Zeitschrift für Analysis
und ihre Anwendungen
Bd. 3 (1) 1984, S. 1–5

Некоторые оценки норм производных голоморфных функций и их применение к задачам с начальными значениями

Г. Ф. Манджавидзе и В. Тучке

Gegenstand der Arbeit ist die Lösung von Anfangswertproblemen in Skalen von Banachräumen verallgemeinerter analytischer Funktionen. Zu diesem Zweck werden a-priori-Abschätzungen holomorpher Funktionen angegeben, die die genannten Anfangswertprobleme in L_p-Räumen zu lösen gestatten.

Предмет настоящей статьи — изучение задачи Коши в шкалах банаховых пространств обобщённых аналитических функций. С этой целью установлены некоторые априорные оценки голоморфных функций, которые позволяют построить решение задачи Коши в пространствах L_p.

The paper deals with the solution of initial value problems in scales of Banach spaces of generalized analytic functions. To this end a priori estimates of holomorphic functions are given, which allow to solve the initial value problems mentioned above in L_p-spaces.

1. Постановка задачи

Применяя метод шкал банаховых пространств (см. [5, 6]), задачу коши в классе обобщённых аналитических функций можно изучить при помощи априорных оценок голоморфных функций (см. [7])[1]. В статье даются доказательства таких априорных оценок, которые являются аналогами известных оценок (см., например, [4]). Эти оценки позволяют построить решение задачи Коши, принадлежащее пространству L_p.

2. Оценка гельдеровской нормы производных голоморфных функций

Пусть G — ограниченная область плоскости z, Φ голоморфна в G и непрерывна по Гёльдеру в $\overline{G}$ с показателем α, $0 < \alpha < 1$. *Гёльдеровская норма* определяется через

$$\|\Phi\|_{\alpha,\overline{G}} = \max \left(\sup_G |\Phi|, \sup_{\substack{z_1, z_2 \in G \\ z_1 \neq z_2}} \frac{|\Phi(z_2) - \Phi(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \right).$$

Пусть, далее, K — компактное подмножество области G, причём dist $(K, \partial G) \geqq \delta$, $0 < \delta < \delta_0$ и δ_0 — фиксированное число. Тогда имеет место следующая

Теорема: *Производная н-ого порядка $\Phi^{(n)}$ допускает априорную оценку*

$$\|\Phi^{(n)}\|_{\alpha,k} \leqq n!(2^{n+1} - 1 + 2^\alpha \delta^{n+1-\alpha}) \frac{1}{\delta^n} \|\Phi\|_{\alpha,\overline{G}}. \qquad (*)$$

[1]) Относительно априорных оценок для более общих эллиптических уравнений см. [2, 3].

Доказательство: Пусть $z \in K$. Тогда круг с центром z и с радиусом δ содержится в $\overline{G}$ и из интегральной формулы Коши вытекает

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z| = \delta} \frac{\Phi(\zeta) - \Phi(z)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta$$

и, следовательно,

$$\sup_K |\Phi^{(n)}| \leqq \frac{n!}{\delta^n} \sup_G |\Phi|, \tag{1}$$

$$\sup_K |\Phi^{(n)}| \leqq \frac{n!}{\delta^{n-\alpha}} \|\Phi\|_{\alpha,\overline{G}}. \tag{2}$$

Аналогично имеем ($|z_2 - z_1| < \delta$)

$$\begin{aligned}&\Phi^{(n)}(z_2) - \Phi^{(n)}(z_1)\\ &= \frac{n!}{2\pi i} (z_2 - z_1) \int\limits_{|\zeta - z| = \delta} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\Phi(\zeta) - \Phi(z_2)}{(\zeta - z_2)^k \, (\zeta - z_1)^{2+n-k}} \, d\zeta + 2n!\Phi(z_2)\,(z_2 - z_1).\end{aligned} \tag{3}$$

Теперь предположим дополнительно, что $|z_2 - z_1| \leqq \frac{1}{2}\,\delta$, так что $|\zeta - z_2| \geqq \frac{1}{2}\,\delta$.

