser Abstand ging in die Konstante  $N$  ein). Damit ist auch die gleichmäßige

Konvergenz der Reihe  $\sum_{v=v_0}^{\infty} \lambda^v K_v(x_0, t; \xi, \tau)$  gesichert.

Uns interessiert die Konvergenz der Neumannschen Reihe

$$H(x, t) + \sum_{v=1}^{\infty} \lambda^v K^v H. \quad (3.3)$$

Dabei ist

$$KH = \int_0^t \int_{\partial E} K(x_0, t; \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) dO_\xi d\tau,$$

$K^v$  bezeichnet die  $v$ -te Potenz des Operators  $K$ . Bei beschränktem und integrierbarem  $H(x, t)$  auf  $\partial E \times [0, T]$  ergibt sich sofort:

$$|\lambda^m K^{v_0+m} H| \leq |\lambda^m| \left| \frac{N^m G (1 - \mu) t^{(1-\mu)m}}{G(m[1 - \mu] + 1)} \right| \int_0^t \int_{\partial E} H(\xi, \tau) dO_\xi d\tau. \quad (3.4)$$

Für  $v < v_0$  sind alle Summanden von (3.3) beschränkte Funktionen, da ein schwach singuläres Integral mit beschränkter Dichte stets eine beschränkte Funktion ist. Die rechte Seite von (3.4) zeigt, daß die Reihe (3.3) absolut und gleichmäßig konvergiert für beliebiges  $\lambda$ ,  $0 < t \leq T$ ,  $x \in \partial E$ . Wir bezeichnen die Summe der Reihe mit  $\varphi(x, t)$  und die Partialsumme mit  $\varphi_m(x, t)$ . Es gilt:

$$\varphi_m(x_0, t) = H(x_0, t) + \lambda \int_0^t \int_{\partial E} K(x_0, t; \xi, \tau) \varphi_{m-1}(\xi, \tau) dO_\xi d\tau. \quad (3.5)$$

Der Grenzübergang unter dem Integral ist möglich, d. h., die Summe der Reihe (3.3) stellt für integrierbares und beschränktes  $H(x, t)$  die Lösung der Integralgleichung (2.7) dar und ist selbst eine beschränkte Funktion.



Setzen wir nur  $H(x, t) \in L_1(\partial E \times [0, T])$  voraus, so gilt  $K^v H \in L_1(\partial E \times [0, T])$  für  $v \geq 1$ . Für  $v \geq v_0$  gilt die Abschätzung (3.4). Somit konvergiert die Reihe (3.3) in der  $L_1$ -Norm gegen eine  $L_1$ -Funktion  $\varphi(x, t)$ . Diese ist Lösung der Integralgleichung (2.7) wegen (3.5) und

$$\begin{aligned} & \|K^1 \varphi_{m-1} - K^1 \varphi\|_{L_1(\partial E \times [0, T])} = \|K^1(\varphi_{m-1} - \varphi)\| \\ & \leq \frac{\lambda^m N^m G(1 - \mu) T^{(1-\mu)m+1}}{G(m[1 - \mu] + 1)} \|\varphi_{m-1} - \varphi\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Wählen wir  $H(x, t) \in L_2(\partial E \times [0, T])$ , so gilt:

$$\begin{aligned} |K^1 H|^2 \leq & \left\{ \int_0^t \int_{\partial E} \frac{1}{(t - \tau)^\mu} \frac{1}{|x - \xi|^{n+1-2\mu-\delta}} dO_\xi d\tau \right. \\ & \left. \times \int_0^t \int_{\partial E} \frac{|H(\xi, \tau)|^2}{|(t - \tau)^\mu |x - \xi|^{n+1-2\mu-\delta}} dO_\xi d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist summierbar, also ist  $K^1 H$  quadratisch summierbar auf  $\partial E \times [0, T]$ . Für  $v > 1$  gelten die Überlegungen entsprechend. Aus (3.4) folgt sofort die Konvergenz der Reihe (3.3) in der  $L_2$ -Norm gegen eine  $L_2$ -Funktion, welche der Integralgleichung (2.7) genügt. Eigenlösungen der Integralgleichung kann es wegen (3.4) im Raum  $L_1(\partial E \times [0, T])$  keine geben und damit ist die Integralgleichung (da die Fredholmsche Alternative gilt) für beliebiges  $H(x, t) \in L_1(\partial E \times [0, T])$  oder  $H(x, t) \in L_2(\partial E \times [0, T])$  eindeutig lösbar.

Werden die Voraussetzungen an  $H(x, t)$  und die in den Kern eingehenden  $\lambda_i$  ( $i = 0, \dots, m$ ),  $\gamma(x, t)$  erhöht, so ergeben sich präzisierete Aussagen für  $\varphi(x, t)$ .

#### 4. Regularitätsaussagen

Besonders interessiert sind wir an stetigen Lösungen der Integralgleichung (2.7). Die bekannten Sätze (die für  $K(P, Q) = \frac{A(P, Q)}{r^\lambda}$  die Stetigkeit von  $A(P, Q)$  fordern) sind bei uns nicht anwendbar wegen der Gewinnung der Grundlösung über eine komplizierte Integralgleichung. Mittels des folgenden Satzes können wir die Stetigkeit der Lösungen der Integralgleichung diskutieren.

**Satz 4 (FRIEDMANN [4]):** Sei  $f(x, y)$  eine stetige Funktion für  $(x, y) \in S \times S$  und  $x \neq y$ , dabei sei  $S$  ein kompaktes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$ . Es gelte außerdem:

$$\int_{S(x, \varepsilon)} |f(x, y)| dy \rightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0$$

gleichmäßig auf  $S$ , wobei  $S(x, \varepsilon)$  ein Kreis um  $x$  mit dem Radius  $\varepsilon$  ist. Ist nun  $g$  eine beliebige beschränkte meßbare Funktion auf  $S$ , so ist  $\int f(x, y) g(x) dy$  stetig für  $x \in S$ .

Aus den Eigenschaften der Grundlösung bzw. deren Normalenableitung folgt, wenn wir noch zusätzlich die Stetigkeit der Funktionen  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  auf den entsprechenden Hyperflächen fordern, die gleichmäßige Stetigkeit des Kernes  $K(x_0, t; \xi, \tau)$

bezüglich  $(x, t)$  für  $\tau < t$ . Es ist offenbar:

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \int_{S(x_0, \varepsilon')} |K(x_0, t; \xi, \tau)| dO_\xi d\tau \leq \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \frac{1}{(t_0 - \tau)^\mu} \int_{S(x_0, \varepsilon')} \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n+1-2\mu-\delta}} dO_\xi d\tau \tag{4.1}$$

(mit  $1 - \frac{\delta}{2} < \mu < 1, 0 < \delta < 1$ ). Dabei sei  $S(x_0, \varepsilon')$  der Teil der Hyperflächen  $\partial E$ , der innerhalb der Ljapunowkugel um  $x_0$  mit dem Radius  $\varepsilon'$  liegt. Es werde  $\varepsilon'$  so gewählt, daß die Projektion von  $S(x_0, \varepsilon')$  auf der Tangentialhyperebene innerhalb  $S'(x_0, \varepsilon)$  liegt.  $S'(x_0, \varepsilon)$  bezeichnet die  $(n - 1)$ -dimensionale Kugel auf der Tangentialhyperebene mit dem Mittelpunkt  $x_0$  und dem Radius  $\varepsilon$ . Mit  $\xi'$  werde die Projektion von  $\xi$  auf  $S'(x_0, \varepsilon)$  bezeichnet und  $dO_{\xi'}$  sei das Flächenelement von  $S'(x_0, \varepsilon)$ . Es gilt:  $|x_0 - \xi| > |x_0 - \xi'|$  (vgl. z. B. GÜNTHER [7]). Wir können deshalb folgern, daß