Снова учитывая непрерывность по Гёльдеру функции Φ, модуль первого слагаемого в правой части формулы (3) можно оценить через

$$n!\,|z_2 - z_1| \cdot \|\Phi\|_{\alpha,\overline{G}} \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{2}{\delta}\right)^{k-\alpha} \frac{1}{\delta^{1+n-k}}. \tag{4}$$

С другой стороны из предположения (4) следует $|z_2 - z_1| \leqq |z_2 - z_1|$ и выражение (4) можно, следовательно, оценить через

$$n!(2^{n+1} - 1)\,\frac{1}{\delta^n}\,\|\Phi\|_{\alpha,\overline{G}}\,|z_2 - z_1|^\alpha. \tag{5}$$

Модуль второго слагаемого в правой части равенства (3) оценивается через

$$2^\alpha n!\,\delta_0{}^{1+n-\alpha}\,\frac{1}{\delta^n}\,\|\Phi\|_{\alpha,\overline{G}}\,|z_2 - z_1|^\alpha. \tag{6}$$

Из (5) и (6) видно, что правая часть неравенства (*) не меньше чем

$$\sup_{\substack{z_1, z_2 \in K\\ z_1 \neq z_2}} \frac{|\Phi^{(n)}(z_2) - \Phi^{(n)}(z_1)|}{|z_2 - z_1|^\alpha} \quad \text{при} \quad |z_2 - z_1| \leqq \frac{1}{2}\,\delta.$$

В противном случае с помощью оценки (2) получим

$$|\Phi^{(n)}(z_2) - \Phi^{(n)}(z_1)| \leqq 2n!(2\,|z_2 - z_1|)^\alpha\,\frac{1}{\delta^n}\,\|\Phi\|_{\alpha,\overline{G}}.$$

Таким образом доказано, что постоянная Гёльдера оценивается через правую часть неравенства (*). В силу оценки (1) теорема 1 полностью доказана ∎

3. Оценка L_p — нормы производных голоморфных функций

Лемма: *Если Φ голоморфна в G и K — компактное подмножество области G, то существует постоянная $c(K)$, такая, что*

$$\|\Phi\|_{\mathscr{C}(K)} \leqq c(K)\, \|\Phi\|_{L_p(G)} \qquad (p \geqq 1).$$

Доказательство: В противном случае существовала бы последовательность $\{\Phi_n\}_{n=1,2,\dots}$ голоморфных функций, такая, что

$$\|\Phi_n\|_{\mathscr{C}(K)} = 1, \qquad \|\Phi_n\|_{L_p(G)} \leqq \frac{1}{n}.$$

Но тогда из формулы среднего значения следует $\Phi_n \rightrightarrows 0$ на K. Это противоречит предположению $\|\Phi_n\|_{\mathscr{C}(K)} = 1$. Лемма доказана ∎

Теорема 2. *Пусть Φ голоморфна в G и K — компактное подмножество области G, причём* $\operatorname{dist}(K, \partial K) \geqq \delta > 0$. *Тогда существует постоянная $\tilde{c}(K)$, такая, что*

$$\|\Phi^{(n)}\|_{L_p(K)} \leqq \tilde{c}(K)\, \frac{1}{\delta^n}\, \|\Phi\|_{L_p(G)}.$$

Доказательство: Пусть $K \Subset \tilde{K} \Subset G$, причём $\operatorname{dist}(K, \partial\tilde{K}) \geqq \frac{\delta}{2}$. Тогда из оценки (1) следует

$$\|\Phi^{(n)}\|_{\mathscr{C}(K)} \leqq n! \left(\frac{2}{\delta}\right)^n \|\Phi\|_{\mathscr{C}(\tilde{K})}.$$

Применяя лемму для $\tilde{K}$, получаем

$$\|\Phi\|_{\mathscr{C}(\tilde{K})} \leqq c(\tilde{K})\, \|\Phi\|_{L_p(G)}.$$

С другой стороны из определения норм непосредственно следует

$$\|\Phi^{(n)}\|_{L_p(G)} \leqq \|\Phi^{(n)}\|_{\mathscr{C}(K)}\, (mG)^{1/p}.$$

Таким образом теорема 2 доказана, причём $\tilde{c}(K) = 2^n n!\, (mG)^{1/p}\, c(\tilde{K})$ ∎

4. Решение задачи Коши в классе обобщённых аналитических функций

Пусть

$$L_0 w = C(z, t)\, \frac{\partial w}{\partial z} + A(z, t)\, w + B(z, t)\, w^* \tag{7}$$

(w^* обозначает величину, комплексно сопряжённую w). Ищется решение $w = w(z, t)$ задачи Коши

$$\frac{\partial w}{\partial t} = L_0 w + D(z, t), \qquad w(z, 0) = w_0(z).$$

Теория шкал банаховых пространств (см. [5, 6]) позволяет строить решения методом последовательных приближений, если выполнены некоторые неравенства. В случае операторов L_0 вида (7) основное предположение — следующее:

Существует оператор l_0,

$$l_0 w = c(z)\, \frac{\partial w}{\partial z^*} + a(z)\, w + b(z)\, w^*$$

с коэффициентами, не зависящих от времени, такой, что $l_0(L_0w) = 0$ для всех решений w уравнения $l_0w = 0$ (пара L_0, l_0 называется *ассоциированной*). Тогда задача (8) разрешима, если и начальная функция w_0 и свободный член $D(\cdot, t)$ (для каждого t) удовлетворяют дополнительному условию $l_0w = 0$ (см. [7]).