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \int_{S(x_0, \varepsilon')} |K(x_0, t; \xi, \tau)| dO_\xi d\tau \leq \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \frac{1}{(t_0 - \tau)^\mu} \int_{S'(x_0, \varepsilon)} \frac{1}{|x_0 - \xi'|^{n+1-2\mu-\delta}} dO_{\xi'} d\tau \tag{4.2}$$

ist. Für das Flächenelement  $dO_\xi$  gilt:

$$dO_\xi = \frac{dO_{\xi'}}{\cos(N_\xi, N_{x_0})} < 2dO_{\xi'} = 2r^{n-2} dr d\omega_1 \dots d\omega_{n-3}.$$

In der letzten Formel steht rechts das Flächenelement der  $(n - 2)$ -dimensionalen Oberfläche einer Kugel. Wir erhalten somit:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \int_{S(x_0, \varepsilon')} |K(x_0, t; \xi, \tau)| dO_\xi d\tau \\ & \leq 2 \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \frac{1}{(t_0 - \tau)^\mu} \int_0^{\pi/2} \dots \int_0^\pi d\omega_1 \dots d\omega_{n-3} \int_0^\varepsilon r^{2\mu+\delta-3} dr \\ & \leq \frac{M\varepsilon^{\mu+\delta-1}}{(1 - \mu)(2\mu + \delta - 2)}. \end{aligned}$$

Da  $\mu + \delta - 1 > 0$  ist, zeigt diese Abschätzung, daß

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0} \int_{S(x_0, \varepsilon')} |K(x_0, t; \xi, \tau)| dO_\xi d\tau \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0$$

unabhängig vom Punkt  $(x_0, t)$  ist. Damit wurde der folgende Satz gezeigt.

Satz 5: Wenn gilt:

- $f(x, t)$  ist beschränkt auf  $\partial E \times [0, T]$ ,
- der Operator  $L$  erfüllt die Voraussetzungen (A0), (A1) und (A2),
- $\partial E \in C^{1,\lambda}$ ,
- $\gamma(x, t) \in C(R \times [0, T])$ ,  $\lambda_0(x, t) \in C(S \times [0, T])$ ,  $\lambda_i(x, t) \in C(S_i \times [0, T])$ ,
- $\lambda_0(x, t) + \lambda_i(x, t) \neq 0 \forall (x, t) \in S_i \times [0, T]$  ( $i = 1, \dots, m$ ),

dann ist  $\int_0^t \int_{\partial E} K(x_0, t; \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) dO_\xi d\tau$  eine stetige Funktion für  $(x_0, t) \in \partial E \times [0, T]$ .

Wird  $H(x, t)$  stetig vorausgesetzt, so ist  $\varphi(x, t)$  nach Satz 3 beschränkt und damit nach Satz 4 sogar stetig. Ist  $H(x, t)$  hölderstetig (neben den Voraussetzungen von Satz 5), so kann unter der zusätzlichen Voraussetzung der Hölderstetigkeit der Funktionen  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  und  $\gamma$  die Hölderstetigkeit von  $\varphi(x, t)$  gezeigt werden.

Wir haben den Zusammenhang zwischen der Glattheit von  $H(x, t)$  und der Dichte  $\varphi(x, t)$  hergestellt. In  $H(x, t)$  gehen direkt die Rand- und Kontaktvorgaben ( $f, \gamma, g_i, \lambda_i$ ) ein und indirekt die Anfangsbedingungen und die Quellfunktion der Differentialgleichung. Es soll kurz erörtert werden die Glattheit von  $H(x, t)$  in Abhängigkeit von  $\psi(x, t)$  und  $F(x, t)$ . Beim Volumenpotential sind die Voraussetzungen von Satz 2 unumgänglich. Die Stetigkeit des Potentials  $J(x, t)$  und der ersten partiellen Ableitungen nach  $x$  ist zwar schon bei beschränkter und integrierbarer Dichte gewährleistet, aber die zweiten partiellen Ableitungen im Innern müssen gar nicht existieren, wenn

$F(x, t)$  nur stetig ist. Unter den Voraussetzungen von Satz 2 sind  $J(x, t)$  und  $\frac{\partial J(x; t)}{\partial u}$

auf der Hyperfläche  $\partial E \times [0, T]$  hölderstetig. Das Poisson-Weierstraß-Integral haben wir über  $E^*$  erstreckt und  $\psi \in C(E^*)$ , somit ist  $P(x, t)$  stetig auf  $\partial E \times [0, T]$ . Würde nur über  $E$  integriert und  $\psi \in C(\bar{E})$ , dann gilt  $\lim_{t \rightarrow 0} P(x, t) = \psi(x)$  nur für  $x \in \bar{E}$ ;

( $i = 1, \dots, m$ ) und für  $x \in E_0$ . Es gilt:  $P(x, t) \in C(S \times [0, T])$  und  $P(x, t)$  ist auf  $R \times (0, T]$  stetig und für  $x \in R, t = 0$  beschränkt. In  $H(x, t)$  geht als problematischer Term  $\frac{\partial P(x, t)}{\partial u}$  ein. Von GEVREY [5] gibt es im Spezialfall  $R^n = R^1$  ( $L = \Delta u - u_t$ )

Resultate über die Ableitungen von  $P(x, t)$  bis zum Rand des betrachteten Gebietes. Da uns für allgemeinere Fälle entsprechende Resultate nicht bekannt sind, wird gefordert, daß  $\psi = 0$  sei in einer  $R^n$ -Umgebung von  $\partial E$ .

Eine Zusammenfassung des bisher Gesagten liefert der folgende Satz.

**Satz 6 (Existenzsatz):** Für die Aufgabe (1.1)–(1.5) existiert eine Lösung  $w(x, t)$ , die sich in der Form

$$w(x, t) = \int_0^t \int_{\partial E} \Gamma(x, t; \xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) dO_\xi d\tau + \int_E \Gamma(x, t; \xi, 0) \psi(\xi) d\xi - \int_0^t \int_E \Gamma(x, t; \xi, \tau) F(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

darstellen läßt. Die Dichte  $\varphi(x, t)$  ist eindeutig bestimmt. Sie ergibt sich als Lösung der Integralgleichung (1.7) und ist darstellbar mittels der entsprechenden Neumannschen Reihe, wobei die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein müssen:

- der Operator  $L$  genügt den Bedingungen (A0)–(A2),
- $\partial E \in C^{1,\lambda}$  ( $0 < \lambda \leq 1$ ),
- $\lambda_1(x, t), \dots, \lambda_m(x, t)$  und  $\gamma(x, t)$  sind beschränkte Funktionen,
- $\lambda_0(x, t) + \lambda_i(x, t) \neq 0 \forall (x, t) \in S_i \times (0, T]$  ( $i = 1, \dots, m$ ),
- $F(x, t)$  ist hölderstetig bezüglich  $x$  in  $E \times [0, T]$  (unabhängig von  $t$ ),
- für die Rand-, Kontakt- und Anfangsvorgaben sind die unter a) bis e) genannten unterschiedlichen Bedingungen möglich.

a) Sind  $f \in L_1(R \times [0, t])$ ,  $g_i \in L_1(S_i \times (0, T])$  ( $i = 1, \dots, m$ ) und  $\psi \in C(E)$ , so ist  $\varphi \in L_1(E \times [0, T])$ . Die Lösung  $w$  genügt den Bedingungen (1.3) und (1.5) fast überall und es gilt  $w(x, 0) = \psi(x) \forall x \in (E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_m)$ .

b) Sind  $f \in L_2(R \times [0, T])$ ,  $g_i \in L_2(S_i \times [0, T])$  ( $i = 1, \dots, m$ ),  $\psi \in C(E)$  und  $\psi$  gleich Null in einer  $R^n$ -Umgebung von  $\partial E$ , so ist  $\varphi \in L_2(\partial E \times [0, T])$ .