В статье [7] сходимость приближенных решений доказана относительно гельдеровской нормы, причём теорема 1 применяется для первой производной. Используя понятие псевдоаналитической функции в смысле Л. Берса, обыкновенная равномерная сходимость оказывается (как в случае шкал голоморфных функций) достаточной для конструкции употребляемых шкал (см. [8]). Теорема 2 позволяет конструировать шкалу на основе сходимости в пространствах L_p. Пусть $G_s, 0 < s \leqq 1$, семейство подобластей со свойством $\operatorname{dist}(G_{s'}, \partial G_s) \geqq \operatorname{const}(s - s')$ при $s' < s$. Пусть, далее W_s — пространство всех решений дополнительного уравнения $l_0w = 0$, принадлежащих пространству $L_p(G_s)$, $p > 2$. Пространство W_s снабжается нормой $L_x(G_s)$. Оно оказывается подпространством.

Частные a/c и b/c предполагаются непрерывными, так-что $\partial w/\partial z^*$ тоже принадлежит пространству $L_p(G_s)$, если $w \in L_p(G_s)$. Из представления

$$w = -T_{G_s}\left(\frac{a}{c}\, w + \frac{b}{c}\, w^*\right) + \Phi$$

(Φ голоморфна) следует

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\pi_{G_s}\left(\frac{a}{c}\, w + \frac{b}{c}\, w^*\right) + \Phi'$$

относительно операторов T_G и π_G см. [1]). С одной стороны оператор π_{G_s} отображает $L_p(G_s)$ в себя. С другой стороны Φ' принадлежит в силу теоремы 2 пространству $L_p(G_s)$, если $s' < s$.. Так как w удовлетворяет уравнению $\frac{\partial w}{\partial z^*} = -\left(\frac{a}{c}\, w + \frac{b}{c}\, w^*\right)$, то $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z^*}\right) \in L_p(G_{s'})$. Применяя теорему 1.18 из книги [1], при помощи последнего соотношения получаем существование производной $\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$, причём $\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z^*}\right)$.

Таким образом доказано, что $L_0w \in L_p(G_{s'})$, если коэффициенты оператора L_0 непрерывны. Так как L_0, l_0 образуют ассоциированную пару, функция Lw принадлежит пространству $W_{s'}$. Из теоремы 2 сразу видно, что

$$\|Lw\|_{L_p(G_{s'})} \leqq \frac{\operatorname{const}}{s - s'}\, \|w\|_{L_p(G_s)},$$

если $s' < s$. Таким образом доказана следующая

Теорема 3: *Задача Коши разрешима в шкале $L_p(G_s)$, если начальные значения w_0 и свободный член $D(\cdot, t)$ (для каждого t) принадлежат пространству $L_p(G)$, $p > 2$, и удовлетворяют дополнительному условию $l_0w = 0$ (пара L_0, l_0 предполагается ассоциированной; предполагается, далее, что $A(z, t)$, $B(z, t)$, $C(z, t)$ и частные $a(z)/c(z)$ и $b(z)/c(z)$ непрерывны).*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Векуа, И. Н.: Обобщенные аналитические функции. Москва 1959.
[2] Ладыженская, О. А., и Н. Н. Уральцева: Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. Изд. второе. Москва 1973.
[3] Miranda, C.: Partial Differential Equations of Elliptic Type. Sec. ed. Berlin—Heidelberg—New York 1970.
[4] Мусхелишвили, Н. И.: Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 3-е, Москва 1968.
[5] Овсянников, Л. Н.: Задача Коши в шкале банаховых пространств аналитических функций. Труды симпозиума по механике сплошной среды и подственным проблемам анализа. Тбилиси 1971. Том II (1974), 219—229.
[6] Treves, F.: Basic Linear Differential Equations. New York—San Francisco—London 1975.
[7] Тучке, В.: Задача с начальными значениями для обобщенных аналитических функций, зависящих от времени (Обобщения теорем Коши-Ковалевской и Хольмгрена). ДАН 262, № 5 (1982), 1081—1085.
[8] Tutschke, W., and C. Withalm: The Cauchy—Kovalevska theorem for pseudo-holomorphic functions in the sense of L. Bers. Complex Variables: Theory and Applications Vol. 1 (1983), 389—393.

Manuskripteingang: 19. 12. 1982

VERFASSER:

Проф. д-р Г. Ф. Манджавидзе
Институт прикладной математики им. И. Н. Векуа ТГУ
СССР-380043 Тбилиси, ул. Университетская 2

Prof. Dr. Wolfgang Tutschke
Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität
DDR-4010 Halle, Universitätsplatz 8/9