c) Sind  $f$  und  $g_i$  zusätzlich zu allen unter b) gemachten Voraussetzungen beschränkt, so ist die Dichte  $\varphi$  ebenfalls beschränkt. Die Lösung  $w(x, t)$  ist eine stetige Funktion in  $\bar{E} \times [0, T]$ , die die Bedingungen (1.1)–(1.5) in jedem Punkt erfüllt.

d) Es sei  $f \in C(R \times [0, T])$ ,  $g_i, \lambda_i \in C(S_i \times [0, T])$  ( $i = 1, \dots, m$ ),  $\lambda_0 \in C(S \times [0, T])$ ,  $\gamma \in C(R \times [0, T])$ .  $\psi$  erfülle die gleichen Voraussetzungen wie in b).  $\varphi(x, t)$  ist dann stetig auf  $\partial E \times [0, T]$ .

e) Wählt man  $f, g_i, \lambda_0, \lambda_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) hölderstetig und  $\psi = 0$  in  $E$ , so ist die Dichte  $\varphi$  hölderstetig und damit ist  $w(x, t)$  hölderstetig und die  $\frac{\partial w}{\partial x_j}$  ( $j = 1, \dots, n$ ) sind gleichmäßig stetig in  $E \times [\varepsilon, T]$  für  $\varepsilon > 0$ .

## 5. Bemerkung zur Eindeutigkeit

Der Existenzsatz enthält eine Unitätsaussage der Art, daß unter den entsprechenden Voraussetzungen dieses Satzes die Lösung in Gestalt einer Summe aus Potentialen eindeutig ist. Es könnte aber noch weitere Lösungen der Randkontaktaufgaben geben, welche sich nicht als Potentiale darstellen lassen. Wir haben nun auch noch Eindeutigkeitsaussagen mittels Greenscher Formeln gewonnen. Hier sei nur eine solche Unitätsaussage angeführt.

Satz 7 (Eindeutigkeitsatz): Unter den Voraussetzungen von Satz 6 (es sollen die Bedingungen c), d) oder e) gelten) existiert genau eine Lösung der Aufgabe (1.1)–(1.5), wenn wir noch zusätzlich fordern:

- $\frac{\partial a_{ij}(x, t)}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial b_i(x, t)}{\partial x_j}, c(x, t) \in C(\bar{E} \times [0, T])$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ),
- $b_k(x, t) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{jk}(x, t)}{\partial x_j} = 0 \quad \forall (x, t) \in \bar{E} \times [0, T]$  ( $k = 1, \dots, n$ ),
- $\lambda_0, \dots, \lambda_m$  seien streng positive oder streng negative Konstanten,
- $c(x, t) \leq 0 \quad \forall (x, t) \in \bar{E} \times [0, T], \quad \gamma(x, t) \geq 0 \quad \forall (x, t) \in (\partial E \times [0, T])$
- $\partial E \in C^2$ .

## LITERATUR

- [1] Бателёйшвили, М. О.: Об одном способе решения третьей и четвертой граничных задач статики анизотропных упругих тел. Сообщ. Акад. Наук. Гр СССР **34** (1964), 283–296.
- [2] BORZYMOWSKI, A., and A. НАЃ: A nonlinear contact boundary value problem in a non-cylindrical domain. Demonstratio Math. **12** (1979), 955–979.
- [3] Бурчуладзе, Т. В.: О некоторых смешанных граничных задачах для многосвязных областей. Труды Тбл. гос. унив. **110** (1965), 79–88.
- [4] FRIEDMAN, A.: Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N.J. 1964.
- [5] GEVREY, M.: Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. J. de Mathématique **78** (1913), 305–471.
- [6] GÖPFERT, A.: Optimierungsprobleme bei parabolischen und elliptischen Differentialgleichungen. Diss. B: Karl-Marx-Universität Leipzig.
- [7] GÜNTHER, N. M.: Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft: Leipzig 1957.
- [8] Ильин, В. А.: О разрешимости задач Дирихле и Неймана линейного эллиптического оператора с разрывными коэффициентами. Докл. Акад. Наук СССР **137** (1961), 28–30.

- [9] JENTSCH, L.: Zur Theorie stückweise homogener Körper. Arch. Rat. Mech. Anal. **24** (1967), 141—172.
- [9a] JENTSCH, L.: Über Wärmespannungen in Körpern mit stückweise konstanten Lameschen Elastizitätsmoduln. Schriftenreihe des Zentralinstituts für Mathematik und Mechanik bei der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Heft 14, Berlin 1972.
- [10] КАМЫНИН, Л. И.: О существовании решения краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами. Изв. Акад. Наук СССР, серия математической **28** (1964), 721—744.
- [11] КАМЫНИН, Л. И.: Метод тепловых потенциалов для параболического уравнения с разрывными коэффициентами. Сиб. мат. ж. **IV** (5) (1963), 1071—1105.
- [12] KLÖTZLER, R.: Beiträge zur Theorie mehrdimensionaler Variationsprobleme mit geknickten Extremalen. Diss. A: Karl-Marx-Universität Leipzig 1955.
- [13] KUPRADSE, W. D.: Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin 1956.
- [14] ЛАДЫЖЕНСКАЯ, О. А., СОЛОННИКОВ, Н. А., и Н. Н. УРАЛЬЦЕВА: Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва 1967.
- [15] MAUL, J.: Über eine einheitliche Methode zur Lösung der ebenen Aufgaben der linearen Elastostatik mit Anwendung in der Theorie der Wärmespannungen und der Theorie langer zylindrischer Körper. Promotion A: Karl-Marx-Universität Leipzig 1974.
- [16] ОЛЕЙНИК, О. А.: Решение основных краевых задач для уравнений второго порядка с разрывными коэффициентами. Докл. Акад. Наук СССР, **124** (1959), 1219—1222.
- [17] PICONÉ, M.: Sur un problème nouveau pour l'équation linéaire aux dérivées partielles de la théorie mathématique classique de l'élasticité. Second. Coll. Eq. Der. Part. Centr. Belge Math. Bruscelles (1954), pp. 3—11.
- [18] POGORZELSKI, W.: Sur la solution de l'équation intégrale dans le problème de Fourier. Ann. de la Soc. Pol. de Math. **24** (1951), 56—74.
- [19] POGORZELSKI, W.: Integral equations and their applications. Polish Scientific publishers: Warszawa 1966.
- [20] ШИШМАРЕВ, И. А.: Введение в теорию эллиптических уравнений. Москва 1979.
- [21] STAMPACCHIA, G.: Su un problema relativo alle equazioni di tipo ellittico del secondo ordine. Ricerche di Mat. Napoli **5** (1956), 3—24.
- [22] TAUTZ, M.: Wärmeleitung und Temperatenausgleich. Akademie-Verlag: Berlin 1971.
- [23] URBANOWICZ, J.: The uniqueness of the solution of a certain non-linear contact problem for a second-order parabolic equation with one spartial variable. Demonstratio Math. **13** (1980), 755—766.
- [24] WANKA, G.: Randkontakt- und Approximationsprobleme bei linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Diss. A: TH „Carl Schorlemmer“ Merseburg 1980.
- [25] WANKA, J.: Die Sprungrelation des parabolischen Einfachschichtpotentials mit summierbarer Dichte. Wiss. Zeitschrift der TH „Carl Schorlemmer“ Leuna—Merseburg **1** (1979), 31—41.
- [26] WANKA, J.: Lösung von Kontakt- und Steuerproblemen mit potentialtheoretischen Mitteln. Dissertation A: TH „Carl Schorlemmer“ Leuna—Merseburg 1980.

Manuskripteingang: 04. 12. 1981

#### VERFASSER:

Dr. JOHANNA WANKA  
Sektion Mathematik der TH „Carl Schorlemmer“  
DDR-4200 Merseburg, Geusaer Str. 2